# Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

## Ενότητα 5: Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

# Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων

- **Ενότητα 1: Εισαγωγή στο μάθημα**

- **Ενότητα 2: Απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις**

- **Ενότητα 3: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής**

- **Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών**
  - ➢ Μη-γραμμικά προβλήματα (χωρίς περιορισμούς / με ισοτικούς / με ανισοτικούς / με ισοτικούς και ανισοτικούς >>> μέθοδος Lagrange και συνθήκες KKT)
  - ➢ Γραμμικά προβλήματα (γεωμετρική επίλυση, αναλυτική επίλυση με μέθοδο Simplex)

# Σύνδεση προηγούμενων με τη σημερινή διάλεξη

- Οι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- **Αναλυτικές μέθοδοι**: η βέλτιστη λύση βρίσκεται με ακρίβεια και μπορεί να εκφραστεί σε “κλειστή μορφή (closed form)”, διατυπώνοντας τις *αναγκαίες και ικανές συνθήκες* για την εύρεσή της > συνήθως για προβλήματα μικρότερης πολυπλοκότητας

Με αυτές ασχοληθήκαμε στις Ενότητες 3 (1 μεταβλητής) και 4 (πολλών μεταβλητών)

- **Αριθμητικές μέθοδοι**: η βέλτιστη λύση βρίσκεται με κάποια προσέγγιση, συνήθως μέσω κάποιου *επαναληπτικού αλγορίθμου* > συνήθως για προβλήματα μεγαλύτερης πολυπλοκότητας

Με αυτές θα ασχοληθούμε σήμερα (1 μεταβλητής) και στην Ενότητα 6 (πολλών μεταβλητών)

# Κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων

- Οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

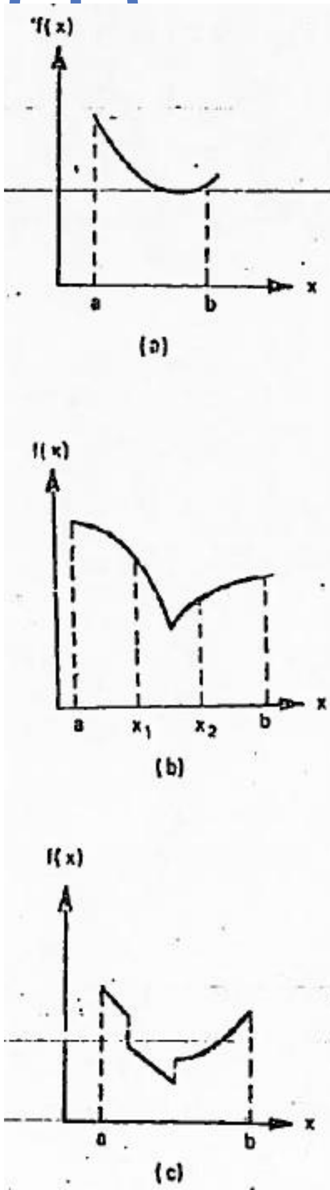
➢ **Μέθοδοι απευθείας έρευνας**: επαναληπτική αναζήτηση βέλτιστης λύσης με βάση ΜΟΝΟ την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών

Εφαρμόσιμες κυρίως σε προβλήματα 1 μεταβλητής (σήμερα)…αλλά δυσκολία για προβλήματα πολλών μεταβλητών

➢ **Μέθοδοι χρήσης παραγώγων**: επαναληπτική αναζήτηση βέλτιστης λύσης με βάση ΚΑΙ την τιμή παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών

Εφαρμόσιμες σε προβλήματα 1 μεταβλητής και πολλών μεταβλητών…αλλά ανάγκη υπολογισμού παραγώγων

# Μέθοδοι απευθείας έρευνας για προβλήματα 1 μεταβλητής (1)




• Στα προβλήματα 1 μεταβλητής, οι μέθοδοι απευθείας έρευνας ακολουθούν τη λογική της απαλοιφής διαστημάτων….

• Οι μέθοδοι αυτές εξετάζουν ένα διάστημα της μεταβλητής στο οποίο **υποτίθεται** πως η αντικειμενική συνάρτηση έχει **ένα μόνο τοπικό ακρότατο** (ελάχιστο ή μέγιστο):

•…δηλαδή ένα διάστημα στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση **υποτίθεται** πως είναι **μονοτροπική**…

•…ανεξάρτητα του αν παρουσιάζει ασυνέχεια βάθμωσης (περίπτωση b σχήματος) ή ασυνέχεια καμπύλης (περίπτωση c σχήματος) σε κάποια σημεία του διαστήματος

# Μέθοδοι απευθείας έρευνας για προβλήματα 1 μεταβλητής (2)

• Στη συνέχεια **περιορίζουν επαναληπτικά αυτό το διάστημα**, διασφαλίζοντας όμως πως το νέο διάστημα εξακολουθεί να περιέχει το τοπικό ακρότατο…

•…μέχρι να προσεγγιστεί το τοπικό ακρότατο **με μια επιθυμητή ακρίβεια**…

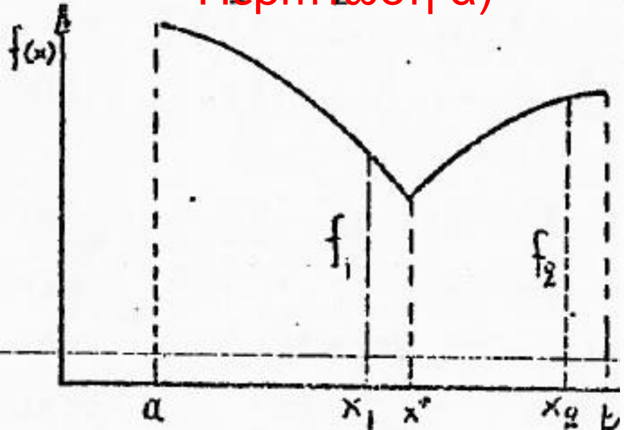
• Έστω για παράδειγμα πως αναζητούμε το **ελάχιστο** μιας συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$ (στο οποίο η συνάρτηση υποτίθεται μονοτροπική)…

•…αν πάρουμε δύο ενδιάμεσα σημεία της συνάρτησης $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 < x_2$, και υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης σε καθένα από τα δύο αυτά σημεία, τότε μπορεί να προκύψουν 3 περιπτώσεις…

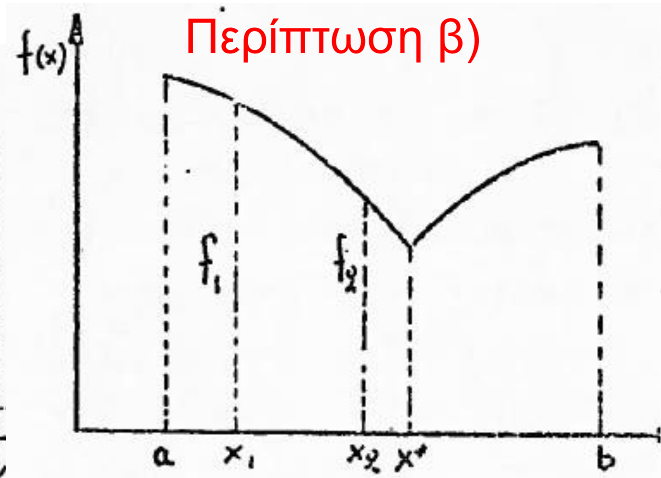
# Μέθοδοι απευθείας έρευνας για προβλήματα 1 μεταβλητής (3)

