ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (1ο μέρος)

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων

- **Ενότητα 1: Εισαγωγή στο μάθημα**

➢ Σημασία εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης / παραδείγματα

➢ “Δομικά στοιχεία” προβλημάτων βελτιστοποίησης

- **Ενότητα 2: Απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις**

➢ Μαθηματικά χαρακτηριστικά συναρτήσεων και προβλημάτων βελτιστοποίησης (συνέχεια, μονοτονία, ακρότατα και μονοτροπικότητα, κυρτότητα, γραμμικότητα)

- **Ενότητα 3**: **Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής**

➢ “Σημεία ενδιαφέροντος” για τοπικά (και ολικά!) ακρότατα

➢ Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για κάθε κατηγορία

➢ Παραδείγματα για κάθε κατηγορία

Κύρια συμπεράσματα προηγούμενης διάλεξης

- Για προβλήματα 1 μεταβλητής, τα **τοπικά ελάχιστα** της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να βρίσκονται στα εξής "**σημεία ενδιαφέροντος**":
  - Σε κάποιο από τα **εσωτερικά σημεία** του πεδίου ορισμού της συνάρτησης > 1η ικανή συνθήκη ελαχίστου: $f'(x^*) = f''(x^*) = \cdots = f^{(2k-1)}(x^*) = 0$, 2η ικανή συνθήκη ελαχίστου $f^{(2k)}(x^*) > 0$ όπου $k \geq 1$ ακέραιος αριθμός
  - Σε κάποιο από τα **οριακά σημεία** του πεδίου ορισμού της συνάρτησης > ικανή συνθήκη $sign[f'(x)] = -sign[h'(x)]$ *

*Διορθώθηκε λάθος στις διαφάνειες σε σχέση με την περίπτωση που f'(x)=0 ή / και h'(x)=0

  - Σε κάποιο από τα **σημεία ασυνέχειας** της συνάρτησης > θεωρούμε αυτά τα σημεία σαν οριακά σημεία…
- **Σημαντική σημείωση: Η έρευνα για τοπικά ακρότατα γίνεται ανεξάρτητα για τα σημεία καθεμίας κατηγορίας**

Σύνδεση προηγούμενης με τη σημερινή διάλεξη

• Παρόμοια λογική (και παρόμοιες αναγκαίες και ικανές συνθήκες…) ακολουθούμε και στα προβλήματα πολλών μεταβλητών (τα οποία είναι και πιο ρεαλιστικά !)…

•…απλά λόγω κάποιων διαφορών με τα προβλήματα μίας μεταβλητής (π.χ. ισοτικοί περιορισμοί τώρα έχουν νόημα!), θα ακολουθήσουμε την εξής πορεία μελέτης:

- Προβλήματα πολλών μεταβλητών **χωρίς περιορισμούς**
- Προβλήματα πολλών μεταβλητών **με ισοτικούς περιορισμούς**
- Προβλήματα πολλών μεταβλητών **με ανισοτικούς περιορισμούς**
- Προβλήματα πολλών μεταβλητών **με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς**

Δομή σημερινής (και επόμενης) διάλεξης

- Προβλήματα χωρίς περιορισμούς
  - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - Παραδείγματα

- Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς
  - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - Παραδείγματα

1ο μέρος (σημερινή διάλεξη)

2ο μέρος (επόμενη διάλεξη)

- Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς
  - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - Παραδείγματα

- Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς
  - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - Παραδείγματα

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών / τοπικά ακρότατα

• Μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών παριστάνεται μαθηματικά ως $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, .., x_n)$ όπου $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, .., x_n]$ το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης

• Ένα τοπικό ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο) $\boldsymbol{x}^*$ της συνάρτησης αυτής ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής

• Για τοπικό ελάχιστο ισχύει $f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x}$: $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \varepsilon$
• Για τοπικό μέγιστο ισχύει $f(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x}$: $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \varepsilon$

όπου ε θέτει τα όρια της “γειτονικής περιοχής”

Προβλήματα χωρίς περιορισμούς (1)

• Μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορεί να **προσεγγιστεί** με μια συνάρτηση μίας μόνο μεταβλητής $g(t)$ **στη γειτονιά του σημείου ελαχίστου $\boldsymbol{x}^*$**, θεωρώντας ως αυθαίρετη παράμετρο τη διεύθυνση Δx (μέθοδος των διευθύνσεων, δείτε Ενότητα 2)

$$g(t) = f(x^* + t\Delta x) = f(x_1^* + t\Delta x_1, x_2^* + t\Delta x_2, .., x_n^* + t\Delta x_n)$$

όπου το ελάχιστο προσεγγίζεται καθώς $t \to 0$

• Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις **αναγκαίες και ικανές συνθήκες ελαχίστου σε εσωτερικά σημεία για προβλήματα μιας μεταβλητής** (Ενότητα 3):

- 1η αναγκαία και ικανή συνθήκη: $g'(0) = 0$
- 2η αναγκαία συνθήκη: $g''(0) \geq 0$
- 2η ικανή συνθήκη: $g''(0) > 0$

Προβλήματα χωρίς περιορισμούς (2)

