Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (3ο μέρος)

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Αναλυτικές μέθοδοι για προβλήματα πολλών μεταβλητών

- Προβλήματα χωρίς περιορισμούς
  - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - Παραδείγματα

- Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς
  - Αναλυτικές μέθοδοι (μέθοδοι απαλοιφής και Lagrange)
  - Παραδείγματα

$1^{ο}$ μέρος (23/10 και 30/10)

$2^{ο}$ μέρος (06/11)

- Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς
  - Αναλυτικές μέθοδοι (μέθοδος Lagrange)
  - Παραδείγματα

$3^{ο}$ μέρος (σημερινή διάλεξη)

- Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων: Χωρίς περιορισμούς

- Ικανές συνθήκες ακροτάτων:
  - **1η ικανή συνθήκη:** η Jacobian $\nabla f(x^*) = 0$
  - **2η ικανή συνθήκη:** η Hessian $\nabla^2 f(x^*)$ είναι θετικά ορισμένη για ελάχιστο (αρνητικά ορισμένη για μέγιστο)
  - Αν η Hessian δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη στο x^*, τότε αυτό το σημείο δεν αποτελεί τοπικό ακρότατο, αλλά **σαγματικό σημείο**
  - Αν η Hessian είναι ίση με 0 σε αυτό το σημείο (όλες οι δεύτερες παράγωγοι της $f(x)$ είναι ίσες με 0) τότε θα πρέπει να εξεταστεί η βάθμωση υψηλότερης τάξης…
  - …δηλαδή (σε αντιστοιχία με τις συνθήκες συναρτήσεων μιας μεταβλητής), **η πρώτη μη-μηδενική βάθμωση πρέπει να είναι μιας άρτιας τάξης βάθμωση και να είναι θετικά ορισμένη (για ελάχιστο)**

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων: Ισοτικοί περιορισμοί (1)

- Ουσιαστικά, οι m ισοτικοί περιορισμοί περιορίζουν κατά m τους n “βαθμούς ελευθερίας” που έχουμε στην αναζήτηση τοπικών ακροτάτων για τη συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$…

- …επομένως, η απλούστερη μέθοδος για ένα τέτοιο πρόβλημα είναι η **μέθοδος της απαλοιφής**…

- …δηλαδή λύνουμε το σύστημα των m ισοτικών περιορισμών ως προς οποιεσδήποτε m από τις n ανεξάρτητες μεταβλητές, απαλοίφουμε αυτές τις m μεταβλητές από τη συνάρτηση, και στη συνέχεια αναζητούμε τα τοπικά ακρότατα της τροποποιημένης συνάρτησης (η οποία τώρα περιέχει $n - m$ μεταβλητές) χωρίς περιορισμούς, με βάση τις ικανές συνθήκες της διαφάνειας 3

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων: Ισοτικοί περιορισμοί (2)

- **Βασικό μειονέκτημα της μεθόδου της απαλοιφής**: η απαιτούμενη λύση ενός συστήματος εξισώσεων δεν είναι πάντα εύκολη (ειδικά όταν έχουμε πολλούς και μη γραμμικούς ισοτικούς περιορισμούς)

- **Μέθοδος Lagrange**: Ξεκινάμε διατυπώνοντας τη Lagrangian συνάρτηση $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$

- **1$^{\eta}$ ικανή συνθήκη**: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$ >>> επίλυση συστήματος εξισώσεων ως προς $(n + m)$ μεταβλητές x και λ (παράγοντες Lagrange)

- **2$^{\eta}$ ικανή συνθήκη**: $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ θετικά ορισμένη (για τοπικό ελάχιστο) ή αρνητικά ορισμένη (για τοπικό μέγιστο)

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων: Ισοτικοί περιορισμοί (3)

- Εάν η παραπάνω 2η ικανή συνθήκη δεν ικανοποιείται για κάποιο σημείο ενδιαφέροντος (δηλαδή η εξέταση της Hessian υποδεικνύει πως αυτό το σημείο είναι σαγματικό), **ΔΕΝ απορρίπτουμε αυτό το σημείο**…
- …**αλλά εξετάζουμε και μία εναλλακτική 2η ικανή συνθήκη** βάσει των τελευταίων $n - m$ οριζουσών της **bordered Hessian matrix** $B \equiv \begin{bmatrix} 0 & \nabla_x \; g^T \\ \nabla_x g & \nabla_x^2 L(x, \lambda) \end{bmatrix}$
- …αν και μόνο αν το πρόσημο αυτών των οριζουσών είναι ίδιο με το πρόσημο του $(-1)^m$, τότε το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο
- …αν το πρόσημό τους εναλλάσσεται με τη μικρότερη ορίζουσα να έχει πρόσημο ίδιο με το πρόσημο του $(-1)^m$, τότε το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό μέγιστο

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων: Ανισοτικοί περιορισμοί (1)

• Ξεκινάμε με τα **εσωτερικά σημεία**, αγνοώντας τους ανισοτικούς περιορισμούς, με βάση τις ικανές συνθήκες της διαφάνειας 3…

• …και ελέγχουμε αν τα τοπικά ακρότατα που προέκυψαν **ικανοποιούν τους ανισοτικούς περιορισμούς** $g(x) \leq 0$

