Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 5: Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων

- **Ενότητα 1: Εισαγωγή στο μάθημα**

- **Ενότητα 2: Απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις**

- **Ενότητα 3: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής**

- **Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών**

➢ Μη-γραμμικά προβλήματα (χωρίς περιορισμούς / με ισοτικούς / με ανισοτικούς / με ισοτικούς και ανισοτικούς >>> μέθοδος Lagrange και συνθήκες ΚΚΤ)

➢ Γραμμικά προβλήματα (γεωμετρική επίλυση, αναλυτική επίλυση με μέθοδο Simplex)

Σύνδεση προηγούμενων με τη σημερινή διάλεξη

- Οι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- **Αναλυτικές μέθοδοι (analytical methods)**: η βέλτιστη λύση βρίσκεται με ακρίβεια και μπορεί να εκφραστεί σε "κλειστή μορφή (closed form)", διατυπώνοντας τις *αναγκαίες και ικανές συνθήκες* για την εύρεσή της > συνήθως για προβλήματα μικρότερης πολυπλοκότητας

Με αυτές ασχοληθήκαμε στις Ενότητες 3 (1 μεταβλητής) και 4 (πολλών μεταβλητών)

- **Αριθμητικές μέθοδοι (numerical methods)**: η βέλτιστη λύση βρίσκεται με κάποια προσέγγιση, συνήθως μέσω κάποιου *επαναληπτικού αλγορίθμου* > συνήθως για προβλήματα μεγαλύτερης πολυπλοκότητας (και όχι μόνο…*)

Με αυτές θα ασχοληθούμε σήμερα (1 μεταβλητής) και στην Ενότητα 6 (πολλών μεταβλητών)

Κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων

• Οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

➢ **Μέθοδοι απευθείας έρευνας**: επαναληπτική αναζήτηση βέλτιστης λύσης με βάση ΜΟΝΟ την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών

Εφαρμόσιμες κυρίως σε προβλήματα 1 μεταβλητής (σήμερα)…αλλά δυσκολία για προβλήματα πολλών μεταβλητών

➢ **Μέθοδοι βάθμωσης (ή μέθοδοι χρήσης παραγώγων)**: επαναληπτική αναζήτηση βέλτιστης λύσης με βάση ΚΑΙ την τιμή παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών

Εφαρμόσιμες σε προβλήματα 1 μεταβλητής και πολλών μεταβλητών…αλλά ανάγκη υπολογισμού παραγώγων

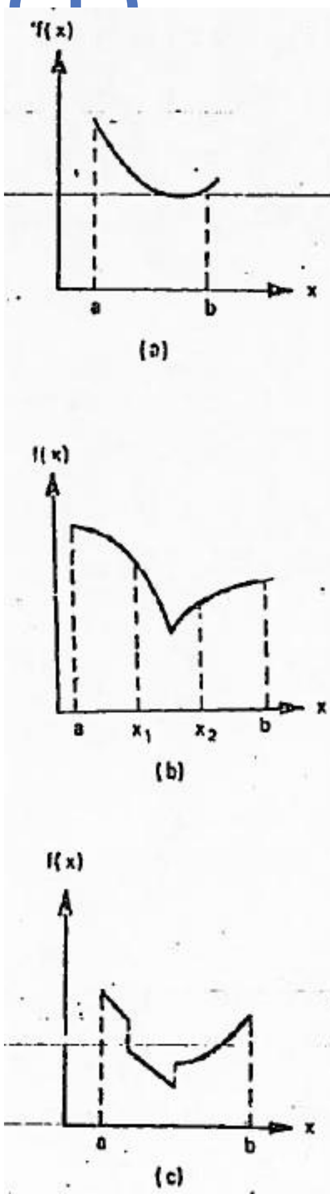
Μέθοδοι απευθείας έρευνας για προβλήματα 1 μεταβλητής (1)

• Στα προβλήματα 1 μεταβλητής, οι μέθοδοι απευθείας έρευνας ακολουθούν τη λογική της **απαλοιφής διαστημάτων**….

