Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (4^{ο} μέρος)

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Δομή προηγούμενων διαλέξεων (προβλήματα πολλών μεταβλητών)

- Προβλήματα χωρίς περιορισμούς
  - ➢ Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - ➢ Παραδείγματα

- Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς
  - ➢ Αναλυτικές μέθοδοι (μέθοδοι απαλοιφής και Lagrange)
  - ➢ Παραδείγματα

1ο μέρος (25/10/2023)

2ο μέρος (08/11/2023)

- Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς
  - ➢ Αναλυτικές μέθοδοι (εσωτερικά και οριακά σημεία)
  - ➢ Παραδείγματα

3ο μέρος (22/11/2023)

- Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς
  - ➢ Αναλυτικές μέθοδοι (και συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker)
  - ➢ Παραδείγματα

Ιδιαιτερότητες γραμμικών προβλημάτων (1)

- …όταν όμως προσπαθήσαμε να λύσουμε το παρακάτω απλό πρόβλημα οικονομικής κατανομής φορτίου:

- **Αντικειμενική συνάρτηση** $\min f(p_1, p_2) = \min 7 * p_1 + 9 * p_2 (€/h)$
- **Ισοτικός περιορισμός** $g(p_1, p_2) = 900 - p_1 - p_2 = 0$
- **Ανισοτικοί περιορισμοί**: $h_1^{min} = 0 - p_1 \leq 0$ και $h_1^{max} = p_1 - 1000 \leq 0$, $h_2^{min} = 0 - p_2 \leq 0$ και $h_2^{max} = p_2 - 400 \leq 0$

- …δεν μπορέσαμε με τη μέθοδο Lagrange να βρούμε τοπικό ακρότατο, παρόλο που η λύση είναι προφανής (η μονάδα 1 είναι η φθηνότερη και έχει την τεχνική δυνατότητα να καλύψει όλη τη ζήτηση: άρα $p_1 = 900$ και $p_2 = 0$)…
- …το παραπάνω περίεργο αποτέλεσμα οφείλεται στο γεγονός πως **αυτό το πρόβλημα είναι αυστηρά γραμμικό!**

Ιδιαιτερότητες γραμμικών προβλημάτων (2)

• Όλες οι αναλυτικές μέθοδοι που εξετάσαμε μέχρι σήμερα στις Ενότητες 3 και 4 (αναγκαίες και ικανές συνθήκες σε εσωτερικά και οριακά σημεία για προβλήματα 1 μεταβλητής, μέθοδος απαλοιφής, μέθοδος Lagrange) περιλαμβάνουν παραγωγίσεις των f, g, h, L και την ακόλουθη επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων που περιλαμβάνουν αυτές τις παραγώγους, για να βρούμε τα σημεία ενδιαφέροντος x^*…

•…όμως οι μεταβλητές x εμφανίζονται στις παραγώγους μόνο όταν οι παραγωγιζόμενες συναρτήσεις είναι μη-γραμμικές…

•…αν οι f, g, h είναι όλες γραμμικές, **όλες οι παραπάνω μέθοδοι δεν μπορούν να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση**

Γραμμικός προγραμματισμός (1)

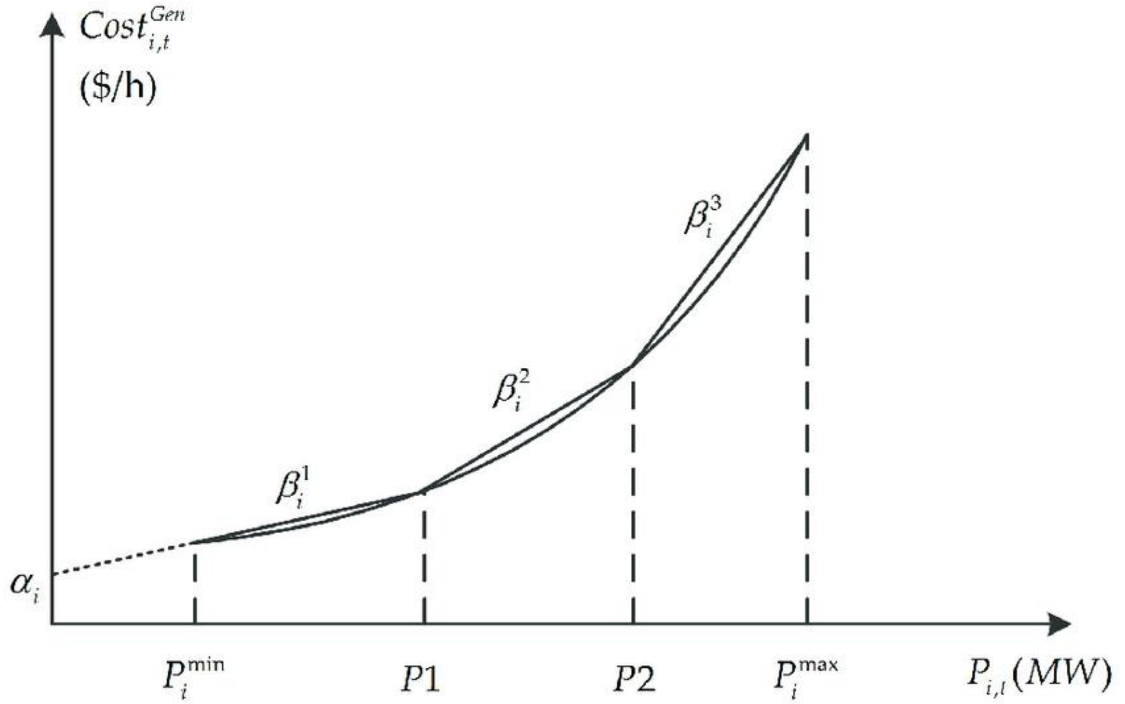
- Για γραμμικά προβλήματα, χρειαζόμαστε ειδικές μεθόδους επίλυσης…

