



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
& ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ



Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης

ΠΑΤΡΑ 2008

Πρόλογος

Η οικονομική και τεχνολογική ανάπτυξη έδωσε τη δυνατότητα για την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων. Βασική απαίτηση για τη λύση τέτοιων προβλημάτων αποτελεί η "καλύτερη δυνατή" προσέγγισή τους με την εφαρμογή μεθόδων βελτιστοποίησης τόσο στη σχεδίαση όσο και στη λειτουργία τους.

Στο τεύχος αυτό δίνονται οι βασικές αρχές της βελτιστοποίησης καθώς και οι μέθοδοι που στην πράξη εφαρμόζονται για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων. Η ύλη που περιλαμβάνεται είναι αυτή που γίνεται στο αντίστοιχο εξαμηνιαίο μάθημα του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών και αφορά τη στατική κατάσταση συστημάτων. Βέλτιστες λύσεις που αφορούν στην δυναμική κατάσταση εξετάζονται σε επόμενα εξάμηνα.

Η ύλη που περιλαμβάνεται στο τεύχος αυτό διαρθρώνεται σε επτά κεφάλαια. Στο Πρώτο Κεφάλαιο δίνονται οι γενικές προϋποθέσεις και ορισμοί που αφορούν προβλήματα βελτιστοποίησης. Στο Δεύτερο Κεφάλαιο συζητούνται διάφορα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων και των χώρων όπου ορίζονται. Το Τρίτο και Τέταρτο Κεφάλαιο περιλαμβάνουν την ανάπτυξη των αναλυτικών μεθόδων βελτιστοποίησης για συναρτήσεις μιας ή πολλών μεταβλητών αντίστοιχα, ενώ τα Κεφάλαια Εξι και Πέντε εξετάζουν τις αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Τέλος, το Εβδομο Κεφάλαιο παρουσιάζει συγκεκριμένες εφαρμογές που αφορούν ακολουθιακά συστήματα ή συστήματα παράλληλων διεργασιών ή συστήματα με ανακύκλωση.

Πάτρα, 1994

Αντώνης Αλεξανδρίδης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εφαρμοσμένη βελτιστοποίηση ασχολείται με την ανάπτυξη καταλλήλων μεθοδολογιών για την "καλύτερη δυνατή" σχεδίαση και λειτουργία ενός συστήματος. Οι μεθοδολογίες αυτές συνήθως καταλήγουν σε προβλήματα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης κάποιας αριθμητικής συνάρτησης με μία ή περισσότερες μεταβλητές. Έχουν δηλαδή σαν αντικείμενο την εύρεση των τιμών των μεταβλητών της συνάρτησης για τις οποίες αυτή παίρνει την μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της. Αν το ακρότατο αυτό της συνάρτησης (μέγιστο ή ελάχιστο) ορίζεται σε όλο το διάστημα μέσα στο οποίο αυτή παίρνει τιμές, τότε αποτελεί το ολικό ή απόλυτο ακρότατο (απόλυτο μέγιστο ή ελάχιστο). Αν όμως το ακρότατο βρεθεί σε σχέση με τις γειτονικές τιμές της συνάρτησης, τότε αυτό αποτελεί ένα τοπικό ή σχετικό ακρότατο. Είναι προφανές ότι το απόλυτο ακρότατο είναι το πολύ ένα σημείο για το μέγιστο και ένα σημείο για το ελάχιστο. Αντίθετα, τοπικά ακρότατα μπορεί να υπάρχουν πολλά. Οι μεταβλητές τώρα της συνάρτησης αν είναι περισσότερες της μίας, μπορεί να είναι είτε ανεξάρτητες μεταξύ τους, είτε να συσχετίζονται με κάποιο τρόπο. Οι μαθηματικές εκφράσεις που δίνουν αυτή τη συσχέτιση αποτελούν τις περιοριστικές συνθήκες του προβλήματος βελτιστοποίησης. Οι περιοριστικές συνθήκες δίνονται συνήθως σαν μαθηματικές σχέσεις ισότητων ή/και ανισοτήτων.

1.2 ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

Τα προβλήματα της βελτιστοποίησης θεωρούνται σημαντικού ενδιαφέροντος τόσο για τις επιστήμες των μαθηματικών και της φυσικής, όσο και για τις εφαρμοσμένες επιστήμες και ιδιαίτερα των μηχανικών.

Από τα μέσα του 18ου αιώνα αναπτύχθηκαν μέθοδοι και χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές του διαφορικού λογισμού και του λογισμού των μεταβολών για την αναλυτική λύση βασικών τύπων προβλημάτων βελτιστοποίησης από τη φυσική και τη γεωμετρία. Με την οικονομική και τεχνολογική ανάπτυξη του αιώνα μας σύντομα παρόμοια προβλήματα εμφανίστηκαν και για τις επιστήμες των οικονομικών και της τεχνολογίας που αντιμετωπίστηκαν επιτυχώς με τις μεθόδους βελτιστοποίησης. Έτσι, εισήχθη και

ποσοτικοποιήθηκε με τη γενική της μορφή η έννοια του κόστους που έπρεπε να ελαχιστοποιηθεί ή της απόδοσης που έπρεπε να μεγιστοποιηθεί.

Γενικά τα προβλήματα βελτιστοποίησης έχουν να κάνουν με την καλύτερη αξιοποίηση του ανθρώπινου δυναμικού και των γνώσεών του καθώς και των πάσης φύσεως μηχανών και πρώτων υλών για την παραγωγή προϊόντων ή υπηρεσιών με συγκεκριμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά. Έτσι, η βιομηχανοποίηση και η σχεδίαση ολοκληρωμένων βιομηχανικών συστημάτων για την παραγωγή (π.χ. κατασκευή αυτοκινήτων, τηλεοράσεων, παραγωγή και μεταφορά ενέργειας κ.λ.π.), που μπορεί να περιλαμβάνει σαν στόχους την μεγιστοποίηση της παραγωγής για μια βιομηχανία, την ελαχιστοποίηση της απαιτούμενης ενέργειας, την αύξηση του βαθμού απόδοσης των εγκαταστάσεων αλλά και την μέγιστη δυνατή απόδοση (κέρδος) της επένδυσης ή τη σωστή επιλογή της ποσότητας των πρώτων υλών ή των παραγομένων προϊόντων που πρέπει να διατίθενται στις αποθήκες, όπως και η σχεδίαση ολοκληρωμένων συστημάτων υπηρεσιών (π.χ. λειτουργία αεροδρομίων ή λιμένων, προγραμματισμός φωτεινών σηματοδοτών για την οδική κυκλοφορία κ.λ.π.) που μπορεί να έχει σαν στόχο την ταχύτερη ή την οικονομικότερη εξυπηρέτηση, είναι κατά κύριο λόγο προβλήματα βελτιστοποίησης. Διάφορα συνακόλουθα επίσης της τεχνολογικής ανάπτυξης όπως η περιθιαντολογική επιβάρυνση και η ασφάλεια στους χώρους εργασίας και χρήσης των προϊόντων μπορούν μαζί να συνεκτιμηθούν και να ενσωματωθούν σε αυτού του είδους την αντιμετώπιση. (π.χ. η ρύθμιση με αισθητήρα της καύσης στη μηχανή του αυτοκινήτου μπορεί να πετυχαίνει εκτός από την ελαχιστοποίηση της κατανάλωσης καυσίμου και την μείωση της εκπομπής ρύπων στην ατμόσφαιρα).

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η εφαρμοσμένη βελτιστοποίηση περιλαμβάνει μια ευρεία επιστημονική περιοχή, η οποία ασχολείται με την ανάπτυξη και συστηματοποίηση μεθόδων για την αντιμετώπιση με τον "καλύτερο" δυνατό τρόπο σύνθετων και πρακτικών προβλημάτων. Ταυτόχρονα, επιδιώκει λύσεις που ικανοποιούν μια σειρά από απαιτήσεις συχνά αντικρουόμενες που προσπαθεί να συμβιβάσει.

Μια ακόμη σημαντική ώθηση στην εφαρμογή της βελτιστοποίησης σε πρακτικά προβλήματα δόθηκε τις τελευταίες δεκαετίες με την ανάπτυξη των μεθόδων προγραμματισμού, ευρύτερα γνωστών σαν μεθόδων γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού. Η αντιμετώπιση των προβλημάτων βελτιστοποίησης με τις μεθόδους αυτές απέκτησε ιδιαίτερη σημασία με τη ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τα τελευταία χρόνια. Με αυτό τον τρόπο έγινε η καλύτερη δυνατή αξιοποίηση των αναλυτικών μεθόδων με την παράκαμψη μέσω του υπολογιστή του βασικού μειονεκτηματός τους, που είναι η πολυπλοκότητα και η τελική επίλυση ενός εν

γένει δυσκολοχειρίστου συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων. Επιπρόσθετα, μπόρεσαν και αναπτύχθηκαν και μη αναλυτικές μέθοδοι, συνήθως επαναληπτικοί αλγόριθμοι, που συγκλίνουν στη βέλτιστη λύση, ενώ βελτιώθηκαν σημαντικά και οι ταχύτητες σύγκλισης.

1.3 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Το σημαντικότερο για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι η κατάλληλη επιλογή του κριτηρίου βελτιστοποίησης και η εύστοχη διατύπωσή του σαν μαθηματική έκφραση. Η διατύπωση αυτή των κριτηρίων συνήθως γίνεται από συναρτήσεις μίας ή περισσότερων μεταβλητών τις οποίες ονομάζουμε **συναρτήσεις βελτιστοποίησης**. Τότε, οι ανεξάρτητες μεταβλητές των συναρτήσεων αποτελούν τις παραμέτρους ως προς τις οποίες γίνεται η βελτιστοποίηση.

Τα βασικότερα κριτήρια που χρησιμοποιούνται είναι δύο κατηγοριών:

- κριτήρια κέρδους ή κόστους
- κριτήρια απόδοσης

και αφορούν συνήθως είτε καθαρά οικονομικά μεγέθη είτε τεχνικά είτε συνδυασμό τους.

Στις περιπτώσεις όπου κάποιο σύστημα είναι ήδη εγκατεστημένο, δηλαδή υπάρχει και λειτουργεί, η επένδυση για την εγκατάστασή του έχει ήδη πραγματοποιηθεί και το κριτήριο που συνήθως χρησιμοποιείται είναι της αύξησης του κέρδους ή της μείωσης του κόστους.

Στη γενικότερη όμως περίπτωση αυτό που ενδιαφέρει είναι η απόδοση ενός συστήματος. Αν πρόκειται για οικονομική απόδοση, n , τότε αυτή εκφράζεται σαν ο λόγος του οικονομικού κέρδους, P , προς την οικονομική επένδυση, A , ανηγμένη στο χρονικό διάστημα για το οποίο αναφέρεται το κέρδος:

$$n = \frac{P}{A} \quad (1.1)$$

Αντίστοιχα αν πρόκειται για τεχνικό σύστημα, η απόδοσή του, n , εκφράζεται σαν ο λόγος του ωφέλιμου έργου, W , προς το συνολικά καταναλισκόμενο έργο, E :

$$n = \frac{W}{E} \quad (1.2)$$

Είναι, λοιπόν, σαφές ότι το κέρδος, G , για τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις είναι αντίστοιχα:

$$G = P \quad (1.3)$$

για την πρώτη, και,

$$G = W \quad (1.4)$$

για τη δεύτερη.

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να δώσουμε κάποιες επιπλέον χρήσιμες μαθηματικές εκφράσεις που αφορούν οικονομικά μεγέθη. Έτσι, αν θεωρήσουμε σταθερή ετήσια απόδοση, n , που αναμένουμε από μια συνολική επένδυση I , για μία διάρκεια v ετών, τότε θα ισχύει:

$$I(1+n)^v = A \frac{(1+n)^v - 1}{n} \quad (1.5)$$

όπου A είναι η ανηγμένη επένδυση στη διάρκεια ενός έτους.

Η ίδια σχέση ισχύει όταν θεωρήσουμε ότι το απαιτούμενο κεφάλαιο επένδυσης εξασφαλίζεται από δανεισμό και αποπληρώνεται με ετήσιες δόσεις. Τότε για να ορίσουμε την ετήσια επιβάρυνση A , αντικαθιστούμε την απόδοση στη σχέση (1.5) με το ετήσιο επιτόκιο r , οπότε το A είναι η επένδυση I ανηγμένη στο διάστημα των v ετών σαν ισόποση ετήσια επιβάρυνση. Έτσι, ισχύει ακριβώς η σχέση (1.5) μετά από αντικατάσταση του n από το r .

$$I(1+r)^v = A \frac{(1+r)^v - 1}{r} \quad (1.6)$$

Είναι φανερό ότι στο A δεν περιλαμβάνονται τα ετήσια έξοδα λειτουργίας τα οποία πρέπει κανονικά να προστεθούν. Επίσης, για να έχει οικονομικό όφελος η επένδυση, πρέπει η προβλεπόμενη απόδοση να είναι μεγαλύτερη από το επιτόκιο δανεισμού, δηλαδή:

$$n > r \quad (1.7)$$

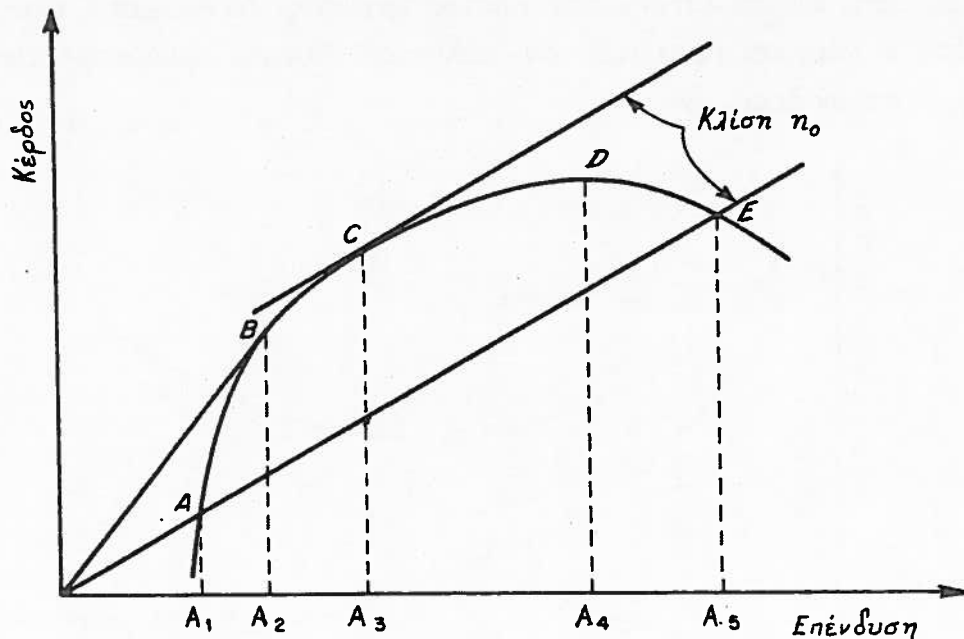
Στην περίπτωση όπου το κόστος επένδυσης πρέπει να ληφθεί υπόψη, το κριτήριο βελτιστοποίησης δεν είναι πάντοτε απλό και προφανές, αφού το μέγιστο κέρδος δεν σημαίνει κατ' ανάγκη και την μέγιστη απόδοση και το αντίστροφο. Το παράδειγμα που ακολουθεί δίνει χαρακτηριστικά αυτές τις διαφορές.

Παράδειγμα 1.3.1

Εστω ότι η καμπύλη ABCDE του σχ. 1 δείχνει την σχέση κέρδους-επένδυσης μιάς δραστηριότητας. Ποιό είναι το κριτήριο με το οποίο θα κάνουμε τη βέλτιστη επιλογή για τη δραστηριότητα αυτή;

Κατ' αρχήν αν δεν θέσουμε καμμία άλλη προϋπόθεση το μέγιστο κέρδος επιτυγχάνεται για την επιλογή της επένδυσης A_4 (σημείο D της καμπύλης).

Αν θεωρήσουμε σαν ελάχιστη αποδεκτή απόδοση $n = n_0$ αυτή που δίνεται από την ευθεία που τέμνει την καμπύλη κέρδους στα σημεία A και E τότε, το σημείο μέγιστου κέρδους D ορίζει το ύψος της επένδυσης A_4 μέσα στην περιοχή της αποδεκτής απόδοσης αφού ισχύει $A_1 \leq A_4 \leq A_5$. Παρ' όλα αυτά, όμως η κανονική λειτουργία είναι προτιμότερο να βρίσκεται στην περιοχή ABC της καμπύλης κέρδους παρά στην CDE , όταν σαν κριτήριο θεωρηθεί η απόδοση αντί του κέρδους. Κάθε επιπλέον επένδυση που γίνεται μέσα στην περιοχή ABC αξιοποιεί το επιπλέον κεφάλαιο με απόδοση μεγαλύτερη από το ορισθέν ελάχιστο όριο n_0 ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περιοχή CDE . Το σημείο C είναι το σημείο καμψής πέρα από το οποίο κάθε επιπλέον επενδυόμενο κεφάλαιο έχει μικρότερη απόδοση από την επιθυμητή, μολονότι η ολική επένδυση μέχρι του σημείου E , ικανοποιεί το συνολικό όριο απόδοσης. Η μέγιστη απόδοση, μάλιστα, δίνεται στο σημείο B μέσα στην περιοχή ABC .