- **Περίπτωση α)** $f(x_1) < f(x_2)$, τότε το ελάχιστο δεν μπορεί να βρίσκεται δεξιά του $x_2$, επομένως το νέο διάστημα αναζήτησης περιορίζεται στο $[a, x_2]$
- **Περίπτωση β)** $f(x_1) > f(x_2)$, τότε το ελάχιστο δεν μπορεί να βρίσκεται αριστερά του $x_1$, επομένως το νέο διάστημα αναζήτησης περιορίζεται στο $[x_1, b]$
- **Περίπτωση γ)** (*ειδική / σπάνια περίπτωση*) $f(x_1) = f(x_2)$, τότε το νέο διάστημα αναζήτησης περιορίζεται στο $[x_1, x_2]$

Περίπτωση α)




Περίπτωση β)




Περίπτωση γ)

# Μέθοδοι απευθείας έρευνας για προβλήματα 1 μεταβλητής (4)

• Η παραπάνω γενική διαδικασία απαλοιφής διαστημάτων εξειδικεύεται ανάλογα με τη μέθοδο βάσει της οποίας επιλέγουμε τα εσωτερικά σημεία…

•…θα εξετάσουμε 4 διαφορετικές μεθόδους απαλοιφής:

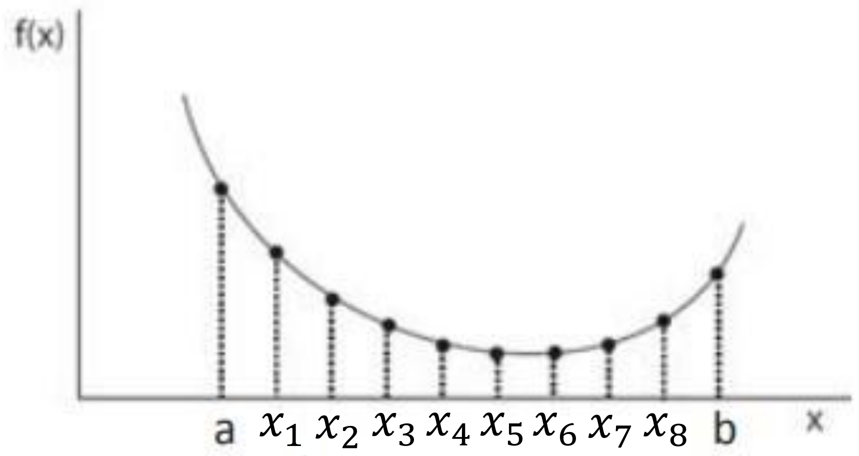
- **Μέθοδος ίσων διαστημάτων ή πλήρους απαρίθμησης**
  **Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων**
- **Μέθοδος διχοτόμου**
- **Μέθοδος Fibonacci**

# Μέθοδος ίσων διαστημάτων (1)

• Διαιρώ το αρχικό διάστημα $[a, b]$ μήκους $L = b - a$, σε $N + 1$ ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{N+1}$

•…επομένως προκύπτουν $N$ ενδιάμεσα (μεταξύ $a$ και $b$) σημεία $x_i = a + \frac{i(b-a)}{N+1}$, όπου $i = 1,2, . . , N$

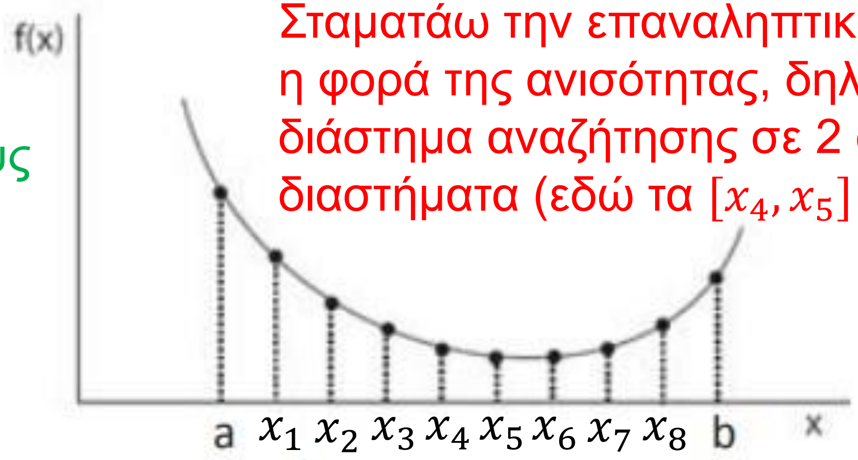
• Παράδειγμα: διαιρώ το αρχικό διάστημα σε $N + 1 = 9$ ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{9}$ οπότε προκύπτουν $N = 8$ ενδιάμεσα σημεία $x_1, x_2, . . , x_8$



# Μέθοδος ίσων διαστημάτων (2)

- Ακολουθώντας τη γενική διαδικασία απαλοιφής διαστημάτων (διαφάνεια 7), περιορίζω βηματικά το νέο διάστημα αναζήτησης
  - Αφού $f(a) > f(x_1)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[a, b]$
  - Αφού $f(x_1) > f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, b]$
  - …
  - Αφού $f(x_4) > f(x_5)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_4, b]$
  - Αφού $f(x_5) < f(x_6)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_4, x_6]$

Ονομάζεται και μέθοδος πλήρους απαρίθμησης (exhaustive search)…γιατί?




Σταματάω την επαναληπτική διαδικασία όταν αλλάξει η φορά της ανισότητας, δηλαδή όταν περιοριστεί το διάστημα αναζήτησης σε 2 συνεχόμενα υπο-διαστήματα (εδώ τα $[x_4, x_5]$ και $[x_4, x_6]$)

# Μέθοδος ίσων διαστημάτων (3)

• Με ποια ακρίβεια έχει προσεγγιστεί το τοπικό ελάχιστο ?