• Οι μέθοδοι αυτές εξετάζουν ένα διάστημα της μεταβλητής στο οποίο **υποτίθεται** πως η αντικειμενική συνάρτηση έχει **ένα μόνο τοπικό ακρότατο** (ελάχιστο ή μέγιστο):

•…δηλαδή ένα διάστημα στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση **υποτίθεται** πως είναι **μονοτροπική**…

•…ανεξάρτητα του αν παρουσιάζει ασυνέχεια βάθμωσης (περίπτωση b σχήματος) ή ασυνέχεια καμπύλης (περίπτωση c σχήματος) σε κάποια σημεία του διαστήματος



Μέθοδοι απευθείας έρευνας για προβλήματα 1 μεταβλητής (2)

• Στη συνέχεια **περιορίζουν επαναληπτικά αυτό το διάστημα**, διασφαλίζοντας όμως πως το νέο διάστημα εξακολουθεί να περιέχει το τοπικό ακρότατο…

•…μέχρι να προσεγγιστεί το τοπικό ακρότατο **με μια επιθυμητή ακρίβεια**…

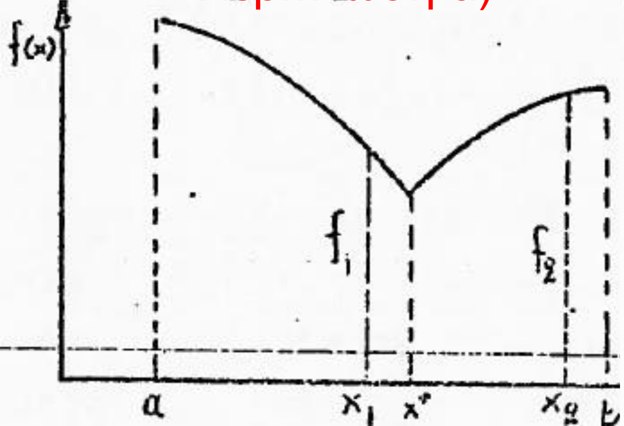
• Έστω για παράδειγμα πως αναζητούμε το **ελάχιστο** μιας συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$ (στο οποίο η συνάρτηση υποτίθεται μονοτροπική)…

•…αν πάρουμε δύο ενδιάμεσα σημεία της συνάρτησης $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 < x_2$, και υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης σε καθένα από τα δύο αυτά σημεία, τότε μπορεί να προκύψουν 3 περιπτώσεις…

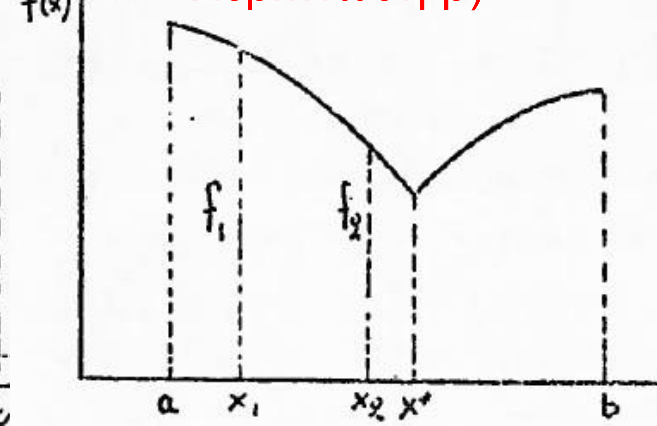
Μέθοδοι απευθείας έρευνας για προβλήματα 1 μεταβλητής (3)

- **Περίπτωση α)** $f(x_1) < f(x_2)$, τότε το ελάχιστο δεν μπορεί να βρίσκεται δεξιά του x_2, επομένως το νέο διάστημα αναζήτησης περιορίζεται στο $[a, x_2]$
- **Περίπτωση β)** $f(x_1) > f(x_2)$, τότε το ελάχιστο δεν μπορεί να βρίσκεται αριστερά του x_1, επομένως το νέο διάστημα αναζήτησης περιορίζεται στο $[x_1, b]$
- **Περίπτωση γ)** (*ειδική / σπάνια περίπτωση*) $f(x_1) = f(x_2)$, τότε το νέο διάστημα αναζήτησης περιορίζεται στο $[x_1, x_2]$

