



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Πρόλογος

- Διδάσκων:

- Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (dimpap@upatras.gr)

- Σημειώσεις μαθήματος:

- Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση, Αντώνης Αλεξανδρίδης

- Ήδη διαθέσιμες στο eclass

- Διαθέσιμες σε μορφή βιβλίου

- Διαφάνειες διαλέξεων:

- Διαθέσιμες στο eclass (λίγο μετά την κάθε διάλεξη)

- Προτεινόμενη βάση μελέτης (παρακολούθηση...)

- Εξέταση μαθήματος:

- Από πέρυσι χωρίς σημειώσεις (αλλά με αριθμομηχανή!)

- 3 ερωτήσεις θεωρίας / κρίσης και 2 ασκήσεις



Δομή διάλεξης

- Σημασία εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης και παραδείγματα
- “Δομικά στοιχεία” προβλημάτων βελτιστοποίησης
 - Μεταβλητές απόφασης
 - Αντικειμενική συνάρτηση
 - Περιορισμοί
 - Παράμετροι
- Προκλήσεις, πολυπλοκότητα και μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης
- Περιληπτική δομή επόμενων διαλέξεων



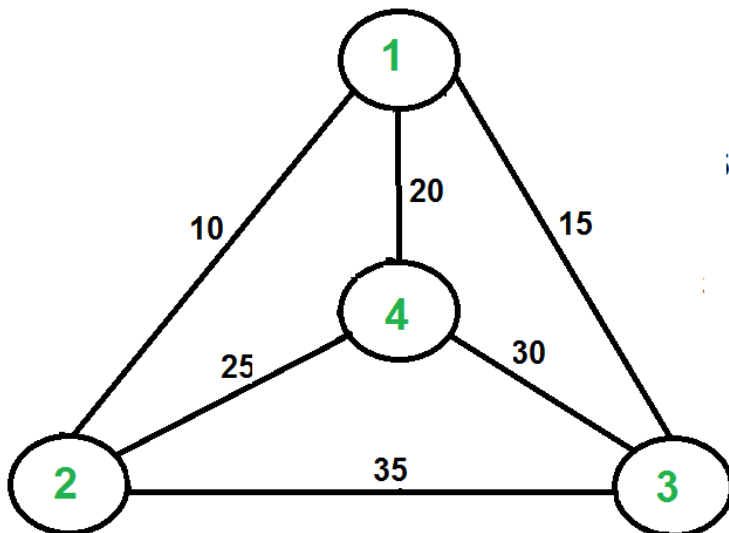
Σημασία Εφαρμοσμένης Βελτιστοποίησης

- Η **εφαρμοσμένη βελτιστοποίηση** (ή μαθηματικός προγραμματισμός) ασχολείται με την ανάπτυξη κατάλληλων μαθηματικών μεθοδολογιών για τη **συστηματική** (όχι ευριστική...) εύρεση της **“καλύτερης δυνατής”** απόφασης σε πρακτικά προβλήματα
- **Χρησιμοποιείται σε πάρα πολλούς τομείς:** βιομηχανία, μεταφορές, συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, χρηματοοικονομικά κλπ.
- **Τελευταία 10 χρόνια:** ραγδαία αύξηση των εφαρμογών της βελτιστοποίησης, ως συνέπεια της αύξησης των δυνατοτήτων των υπολογιστών, των εξελίξεων σε σχετικά λογισμικά και του οικονομικού ανταγωνισμού



Ένα γνωστό παράδειγμα

- Ίσως το πρώτο παράδειγμα στην ιστορία... *Πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (travelling salesman problem)*
- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?



- Μέθοδος επίλυσης?
 - Πλήρης απαρίθμηση (*complete enumeration*) ως μια απλή μέθοδος...
 - ...αλλά είναι α) πρακτική σε μεγάλα προβλήματα και β) εφαρμόσιμη πάντα ?