- Πώς μεταφράζεται η **1η αναγκαία και ικανή συνθήκη** της $g(t)$ για την αρχική συνάρτηση $f(\boldsymbol{x})$?
  - Σύμφωνα με την Ενότητα 2 (διαφάνεια 38), ισχύει $g'(0) = \nabla^T f(x)\Delta x$…
  - …επομένως η 1η αναγκαία και ικανή συνθήκη της $g(t)$ μας δίνει $\nabla^T f(x)\Delta x = 0$…
  - …για όλες τις δυνατές διευθύνσεις Δx, η παραπάνω σχέση ισχύει όταν $\nabla f(x) = 0$…
  - …δηλαδή η **Jacobian** $\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right]^T$ της $f(x)$ είναι **ίση με 0**.. Η Jacobian αποτελεί γενίκευση της έννοιας της πρώτης παραγώγου για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
  - …άρα η **μερική παράγωγος της $f(x)$ ως προς όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές της είναι ίση με 0**

Προβλήματα χωρίς περιορισμούς (3)

• Πώς μεταφράζεται η **2η αναγκαία συνθήκη** της $g(t)$ για την αρχική συνάρτηση $f(\boldsymbol{x})$?

- Σύμφωνα με την Ενότητα 2 (διαφάνεια 38), ισχύει $g''(0) = \Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x$…
- …επομένως η 2η αναγκαία συνθήκη της $g(t)$ μας δίνει $\Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x \geq 0$…
- …για όλες τις δυνατές διευθύνσεις Δx, η παραπάνω σχέση ισχύει όταν $\nabla^2 f(x) \geq 0$
- …δηλαδή η **Hessian** της $f(x)$ είναι **θετικά ημι-ορισμένη**

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Η Hessian αποτελεί γενίκευση της έννοιας της δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Για τοπικό μέγιστο, θα πρέπει η Hessian να είναι αρνητικά ημι-ορισμένη

Προβλήματα χωρίς περιορισμούς (4)

- Πώς μεταφράζονται η **2η ικανή συνθήκη** της $g(t)$ για την αρχική συνάρτηση $f(\boldsymbol{x})$?

➢ Σύμφωνα με την Ενότητα 2 (διαφάνεια 38), ισχύει $g''(0) = \Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x \dots$

➢ …επομένως η 2η ικανή συνθήκη της $g(t)$ μας δίνει $\Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x > 0 \dots$

➢ …για όλες τις δυνατές διευθύνσεις Δx, η παραπάνω σχέση ισχύει όταν $\nabla^2 f(x) > 0 \dots$

➢ …δηλαδή η **Hessian** της $f(x)$ είναι **θετικά ορισμένη**

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Για τοπικό μέγιστο, θα πρέπει η Hessian να είναι αρνητικά ορισμένη

Παρένθεση: Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες (1)

• **Θετικά ορισμένος (ημι-ορισμένος)** τετραγωνικός πίνακας P διαστάσεων $n \times n$ είναι εκείνος ο πίνακας για τον οποίο ισχύουν οι παρακάτω **ισοδύναμες συνθήκες (αρκεί να εξετάσουμε μία από αυτές)**:

- Ικανοποιεί τη σχέση $v^T P v > 0$ ($v^T P v \geq 0$) για κάθε διάνυσμα v διαστάσεων $n \times 1$
- Όλες οι **ιδιοτιμές** του P είναι μεγαλύτερες του 0 (μεγαλύτερες ή ίσες του 0) > δηλαδή εκείνες οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει πως η ορίζουσα του $P - \lambda I$ είναι ίση με 0, όπου I μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας $n \times n$
- Όλες οι **ορίζουσες** D_i των υπο-πινάκων $i \times i$ με $i = 1,2,..,n$ που προκύπτουν με πρώτο στοιχείο το $p_{1,1}$ της P είναι μεγαλύτερες του 0 (μεγαλύτερες ή ίσες του 0) > *αυτή τη συνθήκη θα εξετάζουμε στο υπόλοιπο του μαθήματος*

Παρένθεση: Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες (2)

• **Αρνητικά ορισμένος (ημι-ορισμένος)** τετραγωνικός πίνακας P διαστάσεων $n \times n$ είναι εκείνος ο πίνακας για τον οποίο ισχύουν οι παρακάτω **ισοδύναμες συνθήκες (αρκεί να εξετάσουμε μία από αυτές)**:

- Ικανοποιεί τη σχέση $v^T P v < 0$ ($v^T P v \leq 0$) για κάθε διάνυσμα v διαστάσεων $n \times 1$
- Όλες οι **ιδιοτιμές** του P είναι μικρότερες του 0 (μικρότερες ή ίσες του 0)
- Οι **ορίζουσες** D_i των υπο-πινάκων $i \times i$ με $i = 1,2,\ldots,n$ που προκύπτουν με πρώτο στοιχείο το $p_{1,1}$ της P είναι: α) μικρότερες του 0 (μικρότερες ή ίσες του 0) για όλα τα περιττά $i = 1,3,5, \ldots$ και β) μεγαλύτερες του 0 (μεγαλύτερες ή ίσες του 0) για όλα τα άρτια $i = 2,4,6, \ldots$ > *αυτή τη συνθήκη θα εξετάζουμε στο υπόλοιπο του μαθήματος*

Παρένθεση: Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες (3)