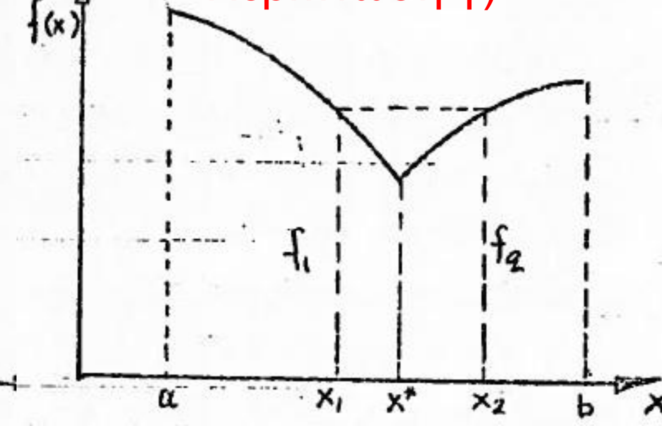
Περίπτωση α)



Περίπτωση β)



Περίπτωση γ)



Μέθοδοι απευθείας έρευνας για προβλήματα 1 μεταβλητής (4)

• Η παραπάνω γενική διαδικασία απαλοιφής διαστημάτων εξειδικεύεται ανάλογα με τη μέθοδο βάσει της οποίας επιλέγουμε τα εσωτερικά σημεία…

•…θα εξετάσουμε λεπτομερώς 3 μεθόδους απαλοιφής:

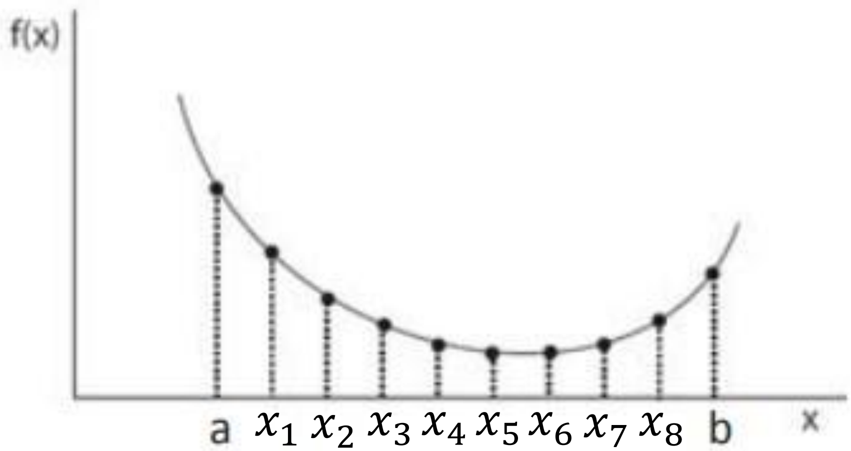
- **Μέθοδος ίσων διαστημάτων ή πλήρους απαρίθμησης**
- **Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων**
- **Μέθοδος διχοτόμου**

•…και θα συζητήσουμε σύντομα 2 (πιο πολύπλοκες) μεθόδους απαλοιφής:

- **Μέθοδος χρυσής τομής**
- **Μέθοδος Fibonacci**

Μέθοδος ίσων διαστημάτων (1)

- Διαιρώ το αρχικό διάστημα $[a, b]$ μήκους $L = b - a$, σε $N + 1$ ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{N+1}$
- …επομένως προκύπτουν N ενδιάμεσα (μεταξύ a και b) σημεία $x_i = a + \frac{i(b-a)}{N+1}$, όπου $i = 1,2, \ldots, N$
- Παράδειγμα: διαιρώ το αρχικό διάστημα σε $N + 1 = 9$ ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{9}$ οπότε προκύπτουν $N = 8$ ενδιάμεσα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_8$

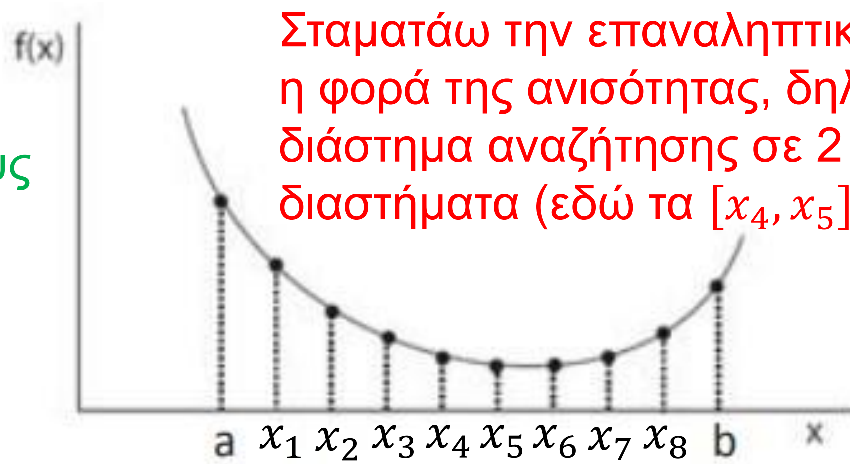


Μέθοδος ίσων διαστημάτων (2)