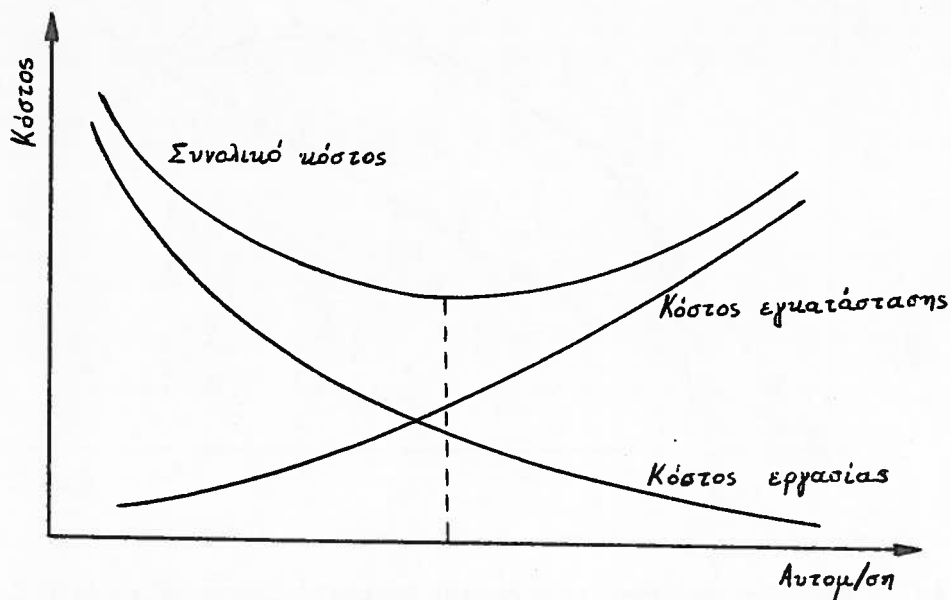


Σχήμα 1.1 Καμπύλη κέρδους - επένδυσης: Διάφορες βέλτιστες επιλογές.

1.4 ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Οι συναρτήσεις βελτιστοποίησης που περιγράφουν τα κριτήρια κόστους, συχνά περιέχουν ανταγωνιστικούς ή αλληλοαναιρούμενους μαθηματικούς όρους και

συνιστώσες. Οι συνιστώσες αυτές αποτελούν την μαθηματική έκφραση επιμέρους αλληλοαναιρούμενων ή αντιθέτων διαδικασιών. Για παράδειγμα, μια βιομηχανική διεργασία μπορεί να πραγματοποιείται εξίσου καλά είτε από ένα σύστημα πλήρως αυτοματοποιημένο είτε από ένα σύστημα με λιγότερο ή καθόλου αυτοματοποίηση. Είναι τότε φανερό ότι όσο μεγαλύτερο βαθμό αυτοματοποίησης της διαδικασίας επιθυμούμε να πετύχουμε, τόσο μεγαλύτερο κεφάλαιο εγκατάστασης θα πρέπει να επενδύσουμε. Ετσι, αν εκφράσουμε το κόστος εγκατάστασης σαν συνάρτηση της αυτοματοποίησης θα προκύψει μία αύξουσα μη γραμμική εν γένει συνάρτηση. Αντίθετα, το κόστος εργασίας θα μειώνεται όσο αυξάνεται ο βαθμός αυτοματοποίησης. Ετσι, και η συνάρτηση που θα περιγράψει το κόστος εργασίας ως προς το βαθμό αυτοματοποίησης θα είναι μια φθίνουσα μη γραμμική συνάρτηση, (σχήμα 1.2). Το συνολικό κόστος, αν θεωρηθεί σαν το άθροισμα των δύο προηγούμενων επιμέρους συνιστωσών συναρτήσεων κόστους, παρατηρούμε ότι θα παρουσιάζει ένα ελάχιστο για κάποιο συγκεκριμένο βαθμό αυτοματοποίησης. Το γεγονός αυτό οφείλεται ακριβώς στην ύπαρξη των δυο ανταγωνιστικών δράσεων που συνεπάγεται η αυτοματοποίηση αφ' ενός στο κόστος εγκατάστασης και αφ' ετέρου στο κόστος εργασίας. Το ελάχιστο, τότε, αποτελεί το βέλτιστο σημείο και προτείνει τον "καλύτερο" δυνατό συνδυασμό των δύο αυτών ανταγωνιστικών δράσεων.



Σχήμα 1.2 Καμπύλη κόστους συναρτήσει της αυτοματοποίησης.

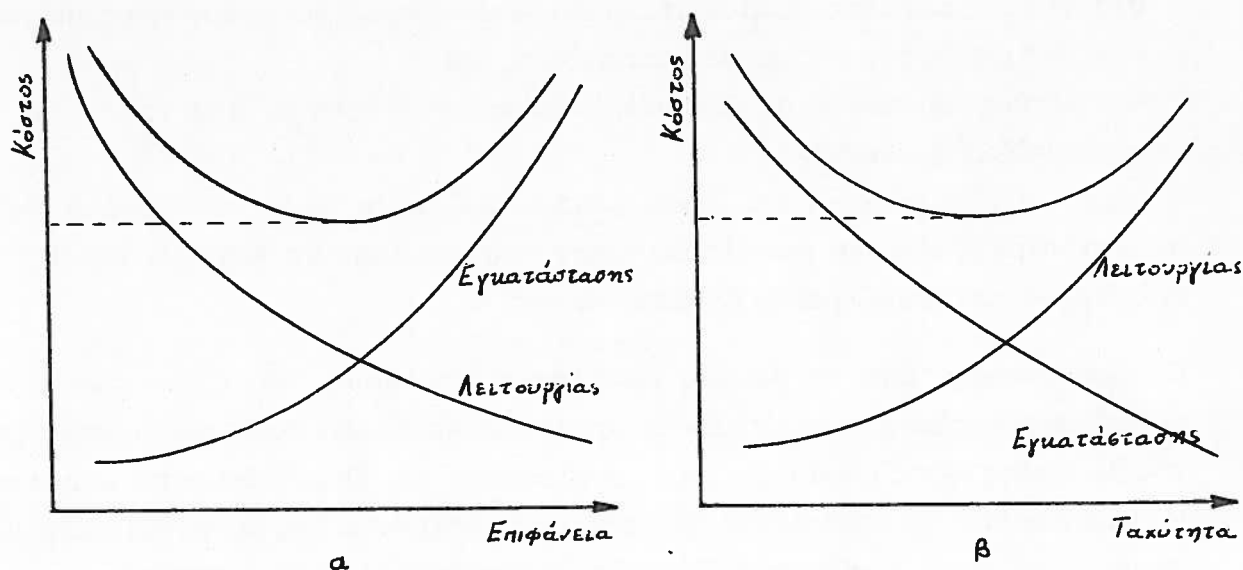
Ενα άλλο απλό τεχνικό παράδειγμα αποτελεί η βέλτιστη επιλογή ενός εναλλάκτη θερμότητας με συγκεκριμένο θερμικό φορτίο που πρέπει να απάγει προς το περιβάλλον. Σαν παράμετροι ενός τέτοιου συστήματος μπορούν να θεωρηθούν είτε η επιφάνεια εναλλαγής της θερμότητας είτε η ταχύτητα ροής μέσα από τις επιφάνειες

εναλλαγής. Τότε, η συνάρτηση κόστους αποτελείται από το άθροισμα του ετήσιου κόστους λειτουργίας αφ' ενός και της ετήσιας επιβάρυνσης από το κόστος εγκατάστασης αφ' ετέρου.

Ετσι, αν εξετάσουμε το πρόβλημα με ανεξάρτητη μεταβλητή την επιφάνεια εναλλαγής (σχήμα 1.3α) τότε προφανώς παρατηρούμε ότι το κόστος εγκατάστασης (ετήσια επιβάρυνση) εκφράζεται από μία αύξουσα συνάρτηση ενώ το κόστος λειτουργίας, που θα οφείλεται κυρίως στο απαιτούμενο για τη ροή έργο της αντλίας, εκφράζεται από μία φθίνουσα συνάρτηση. Τότε, το συνολικό κόστος θα έχει κάποιο ελάχιστο για κάποια συγκεκριμένη τιμή της επιφανείας εναλλαγής.

Το ίδιο πρόβλημα μπορούμε κατά ισοδύναμο τρόπο να εξετάσουμε θεωρώντας ανεξάρτητη μεταβλητή την ταχύτητα ροής (σχήμα 1.3β). Τότε, το κόστος εγκατάστασης (ετήσια επιβάρυνση) θα εκφράζεται από μία φθίνουσα συνάρτηση, αφού όσο μεγαλύτερες ταχύτητες ροής επιλεγούν, τόσο μικρότερες επιφάνειες εναλλαγής απαιτούνται, που σημαίνει αντίστοιχα περιορισμένες εγκαταστάσεις. Αντίθετα το έργο για την εξασφάλιση της ροής προφανώς αυξάνεται συναρτήσει της ταχύτητας ροής. Τότε, το συνολικό κόστος θα έχει κάποιο ελάχιστο για κάποια συγκεκριμένη τιμή της ταχύτητας ροής.

Είναι προφανές ότι και οι δύο προηγούμενες αντιμετώπισεις οδηγούν στην ίδια βέλτιστη λύση. Στην ίδια επίσης λύση θα καταλήγαμε εάν εξ' αρχής θεωρούσαμε το πρόβλημα με συνάρτηση βελτιστοποίησης δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών δηλ. της επιφανείας



Σχήμα 1.3 (α) Καμπύλη κόστους συναρτήσει της επιφανείας εναλλαγής
(β) Καμπύλη κόστους συναρτήσει της ταχύτητας ροής

εναλλαγής και της ταχύτητας ροής. Τότε, οι ανταγωνιστικές συνιστώσες εμφανίζονται για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή ξεχωριστά, σύμφωνα με την προηγούμενη λογική, και η βέλτιστη λύση θα δίνεται στο χώρο των τριών διαστάσεων.

1.5 ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η πολυπλοκότητα αποτελεί ένα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά στα προβλήματα βελτιστοποίησης. Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών είναι απαραίτητη ή όσο το δυνατόν απλοποίησή τους και τυποποίησή τους σε κατηγορίες που θα μπορούν να λυθούν με συστηματικό τρόπο αναλυτικά ή αριθμητικά.

Ένα προφανές μέτρο για την πολυπλοκότητα ενός προβλήματος βελτιστοποίησης αποτελεί το μέγεθός του, το οποίο ορίζεται από τον αριθμό των μεταβλητών του και από τον αριθμό των περιοριστικών συνθηκών του. Με τη ανάπτυξη των μεθόδων

βελτιστοποίησης αλλά και την εξέλιξη των υπολογιστών το μέγεθος των προβλημάτων αυτών που μπορούν με άνεση να επιλυθούν έχει σημαντικά αυξηθεί. Υπό τις σημερινές προϋποθέσεις θα μπορούσαμε να ταξινομήσουμε τα προβλήματα βελτιστοποίησης, ως προς το μέγεθός τους, σε τρεις κύριες κατηγορίες:

- στα μικρής κλίμακας προβλήματα, όπου οι μεταβλητές και οι συνθήκες δεν ξεπερνούν τη δεκάδα,
- στα μεσαίας κλίμακας προβλήματα, όπου οι μεταβλητές και οι συνθήκες μπορεί να είναι από μια δεκάδα έως μερικές εκατοντάδες και
- στα μεγάλης κλίμακας προβλήματα, όπου το μέγεθός τους είναι της τάξης των εκατοντάδων ή χιλιάδων.

Η προηγούμενη ταξινόμηση είναι βέβαια αυθαίρετη αλλά σε μεγάλο βαθμό αντικατοπτρίζει κάποιες βασικές διαφορές που οφείλουν να ληφθούν υπόψη στην προσέγγιση των προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Οι περισσότερες από τις βασικές αναλυτικές μεθόδους, που έχουν αναπτυχθεί, εστιάσθηκαν κυρίως στη διατύπωση των αναγκαίων και ικανών συνθηκών για την εύρεση της βέλτιστης λύσης παρά στον τρόπο υπολογισμού της. Οι μέθοδοι αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία για τον αριθμητικό υπολογισμό της βέλτιστης λύσης μόνο σε μικρής κλίμακας προβλήματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι εξισώσεις των ικανών και αναγκαίων συνθηκών μπορούν να δώσουν τις λύσεις με κατευθείαν αναλυτικούς υπολογισμούς (με το χέρι ή απλά προγράμματα υπολογιστή).

Στις περιπτώσεις όπου το μέγεθος του προβλήματος δεν επιτρέπει αναλυτικές λύσεις με το χέρι, είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση αριθμητικών μεθόδων που θα αξιοποιούν τις δυνατότητες του υπολογιστή. Η ανάπτυξη και η υλοποίηση των καταλλήλων αλγορίθμων για χρήση στον υπολογιστή, όμως, έχει σαν βάση της μια πλήρη θεωρία της οποίας πυρήνα αποτελούν οι αναλυτικές θεωρίες βελτιστοποίησης και οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες που απορρέουν από αυτές. Υπάρχει λοιπόν, μια άμεση εξάρτηση των αναλυτικών και των αριθμητικών μεθόδων που δίνει τη δυνατότητα αντιμετώπισης και των μεσαίας κλίμακας προβλημάτων. Τότε συζητάμε για μεθόδους προγραμματισμού μεσαίας κλίμακας. Για ακόμη μεγαλύτερου μεγέθους προβλήματα πολλές φορές χρειαζόμαστε ακόμη πιά προωθημένες τεχνικές που βασίζονται και αξιοποιούν ειδικά δομικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων που έχουμε να επιλύσουμε.

Εκτός από το μέγεθος σημαντικό ρόλο στη βελτιστοποίηση παίζει η ίδια η φύση του προβλήματος. Έτσι, μία άλλη ταξινόμηση μπορεί να γίνει με βάση αν υπάρχουν ή όχι περιοριστικές συνθήκες ή αν η ίδια η συνάρτηση που έχουμε να βελτιστοποιήσουμε και οι τυχόν συνθήκες είναι ή όχι γραμμικές.

Μπορεί με μία πρώτη ματιά να φανεί ότι η βελτιστοποίηση χωρίς περιοριστικές συνθήκες είναι ένα πρόβλημα ουτοπιστικό που δεν συναντάται στην πράξη. Αυτό όμως δεν είναι αλήθεια. Υπάρχουν περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα τα θέματα ασφάλειας και αξιοπιστίας στην λειτουργία ενός συστήματος όπου οι περιορισμοί, οικονομικοί ή τεχνικοί είναι τόσο δευτερεύουσας σημασίας, ώστε μπορούν να παραλειφθούν. Επίσης, περιορισμοί στην απαιτούμενη ενέργεια για μία σοβαρή βιομηχανική παραγωγή ή στο κεφάλαιο που πρέπει να επενδυθεί για κάποια σημαντική προσπάθεια δεν νοούνται στον σύγχρονο σχεδιασμό, όπου η εξασφάλιση ενέργειας και η προσφορά κεφαλαίων μέσω δανεισμού, μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά απεριόριστη. Επιπρόσθετα, η μελέτη προβλημάτων βελτιστοποίησης χωρίς περιοριστικές συνθήκες, αποτελεί τη βάση για την μελέτη στην συνέχεια του γενικότερου προβλήματος βελτιστοποίησης υπό συνθήκες και αποτελεί ένα μέτρο για την επίδραση των συνθηκών στην προκύπτουσα επιθυμητή λύση.

Τη μεγαλύτερη, όμως, πλειοψηφία των προβλημάτων βελτιστοποίησης αποτελεί η περίπτωση βελτιστοποίησης υπό περιοριστικές συνθήκες. Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται δύο άλλες υποκατηγορίες προβλημάτων, οι οποίες χρησιμοποιούν εντελώς διαφορετική φιλοσοφία στην ανάπτυξη των μεθόδων της. Η μία εξετάζει πρόβλήματα του μη γραμμικού προγραμματισμού, στα οποία η υπό βελτιστοποίηση συνάρτηση ή/και οι εξισώσεις ή ανισότητες που περιγράφουν τις περιοριστικές συνθήκες είναι μη γραμμικές. Η αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτού του είδους γίνεται με παρόμοιο αλλά γενικότερο τρόπο, όπως στην περίπτωση της βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς,

όπου και εκεί η συνάρτηση βελτιστοποίησης είναι μη γραμμική. Η δεύτερη, εξετάζει προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, όπου τόσο η συνάρτηση βελτιστοποίησης όσο και οι περιοριστικές συνθήκες είναι γραμμικές. Τα προβλήματα της κατηγορίας αυτής είναι ιδιαίτερα δημοφιλή εξαιτίας των σχετικά εύκολων μαθηματικών που απαιτούν για την αντιμετώπισή τους. Ταυτόχρονα, είναι και πρακτικού ενδιαφέροντος αφού γραμμικές σχέσεις εύκολα μπορούν να θεωρηθούν σαν περιορισμοί αλλά και σαν συναρτήσεις βελτιστοποίησης. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει την κατάστρωση ενός απλού γραμμικού προβλήματος βελτιστοποίησης.