Σχέση με το αντικείμενό μας

- Στο πλαίσιο της επιστήμης των ηλεκτρολόγων μηχανικών, η εφαρμοσμένη βελτιστοποίηση στοχεύει στην “καλύτερη δυνατή” σχεδίαση και λειτουργία ενός συστήματος
- Παραδείγματα εφαρμογής (συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας):
 - Ποιες είναι οι βέλτιστες επενδύσεις σε νέες μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας? (πρόβλημα μακροπρόθεσμης σχεδίασης)
 - Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας? (πρόβλημα βραχυπρόθεσμης λειτουργίας)



Προβλήματα βελτιστοποίησης

- Η εφαρμοσμένη βελτιστοποίηση προσεγγίζει ερωτήσεις όπως οι παραπάνω, διατυπώνοντάς τις ως προβλήματα βελτιστοποίησης
- Ένα **πρόβλημα βελτιστοποίησης** περιλαμβάνει τα ακόλουθα **“δομικά στοιχεία”**:
 - **Μεταβλητές απόφασης**: ποιες είναι οι *αποφάσεις* που πρέπει να λάβω?
 - **Αντικειμενική συνάρτηση (ή συνάρτηση στόχος)**: ποιος είναι ο *στόχος* μου στην εφαρμογή? / ποιο είναι το κριτήριο της “καλύτερης δυνατής” απόφασης?
 - **Περιορισμοί**: ποιες είναι οι συνθήκες που η λύση μου θα *πρέπει* να ικανοποιεί ώστε να είναι εφικτή?
 - **Παράμετροι**: ποιες είναι οι ποσότητες που θεωρούνται *γνωστές και σταθερές*?



Μεταβλητές απόφασης

- ...ποιες είναι οι *αποφάσεις* που πρέπει να λάβω?
- Αποτελούν δηλαδή μεταβλητές [της γενικής μορφής x] την τιμή των οποίων πρέπει να αποφασίσω / καθορίσω (...ώστε να μεγιστοποιήσω ή να ελαχιστοποιήσω την αντικειμενική συνάρτηση)
- Υπάρχουν **διαφορετικοί τύποι μεταβλητών απόφασης** ανάλογα:
 - **Τη μαθηματική τους φύση:** συνεχείς (άπειρες στο πλήθος τιμές), δυαδικές (τιμές 0/1), ακέραιες (ακέραιες τιμές)
 - **Τις μεταξύ τους σχέσεις** (σε προβλήματα πολλαπλών μεταβλητών): ανεξάρτητες ή εξαρτημένες



Μεταβλητές απόφασης: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?



Αντικειμενική συνάρτηση

- ...ποιος είναι ο στόχος μου στην εφαρμογή? / ποιο είναι το κριτήριο της “καλύτερης δυνατής” απόφασης?
- Αποτελεί δηλαδή μια αριθμητική συνάρτηση [της γενικής μορφής $f(x)$] την τιμή της οποίας στοχεύω να μεγιστοποιήσω ή να ελαχιστοποιήσω (ανάλογα ορίζουμε προβλήματα μεγιστοποίησης $\max f(x)$ ή ελαχιστοποίησης $\min f(x)$)
- Υπάρχουν **διαφορετικοί τύποι** αντικειμενικών συναρτήσεων ανάλογα:
 - **Το πλήθος των μεταβλητών τους:** μία ή περισσότερες μεταβλητές
 - **Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά τους:** συνέχεια, μονοτονία, γραμμικότητα, κυρτότητα...επόμενη διάλεξη !



Αντικειμενική συνάρτηση: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?



Αντικειμενική συνάρτηση: Ανταγωνιστικές συνιστώσες (1)