- Παράδειγμα: Να εξεταστεί ο πίνακας $P = \boxed{\begin{bmatrix} \boxed{4} & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}$ με βάση τις ορίζουσές του
  - Η πρώτη ορίζουσα D_1 του υπο-πίνακα διαστάσεων 1×1 είναι η ορίζουσα του $p_{1,1}$ … $D_1 = 4$
  - Η δεύτερη ορίζουσα του υπο-πίνακα διαστάσεων 2×2 είναι η ορίζουσα του P … $D_2 = 4 * 0 - (-3) * 1 = 3$
  - Άρα ο πίνακας P είναι **θετικά ορισμένος !**

Παρένθεση: Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες (4)

- Παράδειγμα: Να εξεταστεί ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ με βάση τις ορίζουσές του
  - Η πρώτη ορίζουσα D_1 του υπο-πίνακα διαστάσεων 1×1 είναι η ορίζουσα του $p_{1,1}$ … $D_1 = 3$
  - Η δεύτερη ορίζουσα του υπο-πίνακα διαστάσεων 2×2 είναι η ορίζουσα του P … $D_2 = 3 * (-2) - (-1) * 2 = -4$
  - Άρα ο πίνακας P **δεν είναι ούτε θετικά ορισμένος (ή ημι-ορισμένος), ούτε αρνητικά ορισμένος (ή ημι-ορισμένος) !**

Παρένθεση: Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες (5)

• Παράδειγμα: Να εξεταστεί ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ με βάση τις ορίζουσές του

- Η πρώτη ορίζουσα D_1 του υπο-πίνακα διαστάσεων 1×1 είναι η ορίζουσα του $p_{1,1}$ … $D_1 = 0$
- Η δεύτερη ορίζουσα του υπο-πίνακα διαστάσεων 2×2 $\begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix}$ … $D_2 = 0 * 1 - 0 * (-1) = 0$
- Η τρίτη ορίζουσα του υπο-πίνακα διαστάσεων 3×3 είναι η ορίζουσα του P … $D_3 = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8$
- Άρα ο πίνακας P είναι **αρνητικά ημι-ορισμένος !**

Προβλήματα χωρίς περιορισμούς (5)

- …οι αναγκαίες / ικανές συνθήκες **ελαχίστου** είναι:

➢ **1^{η} αναγκαία και ικανή συνθήκη: η Jacobian $\boldsymbol{\nabla f(x^*) = 0}$**

➢ **2^{η} αναγκαία συνθήκη: η Hessian $\boldsymbol{\nabla^2 f(x^*)}$ είναι θετικά ημι-ορισμένη (αρνητικά ημι-ορισμένη για μέγιστο)**

➢ **2^{η} ικανή συνθήκη: η Hessian $\boldsymbol{\nabla^2 f(x^*)}$ είναι θετικά ορισμένη (αρνητικά ορισμένη για μέγιστο)** Διαφορά (ενότητα 3)?

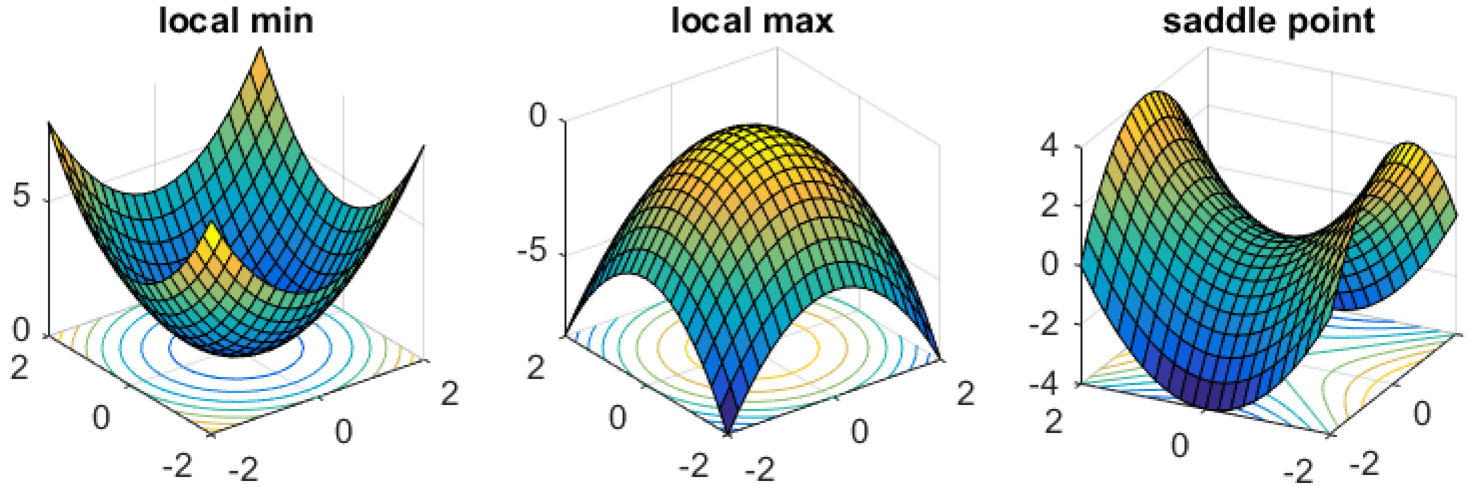
➢ Αν η Hessian είναι ίση με 0 σε αυτό το σημείο (όλες οι δεύτερες παράγωγοι της $f(x)$ είναι ίσες με 0) τότε θα πρέπει να εξεταστεί η βάθμωση υψηλότερης τάξης…

➢ …δηλαδή (σε αντιστοιχία με τις συνθήκες συναρτήσεων μιας μεταβλητής), **η πρώτη μη-μηδενική βάθμωση πρέπει να είναι μιας άρτιας τάξης βάθμωση και να είναι θετικά ορισμένη (για ελάχιστο)**

➢ …πώς μοιάζει η βάθμωση 3^{ης} τάξης ? (όχι στις εξετάσεις!)