•… η **σχετική ακρίβεια $\varepsilon$ (%)** ορίζεται ως το μήκος του τελικού προς το μήκος του αρχικού διαστήματος…

•…και αφού το τελικό διάστημα έχει μήκος 2 υπο-διαστημάτων, προκύπτει $\varepsilon = \frac{\frac{2(b-a)}{N+1}}{(b-a)} = \frac{2}{N+1}$

Δεν εξαρτάται από το μήκος του αρχικού διαστήματος ή τη συνάρτηση

• Με άλλα λόγια, αν σε ένα πρόβλημα επιθυμώ προσέγγιση της βέλτιστης λύσης με μια ακρίβεια (ίση ή μικρότερη από) $\varepsilon^*$

•…θα πρέπει $\frac{2}{N+1} \leq \varepsilon^* \rightarrow 2 \leq N\varepsilon^* + \varepsilon^*$

•…δηλαδή να ορίσω πλήθος ενδιάμεσων σημείων $N$ (ίσο ή μεγαλύτερο από) $\frac{2}{\varepsilon^*} - 1$

Όσο καλύτερη ακρίβεια επιθυμώ ($\varepsilon^*$), τόσο περισσότερα ενδιάμεσα σημεία πρέπει να εξετάσω ($N$)…άρα τόσο περισσότερους υπολογισμούς της τιμής της συνάρτηση πρέπει να κάνω (γενικά $N+2$, ενδιάμεσα συν οριακά σημεία)

# Παράδειγμα μεθόδου ίσων διαστημάτων (1)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x-100)^2$ στο αρχικό διάστημα $[a,b] = [90,110]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$
  - Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το πλήθος ενδιάμεσων σημείων ως $N = \frac{2}{\varepsilon^*} - 1 = 10 - 1 = 9$
  - Άρα διαιρώ το αρχικό διάστημα σε $N+1 = 10$ ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{N+1} = \frac{20}{10} = 2$
  - …και τα ενδιάμεσα σημεία είναι τα $x_i = a + \frac{i(b-a)}{N+1}$, όπου $i = 1,2,..,N$, δηλαδή $x_1 = 92, x_2 = 94, .., x_9 = 108$

# Παράδειγμα μεθόδου ίσων διαστημάτων (2)

- Συνάρτηση $f(x) = (x - 100)^2$ στο αρχικό διάστημα $[a, b] = [90{,}110]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon = 20\%$
  - ➢ Περιορίζω βηματικά το νέο διάστημα αναζήτησης

| Βήμα | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 90 | | 92 | | 94 | | 96 | | 98 | | 100 | | 102 |
| $f(x)$ | 100 | > | 64 | > | 36 | > | 16 | > | 4 | > | 0 | < | 4 |

Άλλαξε η φορά…σταματάω

- ➢ Συμπέρασμα: το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο διάστημα $[98, 102]$, με ακρίβεια 20%

Χρειάζομαι γενικά $N + 2 = 11$ υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης για ακρίβεια 20% (άσχετα αν έτυχε στο παραπάνω παράδειγμα να χρειάστηκα μόνο 7)

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΥ: Γενικά απαιτεί μεγάλο αριθμό υπολογισμών…

# Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (1)

- ΙΔΕΑ (για να αντιμετωπίσω το μειονέκτημα της μεθόδου ίσων διαστημάτων): χρειάζομαι μόνο 2 ενδιάμεσα σημεία (και όχι $N$) για να απαλοίψω κάποιο υπο-διάστημα (διαφάνεια 7)
- …άρα διαιρώ το αρχικό διάστημα $[a, b]$ μήκους $L = b - a$, σε 3 ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{3}$
- …επομένως τα 2 ενδιάμεσα σημεία είναι $x_1 = a + \frac{(b-a)}{3}$, και $x_2 = a + \frac{2(b-a)}{3}$

# Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (2)

- Ακολουθώντας τη γενική διαδικασία απαλοιφής (διαφάνεια 7), περιορίζω επαναληπτικά το νέο διάστημα αναζήτησης, απαλοίφοντας (γενικά) το 1/3 του αρχικού διαστήματος:
  - Αν $f(x_1) < f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[a, x_2]$, μήκους $x_2 - a = a + \frac{2(b-a)}{3} - a = \frac{2(b-a)}{3}$
  - Αν $f(x_1) > f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, b]$, μήκους $b - x_1 = b - a - \frac{(b-a)}{3} = \frac{2(b-a)}{3}$
  - Αν $f(x_1) = f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, x_2]$, μήκους $x_2 - x_1 = a + \frac{2(b-a)}{3} - a - \frac{(b-a)}{3} = \frac{(b-a)}{3}$ (ειδική περίπτωση, απαλοίφω τα 2/3 του αρχικού διαστήματος)

# Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (3)

- Στην *επόμενη επανάληψη*, ακολουθώ την ίδια λογική, διαιρώντας τώρα το νέο διάστημα αναζήτησης (στο οποίο κατέληξα στη προηγούμενη επανάληψη) μήκους (γενικά) $\frac{2(b-a)}{3}$, σε $3$ ίσα υπο-διαστήματα μήκους (γενικά) $\frac{1}{3}\frac{2(b-a)}{3}$
- …αφού απαλοίψω (γενικά) το 1/3 του διαστήματος, καταλήγω σε νέο διάστημα αναζήτησης μήκους (γενικά) $\frac{2}{3}\frac{2(b-a)}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (b-a)$
- …κ.ο.κ.

# Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (4)

- Η επαναληπτική διαδικασία εξελίσσεται (γενικά) ως εξής ($k = 0$ υποδεικνύει τα δεδομένα):

| Επανάληψη | Μήκος κάθε υπο-διαστήματος | Μήκος διαστήματος αναζήτησης |
|---|---|---|
| 0 | | $b-a$ |
| 1 | $\frac{1}{3}(b-a)$ | $\frac{2}{3}(b-a)$ |
| 2 | $\frac{1}{3}\frac{2}{3}(b-a)$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^2(b-a)$ |
| 3 | $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2(b-a)$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^3(b-a)$ |
| … | | |
| k | $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{(k-1)}(b-a)$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^k(b-a)$ |

# Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (5)

• Με ποια ακρίβεια έχει προσεγγιστεί το τοπικό ελάχιστο μετά από $k$ επαναλήψεις ?

•…σύμφωνα με τον ορισμό της διαφάνειας 11, και τον πίνακα της προηγούμενης διαφάνειας…

•…προκύπτει σχετική ακρίβεια $\varepsilon = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k (b-a)}{(b-a)} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$

• Με άλλα λόγια, αν σε ένα πρόβλημα επιθυμώ προσέγγιση της βέλτιστης λύσης με μια ακρίβεια (ίση ή μικρότερη από) $\varepsilon^*$

•…θα πρέπει $\left(\frac{2}{3}\right)^k \leq \varepsilon^* \rightarrow k * \ln(\frac{2}{3}) \geq \ln(\varepsilon^*)$

•…δηλαδή να κάνω πλήθος επαναλήψεων $k$ (ίσο ή μεγαλύτερο από) $\frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln(\frac{2}{3})}$

Όσο καλύτερη ακρίβεια επιθυμώ ($\varepsilon^*$), τόσο περισσότερες επαναλήψεις πρέπει να κάνω ($k$)…άρα τόσο περισσότερους υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης πρέπει να κάνω ($2k$, 2 ενδιάμεσα σημεία σε κάθε επανάληψη)

# Παράδειγμα μεθόδου ακολουθιακά ίσων διαστημάτων

• Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο αρχικό διάστημα $[a, b] = [89,107]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$

➢ Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k \geq \frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 3.974 \rightarrow k = 4$

| Επανάληψη | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Μήκος υ-δ | 6 | 4 | 2.667 | 1.778 |
| $x_{1,k}$ | 95 | 99 | 97.667 | 99.445 |
| $x_{2,k}$ | 101 | 103 | 100.334 | 101.223 |
| $f(x_{1,k})$ | 25 | 1 | 5.443 | 0.308 |
| $f(x_{2,k})$ | 1 | 9 | 0.112 | 1.496 |
| $[a_k, b_k]$ | [95,107] | [95,103] | [97.667,103] | [97.667,101.223] |