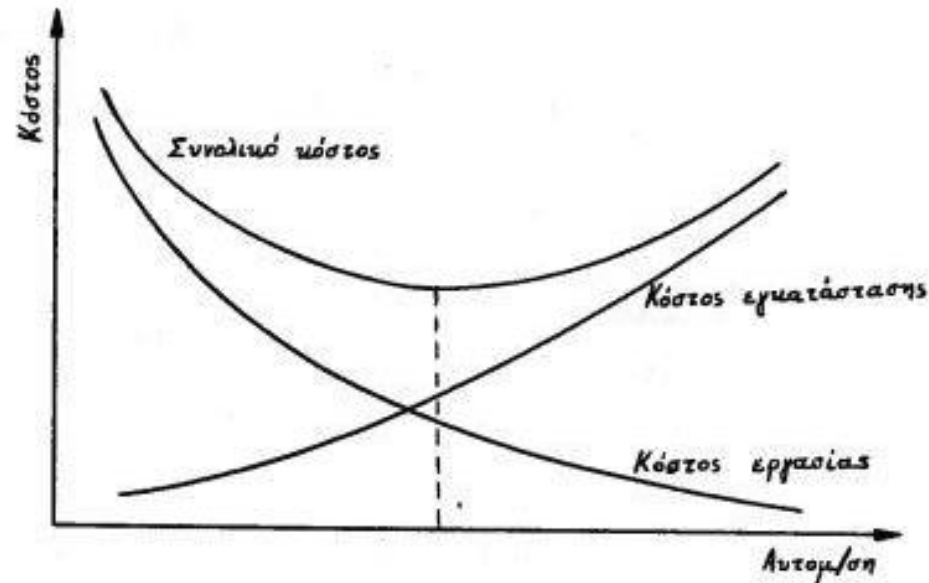
- Σε πολλές περιπτώσεις, οι αντικειμενικές συναρτήσεις περιέχουν **ανταγωνιστικές συνιστώσες** > συνιστώσες που μεταβάλλονται με αντίθετο / διαφορετικό τρόπο όταν μεταβάλλονται οι τιμές των μεταβλητών απόφασης
- Παράδειγμα: αντικειμενική συνάρτηση είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μιας βιομηχανικής διεργασίας και μεταβλητή απόφασης είναι το επίπεδο αυτοματοποίησης



Αντικειμενική συνάρτηση: Ανταγωνιστικές συνιστώσες (2)

- Η αντικειμενική αυτή συνάρτηση περιέχει δύο ανταγωνιστικές συνιστώσες:
 - Το κόστος εγκατάστασης > το οποίο αυξάνεται όσο αυξάνεται το επίπεδο αυτοματοποίησης
 - Το κόστος εργασίας > το οποίο μειώνεται όσο αυξάνεται το επίπεδο αυτοματοποίησης

- Το συνολικό κόστος παρουσιάζει ένα ελάχιστο για κάποιο ενδιάμεσο επίπεδο αυτοματοποίησης...
- ...το οποίο οφείλεται ακριβώς στην ύπαρξη δύο ανταγωνιστικών συνιστωσών



Περιορισμοί

- ...ποιοι είναι οι συνθήκες που η λύση μου θα πρέπει να ικανοποιεί ώστε να είναι εφικτή?

Θεωρητικά, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να μην περιλαμβάνει περιορισμούς...πρακτικά, αυτό δεν συμβαίνει σχεδόν ποτέ...

- Αποτελούν δηλαδή μαθηματικές σχέσεις [της γενικής μορφής $g(x) = 0$ ή $h(x) \leq 0$] οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται

- Υπάρχουν **διαφορετικοί τύποι** περιορισμών ανάλογα:

- **Τη μαθηματική τους φύση:** ισοτικοί ή ανισοτικοί
- **Το πλήθος των μεταβλητών τους:** μια μεταβλητή (αυτοί οι περιορισμοί είναι πάντα ανισοτικοί, και συνήθως αποκαλούνται όρια), πολλές μεταβλητές
- **Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά τους:** συνέχεια, μονοτονία, γραμμικότητα, κυρτότητα...επόμενη διάλεξη !



Περιορισμοί: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?



Παράμετροι

- ...ποιες είναι οι ποσότητες που θεωρούνται γνωστές και σταθερές?
- Αποτελούν δηλαδή ποσότητες [της γενικής μορφής $\alpha, \beta, \gamma \dots$] η τιμή των οποίων θεωρείται γνωστή (δεδομένη) και είναι σταθερή στα πλαίσια του εξεταζόμενου προβλήματος



Παράμετροι: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?