Προβλήματα χωρίς περιορισμούς (6)

- Αν η Hessian δεν είναι ούτε θετικά ορισμένη, ούτε αρνητικά ορισμένη, ούτε 0 στο σημείο ενδιαφέροντος x^* ? π.χ. διαφάνεια 14
- …τότε αυτό το σημείο δεν αποτελεί τοπικό ακρότατο, αλλά **σαγματικό σημείο (saddle point)!**
- …ή σημείο ελαχίστου-μεγίστου (minimax point) είναι ένα σημείο όπου οι κλίσεις (παράγωγοι) σε όλες τις διευθύνσεις είναι μηδενικές, αλλά χωρίς να αποτελεί ακρότατο!



Παραδείγματα προβλημάτων χωρίς περιορισμούς (1)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla f(x) = 0$, το οποίο συνεπάγεται…

➢ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \ \rightarrow 2x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$

➢ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \ \rightarrow -2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$

➢ Το σημείο $(x_1, x_2) = (0,0)$ είναι σημείο ενδιαφέροντος

➢ 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian, η οποία είναι $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

➢ Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = 2$ και η δεύτερη ορίζουσα είναι $D_2 = -4$

➢ Άρα η Hessian ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη

➢ Άρα το σημείο ενδιαφέροντος δεν είναι τοπικό ακρότατο αλλά σαγματικό σημείο

Παραδείγματα προβλημάτων χωρίς περιορισμούς (2)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = ax_1 + \frac{b}{x_1 x_2} + cx_2 + d$, όπου

$a, b, c, d > 0$ παράμετροι

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla f(x) = 0$, το οποίο συνεπάγεται…

➢ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \rightarrow a - \frac{b}{x_1^2 x_2} = 0$

➢ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \rightarrow c - \frac{b}{x_1 x_2^2} = 0$

Σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους (σύστημα 2x2)…πώς το επιλύω?

➢ Επιλύοντας αυτό το σύστημα 2 εξισώσεων, προκύπτει πως το σημείο $(x_1, x_2) = ((\frac{bc}{a^2})^{1/3}, (\frac{ab}{c^2})^{1/3})$ είναι σημείο ενδιαφέροντος

➢ 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian, η οποία είναι

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{2b}{x_1^3 x_2} & \frac{b}{x_1^2 x_2^2} \\ \frac{b}{x_1^2 x_2^2} & \frac{2b}{x_1 x_2^3} \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα προβλημάτων χωρίς περιορισμούς (3)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = ax_1 + \frac{b}{x_1 x_2} + cx_2 + d$, όπου $a, b, c, d > 0$ παράμετροι

➢ Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = \frac{2b}{x_1^3 x_2}$, η οποία είναι θετική στο σημείο ενδιαφέροντος (εφόσον οι τιμές $(x_1, x_2) = ((\frac{bc}{a^2})^{1/3}, (\frac{ab}{c^2})^{1/3})$ είναι θετικές)

➢ Η δεύτερη ορίζουσα της Hessian είναι $D_2 = \frac{2b}{x_1^3 x_2} \frac{2b}{x_1^3 x_2} - \frac{b}{x_1^2 x_2^2} \frac{b}{x_1^2 x_2^2} = \frac{3b^2}{x_1^4 x_2^4}$, η οποία είναι θετική στο σημείο ενδιαφέροντος (εφόσον οι τιμές $(x_1, x_2) = ((\frac{bc}{a^2})^{1/3}, (\frac{ab}{c^2})^{1/3})$ είναι θετικές)

➢ Άρα η Hessian είναι θετικά ορισμένη

➢ Άρα το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο

Παραδείγματα προβλημάτων χωρίς περιορισμούς (4)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 - 6x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 9$
- 1η ικανή συνθήκη: $\nabla f(x) = 0$, το οποίο συνεπάγεται…
- $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 4x_1 + x_2 - 6 = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \rightarrow x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους (σύστημα 3x3)…πώς το επιλύω?

