



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (5^ο μέρος)

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (21)

- Πρόβλημα **οικονομικής κατανομής φορτίου (ΟΚΦ)** στα **ΣΗΕ** λαμβάνοντας υπ' όψη τα λειτουργικά όρια κάθε μονάδας παραγωγής i : $p_i^{min} \leq p_i \leq p_i^{max}$
- Έστω συνολική ζήτηση 900MW και έστω 2 μονάδες παραγωγής με:
 - Συνάρτηση κόστους: 1) $C_1(p_1) = 7 * p_1$ (€/h), και 2) $C_2(p_2) = 9 * p_2$ (€/h)
 - Λειτουργικά όρια: 1) $0MW \leq p_1 \leq 1000MW$, και 2) $0MW \leq p_2 \leq 400MW$



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (22)

- Οι **μεταβλητές απόφασης** του προβλήματος είναι η παραγόμενη ισχύς της κάθε μονάδας, δηλαδή οι p_1, p_2
- Η **αντικειμενική συνάρτηση** του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, δηλαδή $\min f(p_1, p_2) = \min 7 * p_1 + 9 * p_2 (\text{€/h})$
- Ο **ισοτικός περιορισμός** του προβλήματος είναι πως το άθροισμα της παραγόμενης ισχύος όλων των μονάδων παραγωγής είναι ίσο με τη συνολική ζήτηση, δηλαδή $g(p_1, p_2) = 900 - p_1 - p_2 = 0$
- Οι **ανισοτικοί περιορισμοί** του προβλήματος αντιστοιχούν στα λειτουργικά όρια των μονάδων παραγωγής, δηλαδή:
 - Μονάδα 1: $h_1^{\min} = 0 - p_1 \leq 0$ και $h_1^{\max} = p_1 - 1000 \leq 0$
 - Μονάδα 2: $h_2^{\min} = 0 - p_2 \leq 0$ και $h_2^{\max} = p_2 - 400 \leq 0$



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (22)

- Πόσες υποπεριπτώσεις πρέπει να εξετάσουμε?
- Καθώς έχουμε 4 ανισοτικούς περιορισμούς, θα πρέπει να εξετάσουμε $2^4 = 16$ υποπεριπτώσεις (μαζί με την περίπτωση χωρίς ενεργούς ανισοτικούς περιορισμούς)
- Παρουσιάζονται στο διπλανό πίνακα, όπου **E:** **ενεργός**, A: ανενεργός

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
A	A	A	A
E	A	A	A
A	E	A	A
A	A	E	A
A	A	A	E
E	E	A	A
E	A	E	A
E	A	A	E
A	E	E	A
A	E	A	E
A	A	E	E
E	E	E	A
E	E	A	E
E	A	E	E
A	E	E	E
E	E	E	E



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιρροισμούς (24)

- Μεγάλο υπολογιστικό φορτίο... μήπως μπορούμε να το μειώσουμε?
- Μπορούμε... αν λάβουμε υπ' όψη τη “φυσική” του προβλήματος
- Είναι φυσικά αδύνατο μια συγκεκριμένη μονάδα να λειτουργεί ταυτόχρονα στο ελάχιστο και στο μέγιστο λειτουργικό όριό της...
- ...μπορούμε να απορρίψουμε 7 υποπεριπτώσεις !

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
A	A	A	A
E	A	A	A
A	E	A	A
A	A	E	A
A	A	A	E
E	E	A	A
E	A	E	A
E	A	A	E
A	E	E	A
A	E	A	E
A	A	E	E
E	E	E	A
E	E	A	E
E	A	E	E
A	E	E	E
E	E	E	E



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιρροισμούς (25)

- Επίσης, καθώς η συνολική ζήτηση είναι ίση με 900MW, συνδυασμοί που καθορίζουν άμεσα (μπλε χρώμα) ή έμμεσα (κόκκινο χρώμα) τη συνολική παραγωγή σε μια τιμή διαφορετική των 900MW είναι φυσικά αδύνατοι...

- ...μπορούμε να απορρίψουμε άλλες 6 υποπεριπτώσεις !
- Έμειναν μόνο 3 !