Παράδειγμα 1.5.1

Εστω, ότι θέλουμε να παράγουμε καθημερινά την μέγιστη δυνατή ποσότητα από δύο προϊόντα 1 και 2 για τα οποία δεν θέλουμε το συνολικό τους βάρος να ξεπερνά την τιμή B και το συνολικό τους κόστος την τιμή C . Το πρόβλημα αυτό μπορεί να εκφραστεί σαν το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα, με συνάρτηση βελτιστοποίησης:

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

και περιοριστικές συνθήκες:

$$g_1(x_1, x_2) = w_1x_1 + w_2x_2 \leq B \text{ και}$$

$$g_2(x_1, x_2) = m_1x_1 + m_2x_2 \leq C$$

όπου x_1, x_2 οι ποσότητες των προϊόντων (που είναι και οι μεταβλητές του προβλήματος) w_1, w_2 το ανά μονάδα βάρος και m_1, m_2 το ανά μονάδα κόστος των προϊόντων 1 και 2 αντίστοιχα.

Τέλος, κάποιες επιπλέον παραδοχές για τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών εκφράσεων που χρησιμοποιούνται, πρέπει να θεωρηθούν σημαντικές. Έτσι, συνήθως απαιτείται οι συναρτήσεις του προβλήματος να είναι **συνεχείς** ή ακόμη να έχουν **συνεχείς παραγώγους**. Αυτό εξασφαλίζει ότι μικρές μεταβολές στις μεταβλητές του προβλήματος οδηγούν σε μικρές επίσης μεταβολές σε όλες τις άλλες τιμές που σχετίζονται με το πρόβλημα. Επίσης, το σύνολο μέσα στο οποίο οι μεταβλητές παίρνουν τιμές, δεν μπορεί να είναι αυθαίρετο και συνήθως είναι μια συνεκτική περιοχή του χώρου των n -διαστάσεων (όπου n ο αριθμός των μεταβλητών) παρά για παράδειγμα ένα σύνολο μεμονωμένων σημείων. Αυτό εξασφαλίζει ότι οι μικρές μεταβολές στις μεταβλητές για τις οποίες συζητάμε έχει νόημα να γίνουν.

Υπό το πρίσμα των παραπάνω υποθέσεων θα μπορούσε κανείς να χαρακτηρίσει τα προβλήματα που θα αντιμετωπισθούν στο παρόν σύγγραμμα και σαν προβλήματα προγραμματισμού συνεχών μεταβλητών, αφού γενικά θα εξετάσουμε προβλήματα όπου όλες οι μεταβλητές και οι συναρτήσεις είναι συνεχείς η κατά τμήματα συνεχείς. Στην

πράξη αυτή η παραδοχή τοποθετεί τη βάση για την εξαγωγή τόσο των αναλυτικών μεθόδων όσο και των αριθμητικών αλγορίθμων, αφού στις περισσότερες των περιπτώσεων η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται εφαρμόζει τη λογική των μικρών μεταβολών στο διάλυμα των άγνωστων μεταβλητών. Στις ειδικές περιπτώσεις όπου οι συναρτήσεις πρέπει να εξετασθούν σε οριακά σημεία όπως τα όρια της περιοχής που αυτές ορίζονται ή εσωτερικά σημεία ασυνέχειας, έχουν αντίστοιχα αναπτυχθεί ειδικές μεθοδολογίες.

1.6 ΕΠΙΠΕΔΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Η βελτιστοποίηση μίας επιμέρους διεργασίας ενός συστήματος αποτελεί ένα απλούστερο πρόβλημα σε σχέση με τη βελτιστοποίηση ολόκληρου του συστήματος. Η πρόταση αυτή είναι προφανής αφού οι μεταβλητές (και οι περιορισμοί) της όποιας επιμέρους διεργασίας δεν μπορεί παρά να είναι λιγότερες από αυτές ολόκληρου του συστήματος. Έτσι, είναι σαφές ότι το μέγεθος ενός προβλήματος βελτιστοποίησης εξαρτάται άμεσα από το επίπεδο στο οποίο επιχειρείται η βελτιστοποίηση.

Το επίπεδο, λοιπόν, της βελτιστοποίησης χονδρικά και κατά φθίνοντα βαθμό πολυπλοκότητας μπορεί να αφορά:

1. Το σύνολο κάποιων διεργασιών, όπως π.χ. μιά βιομηχανία.
2. Μια επιμέρους διεργασία, όπως π.χ. το λεβητοστάσιο.
3. Μια επιμέρους λειτουργία στα πλαίσια μιας διεργασίας, όπως π.χ. ο έλεγχος του κυκλώματος ατμού.
4. Μια συνιστώσα μιας λειτουργίας, όπως π.χ. η ρύθμιση της πίεσης του ατμού.

Το επίπεδο βελτιστοποίησης και η πολυπλοκότητα θεωρούνται πολύ σημαντικές παράμετροι, ιδιαίτερα για επαναληπτικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης. Σύμφωνα με διάφορους ερευνητές (όπως ο Cochran [1960]) ο αριθμός των υπολογισμών που απαιτούνται για την εύρεση ενός σημείου σε ένα δεύτερης τάξης υπερεπίπεδο η διαστάσεων δίνεται από την σχέση:

$$N = \frac{1}{2} (n+1) (n+2)$$

Για διάφορες τιμές των διαστάσεων n , σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, παίρνουμε τον πίνακα:

n	3	5	10	20	50
N	10	21	66	231	1326

Ετσι, για παράδειγμα, ο διαχωρισμός ενός προβλήματος με 20 μεταβλητές σε τέσσερα προβλήματα με 5 μεταβλητές το καθένα θα μείωνε τις απαιτούμενες πράξεις στο $1/3$ και ακόμα λιγότερο. Ο διαχωρισμός όμως ενός προβλήματος βελτιστοποίησης δεν επιτρέπεται να γίνεται **αυθαίρετα** και δεν μπορεί να εφαρμοσθεί παρά μόνο σε μερικές περιπτώσεις όπου ικανοποιείται η παρακάτω απλή αρχή.

Αρχή του Διαχωρισμού - Ένα σύστημα μπορεί να διαχωρισθεί σε υποσυστήματα στα σημεία εκείνα όπου η αλληλεξάρτηση μεταξύ των υποσυστημάτων που θα προκύψουν μπορεί να θεωρηθεί σταθερή ή δεδομένη.

Τότε, η λύση που θα προκύψει από την βελτιστοποίηση κάθε υποσυστήματος ξεχωριστά, θα είναι ίδια με την λύση της βελτιστοποίησης ολοκλήρου του συστήματος.

Μια άλλη απλούστευση στην επιτευξη της βέλτιστης λύσης μπορεί να γίνει σε συστήματα στα οποία οι διάφορες διεργασίες γίνονται σε σειρά, όπου δηλαδή κάθε επόμενη διεργασία εξαρτάται από το αποτέλεσμα της προηγούμενης. Συστήματα με τέτοια δομή ονομάζονται **ακολουθιακά ή σειριακά συστήματα**. Σε τέτοια συστήματα μπορεί να γίνει σειριακός διαχωρισμός σε υποσυστήματα όπου η είσοδος κάθε υποσυστήματος θα παραμένει σαν ελεύθερη παράμετρος. Η αρχή που πρέπει να ικανοποιείται σε αυτές τις περιπτώσεις είναι η ακόλουθη:

Αρχή της βελτιστοποίησης - Κάθε υποσύστημα ενός ακολουθιακού συστήματος πρέπει να είναι βέλτιστο ανεξάρτητα με την είσοδό του.

Στην αρχή αυτή βασίζονται πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης και βέλτιστου ελέγχου συστημάτων. Η μαθηματική υλοποίηση της αρχής αυτής είναι γνωστή σαν **Δυναμικός Προγραμματισμός** και έχει βρει ευρύτατη εφαρμογή σε πρακτικά προβλήματα, πολλά από τα οποία θα δούμε στον βέλτιστο έλεγχο συστημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΧΩΡΟΙ - ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν να εκφραστούν με μαθηματικό τρόπο σαν προβλήματα εύρεσης των ακροτάτων (μεγίστων ή ελαχίστων) συναρτήσεων μίας ή περισσότερων μεταβλητών της μορφής

$$f = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

όπου f αποτελεί τη συνάρτηση βελτιστοποίησης και x την ανεξάρτητη μεταβλητή. Η ανεξάρτητη μεταβλητή μπορεί να είναι μέγεθος βαθμωτό, οπότε η f παριστάνεται στο χώρο της μίας διάστασης (συνάρτηση μίας μεταβλητής). Μπορεί, όμως, η x να παριστάνει ένα διάνυσμα πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_n , οπότε η f παριστάνεται στο χώρο των n - διαστάσεων (συνάρτηση n - μεταβλητών). Επίσης, οι διάφορες περιοριστικές συνθήκες ενός προβλήματος βελτιστοποίησης μπορεί να δίνονται από συναρτήσεις μίας ή περισσότερων μεταβλητών.

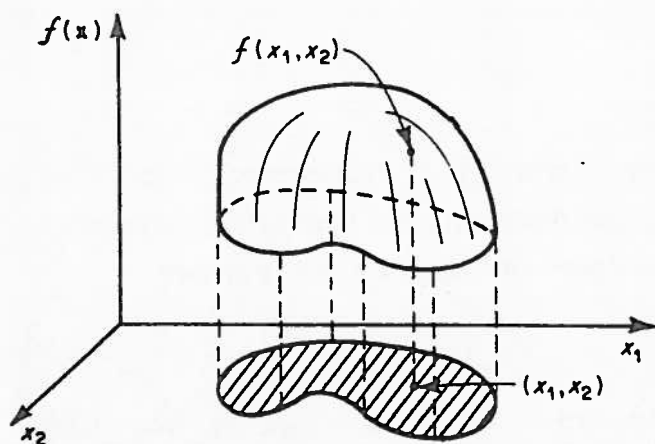
Έτσι, οι συναρτήσεις και οι χώροι στους οποίους περιγράφονται αποτελούν βασικό εργαλείο για το χειρισμό προβλημάτων βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες των συναρτήσεων μίας ή πολλών μεταβλητών που θα μας χρησιμεύσουν στα επόμενα κεφάλαια.

2.2 ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

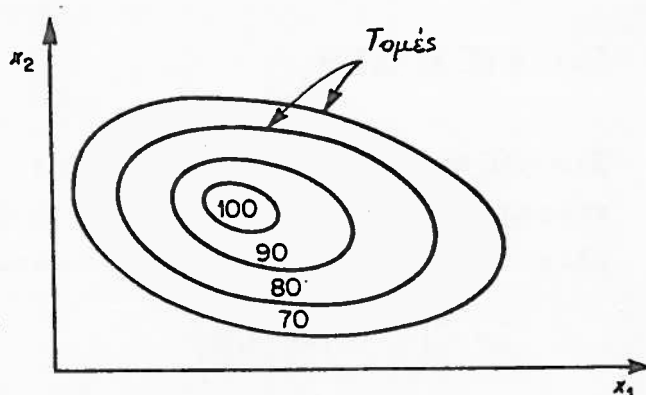
Μια συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με διάφορους τρόπους. Γενικά, η εξαρτημένη μεταβλητή y δίνεται από μια μαθηματική σχέση $y = f(x)$ που περιέχει τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και ορίζεται σε κάποια συγκεκριμένη περιοχή. Οποιαδήποτε ανάλυση της συνάρτησης έχει να κάνει με τις ιδιότητες της μαθηματικής αυτής έκφρασης.

Η γεωμετρική ή γραφική παράσταση αποτελεί μια άλλη περιγραφή της συνάρτησης. Όταν η γραφική παράσταση είναι δυνατή, μπορούμε να έχουμε μια εποπτική εικόνα που δίνει μια σαφέστερη αντίληψη για τη φύση της συνάρτησης. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n μπορούν να θεωρηθούν σαν συνιστώσες στο χώρο των n - διαστάσεων. Στο

χώρο της μιας ή των δύο διαστάσεων η συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί απο μια καμπύλη ή μια επιφάνεια (Σχ. 2.1).



Σχήμα 2.1 Γραφική παράσταση συνάρτησης δύο μεταβλητών



Σχήμα 2.2 Τομές της συνάρτησης δύο μεταβλητών του Σχ. 2.1

Μια εναλλακτική παράσταση για συναρτήσεις δυο μεταβλητών δίνεται στο Σχήμα 2.2 όπου αποτυπώνονται διάφορες τομές της συνάρτησης f από επίπεδα παράλληλα στους άξονες x_1 και x_2 . Δηλαδή, έχουμε παράσταση των καμπυλών $f(x_1, x_2) = k$ για διάφορες τιμές του k .

Μολονότι για συναρτήσεις περισσότερων των δυο μεταβλητών ή γραφική παράσταση δεν είναι δύνατη, η μαθηματική αντιμετώπιση που προκύπτει από την γεωμετρική παράσταση στο χώρο των δυο διαστάσεων μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε χώρους περισσότερων διαστάσεων.

2.3 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζει για κάθε δεδομένο x μια μόνο συγκεκριμένη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής y . Αυτός ο κανόνας μπορεί όμως να παραβιασθεί για κάποια μεμονωμένα σημεία. Τούτο οφείλεται στα χαρακτηριστικά συνέχειας της συνάρτησης που εξετάζουμε. Ετσι, με βάση τη συνέχεια διακρίνουμε τις συναρτήσεις σε **συνεχείς**, **ασυνεχείς** και **διακριτές** συναρτήσεις.

Συνεχείς συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f ορίζεται ως συνεχής σε κάποιο σημείο x όταν ισχύει

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \quad (2.2)$$

όπου Δx μπορεί να αντιστοιχεί σε κάθε επιτρεπτή διεύθυνση γύρω από το σημείο x . Ο παραπάνω ορισμός δεν είναι ένας αυστηρός ορισμός αλλά είναι επαρκής για τους σκοπούς του παρόντος μαθήματος. Στην περίπτωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής ο ορισμός αυτός απλά συνεπάγεται ότι η συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί από μια **συνεχή καμπύλη** στο επίπεδο. Ομοίως, για συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών συνεπάγεται ότι η συνάρτηση παρίσταται από μια **συνεχή επιφάνεια** στο χώρο των δύο διατάσεων ή ένα συνεχές υπερεπίπεδο στο χώρο των περισσότερων διαστάσεων αντίστοιχα.