- Επιλύοντας αυτό το σύστημα 3 εξισώσεων, προκύπτει πως το σημείο $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{17}{5})$ είναι σημείο ενδιαφέροντος

Παραδείγματα προβλημάτων χωρίς περιορισμούς (5)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 - 6x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 9$

➢ 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian, η οποία είναι

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

➢ Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = 4$

➢ Η δεύτερη ορίζουσα της Hessian είναι $D_2 = 4 * 2 - 1 * 1 = 7$

➢ Η τρίτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_3 = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 0 = 10$

➢ Άρα η Hessian είναι θετικά ορισμένη

➢ Άρα το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς

- Σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, οι περιορισμοί είναι είτε ισοτικοί της μορφής $g(x) = 0$ είτε ανισοτικοί της μορφής $h(x) \leq 0$ (δείτε Ενότητα 1)
- Σε προβλήματα 1 μεταβλητής ισοτικοί περιορισμοί δεν έχουν νόημα καθώς θα καθόριζαν εκ των προτέρων την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής (δείτε Ενότητα 3)
- Σε προβλήματα πολλών μεταβλητών, ένας ισοτικός περιορισμός έχει νόημα, εφόσον περιέχει πάνω από μία ανεξάρτητες μεταβλητές
- Γενικότερα, εδώ θα εξετάσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f(x_1, x_2, .., x_n)$ υπό m ισοτικούς περιορισμούς, με $m < n$ για να μην καθορίζουν εκ των προτέρων τις τιμές των μεταβλητών

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος απαλοιφής

- Ουσιαστικά, αυτοί οι ισοτικοί περιορισμοί περιορίζουν κατά m τους n “βαθμούς ελευθερίας” που είχαμε στην αναζήτηση τοπικών ακροτάτων για τη συνάρτηση $f(x_1, x_2, .., x_n)$…

- …επομένως, η απλούστερη μέθοδος για την αντιμετώπιση ενός τέτοιου προβλήματος είναι η μέθοδος της απαλοιφής…

- …δηλαδή λύνουμε το σύστημα των m ισοτικών περιορισμών ως προς οποιεσδήποτε m από τις n ανεξάρτητες μεταβλητές, απαλοίφουμε αυτές τις m μεταβλητές από τη συνάρτηση, και στη συνέχεια αναζητούμε τα τοπικά ακρότατα της τροποποιημένης συνάρτησης (η οποία τώρα περιέχει $n - m$ μεταβλητές) χωρίς περιορισμούς, με βάση τις ικανές συνθήκες της διαφάνειας 16

Παράδειγμα μεθόδου απαλοιφής

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 8 = 0$

➢ Επιλύουμε τον ισοτικό περιορισμό ως προς x_2, οπότε παίρνουμε $x_2 = \frac{8-2x_1}{3}$

➢ Επομένως μπορούμε να απαλοίψουμε αυτή τη μεταβλητή από την αντικειμενική συνάρτηση και να επαναδιατυπώσουμε την τελευταία: $f(x_1\ ) = 4x_1^2 + 5(\frac{8-2x_1}{3})^2 = \frac{56}{9}x_1^2 - \frac{160}{9}x_1 + \frac{320}{9}$

➢ Αυτή είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής, οπότε χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες συνθήκες (δείτε Ενότητα 3)

➢ $f'(x_1) = 0 \rightarrow x_1 = 1.429$ είναι σημείο ενδιαφέροντος

➢ $f''(x_1) = 12.444 > 0, \forall x$

➢ Άρα το σημείο $x_1 = 1.429$ (και $x_2 = \frac{8-2x_1}{3} = 1.714$) είναι τοπικό ελάχιστο της αρχικής συνάρτησης 2 μεταβλητών

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς: Γεωμετρική προσέγγιση

• **Βασικό μειονέκτημα της μεθόδου της απαλοιφής**: η απαιτούμενη λύση ενός συστήματος εξισώσεων δεν είναι πάντα εύκολη (ειδικά όταν έχουμε πολλούς και μη γραμμικούς ισοτικούς περιορισμούς)

• Μια διαφορετική προσέγγιση: αν πάμε πίσω στη διαφάνεια 8, είπαμε πως για προβλήματα χωρίς περιορισμούς ισχύει $\nabla^T f(x)\Delta x = 0$ για όλες τις δυνατές διευθύνσεις Δx…

•…γεωμετρικά αυτό σημαίνει πως $\nabla f(x) \perp \Delta x$, δηλαδή διευθύνσεις ορθογώνιες στη βάθμωση της συνάρτησης

•…τώρα όμως θα πρέπει να ψάξουμε μόνο στις διευθύνσεις που μας επιτρέπουν οι περιορισμοί $g(x) = 0$…

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς: Γεωμετρική προσέγγιση

- Στο σημείο x αλλά και στο σημείο $x + \Delta x$ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ισοτικοί περιορισμοί, δηλαδή $g_i(x) = 0$ και $g_i(x + \Delta x) = 0$, για κάθε $i = 1,2,..,m$

- …αλλά σύμφωνα με την προσέγγιση του διαφορικού ισχύει $g_i(x + \Delta x) - g_i(x) = \nabla^T g_i(x)\Delta x$, για κάθε $i = 1,2,..,m$ …

- …ο συνδυασμός των παραπάνω μας δίνει $\nabla^T g(x)\Delta x = 0$

- …γεωμετρικά αυτό σημαίνει πως $\nabla g_i(x) \perp \Delta x$, δηλαδή πως οι κατάλληλες διευθύνσεις Δx είναι ορθογώνιες και στις βαθμώσεις των $g_i(x)$…

- …δηλαδή η βάθμωση της $f(x)$ πρέπει να είναι συγγραμική με όλες τις βαθμώσεις των $g_i(x)$…

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- Η παραπάνω γεωμετρική προσέγγιση (που οδήγησε σε συνθήκες ορθογωνιότητας / συγγραμικότητας) **δεν είναι πρακτική … χρειαζόμαστε μια πιο μαθηματική προσέγγιση**