• Συνεχίζουμε με τα **οριακά σημεία**, εξετάζοντας κάθε υποπερίπτωση όπου k από τους l ανισοτικούς περιορισμούς είναι ενεργοί (ενώ οι υπόλοιποι είναι ανενεργοί) > **συνολικά** $\mathbf{2^l - 1}$ **υποπεριπτώσεις…**

• …για κάθε υποπερίπτωση διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g^k(x)$ η οποία περιλαμβάνει όλους τους ενεργούς ανισοτικούς περιορισμούς της εξεταζόμενης υποπερίπτωσης…

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων: Ανισοτικοί περιορισμοί (2)

- **1η ικανή συνθήκη**: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$ η οποία πρέπει να ικανοποιείται **με $\boldsymbol{\lambda}$ αυστηρά θετικούς αριθμούς**…
- …αν ικανοποιείται ελέγχουμε αν οι **ανενεργοί ανισοτικοί περιορισμοί της εξεταζόμενης υποπερίπτωσης ικανοποιούνται (ως αυστηρές ανισότητες)**…
- …αν ικανοποιούνται εξετάζουμε **2η ικανή συνθήκη**: $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ θετικά ορισμένη (για τοπικό ελάχιστο) ή αρνητικά ορισμένη (για τοπικό μέγιστο)
- …και (μόνο αν η 2η ικανή συνθήκη υποδεικνύει σαγματικό σημείο) την **εναλλακτική 2η ικανή συνθήκη** βάσει της Bordered Hessian (διαφάνεια 6)

Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (1)

- Σήμερα θα εξετάσουμε την πιο γενική (και σύνθετη) κατηγορία προβλημάτων πολλών μεταβλητών…

- …δηλαδή προβλήματα που περιέχουν **και ισοτικούς περιορισμούς** (της μορφής $g(x) = 0$, με παράγοντες Lagrange λ) **και ανισοτικούς περιορισμούς** (της μορφής $h(x) \leq 0$, με παράγοντες Lagrange μ)…

- …θα πρέπει να συνδυάσουμε τις μεθόδους που αναπτύξαμε στις δύο προηγούμενες διαλέξεις… συγκεκριμένα:

Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (2)

- Ξεκινάμε με τα **εσωτερικά σημεία** αγνοώντας τους ανισοτικούς περιορισμούς…
- …**όμως τώρα λαμβάνουμε υπ' όψη και τους ισοτικούς περιορισμούς** μέσω της Lagrangian συνάρτησης…
- …επομένως εξετάζουμε την **1^{η} ικανή συνθήκη**: $\nabla_x L(x,\lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x,\lambda) = 0$…
- …και ελέγχουμε αν τα τοπικά ακρότατα που προέκυψαν **ικανοποιούν ανισοτικούς περιορισμούς** $h(x) \leq 0$…
- …αν τους ικανοποιούν, εξετάζουμε τη **2^{η} ικανή συνθήκη**: $\nabla_x^2 L(x,\lambda)$ θετικά / αρνητικά ορισμένη για τοπικό ελάχιστο / μέγιστο…
- …και (μόνο αν η 2^{η} ικανή συνθήκη υποδεικνύει σαγματικό σημείο) την **εναλλακτική 2^{η} ικανή συνθήκη** βάσει της Bordered Hessian

Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (3)

- Συνεχίζουμε με **οριακά σημεία** εξετάζοντας κάθε υποπερίπτωση όπου k από τους l ανισοτικούς περιορισμούς είναι ενεργοί (ενώ οι υπόλοιποι είναι ανενεργοί) > **συνολικά $\mathbf{2^l - 1}$ υποπεριπτώσεις…**
- …για κάθε υποπερίπτωση διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση…
- …η οποία όμως τώρα περιέχει όρους (με αντίστοιχους παράγοντες Lagrange) που σχετίζονται **ΚΑΙ με τους ισοτικούς περιορισμούς ΚΑΙ με τους ενεργούς ανισοτικούς περιορισμούς** της εξεταζόμενης υποπερίπτωσης: $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h^k(x)$…

Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (4)

- **1η ικανή συνθήκη**: $\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu (x, \lambda, \mu) = 0$, η οποία πρέπει να ικανοποιείται με $\boldsymbol{\mu}$ **αυστηρά θετικούς αριθμούς**…
- …αν ικανοποιείται ελέγχουμε αν οι **ανενεργοί ανισοτικοί περιορισμοί της εξεταζόμενης υποπερίπτωσης ικανοποιούνται (ως αυστηρές ανισότητες)**…
- … αν ικανοποιούνται εξετάζουμε **2η ικανή συνθήκη**: $\nabla_x^2 L(x, \lambda, \mu)$ θετικά / αρνητικά ορισμένη για τοπικό ελάχιστο / μέγιστο…
- …και (μόνο αν η 2η ικανή συνθήκη υποδεικνύει σαγματικό σημείο) την **εναλλακτική 2η ικανή συνθήκη** βάσει της Bordered Hessian (διαφάνεια 6)

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (1)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $x_1 + 2x_2 = 4$ και τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$

➢ Ξεκινάμε με τα εσωτερικά σημεία, αγνοώντας τους ανισοτικούς περιορισμούς…

➢ …αλλά λαμβάνουμε υπ' όψη τον ισοτικό περιορισμό μέσω της Lagrangian συνάρτησης $L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 4)$

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δλδ.