• Ακολουθώντας τη γενική διαδικασία απαλοιφής διαστημάτων (διαφάνεια 7), περιορίζω βηματικά το νέο διάστημα αναζήτησης

- Αφού $f(a) > f(x_1)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[a, b]$
- Αφού $f(x_1) > f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, b]$
- …
- Αφού $f(x_4) > f(x_5)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_4, b]$
- Αφού $f(x_5) < f(x_6)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_4, x_6]$

Ονομάζεται και μέθοδος πλήρους απαρίθμησης (exhaustive search)…γιατί?



Σταματάω την επαναληπτική διαδικασία όταν αλλάξει η φορά της ανισότητας, δηλαδή όταν περιοριστεί το διάστημα αναζήτησης σε 2 συνεχόμενα υπο-διαστήματα (εδώ τα $[x_4, x_5]$ και $[x_4, x_6]$)

Μέθοδος ίσων διαστημάτων (3)

• Με ποια ακρίβεια έχει προσεγγιστεί το τοπικό ελάχιστο ?

•… η **σχετική ακρίβεια ε (%)** ορίζεται ως το μήκος του τελικού προς το μήκος του αρχικού διαστήματος…

•…και αφού το τελικό διάστημα έχει μήκος 2 υπο-διαστημάτων, προκύπτει $\varepsilon = \frac{\frac{2(b-a)}{N+1}}{(b-a)} = \frac{2}{N+1}$

Δεν εξαρτάται από το μήκος του αρχικού διαστήματος ή τη συνάρτηση

• Με άλλα λόγια, αν σε ένα πρόβλημα επιθυμώ προσέγγιση της βέλτιστης λύσης με μια ακρίβεια (ίση ή μικρότερη από) ε^*

•…θα πρέπει $\frac{2}{N+1} \leq \varepsilon^* \rightarrow 2 \leq N\varepsilon^* + \varepsilon^*$

•…δηλαδή να ορίσω πλήθος ενδιάμεσων σημείων N (ίσο ή μεγαλύτερο από) $\frac{2}{\varepsilon^*} - 1$

Όσο καλύτερη (μικρότερη) ακρίβεια ε^* επιθυμώ, τόσο περισσότερα ενδιάμεσα σημεία N πρέπει να εξετάσω…άρα τόσο περισσότερους υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης πρέπει να κάνω (γενικά $N+2$, ενδιάμεσα συν οριακά σημεία)

Παράδειγμα μεθόδου ίσων διαστημάτων (1)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x-100)^2$ στο αρχικό διάστημα $[a,b] = [90,110]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$
  - ➢ Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το πλήθος ενδιάμεσων σημείων ως $N = \frac{2}{\varepsilon^*} - 1 = 10 - 1 = 9$
  - ➢ Άρα διαιρώ το αρχικό διάστημα σε $N+1 = 10$ ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{N+1} = \frac{20}{10} = 2$
  - ➢ …και τα ενδιάμεσα σημεία είναι τα $x_i = a + \frac{i(b-a)}{N+1}$, όπου $i = 1,2,..,N$, δηλαδή $x_1 = 92, x_2 = 94, .., x_9 = 108$

Παράδειγμα μεθόδου ίσων διαστημάτων (2)

- Συνάρτηση $f(x) = (x - 100)^2$ στο αρχικό διάστημα $[a, b] = [90{,}110]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon = 20\%$

➢ Περιορίζω βηματικά το νέο διάστημα αναζήτησης

Βήμα	**0**		**1**		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**
x	90		92		94		96		98		100		102
$f(x)$	100	>	64	>	36	>	16	>	4	>	0	<	4

Άλλαξε η φορά…σταματάω

➢ Συμπέρασμα: το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο διάστημα $[98, 102]$, με ακρίβεια 20%

Χρειάζομαι γενικά $N + 2 = 11$ υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης για ακρίβεια 20% (άσχετα αν έτυχε στο παραπάνω παράδειγμα να χρειάστηκα μόνο 7)