Ασυνεχείς συναρτήσεις

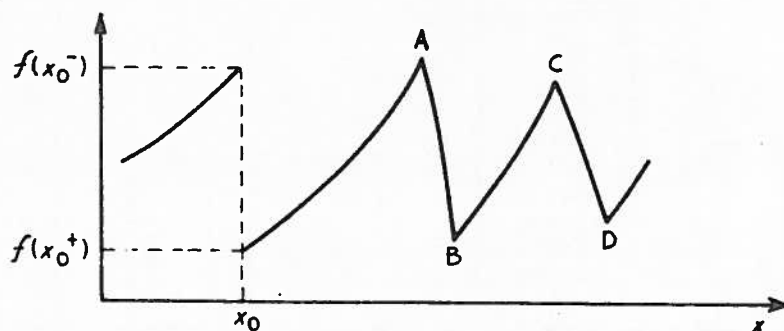
Η πιο κοινή μορφή ασυνέχειας μιας συνάρτησης είναι η **ασυνέχεια καμπύλης**. Στο σημείο της ασυνέχειας αυτής η συνάρτηση παίρνει διαφορετική τιμή ανάλογα με την κατεύθυνση που προσεγγίζουμε το σημείο αυτό. Το Σχ. 2.3 δείχνει ένα σημείο ασυνέχειας καμπύλης x_0 για συνάρτηση μιας μεταβλητής. Για το σημείο αυτό ισχύει

$$f(x + \Delta x) = f(x_0^+) \quad \text{για } x = x_0 \text{ και } \Delta x \geq 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$f(x + \Delta x) = f(x_0^-) \quad \text{για } x = x_0 \text{ και } \Delta x \leq 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$



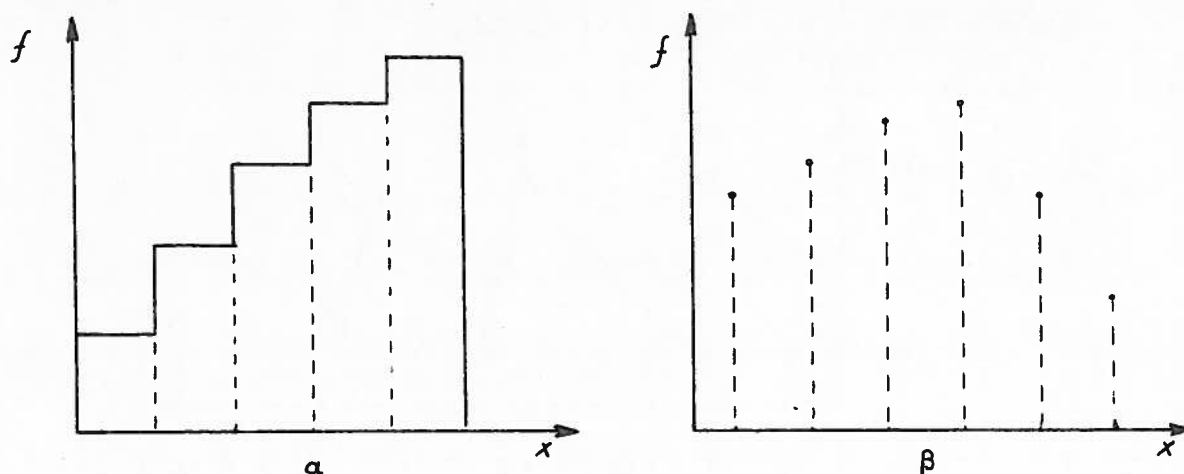
Σχήμα 2.3 Ασυνεχής συνάρτηση: x_0 ασυνέχεια καμπύλης, A, B, C και D ασυνέχεια βήθμωσης

Οι περισσότερες φυσικές διαδικασίες είναι γνωστό ότι δεν παρουσιάζουν ασυνέχειες με την αυστηρή έννοια των μαθηματικών σχέσεων (2.3). Συνήθως υπάρχει ένας πεπερασμένος ρυθμός μεταβολής ο οποίος όταν είναι πολύ μεγάλος μπορεί να αποδοθεί σαν σημείο ασυνέχειας. Όταν οι μεταβολές δεν είναι τόσο πολύ απότομες οι ασυνέχειες μπορούν να αποδοθούν σαν ασυνέχειες **βάθμωσης**. Τότε, ενώ η καμπύλη παραμένει γεωμετρικά συνεχής παρουσιάζει κορυφές (μέγιστα ή ελάχιστα) όπως δείχνονται στο Σχ. 2.3, σημεία A, B, C και D, για συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Το σημείο κορυφής είναι τότε σημείο ασυνέχειας της παραγωγού (βάθμωσης) αφού η παράγωγός παίρνει διαφορετική τιμή στο σημείο αυτό ανάλογα με την κατεύθυνση που το προσεγγίζουμε. **Ισχύουν, δηλαδή, οι σχέσεις (2.3) όχι για την ίδια την συνάρτηση αλλά για κάποια από τις παραγώγους της.**

Διακριτές συναρτήσεις

Μια άλλη μορφή ασυνέχειας εμφανίζεται όταν η συνάρτηση έχει νόημα μόνο για διακριτές τιμές ή σύνολα τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε σαν συνάρτηση f τη διάμετρο του σωλήνα ροής με ανεξάρτητη μεταβλητή x την πτώση πίεσης ενός υγρού, τότε η συνάρτηση αυτή έχει νόημα μόνο για τις τιμές της διαμέτρου που διατίθενται από τους κατασκευαστές (βλέπε Σχ. 2.4 α). Ένα άλλο παράδειγμα ασυνέχειας λόγω διακριτικότητας της συνάρτησης αποτελεί η γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων δοκιμών ή πειραμάτων. Τα αποτελέσματα μπορούν τότε να εμφανισθούν είτε στη μορφή **διακριτών σημείων** όπως στο Σχ. 2.4β είτε στη μορφή **ιστογράμματος** όπως φαίνεται στο Σχ. 2.4 α.

Έτσι, στην πλειονότητά τους οι συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν σαν **συνεχείς** ή



Σχήμα 2.4 Διακριτές συναρτήσεις: (α) ιστογράμματος, (β) διακριτών σημείων

κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις και σαν τέτοιες θα αντιμετωπισθούν στα επόμενα κεφάλαια.

2.4 ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στην παράγραφο αυτή, θα κάνουμε κάποιους χαρακτηριστικούς διαχωρισμούς των συναρτήσεων και θα δώσουμε κάποιους ορισμούς που σχετίζονται με την μορφή που μπορεί να έχουν οι διάφορες συναρτήσεις.

Μονότονες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f ορίζεται σαν **αύξουσα μονότονη συνάρτηση** όταν ισχύει

$$f(x+\Delta x) > f(x) \quad \text{για } \Delta x > 0 \quad (2.4)$$

και αντίστοιχα ορίζεται σαν **φθίνουσα μονότονη συνάρτηση** όταν ισχύει

$$f(x+\Delta x) < f(x) \quad \text{για } \Delta x > 0 \quad (2.5)$$

για κάποια συγκεκριμένη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων x_1 και x_2 της συνάρτησης. Δηλαδή, τα σημεία x και $x+\Delta x$ είναι οποιαδήποτε τυχαία σημεία της ορισθείσας διαδρομής μεταξύ του x_1 και x_2 .

Στην περίπτωση κατά την οποία ισχύει $f(x+\Delta x) \geq f(x)$ για $\Delta x > 0$ ή συνάρτηση f ορίζεται σαν **μονότονη μη φθίνουσα** ή αντίστοιχα **μονότονη μη αύξουσα** συνάρτηση όταν ισχύει $f(x+\Delta x) \leq f(x)$ για $\Delta x > 0$.

Μονοτροπικές συναρτήσεις

Εστω ότι σε κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση στο χώρο που ορίζεται η συνάρτηση f , παίρνουμε διαδοχικές τιμές της συνάρτησης f ξεκινώντας από κάποιο συγκεκριμένο σημείο. Αν η τιμή της f αρχικά μειώνεται διαδοχικά ενώ στη συνέχεια αυξάνεται καθώς προχωράμε στη διαδοχή των εξεταζομένων σημείων, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **μονοτροπική συνάρτηση**. Είναι φανερό ότι για να συμβαίνει αυτό η συνάρτηση f θα πρέπει να παρουσιάζει ένα μόνο ελάχιστο. Για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών αν το παραπάνω συμβαίνει για όλες τις επιτρεπτές διευθύνσεις γύρω από το ελάχιστο τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **ισχυρά μονοτροπική συνάρτηση**.

Ομοίως, **μονοτροπική** χαρακτηρίζεται μια συνάρτηση που παρουσιάζει ένα μέγιστο. Τότε, αντίστοιχα, η τιμή της σε κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση αρχικά θα αυξάνεται διαδοχικά ενώ στη συνέχεια θα μειώνεται.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα προηγούμενα η μονοτροπικότητα μπορεί να ορισθεί για συναρτήσεις μιας μεταβλητής από τις σχέσεις:

$$f(x_0) < f(x_2) < f(x_1) \quad \text{όταν} \quad x_1 < x_2 < x_0$$

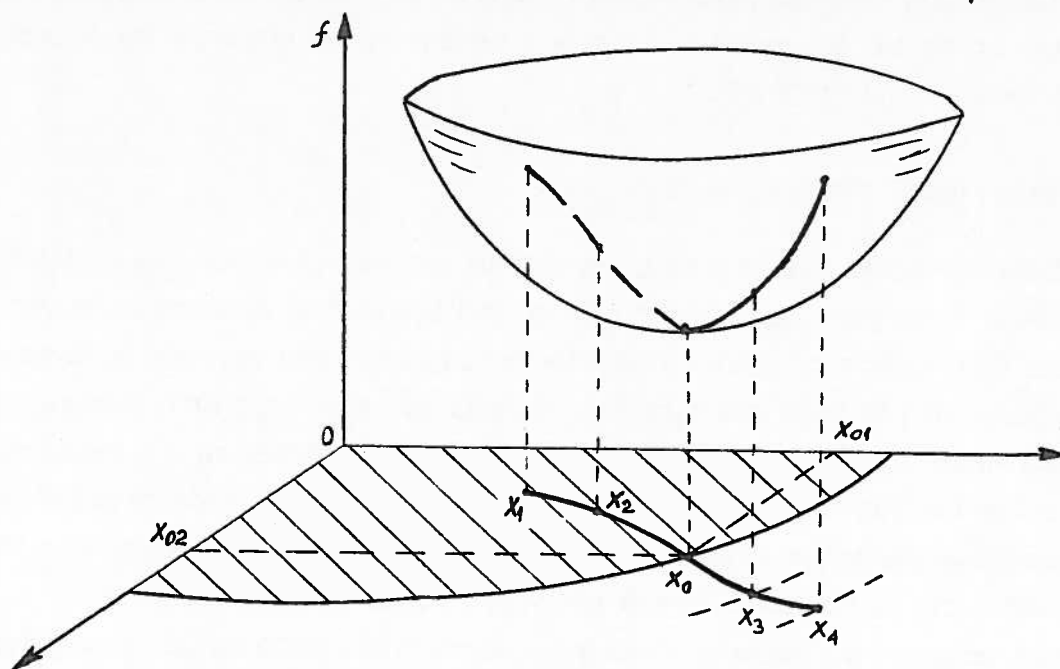
και

$$f(x_0) < f(x_3) < f(x_4) \quad \text{όταν} \quad x_0 < x_3 < x_4 \quad (2.6)$$

όπου x_0 το ελάχιστο της f . Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (2.6) χρησιμοποιούν τέσσερα σημεία σύγκρισης προς το ελάχιστο δύο εξ αριστερών x_1 και x_2 , (μικρότερα) και δύο εκ δεξιών x_3 και x_4 , μεγαλύτερα του ελάχιστου x_0 . Αντίστοιχη σχέση μπορεί να προκύψει και για μονοτροπικότητα γύρω από μέγιστο συνάρτησης.

Στη γενική περίπτωση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, ορίζουμε μια συνάρτηση $f(x)$ σαν μονοτροπική αν για κάθε ζεύγος σημείων x_1 και x_2 υπάρχει μια διαδρομή από το x_1 στο x_2 μέσω του ελαχίστου x_0 κατά μήκος της οποίας η συνάρτηση είναι μονοτροπική, σύμφωνα με τον ορισμό των σχέσεων (2.6), όπου τα x_1 , x_2 , x_3 και x_4 αντικαθίστανται από παραμέτρους που δίνουν την απόσταση κατά μήκος της διαδρομής στο χώρο των η-διαστάσεων.

Στο Σχ. 2.5 δείχνεται μια μονοτροπική συνάρτηση στο χώρο των δύο διαστάσεων. Αν θεωρήσουμε ότι το ελάχιστο x_0 βρίσκεται στο θετικό τμήμα των αξόνων με συντεταγμένες (x_{01}, x_{02}) , τότε το τμήμα τόξου με κέντρο το 0 και ακτίνα $\sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2}$



Σχήμα 2.5 Ισχυρά μονοτροπική συνάρτηση δύο μεταβλητών

χωρίζει την περιοχή του χώρου των τεταγμένων σε δύο μέρη. Η γραμμοσκιασμένη περιοχή περιλαμβάνει τα x εκείνα που απέχουν λιγότερο από το x_0 , δηλ. τα $x < x_0$ ενώ η εκτός γραμμοσκίασης περιοχή περιλαμβάνει τα $x > x_0$. Έτσι, ορίζουμε τα x_1 και x_2 μέσα στη γραμμοσκιασμένη περιοχή και τα x_3 και x_4 εκτός γραμμοσκιασμένης περιοχής. Οι εστιγμένες καμπύλες περιφέρειας τόξου πάνω στο επίπεδο χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της διαδοχής : $x_1 < x_2 < x_0 < x_3 < x_4$. Τότε για τη διαδρομή που θεωρήσαμε παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση (2.6) που ορίζει την μονοτροπικότητα. Αν με αντίστοιχο τρόπο εξετάσουμε όλες τις διαδρομές γύρω από το x_0 και διαπιστώσουμε ότι η σχέση (2.6) επαληθεύεται τότε η συνάρτηση f είναι ισχυρά μονοτροπική.

Είναι φανερό ότι αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (2.4), (2.5) με την (2.6) παρατηρούμε ότι η ισχυρή μονοτροπικότητα σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι μονότονα φθίνουσα στην περιοχή όπου $x < x_0$ και μονότονα αύξουσα στην περιοχή όπου $x > x_0$.

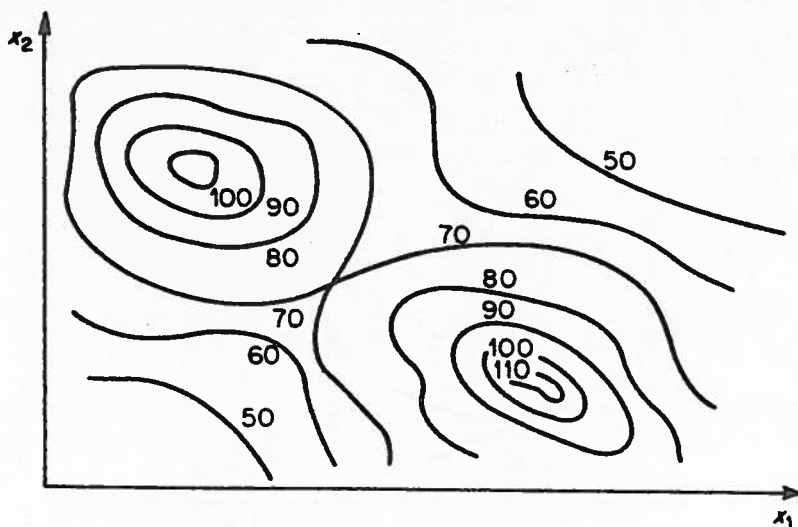
Όταν οι συναρτήσεις παρουσιάζουν περισσότερα του ενός ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) τότε ονομάζονται πολυτροπικές συναρτήσεις. Το Σχ. 2.6 δείχνει μια πολυτροπική συνάρτηση (διτροπική) δύο μεταβλητών σε τομές.

2.5 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η κυρτότητα αποτελεί μια ειδική ιδιότητα των μονοτροπικών συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση f ορίζεται σαν **κυρτή συνάρτηση** όταν ισχύει

$$f[(1-a)x_1+ax_2] \leq (1-a)f(x_1) + af(x_2) \quad (2.7)$$



Σχήμα 2.6 Διτροπική συνάρτηση δύο μεταβλητών (τομές)

για όλα τα a : $0 \leq a \leq 1$ και οποιαδήποτε σημεία x_1 και x_2 στο χώρο των η-διαστάσεων.

Ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά λέει ότι οποιαδήποτε ευθεία γραμμή από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 κείται πάνω από την επιφάνεια της συνάρτησης f (Σχ. 2.7). Σημειώνεται ότι για τις οριακές περιπτώσεις $a = 0$ και $a = 1$ η σχέση (2.7) συγκρίνει τα ακραία σημεία x_1 και x_2 αντίστοιχα. Για $a = 1/2$ εξετάζεται η συνάρτηση f στο σημείο $1/2(x_1 + x_2)$.

Κοίλη συνάρτηση

Μια συνάρτηση g ονομάζεται κοίλη όταν η συνάρτηση $f = -g$ είναι κυρτή. Αμεση συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι η σχέση (2.7) ισχύει για κοίλη συνάρτηση με αναστροφή της ανισότητας.

Βασική ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων

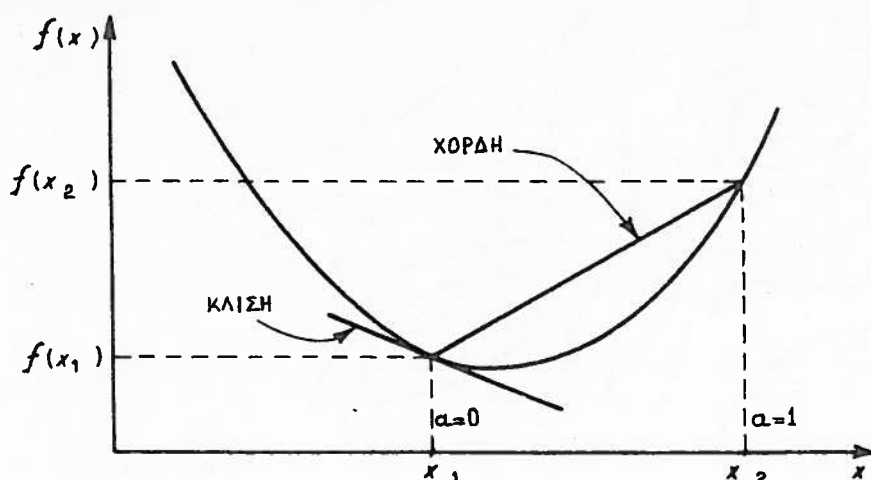
Το άθροισμα δυο κυρτών συναρτήσεων είναι επίσης κυρτή συνάρτηση.