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \ \rightarrow 2x_1 + \lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \ \rightarrow 2x_2 + 2\lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \ \rightarrow x_1 + 2x_2 - 4 = 0$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (2)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $x_1 + 2x_2 = 4$ και τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$
  - Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος προκύπτει $\lambda = -\frac{8}{5}$ και το σημείο ενδιαφέροντος $(x_1, x_2) = (\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$
  - …το οποίο ικανοποιεί τους ανισοτικούς περιορισμούς…
  - 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian, η οποία είναι $\nabla_x^2 L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
  - Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = 2$ και η δεύτερη ορίζουσα είναι $D_2 = 4$…
  - …άρα η Hessian είναι θετικά ορισμένη…
  - …άρα το σημείο ενδιαφέροντος $(x_1, x_2) = (\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ είναι τοπικό ελάχιστο

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (3)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $x_1 + 2x_2 = 4$ και τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$
  - Συνεχίζουμε με τα οριακά σημεία…
  - …αρχικά θα πρέπει να φέρουμε τους ανισοτικούς περιορισμούς στη μορφή $h_i(x) \leq 0$, επομένως αυτοί διατυπώνονται ισοδύναμα ως $h_1(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$ και $h_2(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0$
  - …εδώ έχουμε δύο ανισοτικούς περιορισμούς, άρα χρειάζεται να εξετάσουμε τρεις ($2^l - 1 = 3$) υποπεριπτώσεις: i) h_1 ενεργός (και h_2 όχι), ii) h_2 ενεργός (και h_1 όχι), και iii) h_1 και h_2 ενεργοί

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (4)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $x_1 + 2x_2 = 4$ και τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$

➢ Για την υποπερίπτωση h_1 ενεργός…

➢ …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(x, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 4) + \mu(-x_1)$

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu(x, \lambda, \mu) = 0$, δηλαδή:

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 + \lambda - \mu = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 2x_2 + 2\lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 - 4 = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \rightarrow -x_1 = 0$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει $x_1 = 0$… το οποίο αν αντικατασταθεί στην τρίτη εξίσωση δίνει $x_2 = 2$… το οποίο αν αντικατασταθεί στη δεύτερη εξίσωση δίνει $\lambda = -2$…και αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των x_1 και λ στην πρώτη εξίσωση προκύπτει $\mu = -2$…

…άρα αυτό το οριακό σημείο απορρίπτεται

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (5)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $x_1 + 2x_2 = 4$ και τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$

➢ Για την υποπερίπτωση h_2 ενεργός…

➢ …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(x, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 4) + \mu(-x_2)$

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu (x, \lambda, \mu) = 0$, δηλαδή:

➢ $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \; \rightarrow 2x_1 + \lambda = 0$

➢ $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \; \rightarrow 2x_2 + 2\lambda - \mu = 0$

➢ $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \; \rightarrow x_1 + 2x_2 - 4 = 0$

➢ $\dfrac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \; \rightarrow -x_2 = 0$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει $x_2 = 0$… το οποίο αν αντικατασταθεί στην τρίτη εξίσωση δίνει $x_1 = 4$… το οποίο αν αντικατασταθεί στην πρώτη εξίσωση δίνει $\lambda = -8$…και αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των x_2 και λ στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $\mu = -16$…

…άρα αυτό το οριακό σημείο απορρίπτεται

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (6)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $x_1 + 2x_2 = 4$ και τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$
  - Για την υποπερίπτωση h_1 και h_2 ενεργοί…
  - …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(x, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 4) + \mu_1(-x_1) + \mu_2(-x_2)$
  - 1η ικανή συνθήκη:
  - $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 + \lambda - \mu_1 = 0$
  - $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 2x_2 + 2\lambda - \mu_2 = 0$
  - $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 - 4 = 0$
  - $\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \rightarrow -x_1 = 0$
  - $\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = 0 \rightarrow -x_2 = 0$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$…
…τα οποία αν αντικατασταθούν στην τρίτη εξίσωση προκύπτει αδύνατο (0=4)…
…άρα αυτό το οριακό σημείο απορρίπτεται

…άρα το μόνο τοπικό (άρα ολικό!) ελάχιστο είναι το εσωτερικό σημείο της διαφάνειας 14

Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (5)

- Έναν πιο αυστηρό και γενικό (**για κάθε τύπο προβλήματος**) ορισμό των ικανών συνθηκών αποτελούν οι **συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT conditions)**, που αποτελούν γενίκευση της μεθόδου Lagrange…
- …η **1η ικανή συνθήκη ελαχίστου δίνεται από το συνδυασμό όλων των ακόλουθων υπο-συνθηκών**:

➢ *Primal feasibility*: $g(x) = 0$ και $h(x) \leq 0$

➢ *Stationarity*: $\nabla f(x) + \lambda^T \nabla g(x) + \boxed{\mu^T \nabla h(x)} = 0$

Δεν περιέχει k ενεργούς ανισοτικούς περιορισμούς, αλλά όλους τους

➢ *Dual feasibility*: $\boxed{\mu \geq 0}$

Δεν απαιτεί αυστηρά θετικούς αλλά θετικούς ή μηδενικούς παράγοντες Lagrange για τους ανισοτικούς περιορισμούς

➢ *Complementary slackness*: $\boxed{\mu^T h(x) = 0}$

Περιέχει αυτές τις επιπρόσθετες συνθήκες

Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (6)

- Έναν πιο αυστηρό και γενικό (**για κάθε τύπο προβλήματος**) ορισμό των ικανών συνθηκών αποτελούν οι **συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT conditions)**, που αποτελούν γενίκευση της μεθόδου Lagrange…
- …η **1η ικανή συνθήκη ελαχίστου δίνεται από το συνδυασμό όλων των ακόλουθων υπο-συνθηκών**:

➢ Primal feasibility: $g(x) = 0$ και $h(x) \leq 0$

➢ Stationarity: $\nabla f(x) + \lambda^T \nabla g(x) + \boxed{\mu^T \nabla h(x)} = 0$

➢ Dual feasibility: $\boxed{\mu \geq 0}$

Κάθε ανισοτικός περιορισμός i μπορεί να είναι είτε ενεργός ($h_i(x) = 0$ και $\mu_i > 0$) είτε ανενεργός ($h_i(x) < 0$ και $\mu_i = 0$)

➢ Complementary slackness: $\boxed{\mu^T h(x) = 0}$

Για κάθε πιθανή υποπερίπτωση αγνοούμε τους ανενεργούς και περιλαμβάνουμε τους ενεργούς

Άρα η λογική της μεθόδου επίλυσης δεν είναι διαφορετική σε σχέση με τις διαφάνειες 10-12 – απλά ο ορισμός της 1ης ικανής συνθήκης είναι πιο γενικός

Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (7)

- Αν η παραπάνω 1η ικανή συνθήκη ικανοποιείται για κάποιες από τις $\mathbf{2^{\mathit{l}}}$ **πιθανές υποπεριπτώσεις**, το μόνο που απομένει να κάνουμε είναι να εξετάσουμε για καθεμία από αυτές:
  - … τη **2η ικανή συνθήκη**: $\nabla_x^2 L(x, \lambda, \mu)$ θετικά / αρνητικά ορισμένη για τοπικό ελάχιστο / μέγιστο…
  - …και (μόνο αν η 2η ικανή συνθήκη υποδεικνύει σαγματικό σημείο) την **εναλλακτική 2η ικανή συνθήκη** βάσει της Bordered Hessian (διαφάνεια 6)

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (7)

• Πρόβλημα **οικονομικής κατανομής φορτίου (ΟΚΦ) στα ΣΗΕ** (δείτε Ενότητα 1 και 1ο μέρος Ενότητας 4): αλλά τώρα θα εξετάσουμε **μια πιο ρεαλιστική διατύπωση της ΟΚΦ**, η οποία **λαμβάνει επιπλέον υπ' όψη τα λειτουργικά όρια κάθε μονάδας παραγωγής** i: $p_i^{min} \leq p_i \leq p_i^{max}$

• Έστω συνολική ζήτηση 900MW και έστω 2 μονάδες παραγωγής με:

- Συνάρτηση κόστους: 1) $C_1(p_1) = 0.00173 * p_1^2 + 8.078 * p_1 + 577\ (€/h)$, και 2) $C_2(p_2) = 0.00474 * p_2^2 + 8.110 * p_2 + 156 (€/h)$
- Λειτουργικά όρια: 1) $150MW \leq p_1 \leq 600MW$, και 2) $50MW \leq p_2 \leq 400MW$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (8)

- Οι **μεταβλητές απόφασης** του προβλήματος είναι η παραγόμενη ισχύς της κάθε μονάδας, δηλαδή οι p_1, p_2
- Η **αντικειμενική συνάρτηση** του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, δηλαδή $f(p_1, p_2) = 0.00173 * p_1^2 + 8.078 * p_1 + 577 + 0.00474 * p_2^2 + 8.110 * p_2 + 156 (€/h)$
- Ο **ισοτικός περιορισμός** του προβλήματος είναι πως το άθροισμα της παραγόμενης ισχύος όλων των μονάδων παραγωγής είναι ίσο με τη συνολική ζήτηση, δηλαδή $g(p_1, p_2) = 900 - p_1 - p_2 = 0$
- Οι **ανισοτικοί περιορισμοί** του προβλήματος αντιστοιχούν στα λειτουργικά όρια των μονάδων παραγωγής, δηλαδή:
  - Μονάδα 1: $h_1^{min} = 150 - p_1 \leq 0$ και $h_1^{max} = p_1 - 600 \leq 0$
  - Μονάδα 2: $h_2^{min} = 50 - p_2 \leq 0$ και $h_2^{max} = p_2 - 400 \leq 0$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (9)

- Πόσες υποπεριπτώσεις πρέπει να εξετάσουμε?
- Καθώς έχουμε 4 ανισοτικούς περιορισμούς, θα πρέπει να εξετάσουμε $2^4 = 16$ υποπεριπτώσεις (μαζί με την περίπτωση χωρίς ενεργούς ανισοτικούς περιορισμούς)
- Παρουσιάζονται στο διπλανό πίνακα, όπου Ε: ενεργός, Α: ανενεργός

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
Α	Α	Α	Α
Ε	Α	Α	Α
Α	Ε	Α	Α
Α	Α	Ε	Α
Α	Α	Α	Ε
Ε	Ε	Α	Α
Ε	Α	Ε	Α
Ε	Α	Α	Ε
Α	Ε	Ε	Α
Α	Ε	Α	Ε
Α	Α	Ε	Ε
Ε	Ε	Ε	Α
Ε	Ε	Α	Ε
Ε	Α	Ε	Ε
Α	Ε	Ε	Ε
Ε	Ε	Ε	Ε

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (10)

- Μεγάλο υπολογιστικό φορτίο… μήπως μπορούμε να το μειώσουμε?
- Μπορούμε… αν λάβουμε υπ’ όψη τη “φυσική” του προβλήματος
- Είναι φυσικά αδύνατο μια συγκεκριμένη μονάδα να λειτουργεί ταυτόχρονα στο ελάχιστο και στο μέγιστο λειτουργικό όριό της…
- …μπορούμε να απορρίψουμε 7 υποπεριπτώσεις !