- **Γραμμικός προγραμματισμός** (ή γραμμική βελτιστοποίηση): ο κλάδος της εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης που ασχολείται με γραμμικά προβλήματα

- …αλλά πρέπει να σημειωθεί πως τα **γραμμικά προβλήματα είναι απλούστερα και ταχύτερα στην επίλυσή τους (επειδή δεν χρειάζονται παραγωγίσεις)**…

Γραμμικός προγραμματισμός (2)

- …για αυτό σε πολλές πραγματικές εφαρμογές επιδιώκεται η **προσεγγιστική γραμμικοποίηση** μη-γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης ! (π.χ. αγορές ηλεκτρικής ενέργειας)



Γραμμικός προγραμματισμός: Πρότυπη μορφή (1)

- Η **πρότυπη (ή κανονική) μορφή** ενός γραμμικού προβλήματος διατυπώνεται ως:

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

Όπου $c_1, c_2, \dots, c_n$ γνωστές παράμετροι

- Ανισοτικοί περιορισμοί

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

Όπου $a_{i,j}, b_i$ γνωστές παράμετροι

- Περιορισμοί μη-αρνητικότητας

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$$

Γραμμικός προγραμματισμός: Πρότυπη μορφή (2)

- …ή πιο συνοπτικά:

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\max f(x) = c^T x$$

- Ανισοτικοί περιορισμοί

$$Ax \leq b$$

- Περιορισμοί μη-αρνητικότητας

$$x \geq 0$$

- όπου A πίνακας $m \times n$ γνωστών παραμέτρων, $b \geq 0$ και c διανύσματα $m \times 1$ και $n \times 1$ γνωστών παραμέτρων, και x το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης

Γραμμικός προγραμματισμός: Μετατροπές στην πρότυπη μορφή

• Πώς αντιμετωπίζουμε ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης f? ισοδυναμεί με μεγιστοποίηση της $-f$

• Πώς αντιμετωπίζουμε ανισοτικούς περιορισμούς της μορφής $\geq$? τους μετατρέπουμε στη μορφή $\leq$

• Πώς αντιμετωπίζουμε ισοτικούς περιορισμούς? τους απαλοίφουμε, μειώνοντας τις μεταβλητές απόφασης

• Πώς αντιμετωπίζουμε μεταβλητή $x_i \geq a$, με $a > 0$?
…ορίζουμε μια νέα μεταβλητή $x_i' = x_i - a$ για την οποία ισχύει $x_i' \geq 0$ και μετασχηματίζουμε το αρχικό πρόβλημα ώστε να περιέχει μόνο τη x_i'

• Πώς αντιμετωπίζουμε μεταβλητή $x_i \in (-\infty, +\infty)$ (χωρίς περιορισμούς μη-αρνητικότητας)?
…την αντικαθιστούμε με $x_i = x_i^+ - x_i^-$ για τις οποίες ισχύει $x_i^+, x_i^- \geq 0$

Ιδιαιτερότητες γραμμικών προβλημάτων (3)

- Ας θυμηθούμε το απλούστερο παράδειγμα γραμμικού προβλήματος μιας μεταβλητής (δείτε Ενότητα 3): $f(x) = ax + b$, υπό τους περιορισμούς $A \leq x \leq B$ (ή ισοδύναμα $g_1(x) = A - x \leq 0$ και $g_2(x) = x - B \leq 0$), όπου $a, b, A, B \neq 0$ παράμετροι
  - **Εσωτερικά σημεία**: $f'(x) = a \neq 0, \forall x$ … δεν υπάρχουν τοπικά ελάχιστα (ή μέγιστα)
  - **Οριακά σημεία**: $f'(A) = f'(B) = a$, $g_1'(A) = -1$, $g_2'(B) = 1$ … αν $a > 0$, τότε το A είναι ελάχιστο και το B είναι μέγιστο, ενώ αν $a < 0$, τότε το A είναι μέγιστο και το B είναι ελάχιστο

Η απλή αρχή του γραμμικού προγραμματισμού !!!