Σταματάω μετά το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων…αλλά ας κάνω επαλήθευση ακρίβειας $\varepsilon = \frac{101.223-97.667}{107-89} = \frac{3.556}{18} = 0.198$, όντως $\varepsilon \leq \varepsilon^*$

# Παράδειγμα μεθόδου ακολουθιακά ίσων διαστημάτων

• Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο αρχικό διάστημα $[a, b] = [89{,}107]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$

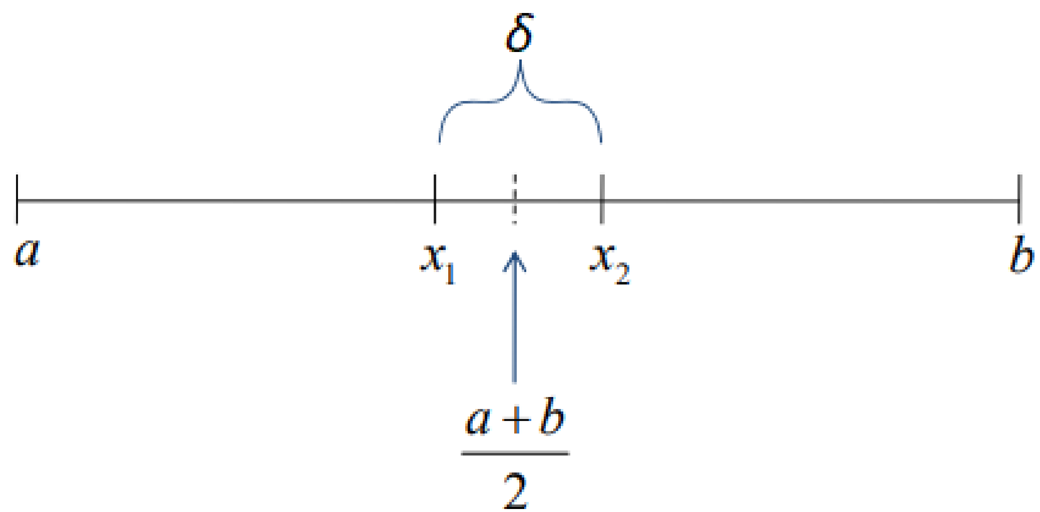
➢ Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k \geq \frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 3.974 \to k = 4$

| Επανάληψη | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Μήκος υ-δ | 6 | 4 | 2.667 | 1.778 |
| $x_{1,k}$ | 95 | 99 | 97.667 | 99.445 |
| $x_{2,k}$ | 101 | 103 | 100.334 | 101.223 |
| $f(x_{1,k})$ | 25 | 1 | 5.443 | 0.308 |
| $f(x_{2,k})$ | 1 | 9 | 0.112 | 1.496 |
| $[a_k, b_k]$ | [95,107] | [95,103] | [97.667,103] | [97.667,101.223] |

Χρειάζομαι $2k = 8$ υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης για ακρίβεια 20%
ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑ σε σχέση με μέθοδο ίσων διαστημάτων (διαφάνεια 13)

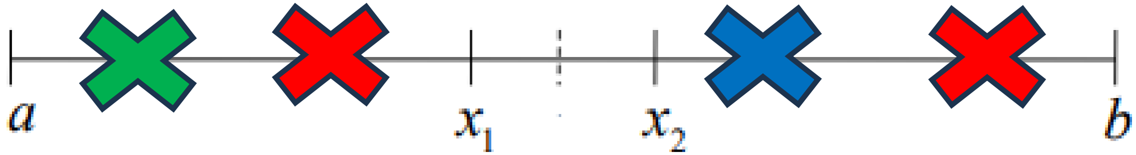
# Μέθοδος διχοτόμου (1)

- Διαιρώ το αρχικό διάστημα $[a,b]$ μήκους $L=b-a$, σε 3 υπο-διαστήματα…
- …με τα 2 ενδιάμεσα σημεία να βρίσκονται “πολύ κοντά” στο μέσο του αρχικού διαστήματος…
- …συγκεκριμένα $x_1=\frac{(a+b)}{2}-\frac{\delta}{2}$, και $x_2=\frac{(a+b)}{2}+\frac{\delta}{2}$ , όπου $\delta$ “πολύ μικρός” θετικός αριθμός
- …(προσεγγιστικά) διαιρώ το αρχικό διάστημα σε 2 ίσα υπο-διαστήματα



# Μέθοδος διχοτόμου (2)

- Ακολουθώντας τη γενική διαδικασία απαλοιφής (διαφάνεια 7), περιορίζω επαναληπτικά το νέο διάστημα αναζήτησης, απαλοίφοντας (γενικά) το ~1/2 του αρχικού διαστήματος:
  - Αν $f(x_1) < f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[a, x_2]$, μήκους $x_2 - a = \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2} - a = \frac{(b-a)}{2} + \frac{\delta}{2} \cong \frac{(b-a)}{2}$
  - Αν $f(x_1) > f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, b]$, μήκους $b - x_1 = b - \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2} \cong \frac{(b-a)}{2}$
  - Αν $f(x_1) = f(x_2)$, νέο διάστημα αναζήτησης το $[x_1, x_2]$, μήκους $x_2 - x_1 = x_2 = \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{(a+b)}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \cong 0$ (ειδική περίπτωση, έχω (σχεδόν) βρει το τοπικό ελάχιστο)



# Μέθοδος διχοτόμου (3)

• Στην *επόμενη επανάληψη*, ακολουθώ την ίδια λογική, διαιρώντας τώρα το νέο διάστημα αναζήτησης (στο οποίο κατέληξα στη προηγούμενη επανάληψη) μήκους (γενικά) $\sim\frac{(b-a)}{2}$, σε 2 (προσεγγιστικά) ίσα υπο-διαστήματα μήκους (γενικά) $\sim\frac{1}{2}\frac{(b-a)}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(b-a)$

•…αφού απαλοίψω (γενικά) το ~1/2 του διαστήματος, καταλήγω σε νέο διάστημα αναζήτησης μήκους (γενικά) $\sim\frac{1}{2}\frac{(b-a)}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(b-a)$

•…κ.ο.κ.