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΥ: Γενικά απαιτεί μεγάλο αριθμό υπολογισμών (σε πρακτικές εφαρμογές η επιθυμητή ακρίβεια είναι μικρότερη του 1%…)

Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (1)

- ΙΔΕΑ (για να αντιμετωπίσω το μειονέκτημα της μεθόδου ίσων διαστημάτων): χρειάζομαι μόνο 2 ενδιάμεσα σημεία (και όχι N) για να απαλοίψω κάποιο υπο-διάστημα (διαφάνεια 7)
- …άρα διαιρώ το αρχικό διάστημα $[a,b]$ μήκους $L=b-a$, σε 3 ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{3}$
- …επομένως τα 2 ενδιάμεσα σημεία είναι $x_1=a+\frac{(b-a)}{3}$, και $x_2=a+\frac{2(b-a)}{3}$

Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (2)

- Ακολουθώντας τη γενική διαδικασία απαλοιφής (διαφάνεια 7), περιορίζω επαναληπτικά το νέο διάστημα αναζήτησης, απαλοίφοντας (γενικά) το 1/3 του αρχικού διαστήματος:
  - Αν $f(x_1) < f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[a, x_2]$, μήκους $x_2 - a = a + \frac{2(b-a)}{3} - a = \frac{2(b-a)}{3}$
  - Αν $f(x_1) > f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, b]$, μήκους $b - x_1 = b - a - \frac{(b-a)}{3} = \frac{2(b-a)}{3}$
  - Αν $f(x_1) = f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, x_2]$, μήκους $x_2 - x_1 = a + \frac{2(b-a)}{3} - a - \frac{(b-a)}{3} = \frac{(b-a)}{3}$ (ειδική περίπτωση, απαλοίφω τα 2/3 του αρχικού διαστήματος)

Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (3)

- Στην *επόμενη επανάληψη*, ακολουθώ την ίδια λογική, διαιρώντας τώρα το νέο διάστημα αναζήτησης (στο οποίο κατέληξα στη προηγούμενη επανάληψη) μήκους (γενικά) $\frac{2(b-a)}{3}$, σε 3 ίσα υπο-διαστήματα μήκους (γενικά) $\frac{1}{3}\,\frac{2(b-a)}{3}$
- …αφού απαλοίψω (γενικά) το 1/3 του διαστήματος, καταλήγω σε νέο διάστημα αναζήτησης μήκους (γενικά) $\frac{2}{3}\frac{2(b-a)}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (b-a)$
- …κ.ο.κ.

Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (4)

- Η επαναληπτική διαδικασία εξελίσσεται (γενικά) ως εξής ($k = 0$ υποδεικνύει τα δεδομένα):

Επανάληψη	Μήκος κάθε υπο-διαστήματος	Μήκος διαστήματος αναζήτησης
0		$b-a$
1	$\frac{1}{3}(b-a)$	$\frac{2}{3}(b-a)$
2	$\frac{1}{3}\frac{2}{3}(b-a)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2(b-a)$
3	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2(b-a)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3(b-a)$
…		
k	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{(k-1)}(b-a)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^k(b-a)$

Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (5)

• Με ποια ακρίβεια έχει προσεγγιστεί το τοπικό ελάχιστο μετά από k επαναλήψεις ?

•…σύμφωνα με τον ορισμό της διαφάνειας 11, και τον πίνακα της προηγούμενης διαφάνειας…

•…προκύπτει σχετική ακρίβεια $\varepsilon = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k}(b-a)}{(b-a)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k}$

• Με άλλα λόγια, αν σε ένα πρόβλημα επιθυμώ προσέγγιση της βέλτιστης λύσης με μια ακρίβεια (ίση ή μικρότερη από) ε^*

•…θα πρέπει $\left(\frac{2}{3}\right)^{k} \leq \varepsilon^* \rightarrow k * \ln(\frac{2}{3}) \geq \ln(\varepsilon^*)$

•…δηλαδή να κάνω πλήθος επαναλήψεων k (ίσο ή μεγαλύτερο από) $\frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln(\frac{2}{3})}$

Όσο καλύτερη (μικρότερη) ακρίβεια ε^* επιθυμώ, τόσο περισσότερες επαναλήψεις k πρέπει να κάνω…άρα τόσο περισσότερους υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης πρέπει να κάνω ($2k$, 2 ενδιάμεσα σημεία σε κάθε επανάληψη)