- …με άλλα λόγια, η **βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προβλήματος βρίσκεται σε κάποιο οριακό σημείο**…

Γεωμετρική επίλυση γραμμικών προβλημάτων

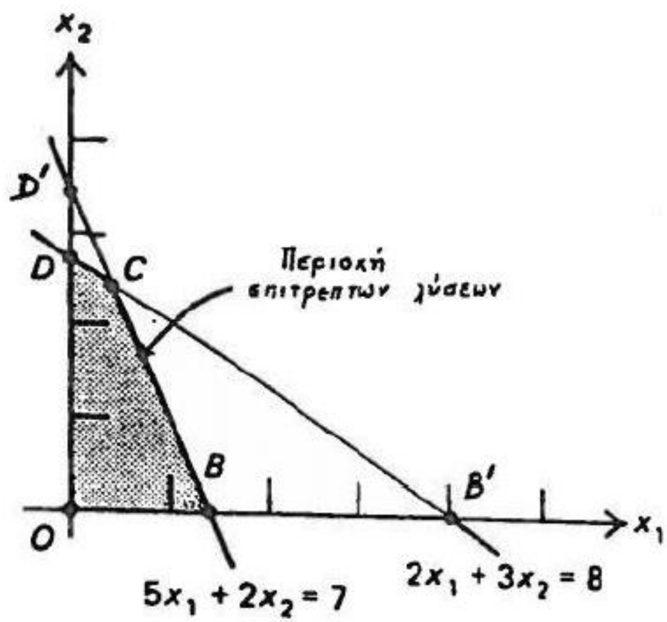
- Βιβλίο: Η βέλτιστη λύση μπορεί να βρεθεί **γεωμετρικά** με "παράλληλη μετακίνηση του υπερεπιπέδου που ορίζει η f έως ότου λάβει τη μέγιστη τιμή του και ταυτόχρονα διατηρείται ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον χώρο μέσα στον οποίο οφείλουν να βρίσκονται οι επιτρεπτές λύσεις (χώρος που ορίζουν οι ανισοτικοί περιορισμοί και οι περιορισμοί μη-αρνητικότητας)"…

- …καλύτερα να το δούμε μέσω ενός παραδείγματος…

Παράδειγμα γεωμετρικής επίλυσης (1)

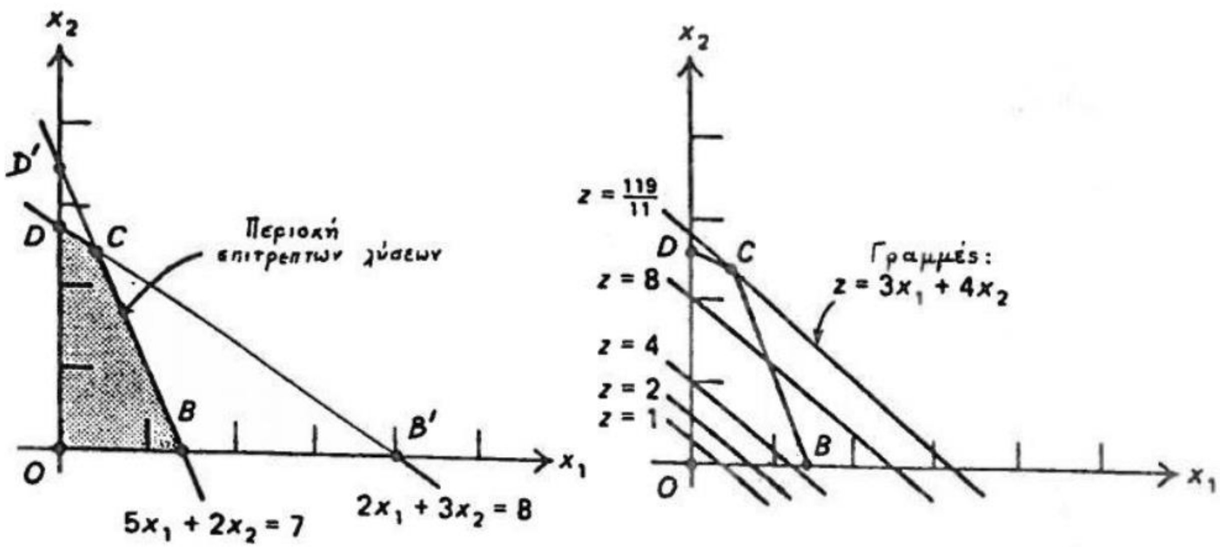
- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- Η βέλτιστη λύση (x_1^*, x_2^*) πρέπει να βρίσκεται μέσα στη γραμμοσκιασμένη περιοχή που ορίζεται από τους 2 ανισοτικούς περιορισμούς και τους 2 περιορισμούς μη-αρνητικότητας



Παράδειγμα γεωμετρικής επίλυσης (2)

- Σχεδιάζουμε διαφορετικές παράλληλες γραμμές της μορφής $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 = z$ για διάφορες τιμές του z…



- …προκύπτει πως η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της ενώ διατηρεί (οριακά) ένα κοινό σημείο με την περιοχή επιτρεπτών λύσεων, στην κορυφή $C = (\frac{5}{11}, \frac{26}{11})$, όπου η f παίρνει μέγιστη τιμή $z^* = \frac{119}{11}$

Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (1)

- Είναι προφανές πως είναι πολύ δύσκολο να επεκτείνουμε την παραπάνω γεωμετρική μέθοδο επίλυσης σε προβλήματα που περιέχουν περισσότερες από 2 μεταβλητές (για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα τριών μεταβλητών, η περιοχή επιτρεπτών λύσεων ορίζεται σε χώρο τριών διαστάσεων και περιορίζεται από επίπεδα)…

- …χρειαζόμαστε **αναλυτικές μεθόδους επίλυσης**…

…δεν έχει αλλάξει σημαντικά από το 1947 !!!