ΙΔΕΑ ΜΕΘΟΔΟΥ: Το διάστημα που απαλοίφεται μετά από κάθε επανάληψη είναι μεγαλύτερο (~1/2 αντί για 1/3), και έτσι το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων και υπολογισμών θα είναι μικρότερο, σε σχέση με τη μέθοδο ακολουθιακά ίσων διαστημάτων

# Μέθοδος διχοτόμου (4)

- Η επαναληπτική διαδικασία εξελίσσεται (γενικά) ως εξής ($k = 0$ υποδεικνύει τα δεδομένα):

| Επανάληψη | Μήκος κάθε υπο-διαστήματος | Μήκος διαστήματος αναζήτησης |
|---|---|---|
| 0 | | $b - a$ |
| 1 | $\sim \frac{1}{2}(b-a)$ | $\sim \frac{1}{2}(b-a)$ |
| 2 | $\sim \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b-a)$ | $\sim \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b-a)$ |
| 3 | $\sim \left(\frac{1}{2}\right)^3 (b-a)$ | $\sim \left(\frac{1}{2}\right)^3 (b-a)$ |
| … | | |
| k | $\sim \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a)$ | $\sim \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a)$ |

# Μέθοδος διχοτόμου (5)

- Με ποια ακρίβεια έχει προσεγγιστεί το τοπικό ελάχιστο μετά από $k$ επαναλήψεις ?
- …σύμφωνα με τον ορισμό της διαφάνειας 11, και τον πίνακα της προηγούμενης διαφάνειας…
- …προκύπτει σχετική ακρίβεια $\varepsilon \cong \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a)}{(b-a)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- Με άλλα λόγια, αν σε ένα πρόβλημα επιθυμώ προσέγγιση της βέλτιστης λύσης με μια ακρίβεια (ίση ή μικρότερη από) $\varepsilon^*$
- …θα πρέπει $\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \varepsilon^* \rightarrow k * \ln(\frac{1}{2}) \geq \ln(\varepsilon^*)$
- …δηλαδή να κάνω πλήθος επαναλήψεων $k$ (ίσο ή μεγαλύτερο από) $\frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln(\frac{1}{2})}$

Όσο καλύτερη ακρίβεια επιθυμώ ($\varepsilon^*$), τόσο περισσότερες επαναλήψεις πρέπει να κάνω ($k$)… άρα τόσο περισσότερους υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης πρέπει να κάνω ($2k$, 2 ενδιάμεσα σημεία σε κάθε επανάληψη)

# Παράδειγμα μεθόδου διχοτόμου

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89,107]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$, και $\delta = 0.2$
  - Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k \geq \frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.322 \rightarrow k = 3$

| Επανάληψη | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Μήκος υ-δ | ~9 | ~4.5 | ~2.25 |
| $x_{1,k}$ | $\frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2} = 97.9$ | $\frac{a_1+b_1}{2} - \frac{\delta}{2} = 102.35$ | $\frac{a_2+b_2}{2} - \frac{\delta}{2} = 100.125$ |
| $x_{2,k}$ | $\frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2} = 98.1$ | $\frac{a_1+b_1}{2} + \frac{\delta}{2} = 102.55$ | $\frac{a_2+b_2}{2} + \frac{\delta}{2} = 100.325$ |
| $f(x_{1,k})$ | 4.41 | 5.523 | 0.016 |
| $f(x_{2,k})$ | 3.61 | 6.503 | 0.106 |
| $[a_k, b_k]$ | [97.9,107] | [97.9,102.55] | [97.9,100.325] |

# Παράδειγμα μεθόδου διχοτόμου

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89,107]$, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon^* = 20\%$, και $\delta = 0.2$
  - ➢ Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k \geq \frac{\ln(\varepsilon^*)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.322 \rightarrow k = 3$

| Επανάληψη | 3 |
|---|---|
| Μήκος υ-δ | ~2.25 |
| $x_{1,k}$ | $\frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{\delta}{2} = 100.125$ |
| $x_{2,k}$ | $\frac{a_2 + b_2}{2} + \frac{\delta}{2} = 100.325$ |
| $f(x_{1,k})$ | 0.016 |
| $f(x_{2,k})$ | 0.106 |
| $[a_k, b_k]$ | [97.9,100.325] |

Σταματάω μετά το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων…αλλά ας κάνω επαλήθευση ακρίβειας $\varepsilon = \frac{100.325-97.9}{107-89} = \frac{2.425}{18} = 0.135$, όντως $\varepsilon \leq \varepsilon^*$

Χρειάζομαι $2k = 6$ υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης για ακρίβεια 20%

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑ σε σχέση με μέθοδο ακολουθιακά ίσων διαστημάτων (διαφάνεια 20)

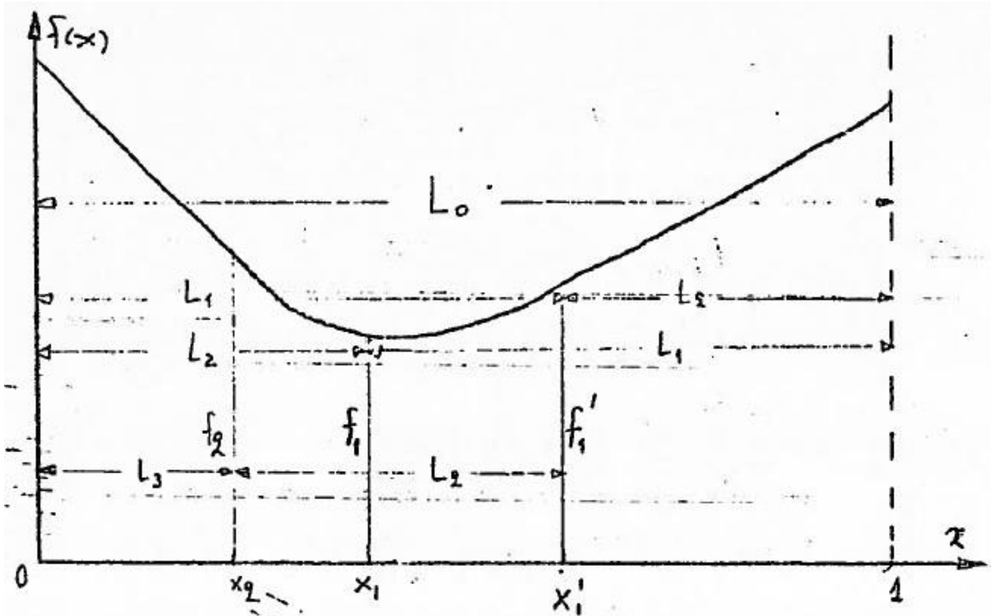
# Μέθοδος Fibonacci (1)

• Οι μέθοδοι ακολουθιακά ίσων διαστημάτων και διχοτόμου απαιτούν σε κάθε επανάληψη τον ορισμό 2 νέων ενδιάμεσων σημείων (και τον αντίστοιχο υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης)…

•…ΙΔΕΑ: αν τα υπο-διαστήματα στα οποία χωρίσω το διάστημα αναζήτησης είναι αλληλο-καλυπτόμενα, σε κάθε επανάληψη θα απαιτείται ο ορισμός 1 μόνο νέου ενδιάμεσου σημείου…