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
A	A	A	A
E	A	A	A
A	E	A	A
A	A	E	A
A	A	A	E
E	E	A	A
E	A	E	A
E	A	A	E
A	E	E	A
A	E	A	E
A	A	E	E
E	E	E	A
E	E	A	E
E	A	E	E
A	E	E	E
E	E	E	E



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (26)

- Ξεκινάμε με την **πρώτη υποπερίπτωση** (κανένας ανισοτικός περιορισμός δεν είναι ενεργός, άρα αγνοούμε τους ανισοτικούς περιορισμούς) και λαμβάνουμε υπ' όψη μόνο τους ισοτικούς περιορισμούς...
- ...διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda) = 7 * p_1 + 9 * p_2 + \lambda(900 - p_1 - p_2)$
- 1^η ικανή συνθήκη : $\nabla_p L(p, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda) = 0$, δηλαδή
- $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \rightarrow 7 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 7$
- $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \rightarrow 9 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 9$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 900 - p_1 - p_2 = 0$

ΑΔΥΝΑΤΟ !



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (28)

- Συνεχίζουμε με την **τρίτη** από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 6) υποπεριπτώσεις (ο ανισοτικός περιορισμός h_2^{max} είναι ενεργός)...

• ...διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda, \mu) = 7 * p_1 + 9 * p_2 + \lambda(900 - p_1 - p_2) + \mu_2^{max}(p_2 - 400)$

- 1^η ικανή συνθήκη: $\nabla_p L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu(p, \lambda, \mu) = 0$, δηλαδή:

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \rightarrow 7 - \lambda = 0$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \rightarrow 9 - \lambda + \mu_2^{max} = 0$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 900 - p_1 - p_2 = 0$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \mu_2^{max}} = 0 \rightarrow p_2 - 400 = 0$$

Αυτό το υποσύστημα μας δίνει $\lambda = 7$ και $\mu_2^{max} = -2$

...αυτό το σημείο απορρίπτεται εκ των προτέρων λόγω αρνητικότητας του μ_2^{max}

Αυτό το υποσύστημα μας δίνει $p_2 = 400$ και $p_1 = 500$



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (29)

- Συνεχίζουμε με τη **δεύτερη** από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 6) υποπεριπτώσεις (ο ανισοτικός περιορισμός h_2^{min} είναι ενεργός)...
- ...διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda, \mu) = 7 * p_1 + 9 * p_2 + \lambda(900 - p_1 - p_2) + \mu_2^{min}(0 - p_2)$
- 1^η ικανή συνθήκη: $\nabla_p L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu(p, \lambda, \mu) = 0$, δηλαδή:
 - $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \rightarrow 7 - \lambda = 0$
 - $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \rightarrow 9 - \lambda - \mu_2^{min} = 0$
 - $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 900 - p_1 - p_2 = 0$
 - $\frac{\partial L}{\partial \mu_2^{min}} = 0 \rightarrow 0 - p_2 = 0$

Αυτό το υποσύστημα μας δίνει $\lambda = 7$ και $\mu_2^{min} = 2$

...αυτό το σημείο ικανοποιεί τη συνθήκη θετικότητας του μ_2^{min}

Αυτό το υποσύστημα μας δίνει $p_2 = 0$ και $p_1 = 900$



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (30)

- Συνεχίζουμε με τη δεύτερη από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 7) υποπεριπτώσεις (ο ανισοτικός περιορισμός h_2^{min} είναι ενεργός)...
- ...επίσης όλοι οι ανενεργοί περιορισμοί $h_1^{min}, h_1^{max}, h_2^{max}$ ικανοποιούνται ως αυστηρές ανισότητες...
- 2^η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian συνάρτησης, η οποία είναι $\nabla_x^2 L(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ...όλα τα στοιχεία της Hessian είναι ίσα με 0, άρα θα πρέπει να εξετάσουμε τη βάθμωση υψηλότερης (τρίτης) τάξης...
- ...όμως όλες οι παράγωγοι τρίτης και υψηλότερων τάξεων είναι ίσες με 0...που σημαίνει **πως δεν μπορούμε να αποφανθούμε για ακρότατα σε αυτήν την υποπερίπτωση**



Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (31)