Παράδειγμα μεθόδου ακολουθιακά ίσων διαστημάτων

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x-100)^2$ στο αρχικό διάστημα $[a,b] = [89{,}107]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$
  - ➢ Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k \geq \frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 3.974 \rightarrow k = 4$

Επανάληψη	1	2	3	4
Μήκος υ-δ	6	4	2.667	1.778
$x_{1,k}$	95	99	97.667	99.445
$x_{2,k}$	101	103	100.334	101.223
$f(x_{1,k})$	25	1	5.443	0.308
$f(x_{2,k})$	1	9	0.112	1.496
$[a_k, b_k]$	[95,107]	[95,103]	[97.667,103]	[97.667,101.223]

Σταματάω μετά το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων…αλλά ας κάνω επαλήθευση ακρίβειας $\varepsilon = \frac{101.223-97.667}{107-89} = \frac{3.556}{18} = 0.198$, όντως $\varepsilon \leq \varepsilon^*$

Παράδειγμα μεθόδου ακολουθιακά ίσων διαστημάτων

• Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο αρχικό διάστημα $[a, b] = [89,107]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$

➢ Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k \geq \frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 3.974 \rightarrow k = 4$

Επανάληψη	1	2	3	4
Μήκος υ-δ	6	4	2.667	1.778
$x_{1,k}$	95	99	97.667	99.445
$x_{2,k}$	101	103	100.334	101.223
$f(x_{1,k})$	25	1	5.443	0.308
$f(x_{2,k})$	1	9	0.112	1.496
$[a_k, b_k]$	[95,107]	[95,103]	[97.667,103]	[97.667,101.223]

Χρειάζομαι $2k = 8$ υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης για ακρίβεια 20%
ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑ σε σχέση με μέθοδο ίσων διαστημάτων (διαφάνεια 13)

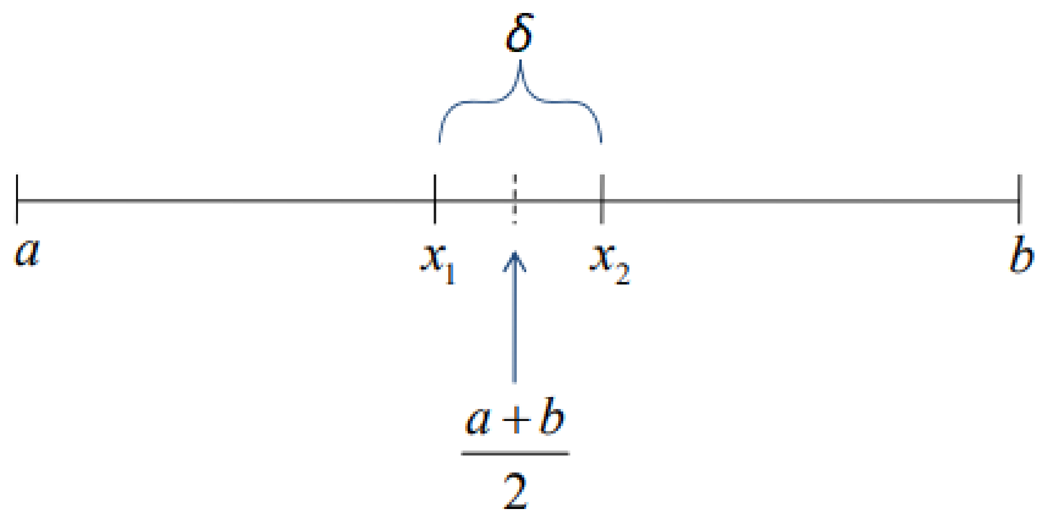
Μέθοδος διχοτόμου (1)

• Διαιρώ το αρχικό διάστημα $[a, b]$ μήκους $L = b - a$, σε 3 υπο-διαστήματα…

•…με τα 2 ενδιάμεσα σημεία να βρίσκονται "πολύ κοντά" στο μέσο του αρχικού διαστήματος…