- Δηλαδή το ότι η βάθμωση της $f(x)$ πρέπει να είναι συγγραμική με το γραμμικό συνδυασμό όλων των βαθμώσεων των $g_i(x)$…

- …μπορεί να μεταφραστεί στο ότι θα υπάρχει πάντα ένα σύνολο πραγματικών αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_m$ που θα ικανοποιούν τη σχέση…

$$\nabla^T f(x) + \lambda_1 \nabla^T g_1(x) + \lambda_2 \nabla^T g_2(x) + \ldots + + \lambda_m \nabla^T g_m(x) = 0$$

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- …η οποία μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως

$$\nabla^T f(x) + \lambda^T \nabla g(x) = 0,$$

$$\boxed{\lambda = [\lambda_1 \; \lambda_2 \; \ldots \; \lambda_m]^T} \quad \text{και} \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^T g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla^T g_m(x) \end{bmatrix}$$

Παράγοντες Lagrange ή μεταβλητές Lagrange > σε φυσικό επίπεδο εκφράζουν το “σκιώδες κόστος” των ισοτικών περιορισμών…

- Αυτή η σχέση αποτελεί την **1η αναγκαία και ικανή συνθήκη** για τοπικά ακρότατα της $f(x)$ υπό περιορισμούς $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$…

- …και σημαίνει πως πρέπει να επιλύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και τους παράγοντες Lagrange λ (δλδ. ως προς $n + m$ μεταβλητές)

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- Δηλαδή τα πιθανά ακρότατα της $f(x)$ υπό τους ισοτικούς περιορισμούς $g(x)$ είναι τα ίδια με αυτά της συνάρτησης (χωρίς περιορισμούς) $\boxed{L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)}$ Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος

- …επομένως για να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της L ως προς όλες τις μεταβλητές της x και λ, θα πρέπει να ισχύουν:

➢ $\nabla_x L(x,\lambda) = 0$ ΚΑΙ

➢ $\nabla_\lambda L(x,\lambda) = 0$ (η οποία είναι ισοδύναμη με την $g(x) = 0$)

- Αυτές **οι 2 σχέσεις ΜΑΖΙ αποτελούν την 1η αναγκαία και ικανή συνθήκη** για τοπικά ακρότατα της $f(x)$ υπό ισοτικούς περιορισμούς, δηλαδή είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη $\nabla^T f(x) + \lambda^T \nabla g(x) = 0,$ > *αυτές θα εξετάζουμε στο υπόλοιπο του μαθηματος*

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

• Με βάση την ίδια λογική, μπορούμε να καθορίσουμε την **2$^{\eta}$ ικανή συνθήκη** για την L (και άρα και για την $f(x)$):

➢ $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ θετικά ορισμένη (για τοπικό ελάχιστο)

➢ $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ αρνητικά ορισμένη (για τοπικό μέγιστο)

• **ΠΡΟΣΟΧΗ ΌΜΩΣ**: Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ υπό τους ισοτικούς περιορισμούς $g(x) = 0$ είναι στην πραγματικότητα μια συνάρτηση $n - m$ μεταβλητών (δείτε διαφάνεια 24) ενώ η L είναι μια συνάρτηση $n + m$ μεταβλητών, **δεν υπάρχει πλήρης ισοδυναμία μεταξύ των $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{L}$**…

• …επομένως, είναι πιθανό η εξέταση της παραπάνω συνθήκης να δίνει κάποιο σαγματικό σημείο για την L στις n διαστάσεις το οποίο όμως στις $n - m$ ανεξάρτητες διαστάσεις της f να είναι τοπικό ακρότατο…

Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- Επομένως, εάν η παραπάνω 2η ικανή συνθήκη δεν ικανοποιείται για κάποιο σημείο ενδιαφέροντος (δηλαδή η εξέταση της Hessian υποδεικνύει πως αυτό το σημείο είναι σαγματικό), **ΔΕΝ απορρίπτουμε αυτό το σημείο**…
- …**αλλά εξετάζουμε και μία εναλλακτική 2η ικανή συνθήκη** βάσει των τελευταίων $n-m$ οριζουσών της **bordered Hessian matrix** $B \equiv \begin{bmatrix} 0 & \nabla_x g^T \\ \nabla_x g & \nabla_x^2 L(x,\lambda) \end{bmatrix}$ ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν περιλαμβάνεται στο βιβλίο
- …αν και μόνο αν το πρόσημο αυτών των οριζουσών είναι ίδιο με το πρόσημο του $(-1)^m$, τότε το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο…
- …αν το πρόσημό τους εναλλάσσεται με τη μικρότερη ορίζουσα να έχει πρόσημο ίδιο με το πρόσημο του $(-1)^m$, τότε το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό μέγιστο

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (1)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 8 = 0$

➢ Διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(2x_1 + 3x_2 - 8)$

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δλδ.

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 8x_1 + 2\lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 10x_2 + 3\lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g(x_1, x_2) = 0 \rightarrow 2x_1 + 3x_2 - 8 = 0$

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους (σύστημα 3x3)…πώς το επιλύω?