- Συμπέρασμα: **δεν υπάρχει (ή δεν μπορούμε να βρούμε) βέλτιστη λύση για αυτό το πρόβλημα ???**
- **Αντικειμενική συνάρτηση** $\min f(p_1, p_2) = \min 7 * p_1 + 9 * p_2 (\text{€/h})$
- **Ισοτικός περιορισμός** $g(p_1, p_2) = 900 - p_1 - p_2 = 0$
- **Ανισοτικοί περιορισμοί:** $h_1^{\min} = 0 - p_1 \leq 0$ και $h_1^{\max} = p_1 - 1000 \leq 0$, $h_2^{\min} = 0 - p_2 \leq 0$ και $h_2^{\max} = p_2 - 400 \leq 0$
- ...μα η λύση είναι προφανής...η μονάδα 1 είναι η φθηνότερη και έχει την τεχνική δυνατότητα να καλύψει όλη τη ζήτηση: $p_1 = 900$ και $p_2 = 0$...
- ...το παραπάνω περίεργο συμπέρασμα οφείλεται στο γεγονός πως **αυτό το πρόβλημα είναι αυστηρά γραμμικό!**



Ιδιαιτερότητες γραμμικών προβλημάτων (1)

- Όλες οι αναλυτικές μέθοδοι που εξετάσαμε μέχρι σήμερα στις Ενότητες 3 και 4 (αναγκαίες και ικανές συνθήκες σε εσωτερικά και οριακά σημεία για προβλήματα 1 μεταβλητής, μέθοδος απαλοιφής, μέθοδος Lagrange) **περιλαμβάνουν πρώτες και δεύτερες παραγωγίσεις** και την ακόλουθη επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων που περιλαμβάνουν αυτές τις παραγώγους, για να βρούμε τα σημεία ενδιαφέροντος x^* ...

- ...όμως οι μεταβλητές x εμφανίζονται στις παραγώγους μόνο όταν οι παραγωγιζόμενες συναρτήσεις είναι μη-γραμμικές...

- ...αν οι f, g, h είναι όλες γραμμικές, **όλες οι παραπάνω μέθοδοι δεν μπορούν να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση**



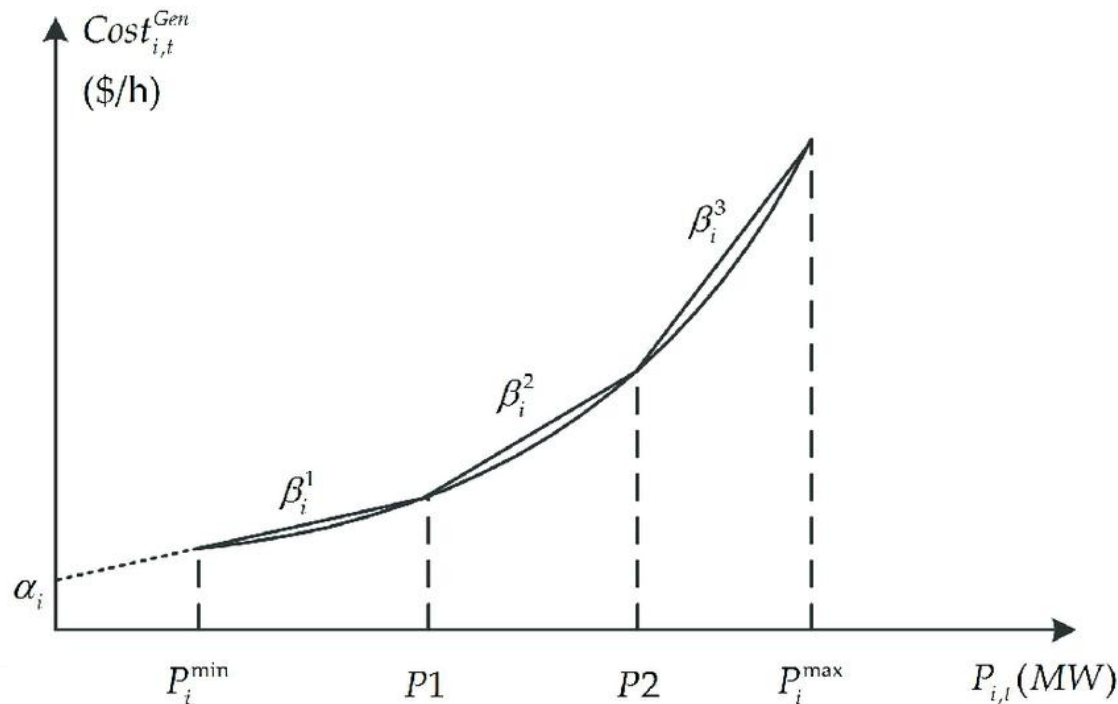
Γραμμικός προγραμματισμός (1)

