Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (2ο μέρος)

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Δομή σημερινής διάλεξης

- Προβλήματα χωρίς περιορισμούς
  - ➢ Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - ➢ Παραδείγματα

- Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς
  - ➢ Αναλυτικές μέθοδοι (μέθοδοι απαλοιφής και Lagrange)
  - ➢ Παραδείγματα

$1^{ο}$ μέρος (προηγούμενη διάλεξη)

$2^{ο}$ μέρος (σημερινή διάλεξη)

- Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς
  - ➢ Αναλυτικές μέθοδοι
  - ➢ Παραδείγματα

$3^{ο}$ μέρος (επόμενη διάλεξη)

- Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς
  - ➢ Παραδείγματα

Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς (1)

- Στο 1ο μέρος της ενότητας αυτής μελετήσαμε προβλήματα πολλών (n) μεταβλητών με (m) **ισοτικούς περιορισμούς** (της μορφής $g(x) = 0$), με $m < n$…
- …οι οποίοι ουσιαστικά **περιορίζουν κατά m τους n "βαθμούς ελευθερίας"** στην αναζήτηση τοπικών ακροτάτων

- Σήμερα (2ο μέρος) θα μελετήσουμε προβλήματα πολλών (n) μεταβλητών με (l) **ανισοτικούς περιορισμούς** (της μορφής $g(x) \leq 0$)…
- …οι οποίοι αποτελούν **ασθενέστερους περιορισμούς**: απλά ορίζουν τους υποχώρους μέσα στους οποίους πρέπει να αναζητήσουμε τη βέλτιστη λύση
- …επομένως τώρα δεν απαιτείται να ισχύει $l < n$

Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς (2)

• Η αναζήτηση τοπικών ακροτάτων σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να χωριστεί στην αναζήτηση ακροτάτων στα α) **εσωτερικά σημεία** της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ και στα β) στα **οριακά σημεία** του πεδίου ορισμού της συνάρτησης (που ορίζονται από τους περιορισμούς)

…όπως στα προβλήματα 1 μεταβλητής (Ενότητα 3)

• Η περίπτωση α) είναι σχετικά απλή:

- Εξετάζουμε τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$ **χωρίς περιορισμούς** με βάση τις ικανές συνθήκες 1) $\boldsymbol{\nabla f(x) = 0}$ και 2) $\boldsymbol{\nabla^2 f(x)}$ **(ή γενικότερα πρώτη μη-μηδενική βάθμωση άρτιας τάξης) θετικά ορισμένη για ελάχιστο (αρνητικά ορισμένη για μέγιστο)**…
- …και ελέγχουμε αν τα τοπικά ακρότατα που προέκυψαν **ικανοποιούν τους ανισοτικούς περιορισμούς** $g(x) \leq 0$

Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς (3)

- Η περίπτωση β) είναι λίγο πιο σύνθετη:

➢ Εξετάζουμε τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$ στα όρια των υποχώρων που ορίζουν οι ανισοτικοί περιορισμοί $g(x) \leq 0$, δηλαδή στις περιοχές που ισχύει $g^k(x) = 0$, όπου $g^k(x)$ το υποσύνολο k στοιχείων από τους l περιορισμούς, δηλαδή $g^k(x) \subseteq g(x)$, για κάθε k…

➢ …με $k = 1,2,\ldots,\boxed{2^l - 1}$ οι οριακές υπο-περιπτώσεις / συνδυασμοί που πρέπει να εξεταστούν…

➢ …και για κάθε υπο-περίπτωση λέμε πως k από τους l ανισοτικούς περιορισμούς είναι **ενεργοί (active) και ικανοποιούνται ως ισότητες** ενώ οι υπόλοιποι $l - k$ περιορισμοί είναι **ανενεργοί και πρέπει να ικανοποιούνται ως αυστηρές ανισότητες**

2^l αν μετρήσω και την περίπτωση α) (εσωτερικά σημεία)

Παραδείγματα οριακών υπο-περιπτώσεων (1)

- Αν έχω $l = 1$ ανισοτικό περιορισμό?
- …ή θα είναι ενεργός (περίπτωση β με $2^l - 1 = 1$ οριακή υπο-περίπτωση) ή θα είναι ανενεργός (περίπτωση α, εσωτερικά σημεία)…σύνολο $2^l = 2$ υπο-περιπτώσεις
- Αν έχω $l = 2$ ανισοτικούς περιορισμούς?