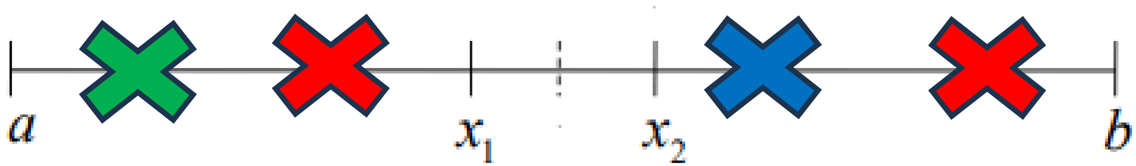
•…συγκεκριμένα $x_1 = \frac{(a+b)}{2} - \frac{\delta}{2}$, και $x_2 = \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2}$, όπου δ "πολύ μικρός" θετικός αριθμός

•…(προσεγγιστικά) διαιρώ το αρχικό διάστημα σε 2 ίσα υπο-διαστήματα



Μέθοδος διχοτόμου (2)

- Ακολουθώντας τη γενική διαδικασία απαλοιφής (διαφάνεια 7), περιορίζω επαναληπτικά το νέο διάστημα αναζήτησης, απαλοίφοντας (γενικά) το ~1/2 του αρχικού διαστήματος:
  - Αν $f(x_1) < f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[a, x_2]$, μήκους $x_2 - a = \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2} - a = \frac{(b-a)}{2} + \frac{\delta}{2} \cong \frac{(b-a)}{2}$
  - Αν $f(x_1) > f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, b]$, μήκους $b - x_1 = b - \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2} \cong \frac{(b-a)}{2}$
  - Αν $f(x_1) = f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, x_2]$, μήκους $x_2 - x_1 = x_2 = \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \cong 0$ (ειδική περίπτωση, έχω (σχεδόν) βρει το τοπικό ελάχιστο)



Μέθοδος διχοτόμου (3)

- Στην *επόμενη επανάληψη*, ακολουθώ την ίδια λογική, διαιρώντας τώρα το νέο διάστημα αναζήτησης (στο οποίο κατέληξα στη προηγούμενη επανάληψη) μήκους (γενικά) $\sim\frac{(b-a)}{2}$, σε 2 (προσεγγιστικά) ίσα υπο-διαστήματα μήκους (γενικά) $\sim\frac{1}{2}\frac{(b-a)}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(b-a)$
- …αφού απαλοίψω (γενικά) το ~1/2 του διαστήματος, καταλήγω σε νέο διάστημα αναζήτησης μήκους (γενικά) $\sim\frac{1}{2}\frac{(b-a)}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(b-a)$
- …κ.ο.κ.

ΙΔΕΑ ΜΕΘΟΔΟΥ: Το διάστημα που απαλοίφεται μετά από κάθε επανάληψη είναι μεγαλύτερο (~1/2 αντί για 1/3), και έτσι το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων και υπολογισμών θα είναι μικρότερο, σε σχέση με τη μέθοδο ακολουθιακά ίσων διαστημάτων

Μέθοδος διχοτόμου (4)

- Η επαναληπτική διαδικασία εξελίσσεται (γενικά) ως εξής ($k = 0$ υποδεικνύει τα δεδομένα):

Επανάληψη	Μήκος κάθε υπο-διαστήματος	Μήκος διαστήματος αναζήτησης
0		$b - a$
1	$\sim \frac{1}{2}(b - a)$	$\sim \frac{1}{2}(b - a)$
2	$\sim \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b - a)$	$\sim \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b - a)$
3	$\sim \left(\frac{1}{2}\right)^3 (b - a)$	$\sim \left(\frac{1}{2}\right)^3 (b - a)$
…		
k	$\sim \left(\frac{1}{2}\right)^k (b - a)$	$\sim \left(\frac{1}{2}\right)^k (b - a)$

Μέθοδος διχοτόμου (5)

- Με ποια ακρίβεια έχει προσεγγιστεί το τοπικό ελάχιστο μετά από k επαναλήψεις ?
- …σύμφωνα με τον ορισμό της διαφάνειας 11, και τον πίνακα της προηγούμενης διαφάνειας…
- …προκύπτει σχετική ακρίβεια $\varepsilon \cong \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a)}{(b-a)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- Με άλλα λόγια, αν σε ένα πρόβλημα επιθυμώ προσέγγιση της βέλτιστης λύσης με μια ακρίβεια (ίση ή μικρότερη από) ε^*
- …θα πρέπει $\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \varepsilon^* \rightarrow k * \ln(\frac{1}{2}) \geq \ln(\varepsilon^*)$
- …δηλαδή να κάνω πλήθος επαναλήψεων k (ίσο ή μεγαλύτερο από) $\frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln(\frac{1}{2})}$