- …**η πιο διαδεδομένη είναι ο μαθηματικός αλγόριθμος Simplex (Dantzig, 1947)**, ο οποίος αναζητά λύσεις διαδοχικά στις κορυφές της περιοχής επιτρεπτών λύσεων, και ολοκληρώνεται πάντα μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων (εγγυημένη σύγκλιση στη βέλτιστη λύση)

Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (2)

- **Βήμα 1**: Εισάγουμε στο πρόβλημα m (όσες το πλήθος ανισοτικών περιορισμών) **βοηθητικές (slack) μεταβλητές** $\underline{x}$ (*οι οποίες εκφράζουν την απόσταση ενός εξεταζόμενου σημείου από το οριακό σημείο του αντίστοιχου περιορισμού*):

$$\max f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + 0\underline{x}_{n+1} + 0\underline{x}_{n+2} + \cdots + 0\underline{x}_{n+m}$$

Ή εναλλακτικά $$\max f(x) = \begin{bmatrix} c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \underline{x} \end{bmatrix}$$

- …υπό τους **ισοτικούς (*λόγω της ένταξης των slack μεταβλητών*) περιορισμούς**:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + 1\underline{x}_{n+1} + 0\underline{x}_{n+2} + \cdots + 0\underline{x}_{n+m} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + 0\underline{x}_{n+1} + 1\underline{x}_{n+2} + \cdots + 0\underline{x}_{n+m} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + 0\underline{x}_{n+1} + 0\underline{x}_{n+2} + \cdots + 1\underline{x}_{n+m} = b_m \end{array}$$

Ή εναλλακτικά $$\begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \underline{x} \end{bmatrix} = b$$

Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (3)

- **Βήμα 2**: Επιλέγουμε τη μεταβλητή που έχει το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην f $(x_i\text{: max } c_i, i = 1,2,..,n)$ και τη θεωρούμε διάφορη του 0 (διατηρώντας τις υπόλοιπες στην τιμή 0) > *η λογική αυτού είναι πως αναμένουμε η λύση να βρίσκεται σε περιοχές μεγάλων κλίσεων*…
- …από το παραπάνω σύστημα ισοτικών συνθηκών, θεωρώντας προς στιγμή τις βοηθητικές μεταβλητές ίσες με 0, βρίσκουμε τη μικρότερη δυνατή τιμή για αυτή τη μεταβλητή που θεωρήσαμε διάφορη του 0 > *η λογική αυτού είναι να μη "χάσουμε" κάποια κορυφή*…
- …τότε, κατ' ανάγκη, μια (ακριβώς μία) από τις βοηθητικές μεταβλητές γίνεται 0.

Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (4)

- **Βήμα 3**: Μετασχηματίζουμε το διάνυσμα των βοηθητικών μεταβλητών, ορίζοντας σαν νέες βοηθητικές μεταβλητές αυτές που προέκυψαν διάφορες του 0 στο Βήμα 2…
- …και μετασχηματίζουμε αντίστοιχα τους ισοτικούς περιορισμούς, έτσι ώστε σε καθέναν από αυτούς να εμφανίζεται μόνο μία από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές (με συντελεστή +1) > *η λογική αυτού είναι να εντοπίσουμε την "επόμενη" κορυφή*.

- **Βήμα 4**: Εκφράζουμε την αντικειμενική συνάρτηση f ως συνάρτηση των νέων μη βοηθητικών μεταβλητών, όπως αυτές προέκυψαν στο Βήμα 3.

Αναλυτική επίλυση γραμμικών προβλημάτων (5)

- **Βήμα 5**: Ελέγχουμε το πρόσημο των νέων συντελεστών της f…
  - Αν είναι όλοι αρνητικοί ή 0 σταματάμε, και η λύση δίνεται θέτοντας τις τελευταίες μη-βοηθητικές μεταβλητές ίσες με 0 στην τελευταία μορφή των ισοτικών περιορισμών > *η λογική αυτού είναι πως η τιμή της f δεν μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω*
  - Αν όχι, επιστρέφουμε στο Βήμα 2 και επαναλαμβάνουμε τα Βήματα 2-5, μέχρι όλοι οι συντελεστές της f να είναι αρνητικοί ή 0

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (1)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 1**: Εισάγουμε 2 βοηθητικές μεταβλητές (όσες το πλήθος των ανισοτικών περιορισμών), μετασχηματίζοντας το πρόβλημα σε:

$\max 3x_1 + 4x_2 + 0\underline{x}_3 + 0\underline{x}_4$ (1.1)

- …υπό τους ισοτικούς (λόγω της ένταξης των slack μεταβλητών) περιορισμούς:

$5x_1 + 2x_2 + \underline{x}_3 = 7$ (1.2)