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
A	A	A	A
E	A	A	A
A	E	A	A
A	A	E	A
A	A	A	E
~~E~~	~~E~~	~~A~~	~~A~~
E	A	E	A
E	A	A	E
A	E	E	A
A	E	A	E
~~A~~	~~A~~	~~E~~	~~E~~
~~E~~	~~E~~	~~E~~	~~A~~
~~E~~	~~E~~	~~A~~	~~E~~
~~E~~	~~A~~	~~E~~	~~E~~
~~A~~	~~E~~	~~E~~	~~E~~
~~E~~	~~E~~	~~E~~	~~E~~

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (11)

- Επίσης, καθώς η συνολική ζήτηση είναι ίση με 900MW, συνδυασμοί που καθορίζουν άμεσα (μπλε χρώμα) ή έμμεσα (κόκκινο χρώμα) τη συνολική παραγωγή σε μια τιμή διαφορετική των 900MW είναι φυσικά αδύνατοι…
- …μπορούμε να απορρίψουμε άλλες 6 υποπεριπτώσεις !
- Έμειναν μόνο 3 !

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
A	A	A	A
~~E~~	~~A~~	~~A~~	~~A~~
A	E	A	A
~~A~~	~~A~~	~~E~~	~~A~~
A	A	A	E
~~E~~	~~E~~	~~A~~	~~A~~
~~E~~	~~A~~	~~E~~	~~A~~
~~E~~	~~A~~	~~A~~	~~E~~
~~A~~	~~E~~	~~E~~	~~A~~
~~A~~	~~E~~	~~A~~	~~E~~
~~A~~	~~A~~	~~E~~	~~E~~
~~E~~	~~E~~	~~E~~	~~A~~
~~E~~	~~E~~	~~A~~	~~E~~
~~E~~	~~A~~	~~E~~	~~E~~
~~A~~	~~E~~	~~E~~	~~E~~
~~E~~	~~E~~	~~E~~	~~E~~

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (12)

- Ξεκινάμε με την **πρώτη υποπερίπτωση** (κανένας ανισοτικός περιορισμός δεν είναι ενεργός, άρα αγνοούμε τους ανισοτικούς περιορισμούς) και λαμβάνουμε υπ' όψη μόνο τους ισοτικούς περιορισμούς…
- …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda) = 0.00173 * p_1^2 + 8.078 * p_1 + 577 + 0.00474 * p_2^2 + 8.110 * p_2 + 156 + \lambda(900 - p_1 - p_2)$
- 1η ικανή συνθήκη (ή stationarity στα πλαίσια των KKT conditions): $\nabla_p L(p, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda) = 0$, δηλαδή
- $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \;\rightarrow 0.00346 p_1 + 8.078 - \lambda = 0 \rightarrow p_1 = \frac{\lambda - 8.078}{0.00346}$
- $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \;\rightarrow 0.00948 p_2 + 8.110 - \lambda = 0 \rightarrow p_2 = \frac{\lambda - 8.110}{0.00948}$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \;\rightarrow 900 - p_1 - p_2 = 0$

Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες σχέσεις στην τρίτη σχέση παίρνουμε $\lambda = 10.368$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (13)

- Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στις δύο πρώτες σχέσεις παίρνουμε $p_1 = 661.9$ και $p_2 = 238.1$…
- …όμως αυτό το σημείο δεν ικανοποιεί τον ανισοτικό περιορισμό h_1^{max} καθώς το μέγιστο λειτουργικό όριο της μονάδας 1 είναι 600…
- …άρα αυτό το σημείο απορρίπτεται εκ των προτέρων (δηλαδή δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τη 2η ικανή συνθήκη)
- Δηλαδή η πρώτη από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 26) υποπεριπτώσεις απορρίπτεται…

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
~~A~~	~~A~~	~~A~~	~~A~~
A	E	A	A
A	A	A	E

- …απομένουν 2 υποπεριπτώσεις που θα εξετάσουμε…
- …αλλά μπορούμε να υποψιαστούμε σε ποια από τις 2 θα βρίσκεται η λύση, με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα?

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (14)

- Συνεχίζουμε με την **τρίτη** από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 26) υποπεριπτώσεις (ο ανισοτικός περιορισμός h_2^{max} είναι ενεργός)…
- …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda, \mu) = 0.00173 * p_1^2 + 8.078 * p_1 + 577 + 0.00474 * p_2^2 + 8.110 * p_2 + 156 + \lambda(900 - p_1 - p_2) + \mu_2^{max}(p_2 - 400)$
- 1η ικανή συνθήκη (ή stationarity στα πλαίσια των KKT): $\nabla_p L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu (p, \lambda, \mu) = 0$, δλδ.
- $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \ \rightarrow 0.00346 p_1 + 8.078 - \lambda = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \ \rightarrow 0.00948 p_2 + 8.110 - \lambda + \mu_2^{max} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \ \rightarrow 900 - p_1 - p_2 = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \mu_2^{max}} = 0 \ \rightarrow p_2 - 400 = 0 \ \rightarrow \ p_2 = 400$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (15)