Απόδειξη:

Εστω f_1 και f_2 κυρτές συναρτήσεις. Τότε, και για τις δυο θα ισχύει ο ορισμός (2.7). Το άθροισμα τους λοιπόν θα είναι:

$$f_1[(1-a)x_1 + ax_2] + f_2[(1-a)x_1 + ax_2] \leq (1-a)f_1(x_1) + af_1(x_2) + (1-a)f_2(x_1) + af_2(x_2)$$

Κάνοντας κάποιες απλές πράξεις στο β' μέλος και λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει $f_1(x^*) + f_2(x^*) = [f_1+f_2](x^*)$ παίρνουμε:



Σχήμα 2.7 Κυρτή συνάρτηση

$$[f_1+f_2][(1-a)x_1 + ax_2] \leq (1-a)[f_1(x_1) + f_2(x_1)] + a[f_1(x_2) + f_2(x_2)] \quad (2.8)$$

Η σχέση (2.8) επαληθεύει τον ορισμό (2.7) για τη συνάρτηση f_1+f_2 .

Η παραπάνω ιδιότητα είναι σημαντική γιατί μπορεί να απλοποιήσει σύνθετα προβλήματα. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f = 3x_1^2 + 4x_2^4 + 7x_3^2 + x_3^6 + x_4^2$ είναι κυρτή συνάρτηση αφού αποτελείται από πέντε συνιστώσες κυρτές συναρτήσεις.

2.6 ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Αναφέραμε σε προηγούμενες παραγράφους την έννοια της διεύθυνσης γύρω από κάποιο σημείο. Επίσης, σε επόμενα κεφάλαια θα μας είναι χρήσιμη η έννοια της διεύθυνσης στη γειτονιά ενός μεμονωμένου σημείου την οποία θα χρησιμοποιήσουμε σαν τεχνική έρευνας των ιδιοτήτων των γειτονικών σημείων σε σχέση προς το αρχικό σημείο. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **μέθοδος των διευθύνσεων** (directional method) και θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Ας θεωρήσουμε καταρχήν μια συνάρτηση $f(x) = f(x_1, x_2)$ στο χώρο των δύο διαστάσεων που είναι κατάλληλος για εποπτικούς λόγους αφού μπορεί να παρασταθεί γραφικά, όπως βλέπουμε στο Σχ. 2.8. Αν θεωρήσουμε το σημείο $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ τότε στη γειτονιά

του μπορούμε να ορίσουμε αυθαίρετα κάποιες μεταβολές $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ από το αρχικό σημείο και να φθάσουμε στο σημείο $x^* + \Delta x = (x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2)$. Η κάθε επιλογή των

μεταβολών $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ στους άξονες των συντεταγμένων ορίζει κάθε φορά και μια αντίστοιχη διεύθυνση πάνω στο επίπεδο x_1, x_2 από το σημείο x^* στο σημείο $x^* + \Delta x$. Δηλαδή, διαφορετικό Δx ορίζει και διαφορετική διεύθυνση. Για παράδειγμα, η επιλογή $(\Delta x_1, \Delta x_2) = (1, 0)$ ορίζει μια διεύθυνση παράλληλη στο θετικό άξονα x_1 , ενώ η επιλογή $(\Delta x_1, \Delta x_2) = (0, -1)$ ορίζει αντίστοιχα μια διεύθυνση παράλληλη στον άξονα x_2 με αρνητική φορά. Επίσης, η επιλογή $(\Delta x_1, \Delta x_2) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ορίζει μια κατεύθυνση παράλληλη προς τη γραμμή των 45° στην διεύθυνση της αύξησης των x_1 και x_2 .

Από τη στιγμή που κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ έχει επιλεγεί, τότε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο μεταξύ του x^* και $x^* + \Delta x$ απέχει από το αρχικό σημείο x^* απόσταση $x^* + t\Delta x = (x_1^* + t\Delta x_1, x_2^* + t\Delta x_2)$ όπου το t μεταβάλλεται στα όρια $0 \leq t \leq 1$.

Για να γίνει ακόμη πιο κατανοητή η απόσταση στη διεύθυνση που ορίσαμε γύρω από το σημείο x^* , ας θεωρήσουμε την μεταβολή Δx σαν το μοναδιαίο διάνυσμα έτσι ώστε:

$$\Delta x^T \cdot \Delta x = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 = 1 \quad (2.9)$$

Τότε, στην κατεύθυνση που ορίζει το Δx η απόσταση οποιουδήποτε σημείου από το αρχικό σημείο x^* θα είναι:

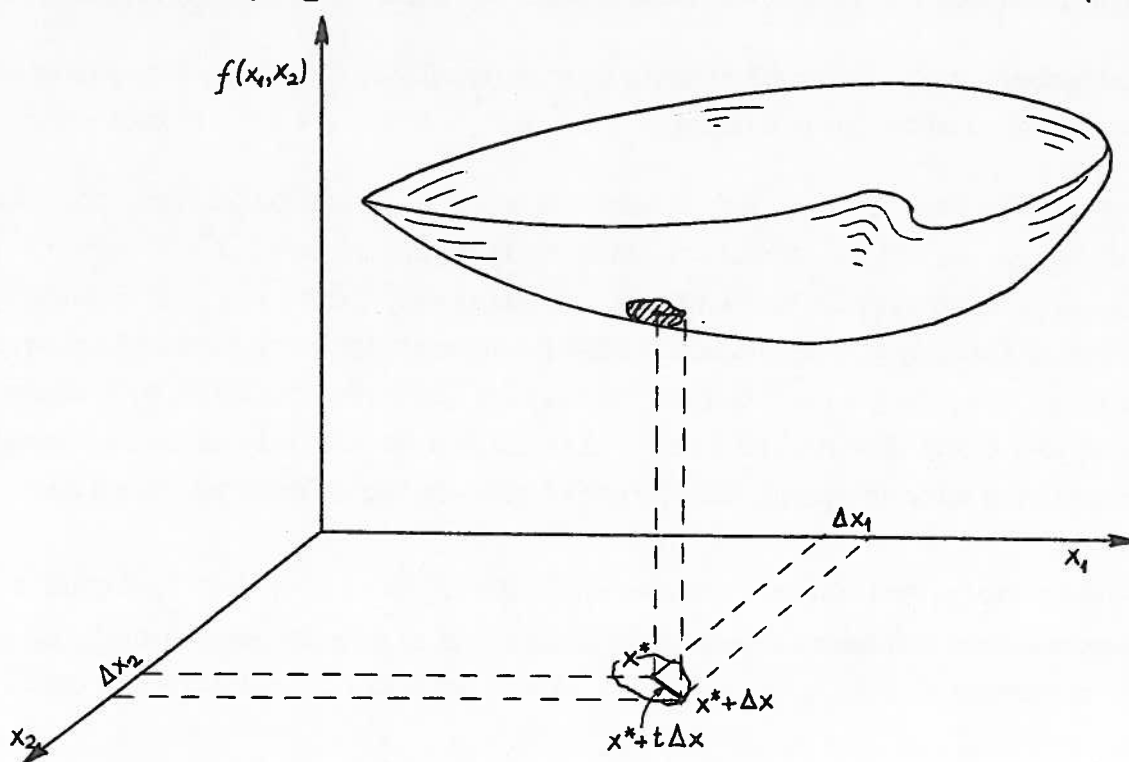
$$d = \sqrt{(t\Delta x_1)^2 + (t\Delta x_2)^2} = t \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} = t \quad (2.10)$$

η οποία είναι ανεξάρτητη από τα $\Delta x_1, \Delta x_2$. Ετσι, αφήνοντας σαν παράμετρο την κατεύθυνση Δx η απόσταση οποιουδήποτε σημείου από το x^* στην κατεύθυνση του Δx είναι συνάρτηση ενός βαθμωτού μεγέθους του t . Ομοίως, η συνάρτηση f στη γειτονιά του σημείου x^* θα είναι συνάρτηση μόνο του t . Καταφέραμε, λοιπόν, με τη μέθοδο αυτή (μέθοδο των διευθύνσεων) να εκφράσουμε τη συνάρτηση δύο μεταβλητών μέσω μιας συνάρτησης μιας μόνο μεταβλητής (κρατώντας τα $\Delta x_1, \Delta x_2$ σαν παράμετρο). Ετσι έχουμε:

$$g(t) = f(x^* + t\Delta x) = f(x_1^* + t\Delta x_1, x_2^* + t\Delta x_2) \quad (2.11)$$

όπου η $g(t)$ για $t \rightarrow 0$ είναι:

$$g(0) = f(x^*) = f(x_1^*, x_2^*) \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.8 Διευθύνσεις στο χώρο των δύο διαστάσεων γύρω από το σημείο x^*

Η (2.12) δίνει το αρχικό σημείο, ενώ η έκφραση

$$g(1) = f(x^* + \Delta x) = f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2) \quad (2.13)$$

δίνει το τελικό σημείο στην διεύθυνση Δx .

Η μέθοδος που αναλύθηκε προηγούμενα εύκολα μπορεί να γενικευθεί για την περίπτωση συναρτήσεων n μεταβλητών ($n > 2$). Σ' αυτή την περίπτωση θα έχουμε αντίστοιχα, αρχικό σημείο το εξής

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

Αν θεωρήσουμε μεταβολή στη διεύθυνση Δx

$$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$$

τότε κάθε ενδιάμεσο σημείο μεταξύ x^* και $x^* + \Delta x$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$x^* + t\Delta x = (x_1^* + t\Delta x_1, x_2^* + t\Delta x_2, \dots, x_n^* + t\Delta x_n)$$

όπου $0 \leq t \leq 1$.

Ομοίως, τότε, η συνάρτηση n -μεταβλητών f στη γειτονιά του x^* θα ορίζεται από την ισοδύναμη συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$g(t) = f(x^* + t\Delta x) = f(x_1^* + t\Delta x_1, x_2^* + t\Delta x_2, \dots, x_n^* + t\Delta x_n) \quad (2.14)$$

2.7 ΤΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ Η ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Είναι γνωστό ότι για μια συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(x)$, η τιμή της στη γειτονιά κάποιου σημείου x δίνεται από την άπειρη σειρά Taylor

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x) (\Delta x)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) (\Delta x)^n + \dots \quad (2.15)$$

ή από ένα πεπερασμένο ανάπτυγμα, σύμφωνα με τον τύπο του Taylor

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(k) (\Delta x)^n \quad (2.16)$$

όπου k είναι κάποιο σημείο στο διάστημα μεταξύ x και $x+\Delta x$. Δηλαδή είναι $k = x + c\Delta x$, όπου c είναι βαθμωτό μέγεθος τέτοιο ώστε $0 < c < 1$.

Για τη γενική τώρα περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι συνάρτηση n -μεταβλητών, τότε στη γειτονιά του x η συνάρτηση $f(x+\Delta x)$ δίνεται σύμφωνα με τη σχέση (2.14) από την ισοδύναμη έκφραση

$$f(x+\Delta x) = g(t) \Big|_{t=1} = g(1) \quad \text{όπου} \quad f(x) = g(0) \quad (2.17)$$

Τότε για την συνάρτηση μιας μεταβλητής $g(t)$ θα ισχύουν τα αναπτύγματα Taylor (2.15) και (2.16). Έτσι ισχύει:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \dots + \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) + \dots \quad (2.18)$$

ή

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \dots + \frac{1}{n!} g^{(n)}(k) \quad (2.19)$$

όπου k παίρνει τιμή στο διάστημα $0 < k < 1$, και Δx είναι στην περίπτωση αυτή ίσο προς 1. Για τον υπολογισμό των αναπτυγμάτων (2.18) και (2.19) είναι απαραίτητο να υπολογισθούν οι παράγωγοι της $g(t)$ όταν $t \rightarrow 0$, δηλαδή να υπολογισθούν οι $g'(t)$, $g''(t)$, ..., $g^{(n)}(t)$ για $t \rightarrow 0$.

Έτσι, για την $g'(t)$ έχουμε:

$$g'(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x+t\Delta x) \Big|_{t=0} \quad (2.20)$$

Η ολική παράγωγος της f μπορεί να εκφρασθεί ως προς τις μερικές παραγώγους της από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x+t\Delta x) &= \frac{\partial f(x+t\Delta x)}{\partial(x_1+t\Delta x_1)} \frac{d(x_1+t\Delta x_1)}{dt} + \frac{\partial f(x+t\Delta x)}{\partial(x_2+t\Delta x_2)} \frac{d(x_2+t\Delta x_2)}{dt} + \dots + \\ &\quad \frac{\partial f(x+t\Delta x)}{\partial(x_n+t\Delta x_n)} \frac{d(x_n+t\Delta x_n)}{dt} \end{aligned} \quad (2.21)$$

όπου Δx θεωρείται ως παράμετρος και όχι μεταβλητή και ισχύει

$$\frac{d(x_i+t\Delta x_i)}{dt} = \Delta x_i \quad \text{για} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.21) και (2.22) στη (2.20) παίρνουμε για $t \rightarrow 0$

$$g'(0) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (2.23)$$

ή υπό μορφή διανυσμάτων

$$g'(0) = \nabla^T f(x) \Delta x \quad (2.24)$$

όπου ∇f η βάθμωση της f :

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{και } \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Με αντίστοιχο τρόπο έχουμε για τη δεύτερη παράγωγο

$$g''(t) |_{t=0} = \frac{d}{dt} |_{t=0} \left[\frac{\partial f(x+t\Delta x)}{\partial(x_1+t\Delta x_1)} \frac{d(x_1+t\Delta x_1)}{dt} + \dots + \frac{\partial f(x+t\Delta x)}{\partial(x_n+t\Delta x_n)} \frac{d(x_n+t\Delta x_n)}{dt} \right]$$

Θεωρώντας ξανά την ολική παράγωγο σαν αθροισμα των μερικών παραγώγων της προηγούμενης έκφρασης και κάνοντας μερικές αριθμητικές πράξεις καταλήγουμε στην

$$g''(0) = \Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x \quad (2.26)$$

όπου

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Η τελευταία αυτή μήτρα (2.27) ονομάζεται **Hessian μήτρα**.

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται και η γενική παράγωγος $g^{(n)}(0)$

$$g^{(n)}(0) = (\Delta x^T \nabla)^n f(x) \quad (2.28)$$

ενώ η $g^{(n)}(k)$ δίνεται από την σχέση

$$g^{(n)}(k) = (\Delta x^T \nabla)^n f(x+c \Delta x) \quad (2.29)$$

όπου η έκφραση $(\Delta x^T \nabla)^n = (\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n})^n$ αποτελεί τον τελεστή της f για τον γενικό όρο του αναπτύγματος Taylor.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.17), (2.24), (2.26) και (2.28) στο ανάπτυγμα Taylor (2.18) παίρνουμε:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \nabla^T f(x) \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x + \dots + \frac{1}{n!} (\Delta x^T \nabla)^n f(x) + \dots \quad (2.30)$$

Αντίστοιχα, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.17), (2.24), (2.26) και (2.29) στην (2.19) παίρνουμε:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \nabla^T f(x) \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x + \dots + \frac{1}{n!} (\Delta x^T \nabla)^n f(x+c\Delta x) \quad (2.31)$$

όπου $c: 0 \leq c \leq 1$

Παράδειγμα 2.7.1

Να υπολογισθεί ο όρος 3ης τάξης ($n = 3$) του αναπτύγματος Taylor για συνάρτηση δύο μεταβλητών

Σύμφωνα με τη σχέση (2.30) ο όρος 3ης τάξης ισούται προς

$$\frac{1}{3!} (\Delta x^T \nabla)^3 = \frac{1}{3!} (\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^3 f(x) =$$

$$\frac{1}{6} (\Delta x_1)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} + \frac{1}{2} (\Delta x_1)^2 \Delta x_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{1}{2} (\Delta x_2)^2 \Delta x_1 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \frac{1}{6} (\Delta x_2)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} =$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} & 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\ 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2} & \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Delta x_1)^2 \\ (\Delta x_2)^2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3!} \Delta x^T \nabla^3 f \Delta x^2$$

2.8 ΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μιας μεταβλητής f έχει παράγωγο $f'(x)$ σε κάποιο σημείο x . Τότε ισχύει:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.32)$$

Για πεπερασμένο πολύ μικρό $\Delta x \neq 0$ ισχύει:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x \quad (2.33)$$

όπως εύκολα προκύπτει και από το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το σημείο x .

Η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης (2.33) είναι απλή. Αντικαθιστούμε το γραφικό της συνάρτησης στο σημείο $(x, f(x))$ με την εφαπτομένη στο ίδιο σημείο. Για μικρά Δx κάνουμε εύκολα την υπόθεση ότι η ευθεία αυτή βρίσκεται πολύ κοντά στην καμπύλη της f στην γειτονιά του σημείου x .