$2x_1 + 3x_2 + \underline{x}_4 = 8$ (1.3)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (2)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 2**: Η αρχική μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην f είναι η x_2, οπότε θεωρούμε $x_2 \neq 0$ ενώ διατηρούμε $x_1 = 0$…
- …θεωρώντας επιπλέον $\underline{x}_3 = \underline{x}_4 = 0$, από τις εξισώσεις (1.2: $5x_1 + 2x_2 + \underline{x}_3 = 7$) και (1.3: $2x_1 + 3x_2 + \underline{x}_4 = 8$) παίρνουμε $x_2 = \frac{7}{2}$ ή $x_2 = \frac{8}{3}$ από τις οποίες επιλέγουμε τη μικρότερη $x_2 = \frac{8}{3}$, που αντιστοιχεί στην (1.3)…
- …αυτή η εξίσωση, για $(x_1, x_2) = (0, \frac{8}{3})$, μας δίνει $\underline{x}_4 = 0$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (3)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 3**: Ορίζουμε σαν νέες βοηθητικές μεταβλητές αυτές που προέκυψαν διάφορες του 0 στο Βήμα 2, δηλαδή τις $\underline{x}_2$ και $\underline{x}_3$. Μετασχηματίζουμε αντίστοιχα τους ισοτικούς περιορισμούς (1.2) και (1.3):

$$5x_1 + 2x_2 + \underline{x}_3 = 7 \qquad (1.2)$$

$$2x_1 + 3x_2 + \underline{x}_4 = 8 \qquad (1.3)$$

- …ξεκινάμε από τον (1.3) επειδή περιέχει μόνο μία από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές (τη $\underline{x}_2$) … για να περιέχει αυτή τη $\underline{x}_2$ με συντελεστή +1, διαιρούμε και τα δύο μέρη με 3:

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3} \qquad (1.4)$$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (4)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 3 (συνέχεια)**: …συνεχίζουμε με τον (1.2: $5x_1 + 2x_2 + \underline{x}_3 = 7$) που περιέχει και τις δύο νέες βοηθητικές μεταβλητές, αλλά μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το νέο ισοτικό περιορισμό (1.4: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3}$), λύνοντάς τον ως προς $\underline{x}_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4$
- …και αντικαθιστώντας στον (1.2) παίρνουμε: $5x_1 + 2\left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4\right) + \underline{x}_3 = 7 \rightarrow \frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + \underline{x}_3 = \frac{5}{3}$ (1.5)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (5)

• Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

• **Βήμα 4**: Εκφράζουμε την f ως συνάρτηση των νέων μη βοηθητικών μεταβλητών, δηλαδή των x_1 και x_4, λύνοντας και πάλι το νέο ισοτικό περιορισμό (1.4: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3}$) ως προς $\underline{x}_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4$

•…και αντικαθιστώντας στην αρχική αντικειμενική συνάρτηση παίρνουμε $f = 3x_1 + 4\left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4\right) \rightarrow f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3} + 0\underline{x}_2 + 0\underline{x}_3$ (1.6)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (6)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$,$x_2 \geq 0$

- **Βήμα 5**: Ελέγχουμε το πρόσημο των νέων συντελεστών της $f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3}$…
- …ο ένας είναι ακόμα θετικός ($\frac{1}{3}$ για τη x_1), άρα επιστρέφουμε στο Βήμα 2.

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (7)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$,$x_2 \geq 0$

- **Βήμα 2**: Η μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην $f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3}$ είναι η x_1, οπότε θεωρούμε $x_1 \neq 0$ ενώ διατηρούμε $x_4 = 0 \ldots$
- …θεωρώντας επιπλέον $\underline{x}_2 = \underline{x}_3 = 0$, από τις εξισώσεις (1.4: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3}$) και (1.5: $\frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + \underline{x}_3 = \frac{5}{3}$) παίρνουμε $x_1 = 4$ ή $x_1 = \frac{5}{11}$ από τις οποίες επιλέγουμε τη μικρότερη $x_1 = \frac{5}{11}$, που αντιστοιχεί στην (1.5)…
- …αυτή η εξίσωση, για $(x_1, x_4) = (\frac{5}{11}, 0)$, μας δίνει $\underline{x}_3 = 0$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (8)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- **Βήμα 3**: Ορίζουμε σαν νέες βοηθητικές μεταβλητές αυτές που προέκυψαν διάφορες του 0 στο Βήμα 2, δηλαδή τις $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_2$. Μετασχηματίζουμε αντίστοιχα τους ισοτικούς περιορισμούς (1.4) και (1.5):

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3} \qquad (1.4)$$

$$\frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + \underline{x}_3 = \frac{5}{3} \qquad (1.5)$$

- …ξεκινάμε από τον (1.5) επειδή περιέχει μόνο μία από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές (τη $\underline{x}_1$) … για να περιέχει αυτή τη $\underline{x}_1$ με συντελεστή +1, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη με 3/11: $-\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + \underline{x}_1 = \frac{5}{11}$ (1.7)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (9)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$,$x_2 \geq 0$

- **Βήμα 3 (συνέχεια)**: …συνεχίζουμε με τον (1.4: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3}$) που περιέχει και τις δύο νέες βοηθητικές μεταβλητές, αλλά μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το νέο ισοτικό περιορισμό (1.7:$-\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + \underline{x}_1 = \frac{5}{11}$), λύνοντάς τον ως προς $\underline{x}_1 = \frac{5}{11} + \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_3$
- …και αντικαθιστώντας στον (1.4) παίρνουμε: $\frac{2}{3}\left(\frac{5}{11} + \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_3\right) + \frac{1}{3}x_4 + \underline{x}_2 = \frac{8}{3} \rightarrow \frac{15}{33}x_4 - \frac{2}{11}x_3 + \underline{x}_2 = \frac{26}{11}$ (1.8)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (10)

• Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$,$x_2 \geq 0$

• **Βήμα 4**: Εκφράζουμε την $f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3}$ ως συνάρτηση των νέων μη βοηθητικών μεταβλητών, δηλαδή των x_4 και x_3, λύνοντας και πάλι το νέο ισοτικό περιορισμό (1.7:$-\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + \underline{x}_1 = \frac{5}{11}$) ως προς $\underline{x}_1 = \frac{5}{11} + \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_3$

•…και αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση (1.6) παίρνουμε $f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3} \rightarrow f = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{11} + \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_3\right) - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3} \rightarrow f = -\frac{42}{33}x_4 - \frac{3}{33}x_3 + \frac{357}{33} + 0\underline{x}_1 + 0\underline{x}_2$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (11)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$, $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$,$x_2 \geq 0$

- **Βήμα 5**: Ελέγχουμε το πρόσημο των νέων συντελεστών της $f = -\frac{42}{33}x_4 - \frac{3}{33}x_3 + \frac{357}{33}$…
- …όλοι είναι αρνητικοί, άρα σταματάμε και η λύση δίνεται θέτοντας τις τελευταίες μη-βοηθητικές μεταβλητές x_3 και x_4 ίσες με 0 στους τελευταίους ισοτικούς περιορισμούς:

$$-\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + \underline{x_1} = \frac{5}{11} \qquad (1.7)$$

$$\frac{15}{33}x_4 - \frac{2}{11}x_3 + \underline{x_2} = \frac{26}{11} \qquad (1.8)$$

- Επομένως η βέλτιστη λύση είναι η $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{5}{11}, \frac{26}{11})$…
- …στην οποία συγκλίναμε μετά από 2 επαναλήψεις

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (12)

• Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

• **Βήμα 1**: Εισάγουμε 2 βοηθητικές μεταβλητές (όσες το πλήθος των ανισοτικών περιορισμών), μετασχηματίζοντας το πρόβλημα σε:

$\max 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 0\underline{x}_4 + 0\underline{x}_5$ (2.1)

• …υπό τους ισοτικούς (λόγω της ένταξης των slack μεταβλητών) περιορισμούς:

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \underline{x}_4 = 10$ (2.2)

$x_1 + 5x_2 + x_3 + \underline{x}_5 = 8$ (2.3)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (13)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

- **Βήμα 2**: Η αρχική μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην f είναι η x_2, οπότε θεωρούμε $x_2 \neq 0$ ενώ διατηρούμε $x_1 = x_3 = 0\ldots$
- …θεωρώντας επιπλέον $\underline{x}_4 = \underline{x}_5 = 0$, από τις εξισώσεις (2.2: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \underline{x}_4 = 10$) και (2.3: $x_1 + 5x_2 + x_3 + \underline{x}_5 = 8$) παίρνουμε $x_2 = \frac{10}{3}$ ή $x_2 = \frac{8}{5}$ από τις οποίες επιλέγουμε τη μικρότερη $x_2 = \frac{8}{5}$, που αντιστοιχεί στην (2.3)…
- …αυτή η εξίσωση, για $(x_1, x_2, x_2) = (0, \frac{8}{5}, 0)$, μας δίνει $\underline{x}_5 = 0$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (14)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

- **Βήμα 3**: Ορίζουμε σαν νέες βοηθητικές μεταβλητές αυτές που προέκυψαν διάφορες του 0 στο Βήμα 2, δηλαδή τις $\underline{x}_2$ και $\underline{x}_4$. Μετασχηματίζουμε αντίστοιχα τους ισοτικούς περιορισμούς (2.2) και (2.3):

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \underline{x}_4 = 10 \qquad (2.2)$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + \underline{x}_5 = 8 \qquad (2.3)$$

- …ξεκινάμε από τον (2.3) επειδή περιέχει μόνο μία από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές (τη $\underline{x}_2$) … για να περιέχει αυτή τη $\underline{x}_2$ με συντελεστή +1, διαιρούμε και τα δύο μέρη με 5:

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5 + \underline{x}_2 = \frac{8}{5} \qquad (2.4)$$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (15)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

- **Βήμα 3 (συνέχεια)**: …συνεχίζουμε με τον (2.2: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \underline{x}_4 = 10$) που περιέχει και τις δύο νέες βοηθητικές μεταβλητές, αλλά μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το νέο ισοτικό περιορισμό (2.4: $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5 + \underline{x}_2 = \frac{8}{5}$), λύνοντάς τον ως προς $\underline{x}_2 = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_5$
- …και αντικαθιστώντας στον (2.2) παίρνουμε: $x_1 + 3\left(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_5\right) + 2x_3 + \underline{x}_4 = 10 \rightarrow \frac{2}{5}x_1 + \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5 + \underline{x}_4 = \frac{26}{5}$ (2.5)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (16)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

- **Βήμα 4**: Εκφράζουμε την f ως συνάρτηση των νέων μη βοηθητικών μεταβλητών, δηλαδή των x_1, x_3 και x_5, λύνοντας και πάλι το νέο ισοτικό περιορισμό (2.4: $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5 + \underline{x}_2 = \frac{8}{5}$) ως προς $\underline{x}_2 = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_5$
- …και αντικαθιστώντας στην αρχική αντικειμενική συνάρτηση παίρνουμε $f = 8x_1 + 10\left(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_5\right) + 7x_3 \rightarrow f = 6x_1 + 5x_3 - 2x_5 + 16 + 0\underline{x}_2 + 0\underline{x}_4$ (2.6)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (17)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

- **Βήμα 5**: Ελέγχουμε το πρόσημο των νέων συντελεστών της $f = 6x_1 + 5x_3 - 2x_5 + 16 \ldots$
- …οι δύο είναι ακόμα θετικοί, άρα επιστρέφουμε στο Βήμα 2.