• Αντικαθιστώντας την τέταρτη σχέση στην τρίτη σχέση παίρνουμε $p_1 = 500\ldots$

•…αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στην πρώτη σχέση παίρνουμε $\lambda = 9.808\ldots$

•…και αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στη δεύτερη σχέση παίρνουμε $\mu_2^{max} = -2.094\ldots$

•…άρα αυτό το σημείο απορρίπτεται εκ των προτέρων (δεν ικανοποιείται το dual feasibility στα πλαίσια των KKT)

• Δηλαδή η τρίτη από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 26) υποπεριπτώσεις απορρίπτεται (όπως υποψιαστήκαμε στη διαφάνεια 28…)

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
~~A~~	~~A~~	~~A~~	~~A~~
A	E	A	A
~~A~~	~~A~~	~~A~~	~~E~~

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (16)

- Συνεχίζουμε με τη **δεύτερη** από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 26) υποπεριπτώσεις (ο ανισοτικός περιορισμός h_1^{max} είναι ενεργός)…
- …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda, \mu) = 0.00173 * p_1^2 + 8.078 * p_1 + 577 + 0.00474 * p_2^2 + 8.110 * p_2 + 156 + \lambda(900 - p_1 - p_2) + \mu_1^{max}(p_1 - 600)$
- 1η ικανή συνθήκη (ή stationarity στα πλαίσια των KKT): $\nabla_p L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu(p, \lambda, \mu) = 0$, δλδ.
- $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \rightarrow 0.00346p_1 + 8.078 - \lambda + \mu_1^{max} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \rightarrow 0.00948p_2 + 8.110 - \lambda = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 900 - p_1 - p_2 = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \mu_1^{max}} = 0 \rightarrow p_1 - 600 = 0 \rightarrow p_1 = 600$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (17)

• Αντικαθιστώντας την τέταρτη σχέση στην τρίτη σχέση παίρνουμε $p_2 = 300$…

•…αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στην πρώτη σχέση παίρνουμε $\lambda = 10.954$…

•…και αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στη δεύτερη σχέση παίρνουμε $\mu_1^{max} = 0.8$…

•…άρα αυτό το σημείο ικανοποιεί το dual feasibility στα πλαίσια των KKT ($\mu_1^{max} > 0$)…

•…και το primal feasibility στα πλαίσια των KKT (όλοι οι ανενεργοί περιορισμοί $h_1^{min}, h_2^{min}, h_2^{max}$ ικανοποιούνται ως αυστηρές ανισότητες)…

•…επομένως αυτό το σημείο αποτελεί σημείο ενδιαφέροντος

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (18)

- 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian συνάρτησης, η οποία είναι $\nabla_x^2 L(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0.00346 & 0 \\ 0 & 0.00948 \end{bmatrix}$
- Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = 0.00346 > 0$, η δεύτερη ορίζουσα είναι $D_2 = 0.00346 * 0.00948 - 0 > 0$
- Άρα η Hessian είναι θετικά ορισμένη…
- …άρα το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο

- Δηλαδή η δεύτερη από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 26) υποπεριπτώσεις είναι αυτή που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση (όπως υποψιαστήκαμε στη διαφάνεια 28) !

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
~~A~~	~~A~~	~~A~~	~~A~~
A	E	A	A
~~A~~	~~A~~	~~A~~	~~E~~

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (19)

- Ποια είναι η φυσική σημασία της λύσης που μόλις υπολογίσαμε?
  - **Για να λειτουργήσει το ΣΗΕ του παραδείγματος με τον πιο οικονομικό τρόπο**, θα πρέπει $p_1 = 600\ (MW)$, $p_2 = 300\ (MW)$ που σημαίνει πως η μονάδα 1 θα πρέπει να λειτουργήσει στο μέγιστο όριό της…
  - Η τιμή $\lambda = 10.954(€/MWh)$ εκφράζει την **τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας για το ΣΗΕ** του παραδείγματος…
  - …ή ισοδύναμα το **"σκιώδες" κόστος του ισοτικού περιορισμού** … με άλλα λόγια το πόσο αναμένουμε να αυξηθεί (μειωθεί) το συνολικό κόστος παραγωγής εάν η συνολική ζήτηση αυξηθεί (μειωθεί) κατά 1MW

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (20)

• Ποια είναι η φυσική σημασία της λύσης που μόλις υπολογίσαμε?

- …και αυτή η τιμή είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή $\lambda = 10.368(€/MWh)$ στη θεωρητική περίπτωση που τα λειτουργικά όρια των μονάδων δεν λαμβάνονταν υπ' όψη (διαφάνεια 27) > **πιο αυστηροί περιορισμοί συνήθως σημαίνουν λιγότερο οικονομική λύση**
- Η τιμή $\mu_1^{max} = 0.8(€/MWh)$ εκφράζει το **"σκιώδες" κόστος του ενεργού ανισοτικού περιορισμού** h_1^{max}…
- … με άλλα λόγια το πόσο αναμένουμε να μειωθεί το συνολικό κόστος παραγωγής εάν είχαμε την τεχνολογική δυνατότητα να αυξήσουμε το μέγιστο όριο λειτουργίας της μονάδας 1 κατά 1MW

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (21)

• Πρόβλημα **οικονομικής κατανομής φορτίου (ΟΚΦ) στα ΣΗΕ** (δείτε 1ο μέρος Ενότητας 4) λαμβάνοντας υπ' όψη τα λειτουργικά όρια κάθε μονάδας παραγωγής i: $p_i^{min} \leq p_i \leq p_i^{max}$