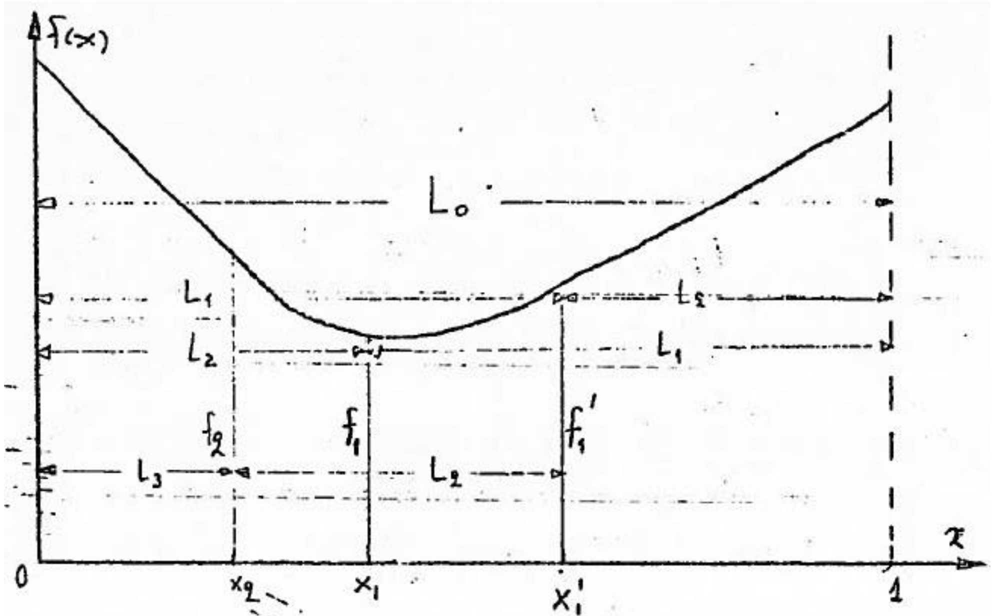
# Μέθοδος Fibonacci (2)

- Έστω πως το αρχικό διάστημα είναι $[a, b] = [0,1]$ (χωρίς απώλεια γενικότητας καθώς μπορώ να μετασχηματίσω $y = \frac{x-a}{b-a}$ και να αναζητήσω το τοπικό ελάχιστο ως προς $y$)…
- …θεωρώ 2 ενδιάμεσα σημεία $x_1$ και $x_1'$ με $x_1 < x_1'$, τέτοια ώστε τα 2 αλληλο-καλυπτόμενα υπο-διαστήματα $[0, x_1']$ και $[x_1, 1]$ να έχουν το ίδιο μήκος $L_1$…



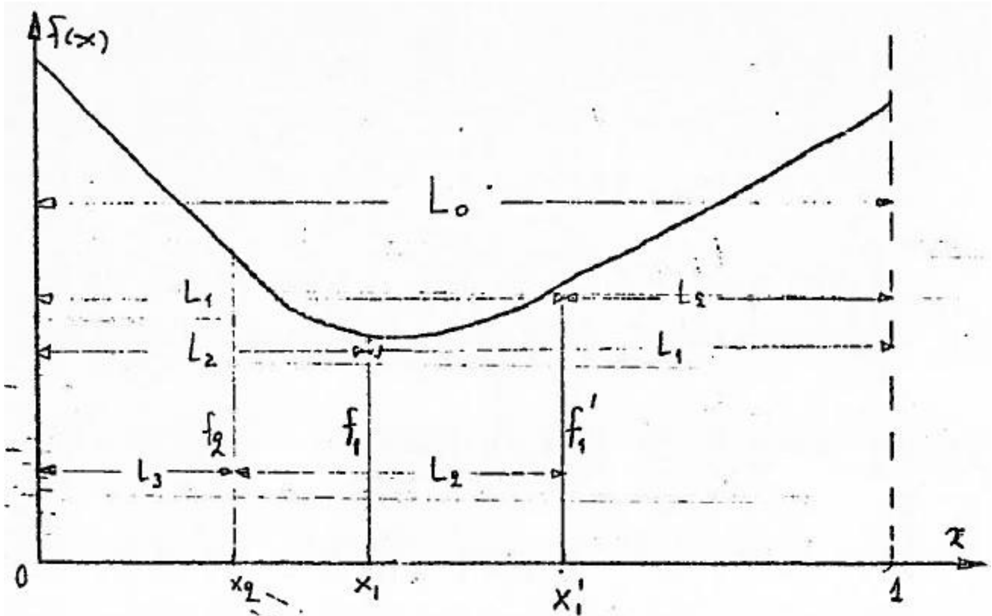
# Μέθοδος Fibonacci (3)

• Ακολουθώντας τη γενική διαδικασία απαλοιφής (διαφάνεια 7), “απαλοίφω” το ένα από τα 2 υπο-διαστήματα…
•…έστω $f(x_1) < f(x_1')$ (όπως στο σχήμα)…τότε το νέο διάστημα αναζήτησης είναι το $[0, x_1']$…
•…στην επόμενη επανάληψη χρειάζομαι 2 ενδιάμεσα σημεία στο $[0, x_1']$…έχω ήδη όμως ένα (το $x_1$) από την προηγούμενη επανάληψη!



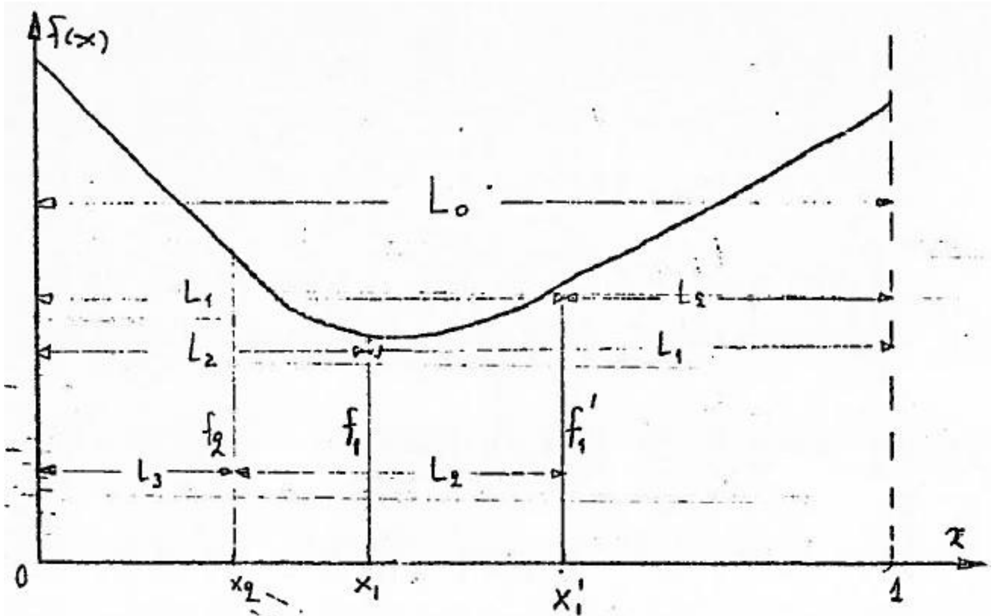
# Μέθοδος Fibonacci (4)

- …επιλέγω το δεύτερο σημείο $x_2$, έτσι ώστε τα 2 αλληλο-καλυπτόμενα υπο-διαστήματα $[0, x_1]$ και $[x_2, x_1']$ να έχουν το ίδιο μήκος $L_2$
- …"απαλοίφω" το ένα από τα 2 υπο-διαστήματα…
- …έστω $f(x_2) > f(x_1)$ (όπως στο σχήμα)…τότε το νέο διάστημα αναζήτησης είναι το $[x_2, x_1']$…