	Περιορισμός 1	Περιορισμός 2
Υπο-περίπτωση 1	Ανενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 2	Ενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 3	Ανενεργός	Ενεργός
Υπο-περίπτωση 4	Ενεργός	Ενεργός

Περίπτωση α

Περίπτωση β με $2^l - 1 = 3$ οριακές υπο-περιπτώσεις

Σύνολο $2^l = 4$ υπο-περιπτώσεις

Παραδείγματα οριακών υπο-περιπτώσεων (2)

- Αν έχω $l = 3$ ανισοτικούς περιορισμούς?

	Περιορισμός 1	Περιορισμός 2	Περιορισμός 3
Υπο-περίπτωση 1	Ανενεργός	Ανενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 2	Ενεργός	Ανενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 3	Ανενεργός	Ενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 4	Ανενεργός	Ανενεργός	Ενεργός
Υπο-περίπτωση 5	Ενεργός	Ενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 6	Ενεργός	Ανενεργός	Ενεργός
Υπο-περίπτωση 7	Ανενεργός	Ενεργός	Ενεργός
Υπο-περίπτωση 8	Ενεργός	Ενεργός	Ενεργός

Περίπτωση β με $2^l - 1 = 7$ οριακές υπο-περιπτώσεις

Περίπτωση α

Σύνολο $2^l = 8$ υπο-περιπτώσεις

Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς (4)

- Για κάθε οριακή υπο-περίπτωση, η θεωρία μας λέει:
  - Αν ένα σημείο x είναι τοπικό ελάχιστο στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει για οποιοδήποτε επιτρεπτό $x + \Delta x$ στην περιοχή γύρω από το x να ισχύουν $f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$ καθώς και $g_i^k(x+\Delta x) - g_i^k(x) \leq 0$ για κάθε $i = 1,2,..,k$
  - …και επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό του διαφορικού (δείτε Ενότητα 2), ισχύουν $df(x,\Delta x) = \nabla^T f(x)\Delta x \geq 0$ καθώς και $dg_i^k(x,\Delta x) = \nabla^T g_i^k(x)\Delta x \leq 0$ για κάθε $i = 1,2,..,k$
  - …οι οποίες σχέσεις ορίζουν μια γεωμετρική σχέση μεταξύ των διανυσμάτων ∇f και ∇g_i^k…
  - …συγκεκριμένα οι σχέσεις αυτές θα ικανοποιούνται αν και μόνο αν η βάθμωση της f είναι **γεωμετρικά αντίρροπη** κάποιου γραμμικού συνδυασμού όλων των βαθμώσεων των g_i^k

Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

• Αυτή η γεωμετρική σχέση μπορεί να εκφρασθεί μαθηματικά ως $sign\nabla f(x) = -sign\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i^k(x)\right\}$ για $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k > 0$

Αντίστοιχη της συνθήκης $sign[f'(x)] = -sign[g'(x)]$ στα προβλήματα 1 μεταβλητής (Ενότητα 3)

• …αυτή η σχέση, σε συνδυασμό με το γεγονός πως οι k ανισοτικοί περιορισμοί είναι ενεργοί, μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η $f(x)$ έχει τοπικό ακρότατο στο οριακό σημείο που ορίζεται από τους $g^k(x)$ περιορισμούς αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο πραγματικών θετικών αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $\boxed{\nabla^T f(x) + \lambda^T \nabla g^k(x) = 0}$ με $g^k(x) = 0$…