• Έστω συνολική ζήτηση 900MW και έστω 2 μονάδες παραγωγής με:

- Συνάρτηση κόστους: 1) $C_1(p_1) = 7 * p_1$ $(€/h)$, και 2) $C_2(p_2) = 9 * p_2 (€/h)$
- Λειτουργικά όρια: 1) $0MW \leq p_1 \leq 1000MW$, και 2) $0MW \leq p_2 \leq 400MW$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (22)

- Οι **μεταβλητές απόφασης** του προβλήματος είναι η παραγόμενη ισχύς της κάθε μονάδας, δηλαδή οι p_1, p_2
- Η **αντικειμενική συνάρτηση** του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, δηλαδή $\min f(p_1, p_2) = \min 7 * p_1 + 9 * p_2 (€/h)$
- Ο **ισοτικός περιορισμός** του προβλήματος είναι πως το άθροισμα της παραγόμενης ισχύος όλων των μονάδων παραγωγής είναι ίσο με τη συνολική ζήτηση, δηλαδή $g(p_1, p_2) = 900 - p_1 - p_2 = 0$
- Οι **ανισοτικοί περιορισμοί** του προβλήματος αντιστοιχούν στα λειτουργικά όρια των μονάδων παραγωγής, δηλαδή:

➢ Μονάδα 1: $h_1^{min} = 0 - p_1 \leq 0$ και $h_1^{max} = p_1 - 1000 \leq 0$

➢ Μονάδα 2: $h_2^{min} = 0 - p_2 \leq 0$ και $h_2^{max} = p_2 - 400 \leq 0$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (23)

- Πόσες υποπεριπτώσεις πρέπει να εξετάσουμε?
- Καθώς έχουμε 4 ανισοτικούς περιορισμούς, θα πρέπει να εξετάσουμε $2^4 = 16$ υποπεριπτώσεις (μαζί με την περίπτωση χωρίς ενεργούς ανισοτικούς περιορισμούς)
- Παρουσιάζονται στο διπλανό πίνακα, όπου Ε: ενεργός, Α: ανενεργός

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
Α	Α	Α	Α
Ε	Α	Α	Α
Α	Ε	Α	Α
Α	Α	Ε	Α
Α	Α	Α	Ε
Ε	Ε	Α	Α
Ε	Α	Ε	Α
Ε	Α	Α	Ε
Α	Ε	Ε	Α
Α	Ε	Α	Ε
Α	Α	Ε	Ε
Ε	Ε	Ε	Α
Ε	Ε	Α	Ε
Ε	Α	Ε	Ε
Α	Ε	Ε	Ε
Ε	Ε	Ε	Ε

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (24)

- Μεγάλο υπολογιστικό φορτίο… μήπως μπορούμε να το μειώσουμε?
- Μπορούμε… αν λάβουμε υπ’ όψη τη “φυσική” του προβλήματος
- Είναι φυσικά αδύνατο μια συγκεκριμένη μονάδα να λειτουργεί ταυτόχρονα στο ελάχιστο και στο μέγιστο λειτουργικό όριό της…
- …μπορούμε να απορρίψουμε 7 υποπεριπτώσεις !

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
A	A	A	A
E	A	A	A
A	E	A	A
A	A	E	A
A	A	A	E
~~E~~	~~E~~	~~A~~	~~A~~
E	A	E	A
E	A	A	E
A	E	E	A
A	E	A	E
~~A~~	~~A~~	~~E~~	~~E~~
~~E~~	~~E~~	~~E~~	~~A~~
~~E~~	~~E~~	~~A~~	~~E~~
~~E~~	~~A~~	~~E~~	~~E~~
~~A~~	~~E~~	~~E~~	~~E~~
~~E~~	~~E~~	~~E~~	~~E~~

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (25)

- Επίσης, καθώς η συνολική ζήτηση είναι ίση με 900MW, συνδυασμοί που καθορίζουν άμεσα (μπλε χρώμα) ή έμμεσα (κόκκινο χρώμα) τη συνολική παραγωγή σε μια τιμή διαφορετική των 900MW είναι φυσικά αδύνατοι…
- …μπορούμε να απορρίψουμε άλλες 6 υποπεριπτώσεις !
- Έμειναν μόνο 3 !

h_1^{min}	h_1^{max}	h_2^{min}	h_2^{max}
Α	Α	Α	Α
~~Ε~~	~~Α~~	~~Α~~	~~Α~~
~~Α~~	~~Ε~~	~~Α~~	~~Α~~
Α	Α	Ε	Α
Α	Α	Α	Ε
~~Ε~~	~~Ε~~	~~Α~~	~~Α~~
~~Ε~~	~~Α~~	~~Ε~~	~~Α~~
~~Ε~~	~~Α~~	~~Α~~	~~Ε~~
~~Α~~	~~Ε~~	~~Ε~~	~~Α~~
~~Α~~	~~Ε~~	~~Α~~	~~Ε~~
~~Α~~	~~Α~~	~~Ε~~	~~Ε~~
~~Ε~~	~~Ε~~	~~Ε~~	~~Α~~
~~Ε~~	~~Ε~~	~~Α~~	~~Ε~~
~~Ε~~	~~Α~~	~~Ε~~	~~Ε~~
~~Α~~	~~Ε~~	~~Ε~~	~~Ε~~
~~Ε~~	~~Ε~~	~~Ε~~	~~Ε~~