# Μέθοδος Fibonacci (5)

•…αν το διάστημα $[0, x_2]$ έχει μήκος $L_3$…
•…παρατηρούμε πως ισχύει $L_0 = L_1 + L_2$ και $L_1 = L_2 + L_3$…
•…επομένως αν ακολουθήσω επαναληπτικά την ίδια διαδικασία θα ισχύει η αναδρομική σχέση $L_j = L_{j+1} + L_{j+2}$, με $j = 0,1,2.., N-1$, όπου $N-1$ υποθέτω πως είναι το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων…



# Μέθοδος Fibonacci (6)

- Αν θεωρήσω το $L_N$ ως μια σταθερή (και ελπίζω πολύ μικρή!) παράμετρο, και $L_{N-1} = L_N$, τότε η προηγούμενη αναδρομική σχέση γράφεται αναλυτικά:
  - $L_N = 1 * L_N = F_0 * L_N$
  - $L_{N-1} = 1 * L_N = F_1 * L_N$
  - $L_{N-2} = L_{N-1} + L_N = (F_0 + F_1) * L_N = F_2 * L_N$
  - …
  - $L_{N-I} = L_{N-I+1} + L_{N-I+2} =..= F_I * L_N$
  - …
  - $L_1 = L_2 + L_3 =..= F_{N-1} * L_N$
  - $L_0 (= 1) = L_1 + L_2 =..= F_N * L_N$

| $N$ | $F_N$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 8 |
| 6 | 13 |
| 7 | 21 |
| 8 | 34 |
| 9 | 55 |
| … | … |

Οι αριθμοί αυτοί είναι οι αριθμοί Fibonacci, οι οποίοι προκύπτουν από την ακολουθία $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$, με $F_0 = 1,\ F_1 = 1$

# Μέθοδος Fibonacci (7)

- Αν θεωρήσω το $L_N$ ως μια σταθερή (και ελπίζω πολύ μικρή!) παράμετρο, και $L_{N-1} = L_N$, τότε η προηγούμενη αναδρομική σχέση γράφεται αναλυτικά:
  - $L_N = 1 * L_N = F_0 * L_N$
  - $L_{N-1} = 1 * L_N = F_1 * L_N$
  - $L_{N-2} = L_{N-1} + L_N = (F_0 + F_1) * L_N = F_2 * L_N$
  - $\dots$
  - $\boxed{L_{N-I} = L_{N-I+1} + L_{N-I+2} =..= F_I * L_N}$
  - $\dots$
  - $L_1 = L_2 + L_3 =..= F_{N-1} * L_N$
  - $\boxed{L_0 (= 1) = L_1 + L_2 =..= F_N * L_N}$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει $L_N = \frac{1}{F_N}$ (γενικότερα, αν το αρχικό διάστημα είναι $[a, b]$, προκύπτει $L_N = \frac{L_0}{F_N}$)…

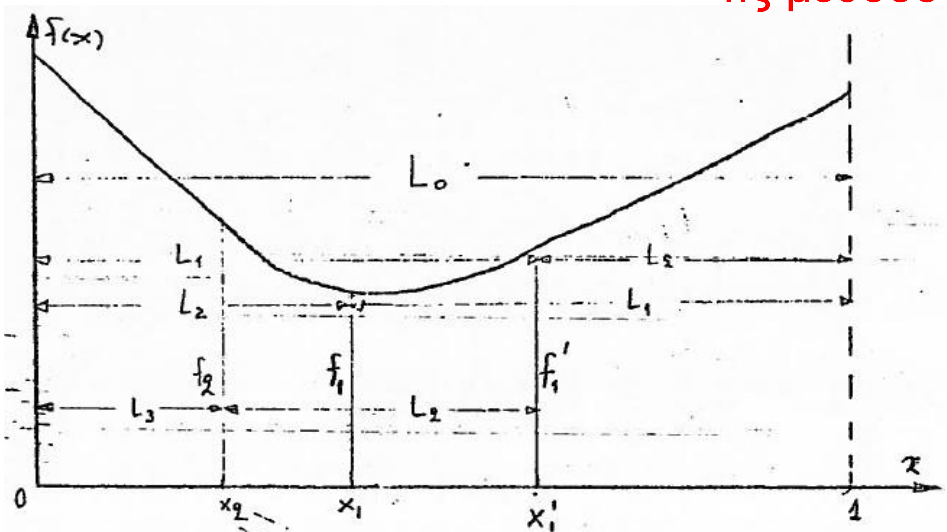
…και επίσης ισχύει η αναδρομική σχέση $L_i = F_{N-i} * L_N$ με $i = 0,1,..,N$

…η οποία σε συνδυασμό με την προηγούμενη (πράσινη) σχέση, δίνει $L_i = \frac{F_{N-i}}{F_N}$ με $i = 0,1,..,N$ (γενικότερα, αν το αρχικό διάστημα είναι $[a, b]$, δίνει $L_i = \frac{F_{N-i}}{F_N} L_0$)

# Μέθοδος Fibonacci (8)

- …πηγαίνοντας πίσω στη γραφική απεικόνιση, η τελευταία (μπλε) σχέση σημαίνει πως $L_1 = \frac{F_{N-1}}{F_N}$ , $L_2 = \frac{F_{N-2}}{F_N}$ κ.ο.κ.
- …γενικότερα, $L_1 = \frac{F_{N-1}}{F_N} L_0$ , $L_2 = \frac{F_{N-2}}{F_N} L_0$ κ.ο.κ.
- …άρα $x_1 = a + \frac{F_{N-2}}{F_N} L_0 = b - \frac{F_{N-1}}{F_N} L_0$
- …και $x_1' = a + \frac{F_{N-1}}{F_N} L_0 = b - \frac{F_{N-2}}{F_N} L_0$

Αποδεικνύεται πως η μέθοδος Fibonacci απαιτεί τους λιγότερους υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης από όλες τις μεθόδους απαλοιφής (γιατί?)



# Μέθοδος Fibonacci (9)

• Με ποια ακρίβεια έχει προσεγγιστεί το τοπικό ελάχιστο ?

•…η **απόλυτη** ακρίβεια ορίζεται ως το μήκος του τελικού διαστήματος αναζήτησης…

•…δηλαδή ως ε $= L_N = \frac{L_0}{F_N}$

• Με άλλα λόγια, αν σε ένα πρόβλημα επιθυμώ προσέγγιση της βέλτιστης λύσης με μια ακρίβεια (ίση ή μικρότερη από) $\varepsilon^*$

•…θα πρέπει $\frac{L_0}{F_N} \leq \varepsilon^* \rightarrow F_N \geq \frac{L_0}{\varepsilon^*}$

•…έτσι επιλέγω το μέγιστο αριθμό Fibonacci $F_N$ που θα χρησιμοποιηθεί, και το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k = N - 1$ (διαφάνεια 32)

Όσο καλύτερη ακρίβεια επιθυμώ, τόσο περισσότερες επαναλήψεις (άρα τόσο περισσότερους υπολογισμούς) θα πρέπει να κάνω

# Παράδειγμα μεθόδου Fibonacci (1)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89{,}109]$, με επιθυμητή απόλυτη ακρίβεια $\varepsilon^* = 1$