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (18)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

- **Βήμα 2**: Η μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην $f = 6x_1 + 5x_3 - 2x_5 + 16$ είναι η x_1, οπότε θεωρούμε $x_1 \neq 0$ ενώ διατηρούμε $x_3 = x_5 = 0\ldots$
- …θεωρώντας επιπλέον $\underline{x}_2 = \underline{x}_4 = 0$, από τις εξισώσεις (2.4: $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5 + \underline{x}_2 = \frac{8}{5}$) και (2.5: $\frac{2}{5}x_1 + \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5 + \underline{x}_4 = \frac{26}{5}$) παίρνουμε $x_1 = 8$ ή $x_1 = 13$ από τις οποίες επιλέγουμε τη μικρότερη $x_1 = 8$, που αντιστοιχεί στην (2.4)…
- …αυτή η εξίσωση, για $(x_1, x_3, x_5) = (8{,}0{,}0)$, μας δίνει $\underline{x}_2 = 0$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (19)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$
- **Βήμα 3**: Ορίζουμε σαν νέες βοηθητικές μεταβλητές αυτές που προέκυψαν διάφορες του 0 στο Βήμα 2, δηλαδή τις $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_4$. Μετασχηματίζουμε αντίστοιχα τους ισοτικούς περιορισμούς (2.4) και (2.5):

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5 + \underline{x}_2 = \frac{8}{5} \qquad (2.4)$$

$$\frac{2}{5}x_1 + \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5 + \underline{x}_4 = \frac{26}{5} \qquad (2.5)$$

- …ξεκινάμε από τον (2.4) επειδή περιέχει μόνο μία από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές (τη $\underline{x}_1$) … για να περιέχει αυτή τη $\underline{x}_1$ με συντελεστή +1, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη με 5: $x_3 + x_5 + 5x_2 + \underline{x}_1 = 8$ (2.7)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (20)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

- **Βήμα 3 (συνέχεια)**: …συνεχίζουμε με τον (2.5: $\frac{2}{5}x_1 + \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5 + \underline{x}_4 = \frac{26}{5}$) που περιέχει και τις δύο νέες βοηθητικές μεταβλητές, αλλά μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το νέο ισοτικό περιορισμό (2.7: $x_3 + x_5 + 5x_2 + \underline{x}_1 = 8$), λύνοντάς τον ως προς $\underline{x}_1 = 8 - x_3 - x_5 - 5x_2$
- …και αντικαθιστώντας στον (2.5) παίρνουμε: $\frac{2}{5}(8 - x_3 - x_5 - 5x_2) + \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5 + \underline{x}_4 = \frac{26}{5} \rightarrow x_3 - x_5 - 2x_2 + \underline{x}_4 = 2$ (2.8)

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (21)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

- **Βήμα 4**: Εκφράζουμε την $f = 6x_1 + 5x_3 - 2x_5 + 16$ ως συνάρτηση των νέων μη βοηθητικών μεταβλητών, δηλαδή των x_3, x_5 και x_2, λύνοντας και πάλι το νέο ισοτικό περιορισμό (2.7: $x_3 + x_5 + 5x_2 + \underline{x}_1 = 8$) ως προς $\underline{x}_1 = 8 - x_3 - x_5 - 5x_2$
- …και αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση (2.6) παίρνουμε $f = 6x_1 + 5x_3 - 2x_5 + 16 \rightarrow f = 6(8 - x_3 - x_5 - 5x_2) + 5x_3 - 2x_5 + 16 \rightarrow f = -x_3 - 8x_5 - 30x_2 + 64 + 0\underline{x}_1 + 0\underline{x}_4$

Παράδειγμα μεθόδου Simplex (22)

- Συνάρτηση $f = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$ και $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$
- **Βήμα 5**: Ελέγχουμε το πρόσημο των νέων συντελεστών της $f = -x_3 - 8x_5 - 30x_2 + 64\ldots$
- …όλοι είναι αρνητικοί, άρα σταματάμε και η λύση δίνεται θέτοντας τις τελευταίες μη-βοηθητικές μεταβλητές x_3, x_5 και x_2 ίσες με 0 στους τελευταίους ισοτικούς περιορισμούς:

$x_3 + x_5 + 5x_2 + \underline{x}_1 = 8$ (2.7)

$x_3 - x_5 - 2x_2 + \underline{x}_4 = 2$ (2.8)

- Επομένως η βέλτιστη λύση είναι η $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (8{,}0{,}0)\ldots$
- …επίσης παίρνουμε $\underline{x}_4 = 2$ και $\underline{x}_5 = 0$, που δεν έχουν φυσική σημασία, αλλά εκφράζουν πόσο απέχει η βέλτιστη λύση που βρήκαμε από τον αντίστοιχο ανισοτικό περιορισμό!