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (26)

- Ξεκινάμε με την πρώτη υποπερίπτωση (κανένας ανισοτικός περιορισμός δεν είναι ενεργός, άρα αγνοούμε τους ανισοτικούς περιορισμούς) και λαμβάνουμε υπ' όψη μόνο τους ισοτικούς περιορισμούς…
- …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda) = 7 * p_1 + 9 * p_2 + \lambda(900 - p_1 - p_2)$
- 1η ικανή συνθήκη (ή stationarity στα πλαίσια των KKT conditions): $\nabla_p L(p, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda) = 0$, δηλαδή
- $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \rightarrow 7 - \lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 7}$
- $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \rightarrow 9 - \lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 9}$

ΑΔΥΝΑΤΟ !

- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 900 - p_1 - p_2 = 0$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (28)

- Συνεχίζουμε με την τρίτη από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 40) υποπεριπτώσεις (ο ανισοτικός περιορισμός h_2^{max} είναι ενεργός)…
- …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda, \mu) = 7 * p_1 + 9 * p_2 + \lambda(900 - p_1 - p_2) + \mu_2^{max}(p_2 - 400)$
- 1η ικανή συνθήκη (ή stationarity στα πλαίσια των KKT): $\nabla_p L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu (p, \lambda, \mu) = 0$, δλδ.
- $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \rightarrow \boxed{7 - \lambda = 0}$
- $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \rightarrow \boxed{9 - \lambda + \mu_2^{max} = 0}$

Αυτό το υποσύστημα μας δίνει $\lambda = 7$ και $\mu_2^{max} = -2$

…αυτό το σημείο απορρίπτεται εκ των προτέρων (δεν ικανοποιεί dual feasibility)

- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \boxed{900 - p_1 - p_2 = 0}$
- $\frac{\partial L}{\partial \mu_2^{max}} = 0 \rightarrow \boxed{p_2 - 400 = 0}$

Αυτό το υποσύστημα μας δίνει $p_2 = 400$ και $p_1 = 500$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (29)

- Συνεχίζουμε με τη δεύτερη από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 7) υποπεριπτώσεις (ο ανισοτικός περιορισμός h_2^{min} είναι ενεργός)…
- …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση $L(p_1, p_2, \lambda, \mu) = 7 * p_1 + 9 * p_2 + \lambda(900 - p_1 - p_2) + \mu_2^{min}(0 - p_2)$
- 1η ικανή συνθήκη (ή stationarity στα πλαίσια των KKT): $\nabla_p L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda, \mu) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\mu (p, \lambda, \mu) = 0$, δλδ.
- $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \rightarrow 7 - \lambda = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \rightarrow 9 - \lambda - \mu_2^{min} = 0$

Αυτό το υποσύστημα μας δίνει $\lambda = 7$ και $\mu_2^{min} = 2$
…αυτό το σημείο ικανοποιεί το dual feasibility στα πλαίσια των KKT

- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 900 - p_1 - p_2 = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \mu_2^{min}} = 0 \rightarrow 0 - p_2 = 0$

Αυτό το υποσύστημα μας δίνει $p_2 = 0$ και $p_1 = 900$

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (30)

- Συνεχίζουμε με τη δεύτερη από τις 3 εναπομένουσες (διαφάνεια 7) υποπεριπτώσεις (ο ανισοτικός περιορισμός h_2^{min} είναι ενεργός)…
- …αυτό το σημείο ικανοποιεί και το primal feasibility στα πλαίσια των KKT (όλοι οι ανενεργοί περιορισμοί $h_1^{min}, h_1^{max}, h_2^{max}$ ικανοποιούνται ως αυστηρές ανισότητες)…
- 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian συνάρτησης, η οποία είναι $\nabla_x^2 L(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- …όλα τα στοιχεία της Hessian είναι ίσα με 0, άρα θα πρέπει να εξετάσουμε τη βάθμωση υψηλότερης (τρίτης) τάξης…
- …όμως όλες οι παράγωγοι τρίτης και υψηλότερων τάξεων είναι ίσες με 0...που σημαίνει πως δεν μπορούμε να αποφανθούμε για ακρότατα σε αυτήν την υποπερίπτωση

Παραδείγματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς (31)

- Συμπέρασμα: δεν υπάρχει (ή δεν μπορούμε να βρούμε) λύση για αυτό το πρόβλημα ???

- **Αντικειμενική συνάρτηση** $\min f(p_1, p_2) = \min 7 * p_1 + 9 * p_2 (€/h)$
- **Ισοτικός περιορισμός** $g(p_1, p_2) = 900 - p_1 - p_2 = 0$
- **Ανισοτικοί περιορισμοί**: $h_1^{min} = 0 - p_1 \leq 0$ και $h_1^{max} = p_1 - 1000 \leq 0$, $h_2^{min} = 0 - p_2 \leq 0$ και $h_2^{max} = p_2 - 400 \leq 0$

- …μα η λύση είναι προφανής…η μονάδα 1 είναι η φθηνότερη και έχει την τεχνική δυνατότητα να καλύψει όλη τη ζήτηση: $p_1 = 900$ και $p_2 = 0 \ldots$
- …το παραπάνω περίεργο συμπέρασμα οφείλεται στο γεγονός πως **αυτό το πρόβλημα είναι αυστηρά γραμμικό!**

Τέλος Ενότητας