- Για γραμμικά προβλήματα (δηλαδή ?), χρειαζόμαστε ειδικές μεθόδους επίλυσης...
- **Γραμμικός προγραμματισμός** (ή γραμμική βελτιστοποίηση): ο κλάδος της εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης που ασχολείται με γραμμικά προβλήματα
- ...αλλά πρέπει να σημειωθεί πως τα **γραμμικά προβλήματα είναι απλούστερα και ταχύτερα στην επίλυσή τους (επειδή δεν χρειάζονται παραγωγίσεις)...**



Γραμμικός προγραμματισμός (2)

- ...για αυτό σε πολλές πραγματικές εφαρμογές επιδιώκεται η **προσεγγιστική γραμμικοποίηση** μη-γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης ! (π.χ. μετάβαση από το πρόβλημα ΟΚΦ σε απελευθερωμένες αγορές ηλεκτρισμού)



Γραμμικός προγραμματισμός:

Πρότυπη μορφή (1)

- Η **πρότυπη (ή κανονική) μορφή** ενός γραμμικού προβλήματος διατυπώνεται ως:

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Όπου $c_1, c_2, \dots, c_n$ γνωστές παράμετροι

- Ανισοτικοί περιορισμοί

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

Όπου $a_{i,j}, b_i$
γνωστές
παράμετροι

- Περιορισμοί μη-αρνητικότητας

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$



Γραμμικός προγραμματισμός: Πρότυπη μορφή (2)

- ...ή πιο συνοπτικά:

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\max f(x) = c^T x$$

- Ανισοτικοί περιορισμοί

$$Ax \leq b$$

- Περιορισμοί μη-αρνητικότητας

$$x \geq 0$$

- όπου A πίνακας $m \times n$ γνωστών παραμέτρων, $b \geq 0$ και c διανύσματα $m \times 1$ και $n \times 1$ γνωστών παραμέτρων, και x το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης



Ιδιαιτερότητες γραμμικών προβλημάτων (2)

• Ας θυμηθούμε το απλούστερο παράδειγμα γραμμικού προβλήματος μιας μεταβλητής (δείτε Ενότητα 3): $f(x) = ax + b$, υπό τους περιορισμούς $A \leq x \leq B$ (ή ισοδύναμα $g_1(x) = A - x \leq 0$ και $g_2(x) = x - B \leq 0$), όπου $a, b, A, B \neq 0$ παράμετροι

- **Εσωτερικά σημεία:** $f'(x) = a \neq 0, \forall x \dots$ δεν υπάρχουν τοπικά ελάχιστα (ή μέγιστα)
- **Οριακά σημεία:** $f'(A) = f'(B) = a, g'_1(A) = -1, g'_2(B) = 1 \dots$ αν $a > 0$, τότε το A είναι ελάχιστο και το B είναι μέγιστο, ενώ αν $a < 0$, τότε το A είναι μέγιστο και το B είναι ελάχιστο

Η απλή αρχή του γραμμικού προγραμματισμού !!!

• ...με άλλα λόγια, η βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προβλήματος βρίσκεται σε κάποιο οριακό σημείο...

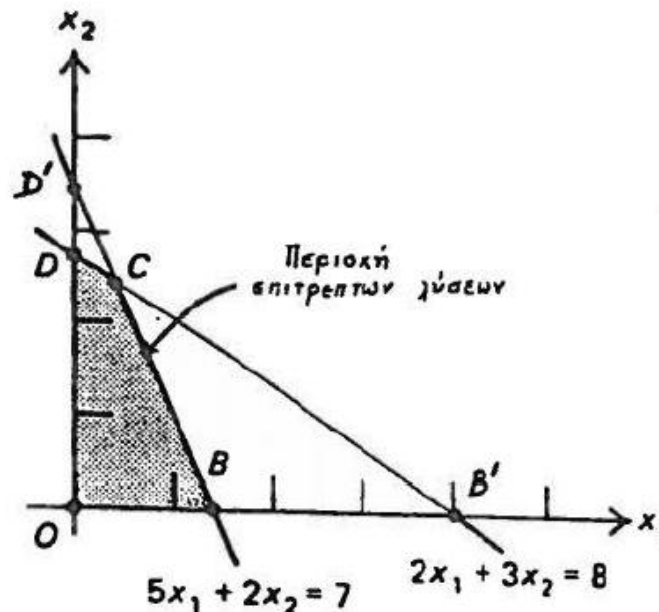
Γεωμετρική επίλυση γραμμικών προβλημάτων