• …όπου το διάνυσμα $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k]^T$ περιέχει τους παράγοντες Lagrange (ή μεταβλητές Lagrange) των ανισοτικών περιορισμών

Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- Αυτή η σχέση αποτελεί την **1η αναγκαία και ικανή συνθήκη για τοπικά ακρότατα της $\boldsymbol{f(x)}$ υπό ανισοτικούς περιορισμούς στο οριακά σημείο που ορίζεται από τους $\boldsymbol{g^k(x)}$ περιορισμούς**…
- …και μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη συνθήκη για τοπικά ακρότατα της $f(x)$ υπό ισοτικούς περιορισμούς (δείτε 1ο μέρος Ενότητας 4) αλλά με δύο σημαντικές διαφορές:
  - Οι **παράγοντες Lagrange των ενεργών ανισοτικών περιορισμών πρέπει να είναι αυστηρά θετικοί** (των ισοτικών περιορισμών μπορεί να είναι θετικοί ή αρνητικοί)
  - Η συνθήκη αυτή ορίζεται **για κάθε συνδυασμό $\boldsymbol{k}$ ενεργών ανισοτικών περιορισμών**… που σημαίνει πως σε πρακτικά προβλήματα πρέπει να εξετάσουμε πολλές υποπεριπτώσεις…

Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- Αν η $1^{η}$ ικανή συνθήκη ικανοποιείται με τους παράγοντες Lagrange των ενεργών ανισοτικών περιορισμών του εξεταζόμενου συνδυασμού να είναι θετικοί…
- …**ελέγχουμε αν οι ανενεργοί ανισοτικοί περιορισμοί του εξεταζόμενου συνδυασμού ικανοποιούνται (ως αυστηρές ανισότητες)** – αν δεν ικανοποιούνται το οριακό σημείο απορρίπτεται…
- …αν ικανοποιούνται εξετάζουμε και τη $2^{η}$ ικανή συνθήκη $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ θετικά / αρνητικά ορισμένη για τοπικό ελάχιστο / μέγιστο…
- …και (μόνο αν η $2^{η}$ ικανή συνθήκη υποδεικνύει σαγματικό σημείο) την εναλλακτική $2^{η}$ ικανή συνθήκη βάσει της Bordered Hessian (δείτε $1^{ο}$ μέρος Ενότητας 4)

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (1)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$, υπό τον ανισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = x_1x_2 \leq a$, με $a > 0$

➢ Ξεκινάμε με την περίπτωση α) (εσωτερικά σημεία)…

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla f(x) = 0$, το οποίο συνεπάγεται…

➢ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \ \rightarrow 6x_1 + 3x_2 = 0$

➢ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \ \rightarrow 3x_2^2 + 3x_1 + 6x_2 = 0$

➢ Επιλύοντας αυτό το σύστημα 2 εξισώσεων, προκύπτουν δύο σημεία ενδιαφέροντος: το $(x_1, x_2) = (0{,}0)$ και το $(x_1, x_2) = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$

Προκύπτουν 2 σημεία ενδιαφέροντος επειδή η δεύτερη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού

➢ …και τα 2 σημεία ικανοποιούν τον ανισοτικό περιορισμό ως αυστηρή ανισότητα ($0 * 0 < a$ για το πρώτο, $\frac{3}{4} * (-\frac{3}{2}) < a$ για το δεύτερο) οπότε τα εξετάζω παραιτέρω

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (2)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$, υπό τον ανισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = x_1x_2 \leq a$, με $a > 0$

➢ 2η ικανή συνθήκη: η Hessian είναι $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6x_2 + 6 \end{bmatrix}$

➢ Για το πρώτο σημείο ενδιαφέροντος $(x_1, x_2\ ) = (0{,}0)$, προκύπτει $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, με $D_1 = 6$ και $D_2 = 27$

➢ …άρα είναι θετικά ορισμένη…άρα αυτό το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο

➢ Για το δεύτερο σημείο ενδιαφέροντος $(x_1, x_2\ ) = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$, η Hessian είναι $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, με $D_1 = 6$ και $D_2 = -27$

➢ …άρα δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη, άρα αυτό είναι σαγματικό σημείο ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ εξετάζω Bordered Hessian στα εσωτερικά σημεία !