➢ Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες σχέσεις στην τρίτη σχέση παίρνουμε $\lambda = -5.714$

➢ Άρα το $(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{4}\lambda, -\frac{3}{10}\lambda\right) = (1.429, 1.714)$ είναι σημείο ενδιαφέροντος

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (2)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 8 = 0$

➢ 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian συνάρτησης ως προς x, η οποία είναι…

➢ $\ldots\nabla_x^2 L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

➢ Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = 8$ και η δεύτερη ορίζουσα είναι $D_2 = 80$

➢ Άρα η Hessian είναι θετικά ορισμένη (ΔΕΝ χρειάζεται να εξετάσουμε τη Bordered Hessian)

➢ Άρα το σημείο ενδιαφέροντος $(x_1, x_2) = (1.429{,}1.714)$ είναι τοπικό ελάχιστο…

➢ …στο ίδιο συμπέρασμα οδηγηθήκαμε και με τη μέθοδο της απαλοιφής (δείτε διαφάνεια 25)

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (3)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 8 = 0$

➢ Ας εξετάσουμε και την εναλλακτική 2η ικανή συνθήκη (αν και δεν χρειάζεται, απλά για επαλήθευση της θεωρίας): εξετάζουμε τις τελευταίες $n - m = 1$ ορίζουσες της bordered Hessian, η οποία είναι $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} & \nabla_x\, g^T & \\ \nabla_x g & \begin{bmatrix} 0 & \boxed{2 \quad 3} \\ 2 & 8 \quad 0 \\ 3 & 0 \quad 10 \end{bmatrix} & \nabla_x^2 L(x, \lambda) \end{array}$$

➢ Η τελευταία ορίζουσα είναι η $D_3 = 0 \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -112$

➢ …η οποία έχει ίδιο πρόσημο με το πρόσημο του $(-1)^m = (-1)^1 = -1$

➢ Άρα το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (4)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - V = 0$, όπου $\pi, V > 0$ παράμετροι

Βιβλίο: να βρεθούν οι διαστάσεις του κυλίνδρου με την ελάχιστη επιφάνεια για ένα δεδομένο όγκο

- Διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 + \lambda(\pi x_1^2 x_2 - V)$
- 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δλδ.
- $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 4\pi x_1 + 2\pi x_2 + 2\lambda\pi x_1 x_2 = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 2\pi x_1 + \lambda\pi x_1^2 = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g(x_1, x_2) = 0 \rightarrow \pi x_1^2 x_2 - V = 0$

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους (σύστημα 3x3)…πώς το επιλύω?

- Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων προκύπτει πως το $(x_1, x_2) = ((\frac{V}{2\pi})^{1/3}, 2(\frac{V}{2\pi})^{1/3})$ είναι σημείο ενδιαφέροντος με $\lambda = (\frac{-16\pi}{V})^{1/3}$

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (5)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - V = 0$, όπου $\pi, V > 0$ παράμετροι

➢ 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian συνάρτησης, η οποία είναι…

➢ $\ldots \nabla_x^2 L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 4\pi + 2\lambda\pi x_2 & 2\pi + 2\lambda\pi x_1 \\ 2\pi + 2\lambda\pi x_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\pi & -2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$

➢ Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = -4\pi < 0$ και η δεύτερη ορίζουσα είναι $D_2 = -4\pi^2 < 0$

➢ Άρα η Hessian δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη, το οποίο υποδεικνύει πως το σημείο ενδιαφέροντος είναι σαγματικό σημείο…

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (6)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - V = 0$, όπου $\pi, V > 0$ παράμετροι

➢ …όμως ΔΕΝ απορρίπτουμε αυτό το σημείο, αλλά εξετάζουμε και την εναλλακτική 2η ικανή συνθήκη…

➢ …εξετάζουμε τις τελευταίες $n - m = 1$ ορίζουσες της

bordered Hessian $B = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi x_1 x_2 & \pi x_1^2 \\ 2\pi x_1 x_2 & -4\pi & -2\pi \\ \pi x_1^2 & -2\pi & 0 \end{bmatrix}$

$\nabla_x g^T$ (πρώτη γραμμή, χωρίς το 0), $\nabla_x g$ (πρώτη στήλη, χωρίς το 0), $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ (κάτω δεξιά υποπίνακας)

➢ Η τελευταία ορίζουσα είναι η $D_3 = 0\begin{vmatrix} -4\pi & -2\pi \\ -2\pi & 0 \end{vmatrix} - 2\pi x_1 x_2 \begin{vmatrix} 2\pi x_1 x_2 & -2\pi \\ \pi x_1^2 & 0 \end{vmatrix} + \pi x_1^2 \begin{vmatrix} 2\pi x_1 x_2 & -4\pi \\ \pi x_1^2 & -2\pi \end{vmatrix} = \cdots$

➢ $\ldots = 4\pi^3 x_1^3 (x_1 - x_2 - x_2) < 0$

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (7)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2$, υπό τον ισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - V = 0$, όπου $\pi, V > 0$ παράμετροι
- …η οποία έχει ίδιο πρόσημο με το πρόσημο του $(-1)^m = (-1)^1 = -1$
- Άρα το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο…
- …παρόλο που η αρχική 2η ικανή συνθήκη υπέδειξε πως είναι σαγματικό σημείο !