- Βιβλίο: Η βέλτιστη λύση μπορεί να βρεθεί **γεωμετρικά** με “παράλληλη μετακίνηση του υπερεπιπέδου που ορίζει η f έως ότου λάβει τη μέγιστη τιμή του και ταυτόχρονα διατηρείται ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον χώρο μέσα στον οποίο οφείλουν να βρίσκονται οι επιτρεπτές λύσεις (χώρος που ορίζουν οι ανισοτικοί περιορισμοί και οι περιορισμοί μη-αρνητικότητας)”...
- ...καλύτερα να το δούμε μέσω ενός παραδείγματος...



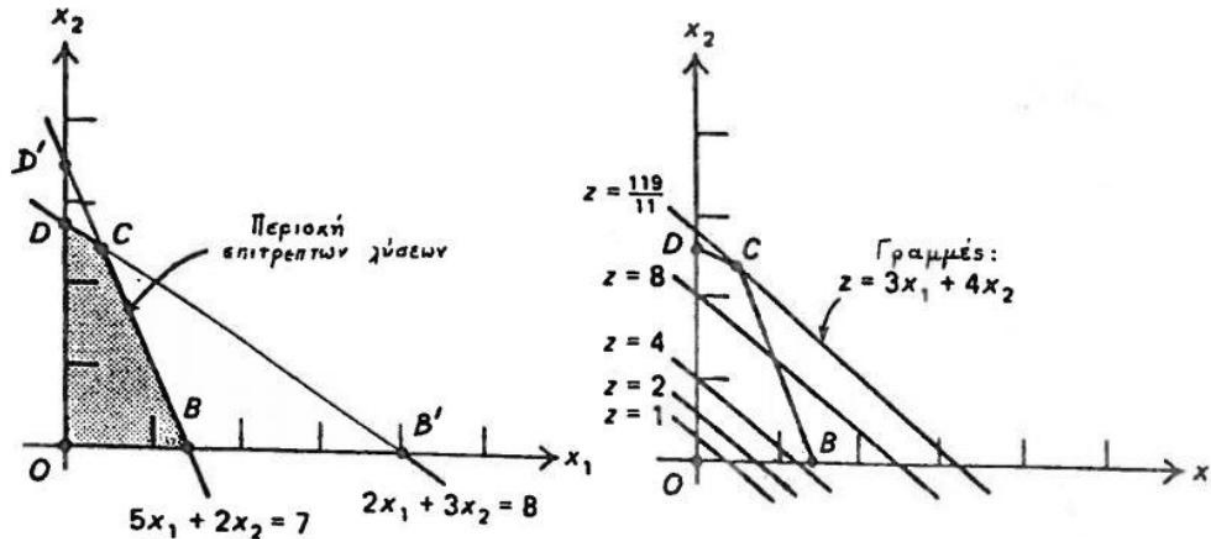
Παράδειγμα γεωμετρικής επίλυσης (1)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- Η βέλτιστη λύση (x_1^*, x_2^*) πρέπει να βρίσκεται μέσα στη γραμμοσκιασμένη περιοχή που ορίζεται από τους 2 ανισοτικούς περιορισμούς και τους 2 περιορισμούς μη-αρνητικότητας



Παράδειγμα γεωμετρικής επίλυσης (2)

- Σχεδιάζουμε διαφορετικές παράλληλες γραμμές της μορφής $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 = z$ για διάφορες τιμές του z ...



- ...προκύπτει πως η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της ενώ διατηρεί (οριακά) ένα κοινό σημείο με την περιοχή επιτρεπτών λύσεων, στην κορυφή $C = (\frac{5}{11}, \frac{26}{11})$, όπου η f παίρνει μέγιστη τιμή $z^* = \frac{119}{11}$



Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (1)

- Είναι προφανές πως είναι πολύ δύσκολο να επεκτείνουμε την παραπάνω γεωμετρική μέθοδο επίλυσης σε προβλήματα που περιέχουν περισσότερες από 2 μεταβλητές (για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα τριών μεταβλητών, η περιοχή επιτρεπτών λύσεων ορίζεται σε χώρο τριών διαστάσεων και περιορίζεται από επίπεδα)...

- ...χρειαζόμαστε **αναλυτικές μεθόδους επίλυσης...**

...δεν έχει αλλάξει σημαντικά από το 1947 !!!