Προκλήσεις εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης

- Ο μελετητής αντιμετωπίζει δύο βασικές προκλήσεις:
 1. **Διατύπωση προβλήματος:** Πώς να διατυπώσω εύστοχα την ερώτηση που με απασχολεί ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης? Ποιες (πρέπει να) είναι οι μεταβλητές απόφασης / αντικειμενική συνάρτηση / περιορισμοί / παράμετροι ?
- Η πρόκληση αυτή αντιμετωπίζεται μέσω της καλής γνώσης των φυσικών και πρακτικών πτυχών της εκάστοτε εφαρμογής.
- Λόγω της μεγάλης ποικιλίας εφαρμογών, δεν θα ασχοληθούμε με αυτήν την πρόκληση σε αυτό το μάθημα > μεταβλητές απόφασης / αντικειμενική συνάρτηση / περιορισμοί / παράμετροι θα δίνονται

...ας δούμε όμως ένα σχετικό παράδειγμα... (1)

- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας? (και ας υποθέσουμε πως μας ενδιαφέρει μία μόνο ώρα)
- **Αντικειμενική συνάρτηση:** συνολικό κόστος παραγωγής > το οποίο δίνεται από το άθροισμα του επιμέρους κόστους της κάθε μονάδας i > το οποίο εκφράζεται από μια συνάρτηση $C_i(p_i) = \alpha_i * p_i^2 + \beta_i * p_i + \gamma_i$ όπου p_i η παραγόμενη ισχύς της μονάδας i
- Άρα η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως:
$$\min \sum_i C_i(p_i) = \min \sum_i \alpha_i * p_i^2 + \beta_i * p_i + \gamma_i$$

...ας δούμε όμως ένα σχετικό παράδειγμα... (2)

- **Μεταβλητές απόφασης:** η παραγόμενη ισχύς p_i κάθε μονάδας $i >$ το πλήθος των μεταβλητών είναι ίσο με το πλήθος των μονάδων
- **Περιορισμοί:** το άθροισμα της παραγόμενης ισχύος όλων των μονάδων παραγωγής πρέπει να ικανοποιεί τη συνολική ζήτηση της εξεταζόμενης ώρας: $\sum_i p_i = D$
- **Παράμετροι:** τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης κόστους της κάθε μονάδας $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ καθώς και η συνολική ζήτηση D



...ας δούμε όμως ένα σχετικό παράδειγμα...(3)

- Η τελική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι:

$$\min \sum_i \alpha_i * p_i^2 + \beta_i * p_i + \gamma_i$$

- ως προς τις (συνεχείς) μεταβλητές απόφασης $p_i, \forall i$
- υπό τον (ισοτικό) περιορισμό

$$\sum_i p_i = D$$

...όμως κάποιος ειδικός στα ΣΗΕ θα έλεγε πως αυτή η απλή διατύπωση δεν είναι ακριβής...



Προκλήσεις για το μελετητή εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης

- Ο μελετητής αντιμετωπίζει δύο βασικές προκλήσεις:
2. **Επίλυση προβλήματος:** Με δεδομένη τη διατύπωση του προβλήματος (μεταβλητές απόφασης / αντικειμενική συνάρτηση / περιορισμοί / παράμετροι), πώς να το επιλύσω?
 - Η πρόκληση αυτή δεν εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή, και αντιμετωπίζεται μέσω κατάλληλων αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων (η πιο κατάλληλη εξαρτάται από τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των μεταβλητών απόφασης / αντικειμενικής συνάρτησης / περιορισμών)
 - ...με αυτήν ακριβώς την πρόκληση θα ασχοληθούμε σε αυτό το μάθημα!



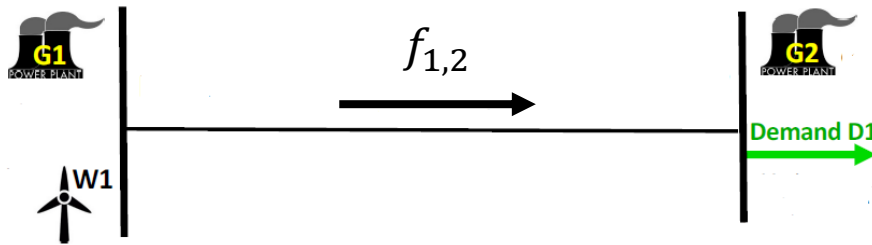
Λύσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης (1)

- Ως μία **λύση (solution)** ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ορίζουμε ένα οποιοδήποτε σετ τιμών (όλων) των μεταβλητών απόφασης x που καθορίζουμε
- **Εφικτή λύση (feasible solution)** είναι μια λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς (...αλλά δεν είναι απαραίτητα η βέλτιστη λύση!)
 - Πόσες υπάρχουν (καμμία / μία / πολλές)?
- **Βέλτιστη λύση (optimal solution)** είναι η λύση x^* που ΚΑΙ είναι εφικτή ΚΑΙ μεγιστοποιεί / ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση
 - Πόσες υπάρχουν (καμμία / μία / πολλές)?



Λύσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης (2)

- Όταν εισέρχεται ένας νέος περιορισμός ή ένας πιο αυστηρός περιορισμός σε ένα πρόβλημα...



- A) Περίπτωση χωρίς περιορισμούς: αγνοούμε τους περιορισμούς του δικτύου
- B) Περίπτωση με περιορισμούς: περιορισμοί δικτύου με $F_{1,2}^{max} = 80MW$
- Γ) Περίπτωση με πιο αυστηρούς περιορισμούς: περιορισμοί δικτύου με $F_{1,2}^{max} = 60MW$

- ...το **πεδίο ορισμού** ή (ισοδύναμα) ο **χώρος λύσεων** (solution space) του προβλήματος μειώνεται...

- ...και η βέλτιστη λύση θα είναι ίδια ή χειρότερη (σίγουρα όχι καλύτερη !)

Πρόβλημα $\max f(x)$: ίδια ή μικρότερη $f(x^*)$

Πρόβλημα $\min f(x)$: ίδια ή μεγαλύτερη $f(x^*)$



Πολυπλοκότητα προβλημάτων βελτιστοποίησης

- **Πολυπλοκότητα:** πόσο “δύσκολη” είναι (πόσο μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις έχει) η επίλυση ενός προβλήματος
- Η πολυπλοκότητα ενός προβλήματος εξαρτάται από δύο παράγοντες:
 - **Μέγεθος προβλήματος:** το πλήθος των μεταβλητών απόφασης και το πλήθος των περιορισμών
 - **Μαθηματικά χαρακτηριστικά προβλήματος:** συνέχεια, γραμμικότητα, κυρτότητα... επόμενη διάλεξη !



Παραδοχή μαθηματικών χαρακτηριστικών στο μάθημα

- Θα καλύψουμε όλες τις περιπτώσεις...
- ...εκτός από προβλήματα με δυαδικές / ακέραιες μεταβλητές απόφασης (είτε με “mixed-integer problems” που περιέχουν και συνεχείς και δυαδικές / ακέραιες μεταβλητές απόφασης)...
- ...τα τελευταία εξετάζονται σε μάθημα του 8^{ου} εξαμήνου (Γραμμική και Συνδυαστική Βελτιστοποίηση)



Ισχύς παραδοχής: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?

Δεν ικανοποιεί την παραδοχή > οι μεταβλητές απόφασης είναι διακριτές

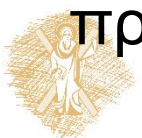
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?

Ικανοποιεί την παραδοχή > οι μεταβλητές απόφασης είναι συνεχείς



Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης

- Οι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες
- **Αναλυτικές μέθοδοι (analytical methods):** η βέλτιστη λύση βρίσκεται με ακρίβεια και μπορεί να εκφραστεί σε “κλειστή μορφή (closed form)”, διατυπώνοντας τις *αναγκαίες και ικανές συνθήκες* για την εύρεσή της > συνήθως για προβλήματα μικρότερης πολυπλοκότητας
- **Αριθμητικές μέθοδοι (numerical methods):** η βέλτιστη λύση βρίσκεται με κάποια προσέγγιση, συνήθως μέσω κάποιου *επαναληπτικού αλγορίθμου* > συνήθως για προβλήματα μεγαλύτερης πολυπλοκότητας



Περιληπτική δομή επόμενων διαλέξεων

- Μαθηματικά χαρακτηριστικά μεταβλητών και συναρτήσεων ...συνέχεια, γραμμικότητα, κυρτότητα... (2^η εβδομάδα)
- Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής (3^η εβδομάδα)
- Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (4^η-8^η εβδομάδα)
- Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για συναρτήσεις μιας μεταβλητής (9^η εβδομάδα)
- Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (10^η-11^η εβδομάδα)
- Διάσπαση προβλημάτων βελτιστοποίησης / Επανάληψη (12^η -13^η εβδομάδα)



Τέλος Ενότητας