Όσο καλύτερη (μικρότερη) ακρίβεια ε^* επιθυμώ, τόσο περισσότερες επαναλήψεις k πρέπει να κάνω…άρα τόσο περισσότερους υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης πρέπει να κάνω ($2k$, 2 ενδιάμεσα σημεία σε κάθε επανάληψη)

Παράδειγμα μεθόδου διχοτόμου

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89,107]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$, και $\delta = 0.2$
  - Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k \geq \frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.322 \rightarrow k = 3$

Επανάληψη	1	2	3
Μήκος υ-δ	~9	~4.5	~2.25
$x_{1,k}$	$\frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2} = 97.9$	$\frac{a_1+b_1}{2} - \frac{\delta}{2} = 102.35$	$\frac{a_2+b_2}{2} - \frac{\delta}{2} = 100.125$
$x_{2,k}$	$\frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2} = 98.1$	$\frac{a_1+b_1}{2} + \frac{\delta}{2} = 102.55$	$\frac{a_2+b_2}{2} + \frac{\delta}{2} = 100.325$
$f(x_{1,k})$	4.41	5.523	0.016
$f(x_{2,k})$	3.61	6.503	0.106
$[a_k, b_k]$	[97.9,107]	[97.9,102.55]	[97.9,100.325]

Παράδειγμα μεθόδου διχοτόμου

• Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89,107]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$, και $\delta = 0.2$

➢ Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k \geq \frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.322 \rightarrow k = 3$

Επανάληψη	3
Μήκος υ-δ	~2.25
$x_{1,k}$	$\frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{\delta}{2} = 100.125$
$x_{2,k}$	$\frac{a_2 + b_2}{2} + \frac{\delta}{2} = 100.325$
$f(x_{1,k})$	0.016
$f(x_{2,k})$	0.106
$[a_k, b_k]$	[97.9,100.325]

Σταματάω μετά το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων…αλλά ας κάνω επαλήθευση ακρίβειας $\varepsilon = \frac{100.325-97.9}{107-89} = \frac{2.425}{18} = 0.135$, όντως $\varepsilon \leq \varepsilon^*$

Χρειάζομαι $2k = 6$ υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης για ακρίβεια 20%

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑ σε σχέση με μέθοδο ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (διαφάνεια 20)

Άλλες μέθοδοι απαλοιφής διαστημάτων

• Παρά τα πλεονεκτήματά τους σε σχέση με τη μέθοδο ίσων διαστημάτων, οι μέθοδοι ακολουθιακά ίσων διαστημάτων και διχοτόμου απαιτούν σε κάθε επανάληψη τον ορισμό 2 νέων ενδιάμεσων σημείων (και τον αντίστοιχο υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης)…

•…ΙΔΕΑ: αν τα υπο-διαστήματα στα οποία χωρίσω το διάστημα αναζήτησης είναι αλληλο-καλυπτόμενα, σε κάθε επανάληψη θα απαιτείται ο ορισμός 1 μόνο νέου ενδιάμεσου σημείου…

•…άρα μειώνεται ο απαιτούμενος αριθμός υπολογισμών της τιμής της συνάρτησης !

• Υπάρχουν 2 μέθοδοι που βασίζονται σε αυτήν την ιδέα:

- **Μέθοδος χρυσής τομής**
- **Μέθοδος Fibonacci**

Γιατί χρειαζόμαστε αριθμητικές μεθόδους απευθείας έρευνας ?

- Δείτε διαφάνεια 3 και το * που σημειώσαμε εκεί…
- …για 2 λόγους:

➢ Πρώτον, γιατί **οι παραγωγίσεις και η επίλυση συστημάτων εξισώσεων** (που απαιτούν οι αναλυτικές μέθοδοι) **κοστίζουν σε υπολογιστικό χρόνο**, ειδικά όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι έντονα μη-γραμμική

➢ Δεύτερον, σε περιπτώσεις που **η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι γνωστή σε κλειστή μορφή**, αλλά μπορούμε μόνο να εκτιμήσουμε την τιμή της σε διαφορετικά σημεία…παράδειγμα ???

Τέλος Ενότητας