Στη γενική περίπτωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών έχουμε την προσέγγιση:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx \nabla^T f(x) \Delta x \quad (2.34)$$

Το γινόμενο $f'(x) \Delta x$ ή $\nabla^T f(x) \Delta x$ που χρησιμοποιήσαμε για τη προσέγγιση της διαφοράς $f(x+\Delta x) - f(x)$ λέγεται **διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο x ως προς Δx και παριστάνεται με τον συμβολισμό:**

$$df(x, \Delta x) = \nabla^T f(x) \Delta x \quad (2.35)$$

Η ισότητα (2.35) ορίζει μια νέα συνάρτηση την df από την δεδομένη συνάρτηση f . Για τον υπολογισμό των τιμών της νέας αυτής συνάρτησης πρέπει να γνωρίζουμε τόσο το x όσο και το Δx . Η μεταβλητή x αποτελεί το σημείο όπου ορίζεται η βάρθρωση της f , ενώ η Δx πρέπει να είναι τέτοια ώστε η μεταβλητή $x + \Delta x$ να ανήκει στο χώρο όπου ορίζεται η f .

Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να θεωρήσουμε $\Delta x = dx$ οπότε αντίστοιχα το διαφορικό της f ορίζεται σαν

$$df(x) = \nabla^T f(x) dx \quad (2.36)$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα το διαφορικό της συνάρτησης μπορεί εναλλακτικά να χρησιμοποιηθεί στις περιπτώσεις που θέλουμε να μελετήσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ γύρω από το σημείο x και προς κάποια κατεύθυνση Δx αφού σύμφωνα με τη σχέση (2.34) ισχύει $f(x+\Delta x) \approx f(x) + df(x, \Delta x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση βελτιστοποίησης περιέχει μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή τα βέλτιστα σημεία θα είναι κάποια από τα ακρότατα της καμπύλης της συνάρτησης. Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται το γενικό πρόβλημα του ορισμού των αναγκαίων και ικανών συνθηκών για την εύρεση των ακρότατων συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Οι μέθοδοι που αναπτύσσονται οδηγούν σε αναλυτικές λύσεις, δηλ. ακριβείς μαθηματικές εκφράσεις από τις οποίες ορίζονται τα τοπικά ή ολικά μέγιστα και ελάχιστα τέτοιων συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις που εξετάζονται θεωρούνται συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς και με συνεχείς παραγώγους. Οι λύσεις που προκύπτουν για τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος που παίρνει τιμές η ανεξάρτητη μεταβλητή συμπληρώνονται από επιπλέον λύσεις στα όρια του διαστήματος αυτού ή στα σημεία ασυνέχειας αν υπάρχουν.

3.2 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Εστω μια συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(x)$ που ορίζεται σε κάποιο διάστημα $[x_0, x_f]$ όπως δείχνεται στο Σχ. 3.1. Τότε, η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να έχει κάποια τοπικά ακρότατα: $x^* = x_{\max}$ για το μέγιστο ή $x^* = x_{\min}$ για το ελάχιστο σύμφωνα με τους παρακάτω ορισμούς.

Τοπικό μέγιστο

Το σημείο $x^* = x_{\max}$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης $f(x)$ αν και μόνο αν, υπάρχει κάποιος θετικός αριθμός ε τέτοιος ώστε για κάθε $|\Delta x| < \varepsilon$ να ισχύει

$$f(x) - f(x^*) < 0 \quad \text{όπου } x = x^* + \Delta x \quad (3.1)$$

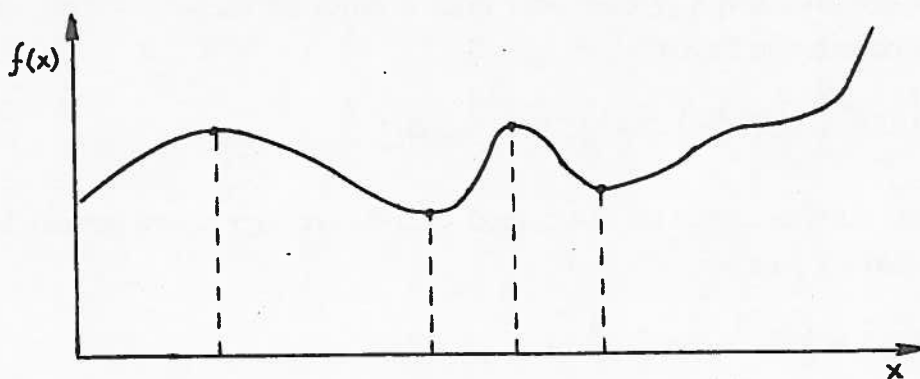
Τοπικό ελάχιστο

Το σημείο $x^* = x_{\min}$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)$ αν και μόνον αν, υπάρχει κάποιος θετικός αριθμός ε τέτοιος ώστε για κάθε $|\Delta x| < \varepsilon$ να ισχύει

$$f(x) - f(x^*) > 0 \quad \text{όπου } x = x^* + \Delta x \quad (3.2)$$

Αν το ε και συνακόλουθα το Δx μπορούν να θεωρηθούν αρκετά μεγάλα έτσι ώστε το x να μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μέσα στο διάστημα $[x_0, x_f]$ που ταυτόχρονα ικανοποιεί τη σχέση (3.1) ή τη σχέση (3.2) τότε το x^* είναι αντίστοιχα **ολικό μέγιστο** ή **ολικό ελάχιστο** της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[x_0, x_f]$.

Από τους προηγούμενους ορισμούς γίνεται αμέσως προφανές ότι το **μέγιστο** (τοπικό ή ολικό) μιας συνάρτησης $f(x)$ **ταυτίζεται με το ελάχιστο της αντίθετης συνάρτησης** $-f(x)$. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική γιατί μπορεί να απλοποιήσει την ανάλυσή μας στην εύρεση μόνο των ελαχίστων μιας συνάρτησης. Ετσι, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θα εξετάσουμε στη συνέχεια τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ελαχίστου σε συναρτήσεις μιας μεταβλητής.



Σχήμα 3.1 Ακρότατα συναρτήσεων μιας μεταβλητής

3.3 ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΠΙΚΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

Εστω ότι το σημείο x^* είναι **τοπικό ελάχιστο** για τη συνάρτηση $f(x)$. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους. Τότε, θα ισχύει η σχέση (3.2) που δίνει τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου. Επίσης, για το σημείο $x = x^* + \Delta x$ η τιμή της συνάρτησης θα δίνεται από το ανάπτυγμα Taylor (2.16). Θα ισχύει δηλαδή:

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = f'(x^*) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x^* + c\Delta x) (\Delta x)^2, \quad 0 < c < 1 \quad (3.3)$$

Θα δείξουμε δια της εις άτοπον απαγωγής ότι αν το x^* είναι τοπικό ελάχιστο τότε η $f'(x^*)$ πρέπει να είναι κατ' ανάγκην μηδέν. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η $f'(x^*) \neq 0$ τότε θα υπάρχει κάποιο Δx τέτοιο ώστε:

$$f'(x^*) \Delta x < -\frac{1}{2} f''(x^* + c\Delta x) (\Delta x)^2 \quad (3.4)$$

Αν για παράδειγμα $f'(x^*)$ και $f''(x^* + c\Delta x)$ είναι ομόσημα θα υπάρχει κάποιο αρνητικό Δx με πολύ μικρή απόλυτη τιμή που θα ικανοποιεί την (3.4). Αντίστοιχα, αν $f'(x^*)$ και $f''(x^* + c\Delta x)$ είναι ετερόσημα θα υπάρχει πάλι κάποιο πολύ μικρό θετικό Δx που θα ικανοποιεί την (3.4). Έτσι, για $f'(x^*) \neq 0$ καταλήγουμε στο άτοπο ότι $f(x^* + \Delta x) - f(x^*) < 0$ άρα πρέπει κατ' ανάγκην

$$f'(x^*) = 0 \quad (3.5)$$

Η σχέση (3.5) αποτελεί την 1^η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου.

Στη συνέχεια θα δούμε αν η συνθήκη αυτή είναι και η μόνη.

Έτσι, υπό την προϋπόθεση της συνθήκης (3.5) η διαφορά $f(x^* + \Delta x) - f(x^*)$ γράφεται σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^*) (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} f'''(x^* + c\Delta x) (\Delta x)^3 \quad (3.6)$$

Στην περίπτωση αυτή σύμφωνα με τον ορισμό (3.2) θα υπάρχει πάντα κάποιο ε τέτοιο ώστε για κάθε $|\Delta x| < \varepsilon$ να ισχύει

$$\frac{1}{2} f''(x^*) (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} f'''(x^* + c\Delta x) (\Delta x)^3 > 0 \quad (3.7)$$

όταν ικανοποιείται η συνθήκη

$$f''(x^*) \geq 0 \quad (3.8)$$

που αποτελεί την 2^η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ελαχίστου

3.4 ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΠΙΚΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

Με ανάλογο τρόπο, όπως στο Κεφάλαιο 3.3, μπορούμε να ορίσουμε τις ικανές συνθήκες για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου σε συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Έτσι, προκύπτουν:

1^η ικανή συνθήκη

$$f'(x) = 0 \quad (3.9)$$

2^η ικανή συνθήκη

$$f''(x) > 0 \quad (3.10)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία $f''(x) = 0$ με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι πρέπει επίσης να ισχύει $f'''(x) = 0$. Διαφορετικά αν είναι $f'''(x) \neq 0$ τότε έχουμε ένα σημείο καμπής στο σημείο x .

Για την περίπτωση όπου $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ και $f^{IV}(x) > 0$ το x είναι τοπικό ελάχιστο. Αν όμως τυχόν ισχύει $f^{IV}(x) = 0$ τότε πρέπει να ερευνήσουμε τις υψηλότερου βαθμού παραγώγους.

Συνοψίζοντας τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου έχουμε τα ακόλουθα. Τα πιθανά ελάχιστα βρίσκονται στα σημεία όπου $f'(x) = 0$. Για κάθε πραγματικό x που είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου ελέγχουμε την τιμή των υψηλότερης τάξης παραγώγων.

Τότε, η πρώτη μη μηδενική παράγωγος πρέπει να είναι μια άρτιας τάξης παράγωγος η οποία πρέπει να είναι θετική για να έχουμε ελάχιστο (αντίστοιχα αρνητική για μέγιστο). Οι συνθήκες αυτές ισχύουν για τιμές του x μέσα στο διάστημα όπου η $f(x)$ είναι συνεχής και έχει συνεχείς παραγώγους. Έτσι οι ικανές συνθήκες μπορούν να διατυπωθούν ως ακολούθως:

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(2k-1)}(x) = 0 \quad (3.11)$$

και

$$f^{(2k)}(x) > 0 \quad (3.12)$$

όπου $k \geq 1$, ακέραιος.

Στην περίπτωση όπου αντί της (3.12) ισχύει $f^{(2k)}(x) = 0$ και $f^{(2k+1)}(x) \neq 0$ τότε το σημείο x είναι σημείο καμπής της συνάρτησης. Ο πίνακας 3.1 συνοψίζει τις περιπτώσεις των ακρότατων και των σημείων καμπής μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα 3.4.1


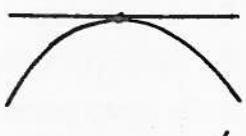

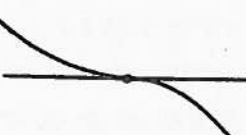

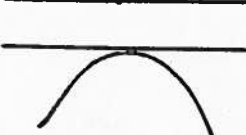
Να ελεγχθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 2x^2 - 8x + 1$$

Η πρώτη παράγωγος της $f(x)$ είναι:

$$f'(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8 = (x+1)^2(x-2)^3$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 Ελεγχος πιθανών ακροτάτων της συνάρτησης $f(x)$

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$	$f^V(x)$	Χαρακτηρισμός x
0	+	υπάρχει	οτιδήποτε	οτιδήποτε	
0	-	υπάρχει	οτιδήποτε	οτιδήποτε	
0	0	+	υπάρχει	οτιδήποτε	
0	0	-	υπάρχει	οτιδήποτε	
0	0	0	+	υπάρχει	
0	0	0	-	υπάρχει	
0	0	0	0	εξέτασε $f^V(x)$	κ.ο.κ.

Επειδή η $f'(x)$ γίνεται μηδέν για $x = -1$ και $x = 2$, οι τιμές αυτές ορίζουν τα πιθανά ακρότατα της f . Για την διερεύνησή τους πρέπει να πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = (5x-1)(x+1)(x-2)^2$$

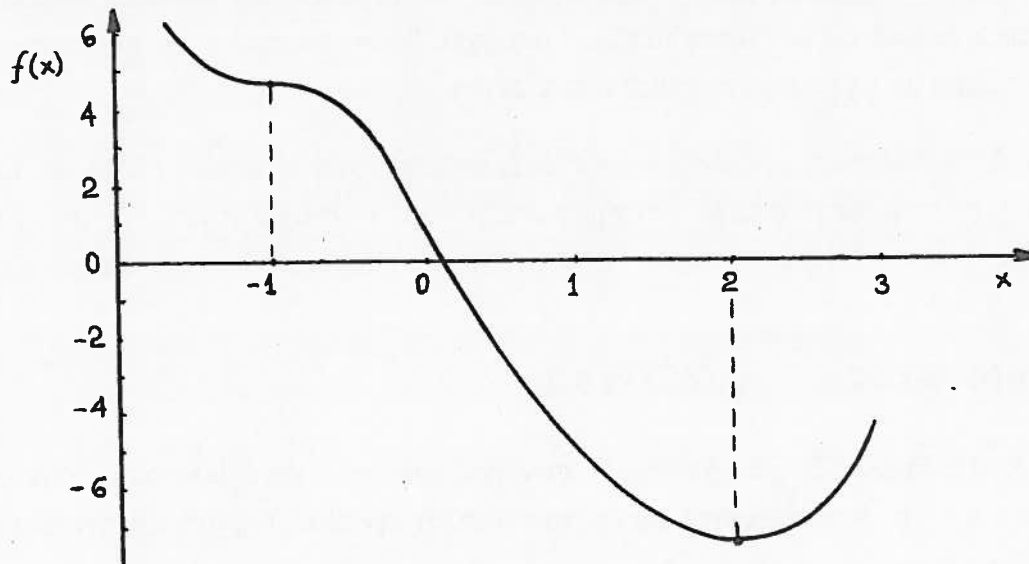
Παρατηρούμε ότι η $f''(x)$ είναι μηδέν και για $x = -1$ και για $x = 2$. Ετσι, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τα σημεία αυτά αν δεν ελέγξουμε την τρίτη παράγωγο

$$f'''(x) = 2(x-2)(10x^2 - 4x - 5)$$

Η f''' είναι μια περιττής τάξης παράγωγος που είναι μη μηδενική για $x = -1$. Επομένως το σημείο αυτό αποτελεί σημείο καμπής της συνάρτησης f . Αντίθετα, για $x = 2$ η f''' μηδενίζεται και συνεπώς πρέπει να εξετασθεί η τέταρτη παράγωγος

$$f^{IV}(x) = 9(10x^2 - 16x + 1)$$

Η παράγωγος αυτή, που είναι μια άρτιας τάξης παράγωγος, για $x = 2$ είναι θετική ($= 54$) και για το λόγο αυτό το σημείο $x = 2$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο της f . Αυτό το σημείο αποτελεί και το μοναδικό ακρότατο της συνάρτησης όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.2.



Σχήμα 3.2 Η συνάρτηση του παραδείγματος 3.4.1

3.5 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Η συνάρτηση βελτιστοποίησης συνήθως δεν ισχύει για οποιαδήποτε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής από $-\infty$ ως $+\infty$. Η πιο κοινή περίπτωση περιορισμού δίνεται με τη μορφή ανισοτήτων που ορίζουν την περιοχή μέσα στην οποία η μεταβλητή x παίρνει τιμές

$$a \leq x \leq b \quad \text{όπου } a < b \quad (3.13)$$

Γενικότερα η μεταβλητή x μπορεί να περιορίζεται ώστε να ικανοποιεί κάποιες ανισοτικές σχέσεις της μορφής

$$g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0 \quad (3.14)$$

όπου βέβαια πρέπει να ληφθεί πρόνοια ώστε όλοι οι περιορισμοί να ισχύουν. Αν κάποιοι από τους περιορισμούς καθίστανται ανενεργοί από κάποιους άλλους τότε οι επιπλέον περιορισμοί παραλείπονται.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι για συναρτήσεις μιας μεταβλητής **ισοτικοί περιορισμοί** της μορφής $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ δεν έχουν νόημα διότι είτε πρέπει να υπάρχει κάποιο x ώστε όλοι οι περιορισμοί να συναληθεύουν είτε και όταν συναληθεύουν ή υπάρχει μόνο ένας περιορισμός $g(x) = 0$ η βελτιστοποίηση αφορά απλώς και μόνο σύγκριση μεταξύ των σημείων των λύσεων των ισοτικών περιορισμών. Ουσιαστικά, δηλαδή, η βέλτιστη λύση, αν υπάρχει, βρίσκεται από τους περιορισμούς και δεν σχετίζεται με την συνάρτηση βελτιστοποίησης.