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (3)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$, υπό τον ανισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = x_1x_2 \leq a$, με $a > 0$
- ➢ Συνεχίζουμε με την περίπτωση β) (οριακά σημεία)…
- ➢ …εδώ έχουμε έναν μόνο ανισοτικό περιορισμό, άρα χρειάζεται να εξετάσουμε ένα μόνο ($2^l - 1 = 1$) οριακό σημείο
- ➢ Διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2 + \lambda(x_1x_2 - a)$ ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο ανισοτικός πρέπει να έρθει στη μορφή $g(x) \leq 0$
- ➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δλδ.
- ➢ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 6x_1 + 3x_2 + \lambda x_2 = 0$
- ➢ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 3x_2^2 + 3x_1 + 6x_2 + \lambda x_1 = 0$
- ➢ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g(x_1, x_2) = 0 \rightarrow x_1x_2 - a = 0$

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (4)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$, υπό τον ανισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = x_1x_2 \leq a$, με $a > 0$
- Η τελευταία σχέση μας δίνει $x_2 = \frac{a}{x_1}$
- …το οποίο αν χρησιμοποιήσουμε στην πρώτη σχέση παίρνουμε $6x_1 + 3\frac{a}{x_1} + \lambda\frac{a}{x_1} = 0 \rightarrow \lambda = -6\frac{x_1^2}{a} - 3$
- …η οποία τιμή είναι πάντα αρνητική, άρα δεν υπάρχει θετικός παράγοντας Lagrange για τον οποίο ισχύουν οι παραπάνω τρεις σχέσεις…
- …άρα δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο στο οριακό σημείο

- Ανακεφαλαιώνοντας (δείτε διαφάνειες 10-15): το εσωτερικό σημείο $(x_1, x_2) = (0,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο, το μοναδικό οριακό σημείο δεν είναι τοπικό ακρότατο

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (5)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$

➢ Ξεκινάμε με την περίπτωση α) (εσωτερικά σημεία)…

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla f(x) = 0$, το οποίο συνεπάγεται…

➢ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2$

➢ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 4x_2 - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 1$

➢ Το σημείο $(x_1, x_2) = (2,1)$ είναι σημείο ενδιαφέροντος…

➢ …αλλά δεν ικανοποιεί τον πρώτο ανισοτικό περιορισμό $(2 + 4 * 1 > 3)$ επομένως απορρίπτεται εκ των προτέρων (δηλαδή δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τη 2η ικανή συνθήκη)

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (6)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
  - Συνεχίζουμε με την περίπτωση β) (οριακά σημεία)…
  - …αρχικά θα πρέπει να φέρουμε τους ανισοτικούς περιορισμούς στη μορφή $g_i(x) \leq 0$, επομένως αυτοί διατυπώνονται ισοδύμα ως $g_1(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 - 3 \leq 0$ και $g_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1 \leq 0$
  - …εδώ έχουμε δύο ανισοτικούς περιορισμούς, άρα χρειάζεται να εξετάσουμε τρία ($2^l - 1 = 3$) οριακά σημεία (τρεις οριακές υπο-περιπτώσεις): i) g_1 ενεργός (και g_2 όχι), ii) g_2 ενεργός (και g_1 όχι), και iii) g_1 και g_2 ενεργοί
  - …αν υπολογίσουμε και την περίπτωση α) (εσωτερικά σημεία), έχουμε συνολικά να εξετάσουμε $2^l = 4$ υπο-περιπτώσεις

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (7)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$

➢ Για την υπο-περίπτωση β-i) (g_1 ενεργός)…

➢ …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 + \lambda(x_1 + 4x_2 - 3)$

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δλδ.