- ...η πιο διαδεδομένη είναι ο μαθηματικός αλγόριθμος **Simplex (Dantzig, 1947)**, ο οποίος αναζητά λύσεις διαδοχικά στις κορυφές της περιοχής επιτρεπτών λύσεων, και ολοκληρώνεται πάντα μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων (εγγυημένη σύγκλιση στη βέλτιστη λύση)

Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (2)

- **Βήμα 1:** Εισάγουμε στο πρόβλημα m (όσες το πλήθος ανισοτικών περιορισμών) **βοηθητικές (slack) μεταβλητές** $\underline{x}$ (οι οποίες εκφράζουν την απόσταση ενός εξεταζόμενου σημείου από τον αντίστοιχο περιορισμό):

$$\max f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0\underline{x}_{n+1} + 0\underline{x}_{n+2} + \dots + 0\underline{x}_{n+m}$$

Ή εναλλακτικά
$$\max f(x) = [c^T \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \underline{x} \end{bmatrix}$$

- ...ΥΠΟ ΤΟΥΣ **ισοτικούς (λόγω της ένταξης των slack μεταβλητών)** περιορισμούς:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1\underline{x}_{n+1} + 0\underline{x}_{n+2} + \dots + 0\underline{x}_{n+m} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 0\underline{x}_{n+1} + 1\underline{x}_{n+2} + \dots + 0\underline{x}_{n+m} = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0\underline{x}_{n+1} + 0\underline{x}_{n+2} + \dots + 1\underline{x}_{n+m} = b_m$$

Ή εναλλακτικά
$$[A \quad I_m] \begin{bmatrix} x \\ \underline{x} \end{bmatrix} = b$$

Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (3)

- **Βήμα 2:** Επιλέγουμε τη μεταβλητή που έχει το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην f ($x_i: \max c_i, i = 1, 2, \dots, n$) και τη θεωρούμε διάφορη του 0 (διατηρώντας τις υπόλοιπες στην τιμή 0) > *η λογική αυτού είναι πως αναμένουμε η λύση να βρίσκεται σε περιοχές μεγάλων κλίσεων...*
- ...από το παραπάνω σύστημα ισοτικών συνθηκών, θεωρώντας προς στιγμή τις βοηθητικές μεταβλητές ίσες με 0, βρίσκουμε τη μικρότερη δυνατή τιμή για αυτή τη μεταβλητή που θεωρήσαμε διάφορη του 0 > *η λογική αυτού είναι να μη “χάσουμε” κάποια κορυφή...*
- ...τότε, κατ' ανάγκη, μια (ακριβώς μία) από τις βοηθητικές μεταβλητές γίνεται 0.



Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (4)

- **Βήμα 3:** Μετασχηματίζουμε το διάνυσμα των βοηθητικών μεταβλητών, ορίζοντας σαν νέες βοηθητικές μεταβλητές αυτές που προέκυψαν διάφορες του 0 στο Βήμα 2...
- ...και μετασχηματίζουμε αντίστοιχα τους ισοτικούς περιορισμούς, έτσι ώστε σε καθέναν από αυτούς να εμφανίζεται μόνο μία από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές (με συντελεστή +1) > *η λογική αυτού είναι να εντοπίσουμε την “επόμενη” κορυφή.*
- **Βήμα 4:** Εκφράζουμε την αντικειμενική συνάρτηση f ως συνάρτηση των νέων μη βοηθητικών μεταβλητών, όπως αυτές προέκυψαν στο Βήμα 3.



Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (5)

- **Βήμα 5:** Ελέγχουμε το πρόσημο των νέων συντελεστών της f ...
- Αν είναι όλοι αρνητικοί ή 0 σταματάμε, και η λύση δίνεται θέτοντας τις τελευταίες μη-βοηθητικές μεταβλητές ίσες με 0 στην τελευταία μορφή των ισοτικών περιορισμών > *η λογική αυτού είναι πως η τιμή της f δεν μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω*
- Αν όχι, επιστρέφουμε στο Βήμα 2 και επαναλαμβάνουμε τα Βήματα 2-5, μέχρι όλοι οι συντελεστές της f να είναι αρνητικοί ή 0



Παράδειγμα μεθόδου Simplex (1)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 1:** Εισάγουμε 2 βοηθητικές μεταβλητές (όσες το πλήθος των ανισοτικών περιορισμών), μετασχηματίζοντας το πρόβλημα σε:

$$\max 3x_1 + 4x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4 \quad (1.1)$$