Επανερχόμενοι πίσω στους ανισοτικούς περιορισμούς των σχέσεων (3.13) και έχοντας σαν στόχο την γενικευμένη αντιμετώπιση και χειρισμό τους σε προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούμε να τους θέσουμε στη γενική μορφή των ανισώσεων (3.14) ως εξής:

$$g_1(x) = a - x \leq 0, \quad g_2(x) = x - b \leq 0, \quad (3.15)$$

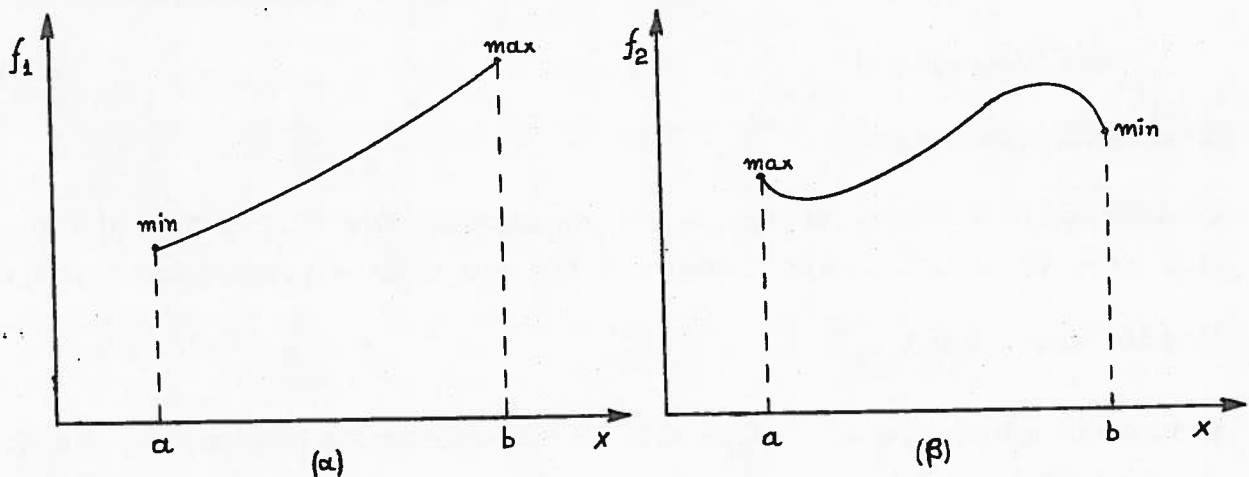
Το σχήμα 3.3 δείχνει δύο διαφορετικές συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$ που ορίζονται στην περιοχή $a \leq x \leq b$. Ας επιχειρήσουμε λοιπόν γι' αυτή την απλή περίπτωση την διερεύνηση των ακροτάτων στα οριακά σημεία.

Από την γραφική παράσταση του Σχ. 3.3α βλέπουμε ότι το σημείο $x = a$ μπορεί να θεωρηθεί σαν τοπικό ελάχιστο ενώ το σημείο $x = b$ μπορεί να θεωρηθεί σαν τοπικό μέγιστο της f_1 . Διερευνώντας το σημείο $x = a$ πρέπει να ικανοποιείται ο ορισμός που δίνεται από τη σχέση (3.2): $f_1(a+\Delta x) - f_1(a) > 0$ όχι όμως για κάθε Δx αλλά για Δx επιτρεπτό, τέτοιο δηλ. που να οδηγεί σε σημείο $x+\Delta x$ μέσα στην περιοχή $a \leq x \leq b$. Τέτοιο Δx όμως είναι προφανώς κάποιο $\Delta x > 0$. Αντίστοιχα, διερευνώντας το σημείο $x = b$ πρέπει να ικανοποιείται ο ορισμός που δίνεται από τη σχέση (3.1): $f_1(b+\Delta x) - f_1(b) < 0$ για Δx που πάλι πρέπει να κείται στο διάστημα $a \leq x \leq b$, και τέτοιο Δx είναι μόνο αρνητικό $\Delta x < 0$.

Πηγαίνοντας τώρα στη γραφική παράσταση του Σχ. 3.3β παρατηρούμε ότι έχουμε αντίθετα απ' ότι στο Σχ. 3.3α τοπικό μέγιστο της f_2 στο σημείο $x = a$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = b$. Εφαρμόζοντας πάλι τις σχέσεις των ορισμών (3.1) και (3.2) καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα: $f_2(a+\Delta x) - f_2(a) < 0$ για $\Delta x > 0$ και $f_2(b+\Delta x) - f_2(b) > 0$ για $\Delta x < 0$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, από τη σχέση (2.32), μπορούμε να βγάλουμε ένα πρώτο συμπέρασμα για τις περιπτώσεις που εξετάσαμε και να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Για μια συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα $a \leq x \leq b$ το οριακό σημείο a (κάτω όριο) είναι τοπικό ελάχιστο αν η παράγωγος $f'(a)$ είναι θετική. Αντίστοιχα το οριακό σημείο b (άνω όριο) είναι τοπικό ελάχιστο αν η παράγωγος $f'(b)$ είναι αρνητική. Είναι προφανές ότι τα αντίθετα συμβαίνουν για την περίπτωση τοπικών ελαχίστων στα οριακά σημεία.



Σχήμα 3.3 Ακρότατα στα οριακά σημεία

Η προηγούμενη πρόταση παρουσιάζει μια θεμελιώδη αδυναμία. Διερευνά τα τοπικά ελάχιστα (ή μέγιστα) στα οριακά σημεία λαμβάνοντας υπόψη τη σειρά $a \leq b$. Στην περίπτωση δε που οι ανισοτικοί περιορισμοί είναι της μορφής των σχέσεων (3.14) η σειρά αυτή δεν είναι πάντοτε άμεσα φανερή. Ετσι, θα επιχειρήσουμε μια άλλη προσέγγιση στο πρόβλημα. Σύμφωνα με τον ορισμό (3.2) το οριακό σημείο x μιάς συνάρτησης f θα είναι τοπικό ελάχιστο, αν γενικά ισχύει

$$f(x+\Delta x) - f(x) > 0 \quad \text{για κάθε επιτρεπτό } \Delta x \quad (3.16)$$

ή σύμφωνα με τις σχέσεις (2.33) και (2.35) το διαφορικό της συνάρτησης f πρέπει να είναι

$$df(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x > 0 \quad \text{για κάθε επιτρεπτό } \Delta x \quad (3.17)$$

Το επιτρεπτό όμως Δx ορίζεται από τις συνθήκες περιορισμών g_i ($i = 1, 2, \dots, m$) σύμφωνα με τις σχέσεις (3.14) και σημαίνει ότι στη νέα θέση $x + \Delta x$ στη γειτονιά του ορίου x θα πρέπει να εξακολουθούν να ικανοποιούνται οι ανισοτικές σχέσεις των περιορισμών, δηλ. θα πρέπει το σημείο $x + \Delta x$ να βρίσκεται μέσα στην περιοχή που ορίζει η ανισότητα

$$g(x + \Delta x) < 0 \quad \text{ή} \quad g(x) + dg(x, \Delta x) < 0 \quad (3.18)$$

Επειδή το οριακό σημείο x επαληθεύει την εξίσωση $g(x) = 0$ η σχέση (3.18) καταλήγει στην

$$dg(x, \Delta x) = g'(x)\Delta x < 0 \quad (3.19)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (3.17) και (3.19) οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα, μπορούμε να απαλείψουμε το Δx και να καταλήξουμε στην ακόλουθη σχέση που ορίζει αν το οριακό σημείο x είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f

$$\text{sign} f'(x) = -\text{sign} g'(x) \quad (3.20)$$

όπου sign σημαίνει πρόσημο.

Σημειώνουμε ότι η έρευνα για ακρότατα στα οριακά σημεία γίνεται ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν ή όχι ακρότατα στο εσωτερικό διάστημα όπου ορίζεται η συνεχής συνάρτηση f .

Παράδειγμα 3.5.1

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 9$ που ορίζεται στο διάστημα $x^2 - 9 \leq 0$. Ζητείται να διερευνηθεί ως προς τα ακρότατά της

Καταρχήν ερευνούμε αν υπάρχουν ακρότατα μέσα στο διάστημα $x^2 - 9 \leq 0$, εξετάζοντας την παράγωγο της f

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x-2)(x-6)$$

Ετσι, τα πιθανά ακρότατα είναι τα $x = 2$ και $x = 6$. Το σημείο όμως $x = 6$ δεν ικανοποιεί τον περιορισμό $x^2 - 9 \leq 0$ και απορρίπτεται εκ των προτέρων. Για το σημείο $x = 2$ παίρνουμε τη δεύτερη παράγωγο f .

$$f''(x) = 6x - 24$$

η οποία για $x = 2$ γίνεται αρνητική οπότε το σημείο $x = 2$ είναι ένα τοπικό μέγιστο.

Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε τα οριακά σημεία, δηλ. εκείνα για τα οποία ισχύει

$$x^2 - 9 = 0 \text{ δηλ. } x = -3 \text{ και } x = 3$$

Σύμφωνα με την σχέση (3.20) χρειαζόμαστε τις παραγώγους της f και της g στα σημεία αυτά. Την παράγωγο της f την έχουμε βρεί. Η παράγωγος της $g(x) = x^2 - 9$ είναι

$$g'(x) = 2x$$

Οπότε έχουμε

i) για $x = -3$: $f'(-3) = 135$ και $g'(-3) = -6$ άρα $\text{sign } f'(-3) = -\text{sign } g'(-3)$ και συνεπώς το σημείο $x = -3$ είναι τοπικό ελάχιστο.

ii) για $x = 3$: $f'(3) = -9$ και $g'(3) = 6$ άρα $\text{sign } f'(3) = -\text{sign } g'(3)$ και συνεπώς το σημείο $x = 3$ είναι επίσης τοπικό ελάχιστο.

3.6 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΑ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Μια ακόμη ειδική περίπτωση όπου πρέπει να ερευνηθεί η ύπαρξη τοπικών ακρότατων αποτελούν τα σημεία ασυνέχειας. Οι αναλυτικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν ισχύουν μόνο για συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους. Για να παρακάμψουμε το πρόβλημα αυτό θεωρούμε τα σημεία ασυνέχειας σαν οριακά σημεία της συνάρτησης και ελέγχουμε αν αποτελούν ακρότατα σύμφωνα με τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι, χωρίζουμε το διάστημα μέσα στο οποίο παίρνει τιμές η συνάρτηση σε επιμέρους διαδοχικά διαστήματα με όρια στα σημεία ασυνέχειας που μπορεί να είναι είτε σημεία ασυνέχειας της καμπύλης είτε σημεία ασυνέχειας της βάρθρωσης. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει πόση σημασία έχει να ακολουθηθεί η προηγούμενη μεθοδολογία.

Παράδειγμα 3.6.1

Να ελεγχθεί η συνάρτηση $f(x) = |x^3|$ ως προς τα ακρότατά της.

Η $f(x)$ έχει προφανώς ένα ελάχιστο στο σημείο $x = 0$. Σημειώνουμε όμως ότι τόσο η πρώτη παράγωγος f' όσο και η δεύτερη παράγωγος f'' μηδενίζεται στο σημείο $x = 0$ ενώ η τρίτη παράγωγος f''' είναι διάφορη του μηδενός. Τότε σύμφωνα με τον πίνακα 3.1 το σημείο $x = 0$ δεν μπορεί να είναι ακρότατο. Το παράδοξο αυτό προκύπτει επειδή στο σημείο $x = 0$ έχουμε ασυνέχεια βάρθρωσης αφού η $f'''(0^-) = -6$ ενώ η $f'''(0^+) = 6$. Έτσι, για να έχουμε σωστά αποτελέσματα πρέπει να αντιμετωπίσουμε το σημείο $x = 0$ σαν οριακό σημείο θεωρώντας τη συνάρτησή μας σαν κατά τμήματα συνεχή συνάρτηση δεξιά και αριστερά του οριακού σημείου x , δηλαδή:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{για } x \leq 0 \\ x^3 & \text{για } x \geq 0 \end{cases}$$

Ας δούμε, λοιπόν, αναλυτικά τι πρέπει να ισχύει ώστε τα σημεία ασυνέχειας να αποτελούν ακρότατα.

Σημεία ασυνέχειας βάρθρωσης

Εστω κάποιο σημείο $x = a$ στο οποίο έχουμε ασυνέχεια βάρθρωσης. Στο σημείο αυτό θέτουμε ένα τεχνητό όριο στη συνάρτηση μας. Έτσι αυτή θα περιγράφεται από την f_1 αριστερά του $x = a$ και από την f_2 δεξιά του $x = a$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{για } x \leq a \\ f_2(x) & \text{για } x \geq a \end{cases} \quad (3.21)$$

Τότε, για να είναι πράγματι τοπικό ελάχιστο το σημείο $x = a$ θα πρέπει να είναι σαν οριακό σημείο τοπικό ελάχιστο και για την $f_1(x)$ και για την $f_2(x)$. Ο έλεγχος του και για τις δύο περιπτώσεις θα γίνει σύμφωνα με την συνθήκη (3.20).

Παράδειγμα 3.6.2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{για } x \leq 5 \\ 3(1-e^{-x}+5) & \text{για } x \geq 5 \end{cases}$$

και ζητείται να ελεγχθεί ως προς τα ακρότατά της.

Παρατηρούμε ότι το σημείο $x = 5$ αποτελεί σημείο ασυνέχειας βάρθρωσης (Σχ. 3.4). Θεωρούμε καταρχήν την συνάρτηση $f_1(x) = -x+5$ για $x \leq 5$. Επειδή $f_1' = -1 \neq 0$ η $f(x)$ δεν έχει ακρότατα μέσα στο διάστημα $x < 5$. Επειδή πάλι η $f_2' = 3e^{-x}+5 \neq 0$ για $x \geq 5$ η $f(x)$ δεν έχει ακρότατα στο διάστημα αυτό.

Για το οριακό σημείο τώρα $x = 5$, σύμφωνα με τα προηγούμενα θα έχουμε:

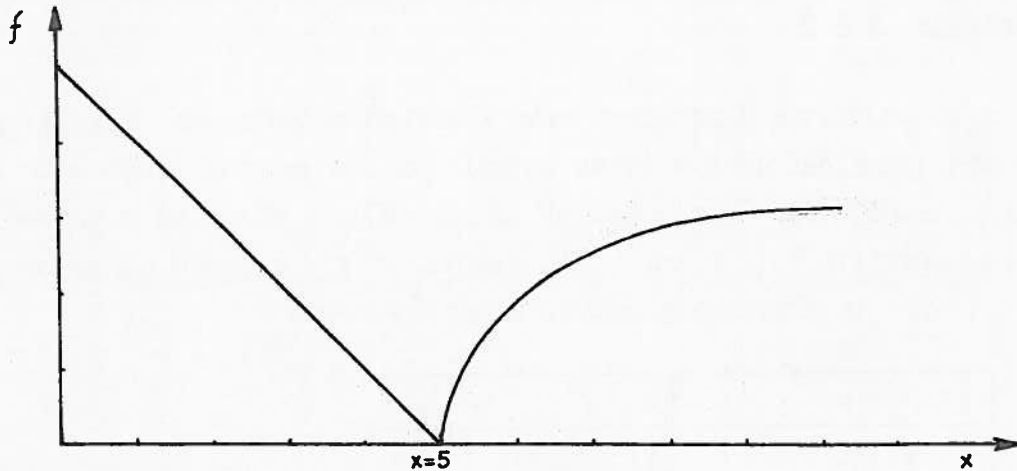
$$\left. \begin{array}{l} \text{i) Για } x = 5^- : f'(x) = (-x+5)' = -1 < 0 \\ g'(x) = (x-5)' = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sign } f' = -\text{sign } g'$$

και σύμφωνα με την σχέση (3.20) το σημείο $x = 5$ αποτελεί τοπικό ελάχιστο σαν οριακό σημείο του διαστήματος $x \leq 5$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ii) Για } x = 5^+ : f'(x) = (3(1-e^{-x}+5))' = 3e^{-x}+5 = 3 > 0 \\ g'(x) = (5-x)' = -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sign } f' = -\text{sign } g'$$

όπου πάλι σύμφωνα με την σχέση (3.20) το σημείο $x = 5$ αποτελεί τοπικό ελάχιστο σαν οριακό σημείο του διαστήματος $x \geq 5$.