Παράδειγμα γραμμικού προβλήματος ΟΚΦ (1)

- Το πρόβλημα με το οποίο ξεκινήσαμε τη σημερινή διάλεξη (και είδαμε πως η μέθοδος Lagrange δεν μπορεί να επιλύσει)…

- **Αντικειμενική συνάρτηση** $\min f(p_1, p_2) = \min 7 * p_1 + 9 * p_2 (€/h)$
- **Ισοτικός περιορισμός** $g(p_1, p_2) = 900 - p_1 - p_2 = 0$
- **Ανισοτικοί περιορισμοί**: $h_1^{min} = 0 - p_1 \leq 0$ και $h_1^{max} = p_1 - 1000 \leq 0$, $h_2^{min} = 0 - p_2 \leq 0$ και $h_2^{max} = p_2 - 400 \leq 0$

- …η προφανής λύση που αναμένουμε να βρούμε είναι $p_1 = 900$ και $p_2 = 0$ (δείτε διαφάνεια 3)

Παράδειγμα γραμμικού προβλήματος ΟΚΦ (2)

- Το πρόβλημα αυτό δεν βρίσκεται στην πρότυπη (κανονική) του μορφή (δείτε διαφάνειες 7-8), άρα θα πρέπει να εφαρμόσουμε αντίστοιχες μετατροπές πριν το επιλύσουμε (δείτε διαφάνεια 9)…

- Κατ' αρχάς είναι διατυπωμένο ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης…
- …άρα θα πρέπει να το μετατρέψουμε σε πρόβλημα μεγιστοποίησης $\min 7 * p_1 + 9 * p_2 \rightarrow \max -7 * p_1 - 9 * p_2$

Παράδειγμα γραμμικού προβλήματος ΟΚΦ (3)

- Δεύτερον, περιέχει έναν ισοτικό περιορισμό ($900 - p_1 - p_2 = 0$)…άρα τον απαλοίφουμε λύνοντάς τον ως προς $p_2 = 900 - p_1$…
- …το οποίο μετατρέπει την αντικειμενική συνάρτηση σε $\max -7 * p_1 - 9 * p_2 = \max -7 * p_1 - 9 * (900 - p_1) = \max 2 * p_1 - 8100$
- …και τους ανισοτικούς περιορισμούς σε $h_1^{min} = 0 - p_1 \leq 0$ και $h_1^{max} = p_1 - 1000 \leq 0$, και $h_2^{min} = 0 - p_2 \leq 0 \rightarrow p_1 \leq 900$ και $h_2^{max} = p_2 - 400 \leq 0 \rightarrow p_1 \geq 500$
- …παρατηρούμε πως ο τέταρτος περιορισμός $p_1 \geq 500$ είναι πιο αυστηρός από τον πρώτο περιορισμό $p_1 \geq 0$, άρα αμελούμε τον πρώτο και διατηρούμε μόνο τον τέταρτο…
- …καθώς και πως ο τρίτος περιορισμός $p_1 \leq 900$ είναι πιο αυστηρός από το δεύτερο περιορισμό $p_1 \leq 1000$, άρα αμελούμε το δεύτερο και διατηρούμε μόνο τον τρίτο

Παράδειγμα γραμμικού προβλήματος ΟΚΦ (4)

- Τρίτον, ο περιορισμός $p_1 \geq 500$ (στον οποίο καταλήξαμε στην προηγούμενη διαφάνεια) δεν είναι της μορφής $x_i \geq 0$ (περιορισμός μη-αρνητικότητας) αλλά της μορφής $x_i \geq a$, με $a > 0 \ldots$
- …άρα ορίζουμε μια νέα μεταβλητή $p_1' = p_1 - 500$ (για την οποία ισχύει ο περιορισμός μη-αρνητικότητας $p_1' \geq 0)\ldots$
- …και μετασχηματίζουμε το πρόβλημα ώστε να περιέχει τη $p_1' \ldots$
- …δηλαδή μετατρέπουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε $\max 2 * p_1 - 8100 \rightarrow \max 2 * (p_1' + 500) - 8100 \rightarrow \max 2 * p_1' - 7100 \ldots$
- …και τον εναπομείναντα ανισοτικό περιορισμό (στον οποίο καταλήξαμε στην προηγούμενη διαφάνεια) σε $p_1 \leq 900 \rightarrow p_1' \leq 400$

Παράδειγμα γραμμικού προβλήματος ΟΚΦ (5)

- Επομένως καταλήγουμε στην πρότυπη (κανονική) μορφή του προβλήματος:

- **Αντικειμενική συνάρτηση** $\max 2 * p_1' - 7100$
- **Ανισοτικός περιορισμός** $p_1' \leq 400$
- **Περιορισμός μη-αρνητικότητας**: $p_1' \geq 0$

- Δεν χρειαζόμαστε τη μέθοδο Simplex, ούτε καν τη γεωμετρική μέθοδο…
- …για να διαπιστώσουμε πως η βέλτιστη λύση είναι το οριακό σημείο $p_1' = 400\ldots$
- …το οποίο σημαίνει $p_1 = 900$ και $p_2 = 0\ldots$
- …που είναι και η λύση που αναμέναμε (διαφάνεια 3)

Τέλος Ενότητας