- ...υπό τους ισοτικούς (λόγω της ένταξης των slack μεταβλητών) περιορισμούς:

$$5x_1 + 2x_2 + \underline{x}_3 = 7 \quad (1.2)$$

$$2x_1 + 3x_2 + \underline{x}_4 = 8 \quad (1.3)$$



Παράδειγμα μεθόδου Simplex (2)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- **Βήμα 2:** Η αρχική μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην f είναι η x_2 , οπότε θεωρούμε $x_2 \neq 0$ ενώ διατηρούμε $x_1 = 0 \dots$
- ...θεωρώντας επιπλέον $\underline{x}_3 = \underline{x}_4 = 0$, από τις εξισώσεις (1.2: $5x_1 + 2x_2 + \underline{x}_3 = 7$) και (1.3: $2x_1 + 3x_2 + \underline{x}_4 = 8$) παίρνουμε $x_2 = \frac{7}{2}$ ή $x_2 = \frac{8}{3}$ από τις οποίες επιλέγουμε τη μικρότερη $x_2 = \frac{8}{3}$, που αντιστοιχεί στην (1.3)...
- ...αυτή η εξίσωση, για $(x_1, x_2) = (0, \frac{8}{3})$, μας δίνει $\underline{x}_4 = 0$



Παράδειγμα μεθόδου Simplex

(3)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 3:** Ορίζουμε σαν νέες βοηθητικές μεταβλητές αυτές που προέκυψαν διάφορες του 0 στο Βήμα 2, δηλαδή τις $\underline{x}_2$ και $\underline{x}_3$. Μετασχηματίζουμε αντίστοιχα τους ισοτικούς περιορισμούς (1.2) και (1.3):

$$5x_1 + 2x_2 + \underline{x}_3 = 7 \quad (1.2)$$

$$2x_1 + 3x_2 + \underline{x}_4 = 8 \quad (1.3)$$

- ...ξεκινάμε από τον (1.3) επειδή περιέχει μόνο μία από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές (τη $\underline{x}_2$) ... για να περιέχει αυτή τη $\underline{x}_2$ με συντελεστή +1, διαιρούμε και τα δύο μέρη με 3:


$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3} \quad (1.4)$$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (4)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 3 (συνέχεια):** ...συνεχίζουμε με τον (1.2: $5x_1 + 2x_2 + \underline{x}_3 = 7$) που περιέχει και τις δύο νέες βοηθητικές μεταβλητές, αλλά μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το νέο ισοτικό περιορισμό (1.4: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3}$), λύνοντάς τον ως προς

$$\underline{x}_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4$$

- ...και αντικαθιστώντας στον (1.2) παίρνουμε: $5x_1 + 2\left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4\right) + \underline{x}_3 = 7 \rightarrow \frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + \underline{x}_3 = \frac{5}{3}$ (1.5)



Παράδειγμα μεθόδου Simplex (5)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- **Βήμα 4:** Εκφράζουμε την f ως συνάρτηση των νέων μη βοηθητικών μεταβλητών, δηλαδή των x_1 και x_4
- ...λύνοντας και πάλι το νέο ισοτικό περιορισμό (1.4: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x_2} = \frac{8}{3}$) ως προς $\underline{x_2} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4$
- ...και αντικαθιστώντας στην αρχική αντικειμενική συνάρτηση παίρνουμε $f = 3x_1 + 4\left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4\right) \rightarrow f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3} + 0\underline{x_2} + 0\underline{x_3}$ (1.6)



Παράδειγμα μεθόδου Simplex (6)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- **Βήμα 5:** Ελέγχουμε το πρόσημο των νέων συντελεστών της $f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3}\dots$
- ...ο ένας είναι ακόμα θετικός ($\frac{1}{3}$ για τη x_1), άρα επιστρέφουμε στο Βήμα 2.



Παράδειγμα μεθόδου Simplex (7)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 2:** Η μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην $f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3}$ είναι η x_1 , οπότε θεωρούμε $x_1 \neq 0$ ενώ διατηρούμε $x_4 = 0 \dots$

- ...θεωρώντας επιπλέον $\underline{x}_2 = \underline{x}_3 = 0$, από τις εξισώσεις (1.4: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3}$) και (1.5: $\frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + \underline{x}_3 = \frac{5}{3}$) παίρνουμε $x_1 = 4$ ή $x_1 = \frac{5}{11}$ από τις οποίες επιλέγουμε τη μικρότερη $x_1 = \frac{5}{11}$, που αντιστοιχεί στην (1.5)...