➢ Βάσει της επιθυμητής ακρίβειας, καθορίζω το μέγιστο αριθμό Fibonacci που θα χρησιμοποιηθεί ως $F_N \geq \frac{L_0}{\varepsilon^*} = 20 \rightarrow F_N = 21$, που αντιστοιχεί σε $N = 7$…

➢ …και επομένως το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων ως $k = N - 1 = 6$

| $N$ | $F_N$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 8 |
| 6 | 13 |
| 7 | 21 |
| 8 | 34 |
| 9 | 55 |
| … | … |

# Παράδειγμα μεθόδου Fibonacci (2)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89,109]$, με επιθυμητή απόλυτη ακρίβεια $\varepsilon^* = 1$

➢ Στην 1η επανάληψη, υπολογίζω τα $x_{1,k}$ και $x_{2,k}$ (διαφάνεια 35), και -αφού $f\left(x_{1,k}\right) > f\left(x_{2,k}\right)$- το νέο διάστημα είναι $\left[x_{1,k}, b\right]$

| Επανάληψη | 1 |
|---|---|
| $x_{1,k}$ | $a_0 + \frac{F_{N-2}}{F_N} L_0 = 89 + \frac{8}{21} 20 = 96.619$ |
| $x_{2,k}$ | $b_0 - \frac{F_{N-2}}{F_N} L_0 = 107 - \frac{8}{21} 20 = 101.381$ |
| $f(x_{1,k})$ | 11.431 |
| $f(x_{2,k})$ | 1.907 |
| $[a_k, b_k]$ | [96.619,109] |

# Παράδειγμα μεθόδου Fibonacci (3)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x-100)^2$ στο διάστημα $[a,b] = [89{,}109]$, με επιθυμητή απόλυτη ακρίβεια $\varepsilon^* = 1$
  - ➢ Στη 2η επανάληψη, χρησιμοποιώ το ενδιάμεσο σημείο της προηγούμενης επανάληψης που παραμένει ενδιάμεσο στο νέο διάστημα ($x_{2,1}$) αλλά στην "ανάποδη θέση" $x_{1,2}$
  - ➢ …υπολογίζω το δεύτερο σημείο $x_{2,2}$ και επαναλαμβάνω…

| Επανάληψη | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $x_{1,k}$ | $96.619$ | $101.381$ |
| $x_{2,k}$ | $101.381$ | $b_1 - \frac{F_{N-3}}{F_N} L_0 = 109 - \frac{5}{21} 20 = 104.238$ |
| $f(x_{1,k})$ | 11.431 | 1.907 |
| $f(x_{2,k})$ | 1.907 | 17.961 |
| $[a_k, b_k]$ | [96.619,109] | [96.619,104.238] |

# Παράδειγμα μεθόδου Fibonacci (4)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89,109]$, με επιθυμητή απόλυτη ακρίβεια $\varepsilon^* = 1$
  - Στην 3η επανάληψη, χρησιμοποιώ το ενδιάμεσο σημείο της προηγούμενης επανάληψης που παραμένει ενδιάμεσο στο νέο διάστημα ($x_{1,2}$) αλλά στην “ανάποδη θέση” $x_{2,3}$
  - …υπολογίζω το πρώτο σημείο $x_{1,3}$ και επαναλαμβάνω…

| Επανάληψη | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $x_{1,k}$ | $101.381$ | $a_2 + \frac{F_{N-4}}{F_N} L_0 = 96.619 + \frac{3}{21} 20 = 99.476$ |
| $x_{2,k}$ | $104.238$ | $101.381$ |
| $f(x_{1,k})$ | 1.907 | 0.275 |
| $f(x_{2,k})$ | 17.961 | 1.907 |
| $[a_k, b_k]$ | [96.619,104.238] | [96.619,101.381] |

# Παράδειγμα μεθόδου Fibonacci (5)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89,109]$, με επιθυμητή απόλυτη ακρίβεια $\varepsilon^* = 1$
- ➢ Στην 4η επανάληψη, χρησιμοποιώ το ενδιάμεσο σημείο της προηγούμενης επανάληψης που παραμένει ενδιάμεσο στο νέο διάστημα ($x_{1,3}$) αλλά στην "ανάποδη θέση" $x_{2,4}$
- ➢ …υπολογίζω το δεύτερο $x_{1,4}$ σημείο και επαναλαμβάνω…

| Επανάληψη | 3 | 4 |
|---|---|---|
| $x_{1,k}$ | $99.476$ | $a_3 + \frac{F_{N-5}}{F_N} L_0 = 96.619 + \frac{2}{21} 20 = 98.524$ |
| $x_{2,k}$ | $101.381$ | $99.476$ |
| $f(x_{1,k})$ | 0.275 | 2.179 |
| $f(x_{2,k})$ | 1.907 | 0.275 |
| $[a_k, b_k]$ | [96.619,101.381] | [98.524,101.381] |

# Παράδειγμα μεθόδου Fibonacci (6)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x-100)^2$ στο διάστημα $[a,b] = [89{,}109]$, με επιθυμητή απόλυτη ακρίβεια $\varepsilon^* = 1$

➢ Στην 5η επανάληψη, χρησιμοποιώ το ενδιάμεσο σημείο της προηγούμενης επανάληψης που παραμένει ενδιάμεσο στο νέο διάστημα ($x_{2,4}$) αλλά στην "ανάποδη θέση" $x_{1,5}$

➢ …υπολογίζω το δεύτερο $x_{2,5}$ σημείο και επαναλαμβάνω…

| **Επανάληψη** | **4** | **5** |
|---|---|---|
| $x_{1,k}$ | $98.524$ | 99.476 |
| $x_{2,k}$ | $99.476$ | $b_4 - \frac{F_{N-6}}{F_N} L_0 = 101.381 - \frac{1}{21} 20 = 100.429$ |
| $f(x_{1,k})$ | 2.179 | 0.275 |
| $f(x_{2,k})$ | 0.275 | 0.184 |
| $[a_k, b_k]$ | [98.524,101.381] | [99.476,101.381] |

# Παράδειγμα μεθόδου Fibonacci (7)

- Τοπικό ελάχιστο συνάρτησης $f(x) = (x - 100)^2$ στο διάστημα $[a, b] = [89{,}109]$, με επιθυμητή απόλυτη ακρίβεια $\varepsilon^* = 1$
  - Στην 6η επανάληψη, χρησιμοποιώ το ενδιάμεσο σημείο της προηγούμενης επανάληψης που παραμένει ενδιάμεσο στο νέο διάστημα ($x_{2,5}$) αλλά στην "ανάποδη θέση" $x_{1,6}$
  - …υπολογίζω το δεύτερο $x_{2,6}$ σημείο…

| Επανάληψη | 5 | 6 |
|---|---|---|
| $x_{1,k}$ | 99.476 | 100.429 ??? |
| $x_{2,k}$ | 100.429 | $b_5 - \frac{F_{N-7}}{F_N} L_0 = 101.381 - \frac{1}{21} 20 = 100.429$ |
| $f(x_{1,k})$ | 0.275 | 0.184 |
| $f(x_{2,k})$ | 0.184 | 0.184 |
| $[a_k, b_k]$ | [99.476,101.381] | [100.429,100.429] |

# Τέλος Ενότητας