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (8)

• Πρόβλημα **οικονομικής κατανομής φορτίου (ΟΚΦ) στα ΣΗΕ** (δείτε Ενότητα 1): μία από τις πιο σημαντικές εφαρμογές της μεθόδου Lagrange στον πραγματικό κόσμο!

• Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε μονάδας παραγωγής -έστω πως έχουμε 3 μονάδες με συνάρτηση κόστους α) $C_1(p_1) = 0.00173 * p_1^2 + 8.078 * p_1 + 577\ (€/h)$, β) $C_2(p_2) = 0.002 * p_2^2 + 7.992 * p_2 + 310(€/h)$, γ) $C_3(p_3) = 0.00474 * p_3^2 + 8.110 * p_3 + 156(€/h)$- ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση -έστω 900MW-?

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (9)

- Οι **μεταβλητές απόφασης** του προβλήματος είναι η παραγόμενη ισχύς της κάθε μονάδας παραγωγής, δηλαδή οι p_1, p_2, p_3

- Η **αντικειμενική συνάρτηση** του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, δηλαδή $f(p_1, p_2, p_3) = 0.00173 * p_1^2 + 8.078 * p_1 + 577 + 0.002 * p_2^2 + 7.992 * p_2 + 310 + 0.00474 * p_3^2 + 8.110 * p_3 + 156 (€/h)$

- Ο **ισοτικός περιορισμός** του προβλήματος είναι πως το άθροισμα της παραγόμενης ισχύος όλων των μονάδων παραγωγής είναι ίσο με τη συνολική ζήτηση, δηλαδή $g(p_1, p_2, p_3) = 900 - p_1 - p_2 - p_3 = 0$

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (10)

- Διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(p_1, p_2, p_3, \lambda) = 0.00173 * p_1^2 + 8.078 * p_1 + 577 + 0.002 * p_2^2 + 7.992 * p_2 + 310 + 0.00474 * p_3^2 + 8.110 * p_3 + 156 + \lambda(900 - p_1 - p_2 - p_3)$
- 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_p L(p, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(p, \lambda) = 0$, δλδ.
- $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \ \rightarrow 0.00346 p_1 + 8.078 - \lambda = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \ \rightarrow 0.004 p_2 + 7.992 - \lambda = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial p_3} = 0 \ \rightarrow 0.00948 p_3 + 8.110 - \lambda = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \ \rightarrow g(p_1, p_2, p_3) = 0 \rightarrow 900 - p_1 - p_2 - p_3 = 0$

Σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους (σύστημα 4x4)…πώς το επιλύω?

- Αντικαθιστώντας τις τρεις πρώτες σχέσεις στην τέταρτη σχέση παίρνουμε $\lambda = 9.446 (€/MWh)$

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (11)

- Άρα το $(p_1, p_2, p_3) = (395.5, 363.5, 141)$ είναι σημείο ενδιαφέροντος
- 2η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian συνάρτησης $\nabla_p^2 L(p,\lambda) = \begin{bmatrix} 0.00346 & 0 & 0 \\ 0 & 0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00948 \end{bmatrix}$
- Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = 0.00346 > 0$, η δεύτερη ορίζουσα είναι $D_2 = 0.00346 * 0.004 - 0 > 0$, και η τρίτη ορίζουσα είναι $D_3 = 0.00346 \begin{vmatrix} 0.004 & 0 \\ 0 & 0.00948 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.00948 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0.004 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} > 0$
- Άρα η Hessian είναι θετικά ορισμένη (ΔΕΝ χρειάζεται να εξετάσουμε τη Bordered Hessian)
- Άρα το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (12)

• Ποια είναι η φυσική σημασία της λύσης που μόλις υπολογίσαμε?

- Εφόσον βρήκαμε ένα μόνο τοπικό ελάχιστο, αυτό είναι και το ολικό ελάχιστο του προβλήματος … δηλαδή **για να λειτουργήσει το ΣΗΕ του παραδείγματος με τον πιο οικονομικό τρόπο**, θα πρέπει $p_1 = 395.5\ (MW)$, $p_2 = 363.5\ (MW), p_3 = 141\ (MW)$
- …και συγκεκριμένα το συνολικό κόστος παραγωγής θα είναι $f(p_1, p_2, p_3) = 8915.558$ (€)

Παραδείγματα μεθόδου Lagrange (13)

• Ποια είναι η φυσική σημασία της λύσης που μόλις υπολογίσαμε?

- Η **τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange** σε αυτή τη βέλτιστη λύση $\lambda = 9.446(€/MWh)$ εκφράζει το **“σκιώδες” κόστος του ισοτικού περιορισμού** … με άλλα λόγια το πόσο αναμένουμε να αυξηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής εάν η συνολική ζήτηση αυξηθεί κατά 1MW…
- …για να επιβεβαιώσετε τον παραπάνω ισχυρισμό επαναλάβετε την επίλυση του προβλήματος με ζήτηση ίση με 901MW, υπολογίστε το νέο ελάχιστο συνολικό κόστος παραγωγής, και βρείτε πόσο αυξήθηκε σε σχέση με το ελάχιστο συνολικό κόστος παραγωγής με ζήτηση 900MW
- …ή ισοδύναμα εκφράζει την **τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας για το ΣΗΕ** του παραδείγματος…

Τέλος Ενότητας