- ...αυτή η εξίσωση, για $(x_1, x_4) = (\frac{5}{11}, 0)$, μας δίνει $\underline{x}_3 = 0$



Παράδειγμα μεθόδου Simplex

(8)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 3:** Ορίζουμε σαν νέες βοηθητικές μεταβλητές αυτές που προέκυψαν διάφορες του 0 στο Βήμα 2, δηλαδή τις $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_2$. Μετασχηματίζουμε αντίστοιχα τους ισοτικούς περιορισμούς (1.4) και (1.5):

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3} \quad (1.4)$$

$$\frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + \underline{x}_3 = \frac{5}{3} \quad (1.5)$$

- ...ξεκινάμε από τον (1.5) επειδή περιέχει μόνο μία από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές (τη $\underline{x}_1$) ... για να περιέχει αυτή τη $\underline{x}_1$ με συντελεστή +1, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη


$$\text{με } 3/11: -\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + \underline{x}_1 = \frac{5}{11} \quad (1.7)$$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex

(9)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- **Βήμα 3 (συνέχεια):** ...συνεχίζουμε με τον (1.4: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x_2} = \frac{8}{3}$) που περιέχει και τις δύο νέες βοηθητικές μεταβλητές, αλλά μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το νέο ισοτικό περιορισμό (1.7: $-\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + \underline{x_1} = \frac{5}{11}$), λύνοντάς τον ως προς $\underline{x_1} = \frac{5}{11} + \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_3$
- ...και αντικαθιστώντας στον (1.4) παίρνουμε: $\frac{2}{3}\left(\frac{5}{11} + \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_3\right) + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x_2} = \frac{8}{3}$



Παράδειγμα μεθόδου Simplex (10)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 4:** Εκφράζουμε την $f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3}$ ως συνάρτηση των νέων μη βοηθητικών μεταβλητών, δηλαδή των x_4 και x_3 ,

- ...λύνοντας και πάλι το νέο ισοτικό περιορισμό (1.7: $-\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + \underline{x_1} = \frac{5}{11}$) ως προς $\underline{x_1} = \frac{5}{11} + \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_3$

- ...και αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση (1.6) παίρνουμε $f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3} \rightarrow f = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{11} + \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_3\right) - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3} \rightarrow f = -\frac{42}{33}x_4 - \frac{3}{33}x_3 + \frac{357}{33} + 0\underline{x_1} + 0\underline{x_2}$



Παράδειγμα μεθόδου Simplex

(11)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 5:** Ελέγχουμε το πρόσημο των νέων συντελεστών της

$$f = -\frac{42}{33}x_4 - \frac{3}{33}x_3 + \boxed{\frac{357}{33}} \dots \text{σημασία ???}$$

- ...όλοι είναι αρνητικοί, άρα έχουμε συγκλίνει !

- ...και η λύση δίνεται θέτοντας τις τελευταίες μη-βοηθητικές μεταβλητές x_3 και x_4 ίσες με 0 στους τελευταίους περιορισμούς:

$$-\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + \underline{x_1} = \frac{5}{11}$$

(1.7) ΕΤΥΧΕ οι τελευταίες μη-βοηθητικές να είναι οι αρχικές

$$\frac{15}{33}x_4 - \frac{2}{11}x_3 + \underline{x_2} = \frac{26}{11}$$

(1.8) βοηθητικές (ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ)

- Επομένως η βέλτιστη λύση είναι η $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{5}{11}, \frac{26}{11}) \dots$

- ...επίσης λαμβάνουμε $\underline{x_3} = 0$ και $\underline{x_4} = 0 \dots$ σημασία ???



Παράδειγμα μεθόδου Simplex (12)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
- **Βήμα 1:** Εισάγουμε 2 βοηθητικές μεταβλητές (όσες το πλήθος των ανισοτικών περιορισμών), μετασχηματίζοντας το πρόβλημα σε:
$$\max 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5 \quad (2.1)$$
- ...υπό τους ισοτικούς (λόγω της ένταξης των slack μεταβλητών) περιορισμούς:
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \underline{x}_4 = 10 \quad (2.2)$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 + \underline{x}_5 = 8 \quad (2.3)$$



Τέλος Ενότητας