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - 4 + \lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 4x_2 - 4 + 4\lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g_1(x_1, x_2) = 0 \rightarrow x_1 + 4x_2 - 3 = 0$

➢ Επιλύοντας αυτό το σύστημα 3 εξισώσεων, παίρνουμε $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ και $\lambda = \frac{2}{3}$

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (8)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
  - Για την υπο-περίπτωση β-i) (g_1 ενεργός)…
  - …επομένως το σημείο $(x_1, x_2) = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ είναι οριακό σημείο ενδιαφέροντος καθώς ο σχετικός παράγοντας Lagrange είναι θετικός ($\lambda = \frac{2}{3}$)
  - …επίσης αυτό το οριακό σημείο ικανοποιεί και το δεύτερο ανισοτικό περιορισμό ως αυστηρή ανισότητα $g_2(x_1, x_2) = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} < 0$

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (9)

• Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$

- Για την υπο-περίπτωση β-i) (g_1 ενεργός)…
- Επομένως τώρα μπορούμε να εξετάσουμε τη $2^{η}$ ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian συνάρτησης, η οποία είναι $\nabla_x^2 L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
- Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = 2$ και η δεύτερη ορίζουσα είναι $D_2 = 8$
- Άρα η Hessian είναι θετικά ορισμένη
- Άρα το οριακό σημείο ενδιαφέροντος$(x_1, x_2\ ) = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ είναι τοπικό ελάχιστο

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (10)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$

➢ Για την υπο-περίπτωση β-ii) (g_2 ενεργός)…

➢ …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 + \lambda(x_2 - x_1)$

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δλδ.

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - 4 - \lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 4x_2 - 4 + \lambda = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g_2(x_1, x_2) = 0 \rightarrow x_2 - x_1 = 0$

➢ Επιλύοντας αυτό το σύστημα 3 εξισώσεων, παίρνουμε $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$ και $\lambda = -\frac{4}{3}$

➢ …αυτό το οριακό σημείο απορρίπτεται καθώς $\lambda < 0$

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (11)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$

➢ Για την υπο-περίπτωση β-iii) (g_1 και g_2 ενεργοί)…

➢ …διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 + \lambda_1(x_1 + 4x_2 - 3) + \lambda_2(x_2 - x_1)$

➢ 1η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δλδ.

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 4x_2 - 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \rightarrow x_1 + 4x_2 - 3 = 0$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \rightarrow x_2 - x_1 = 0$

Ο πιο εύκολος τρόπος επίλυσης αυτού του συστήματος 4x4 είναι να λύσουμε πρώτα το υποσύστημα των 2 τελευταίων εξισώσεων, που μας δίνει $x_1 = x_2 = \frac{3}{5}$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές για να λύσομε το υποσύστημα των 2 πρώτων εξισώσεων

Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (12)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
  - Για την υπο-περίπτωση β-iii) (g_1 και g_2 ενεργοί)…
  - Επιλύοντας αυτό το σύστημα 4 εξισώσεων, παίρνουμε $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$, $\lambda_1 = \frac{22}{25}$ και $\lambda_2 = -\frac{48}{25}$
  - …αυτό το οριακό σημείο απορρίπτεται καθώς δεν ισχύει $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 > 0$ **ταυτόχρονα** !

  - Ανακεφαλαιώνοντας (δείτε διαφάνειες 16-23): δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικά σημεία, το οριακό σημείο με g_1 μόνο ενεργό είναι τοπικό ελάχιστο, το οριακό σημείο με g_2 μόνο ενεργό δεν είναι τοπικό ακρότατο, το οριακό σημείο με g_1 και g_2 ενεργούς δεν είναι τοπικό ακρότατο

Τέλος Ενότητας