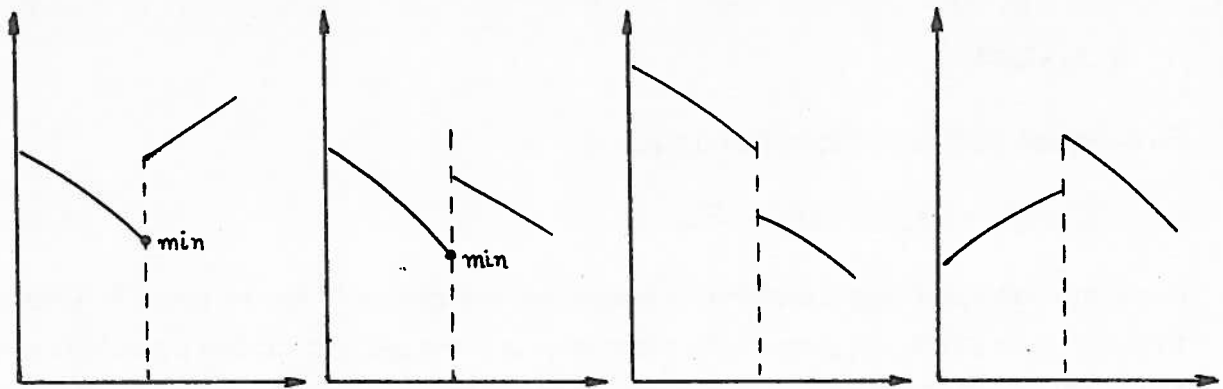
Επειδή, λοιπόν, και για τα δύο διαστήματα δεξιά και αριστερά του σημείου $x = 5$ το σημείο αυτό αποδείχθηκε να είναι τοπικό ελάχιστο σαν οριακό σημείο, έπεται ότι θα είναι πράγματι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)$.



Σχήμα 3.4 Η συνάρτηση του παραδείγματος 3.6.2

Σημεία ασυνέχειας καμπύλης

Το Σχήμα 3.5 δείχνει διάφορες περιπτώσεις ασυνέχειας καμπύλης. Ασφαλώς και σ' αυτή την περίπτωση χωρίζουμε το διάστημα σε περιοχές δεξιά και αριστερά του σημείου ασυνέχειας x_0 . Ελέγχουμε όπως προηγουμένως αν το σημείο x_0 αποτελεί ελάχιστο τόσο για το διάστημα $x \leq x_0$ όσο και για το διάστημα $x \geq x_0$ χρησιμοποιώντας την σχέση (3.20). Αν προκύψει ότι $f(x_0^-)$ και $f(x_0^+)$ είναι τοπικά ελάχιστα τότε το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο και μάλιστα στη μικρότερη από τις δύο τιμές μεταξύ των $f(x_0^-)$ και $f(x_0^+)$.



Σχήμα 3.5 Διάφορες περιπτώσεις ασυνέχειας καμπύλης

Αν, αντίθετα, προκύψει ότι μόνο ένα από τα $f(x_0^-)$ ή $f(x_0^+)$ είναι τοπικό ελάχιστο τότε το x_0 είναι πράγματι τοπικό ελάχιστο της $f(x)$ μόνο αν η τιμή της f σ' αυτό είναι η μικρότερη συγκρινόμενη προς την τιμή της f στο μη ευρεθέν τοπικό ελάχιστο οριακό σημείο.

Παράδειγμα 3.6.3

Ζητούνται οι βέλτιστες διαστάσεις ενός κλειστού κυλινδρικού δοχείου για την αποθήκευση ενός δεδομένου όγκου υγρού. Το ανά μονάδα επιφανείας κόστος κατασκευής του δοχείου είναι ϵ δρχ/μ² για τις κυκλικές έδρες και s δρχ/μ² για το κυλινδρικό μέρος όπου τα ϵ και s εξαρτώνται από την ακτίνα R και το ύψος L του δοχείου και παίρνουν διακριτές τιμές σύμφωνα με τον πίνακα:

	L	R	ϵ	s		L	R	ϵ	s
α)	≤ 1	≤ 1	1	1	γ)	> 1	< 1	1	1.5
β)	< 1	> 1	2	1.5	δ)	> 1	> 1	2	2

Αν ο όγκος είναι $V = \frac{\pi}{8}$ ποιές οι βέλτιστες διαστάσεις;

Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση:

$$V = \pi R^2 L$$

Οι επιφάνειες των εδρών του έχουν εμβαδό

$$A_\epsilon = 2\pi R^2$$

ενώ η κυλινδρική πλευρική επιφάνεια έχει εμβαδό

$$A_s = 2\pi RL$$

Το συνολικό κόστος κατασκευής θα είναι:

$$C = \epsilon A_\epsilon + s A_s = 2\pi(\epsilon R^2 + sRL)$$

όπου σαν ανεξάρτητες μεταβλητές θεωρούμε την ακτίνα R και το ύψος L . Επειδή ο όγκος V είναι σταθερός μπορούμε να απαλείψουμε την μια από τις δύο μεταβλητές, π.χ. την L , και να μετατρέψουμε τη συνάρτηση κόστους σε συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$C = 2\pi(\varepsilon R^2 + s \frac{V}{\pi R})$$

Η βελτιστοποίηση της C είναι ίδια με τη βελτιστοποίηση της f

$$f(R) = \varepsilon R^2 + s \frac{V}{\pi R}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ασυνεχής αφού οι παράμετροι ε και s παίρνουν διακριτές τιμές σύμφωνα με τις τιμές των R και L έχουμε να βελτιστοποιήσουμε μια συνάρτηση μέσα στα όρια των διαστημάτων που η f είναι συνεχής. Έτσι τα σημεία βελτίστου (ελάχιστα) θα πρέπει να βρίσκονται στα σημεία όπου η $f'(R) = 0$ δηλ.

$$2\varepsilon R - s \frac{V}{\pi R^2} = 0$$

από την οποία προκύπτει:

$$R = \left(\frac{s}{\varepsilon} \frac{V}{2\pi} \right)^{1/3} \quad (3.22)$$

το οποίο είναι πράγματι ελάχιστο αφού η δεύτερη παράγωγος

$$f''(R) = 2\varepsilon + 2s \frac{V}{\pi R^3}$$

είναι πάντοτε θετική για $R > 0$.

Για να ορίσουμε τώρα τα διαστήματα όπου η f είναι συνεχής πρέπει να μετασχηματίσουμε τον αρχικό πίνακα που εξαρτάται από τα R και L σε έναν αντίστοιχο πίνακα μόνον ως προς R αντικαθιστώντας το L από τη σχέση $L = \frac{V}{\pi R^2}$. Στην προκειμένη μάλιστα περίπτωση όπου $V = \frac{\pi}{8}$ έχουμε:

$$L = \frac{1}{8R^2}$$

Επειδή οι παράμετροι ε και s μεταβάλλονται για τιμές του L μεγαλύτερες ή μικρότερες του 1, σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση αυτές θα μεταβάλλονται αντίστοιχα για τιμές του R μεγαλύτερες ή μικρότερες του $\sqrt{\frac{1}{8}} = 0.35$. Έτσι ο αρχικός πίνακας ορίζει τα ακόλουθα διαστήματα:

- | | | |
|----|---|---------------------------------|
| α) | $R \leq 1$ και $R \geq 0.35 \Rightarrow 0.35 \leq R \leq 1$ | τότε $\varepsilon = 1, s = 1$ |
| β) | $R > 1$ και $R > 0.35 \Rightarrow R > 1$ | τότε $\varepsilon = 2, s = 1.5$ |
| γ) | $R < 1$ και $R < 0.35 \Rightarrow 0 < R < 0.35$ | τότε $\varepsilon = 1, s = 1.5$ |

δ) $R > 1$ και $R < 0.35 \Rightarrow$ αδύνατο

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.22) για $V = \frac{\pi}{8}$ βρίσκουμε ανά διάστημα τις βέλτιστες τιμές του R ως εξής: α) $R = 0.40$, β) $R = 0.36$, γ) $R = 0.45$. Από τις τιμές αυτές η μόνη η οποία είναι αποδεκτή είναι στο διάστημα (α) δηλ. $R = 0.40$ και $L = 0.80$.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν υπάρχουν βέλτιστες λύσεις στα σημεία ασυνέχειας δηλ. τα σημεία $R = 0.35$ ή $R = 1$. Έτσι:

i) Για $R = 0.35^-$ έχουμε:

$$f' = 2 \times 0.35 - \frac{1.5}{9 \times (0.35)^2} < 0, \quad g' = (R - 0.35)' = 1 > 0 \text{ και επειδή } \text{sign} f' = -\text{sign} g' \text{ το σημείο } 0.35^-$$

είναι τοπικό ελάχιστο για το διάστημα $R < 0.35$

Για $R = 0.35^+$ έχουμε:

$$f' = 2 \times 0.35 - \frac{1}{8 \times (0.35)^2} < 0, \quad g' = (0.35 - R)' = -1 < 0 \text{ και επειδή } \text{sign} f' = \text{sign} g' \text{ το σημείο}$$

0.35^+ δεν είναι τοπικό ελάχιστο για το διάστημα $R > 0.35$

Επειδή όμως η τιμή της $f(0.35^-) = 0.66 > f(0.35^+) = 0.48$ το σημείο $R = 0.35^-$ δεν είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f .

ii) Για $R = 1^-$ έχουμε:

$$f' = 2 \times 1 - \frac{1}{8 \times 1} > 0, \quad g' = (R - 1)' = 1 > 0 \text{ και επειδή } \text{sign} f' = \text{sign} g' \text{ το σημείο } 1^- \text{ δεν είναι}$$

τοπικό ελάχιστο για το διάστημα $R \leq 1$

Για $R = 1^+$ έχουμε:

$$f' = 4 \times 1 - \frac{1.5}{8 \times 1} > 0, \quad g' = (1 - R)' = -1 < 0 \text{ και επειδή } \text{sign} f' = -\text{sign} g' \text{ το σημείο } 1^+ \text{ είναι}$$

τοπικό ελάχιστο για το διάστημα $R > 1$.

Επειδή όμως η τιμή της $f(1^+) = 2.19 > f(1^-) = 1.13$ έπεται ότι το σημείο $R = 1^+$ δεν είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f .

Αρα και για τις δύο οριακές τιμές του R δηλ. $R = 0.35$ και $R = 1$ δεν έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Το μοναδικό ελάχιστο έχει προκύψει για την τιμή του $R = 0.40$ και $L = 0.80$ που αποτελεί και τη βέλτιστη λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αναλυτικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο επεκτείνονται στο Κεφάλαιο αυτό για τις περιπτώσεις βελτιστοποίησης συναρτήσεων δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Εκτός από την περίπτωση εύρεσης των ακροτάτων συνάρτησης χωρίς περιοριστικές συνθήκες εξετάζονται διεξοδικά και οι περιπτώσεις **βελτιστοποίησης υπό ισοτικούς ή/και ανισοτικούς περιορισμούς**. Οι τελευταίες αυτές περιπτώσεις είναι ιδιαίτερης σημασίας για προβλήματα βελτιστοποίησης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και για το λόγο αυτό επιχειρείται η συστηματική ανάλυσή τους. Οι μέθοδοι των **παραγόντων Lagrange** που χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων επεξηγούνται και αναλύονται διεξοδικά και δίνονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται.

Τέλος αναλύεται η μέθοδος του **γραμμικού προγραμματισμού** που αφορά την εύρεση ακροτάτων για γραμμικές συναρτήσεις βελτιστοποίησης που υπόκεινται σε γραμμικούς ανισοτικούς περιορισμούς και εξηγείται η λογική και ο τρόπος εφαρμογής της **μεθόδου Simplex** που χρησιμοποιείται για τη λύση του προβλήματος αυτού.

4.2 ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η συνεχής συνάρτηση n -ανεξαρτήτων μεταβλητών

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

έχει κάποιο τοπικό ελάχιστο $x^* = x_{\min}$ όταν ισχύει ο ορισμός που δόθηκε στην παράγραφο 3.2, όπου τώρα όμως το x δεν είναι βαθμωτό μέγεθος αλλά διάνυσμα n -διαστάσεων.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ποιές είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες έτσι ώστε να υπάρχουν πράγματι τοπικά ελάχιστα για την συνάρτηση (4.1) στα διαστήματα όπου αυτή είναι συνεχής και έχει συνεχείς βαθμώσεις.

Εστω ότι το σημείο $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f που δίνεται από τη σχέση (4.1). Τότε όπως έχει δειχθεί στην παράγραφο 2.6 η συνάρτηση n -μεταβλητών f στη γειτονιά του x^* προς όλες τις διευθύνσεις Δx θα ορίζεται από την ισοδύναμη συνάρτηση μιας μεταβλητής $g(t)$ που δίνεται από τη σχέση (2.14):

$$g(t) = f(x^* + t\Delta x) = f(x_1^* + t\Delta x_1, x_2^* + t\Delta x_2, \dots, x_n^* + t\Delta x_n)$$

όπου το ελάχιστο προσεγγίζεται καθώς $t \rightarrow 0$.

Γνωρίζουμε όμως ότι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τη ύπαρξη τοπικού ελαχίστου για τη συνάρτηση μιας μεταβλητής $g(t)$ που είναι συνεχής και έχει συνεχείς παραγώγους είναι οι ακόλουθες:

1η αναγκαία και ικανή συνθήκη

$$g'(t)|_{t=0} = g'(0) = 0 \quad (4.2)$$

και επειδή σύμφωνα με την σχέση (2.24): $g'(0) = \nabla^T f(x) \Delta x$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\nabla^T f(x) \Delta x = 0 \quad (4.3)$$

Η σχέση (4.3) πρέπει να ισχύει για κάθε Δx στην περιοχή γύρω από το ελάχιστο της f , δηλ. πρέπει να ισχύει προς όλες τις δυνατές διευθύνσεις στο χώρο των n -διαστάσεων. Έτσι, για όλες αυτές τις διευθύνσεις η σχέση (4.3) ικανοποιείται όταν:

$$\nabla f(x) = 0 \quad (4.4)$$

2η αναγκαία συνθήκη

$$g''(t)|_{t=0} = g''(0) \geq 0 \quad (4.5)$$

όπου σύμφωνα με τη σχέση (2.26): $g''(0) = \Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\Delta x^T \nabla^2 f(x) \Delta x \geq 0 \quad (4.6)$$

Επειδή η σχέση (4.6) πρέπει να ικανοποιείται για κάθε Δx , πρέπει εξ ορισμού η μήτρα $\nabla^2 f(x)$ να είναι θετικά ημιορισμένη, δηλ.:

$$\nabla^2 f(x) \geq 0 \quad (4.7)$$

Η σχέση (4.7) αποτελεί τη 2^η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου συναρτήσεων n -ανεξαρτήτων μεταβλητών.

2^η ικανή συνθήκη

$$g''(t)|_{t=0} = g''(0) > 0 \quad (4.8)$$

η οποία με αντίστοιχο τρόπο καταλήγει στην συνθήκη η μήτρα $\nabla^2 f(x)$ να είναι θετικά ορισμένη, δηλ.

$$\nabla^2 f(x) > 0 \quad (4.9)$$

Αντίστοιχα, για την ύπαρξη τοπικού μεγίστου ισχύει η 1^η ικανή και αναγκαία συνθήκη (4.4) με 2^η αναγκαία συνθήκη η Hessian μήτρα $\nabla^2 f(x)$ να είναι αρνητικά ημιορισμένη και 2^η ικανή συνθήκη η $\nabla^2 f(x)$ να είναι αρνητικά ορισμένη

Στην περίπτωση όπου η Hessian μήτρα $\nabla^2 f(x)$ δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη τότε το σημείο που ορίζει η συνθήκη (4.4) είναι ένα **σαγματικό σημείο** της συνάρτησης f . Στην περίπτωση όπου η Hessian μήτρα είναι και αυτή ίση προς μηδέν, τότε πρέπει να εξετασθούν οι βαθμώσεις ανώτερης τάξης και σύμφωνα με την ισοδυναμία της $f(x+t \Delta x)$ προς την $g(t)$ θα πρέπει να ισχύουν για την $g(t)|_{t=0}$ οι συνθήκες (3.11) και (3.12) έτσι ώστε να έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Στο σημείο αυτό πρέπει να ορίσουμε πως γίνεται ο έλεγχος μιας θετικά ή αρνητικά ορισμένης μήτρας.

Θετικά ορισμένη είναι η τετραγωνική εκείνη μήτρα P $n \times n$ διαστάσεων για την οποία ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις:

- α) Ικανοποιεί την σχέση $v^T P v > 0$ για κάθε v .
- β) Όλες οι ιδιοτιμές της P είναι θετικές.
- γ) Όλες οι ορίζουσες D_i διαστάσεων $i \times i$ όπου $i = 1, 2, \dots, n$ που προκύπτουν με πρώτο στοιχείο το p_{11} της P είναι θετικές δηλ. $D_i > 0$

$$\text{όπου } D_i = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1i} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ p_{i1} & \dots & p_{ii} \end{bmatrix} \quad \text{και } P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Αντίστοιχα θετικά ημιορισμένη είναι η P εκείνη για την οποία ισχύουν: α) $v^T P v \geq 0$, β) έχει ιδιοτιμές μη αρνητικές και γ) έχει ορίζουσες $D_i \geq 0$.

Αρνητικά ορισμένη είναι η τετραγωνική εκείνη μήτρα P $n \times n$ διαστάσεων για την οποία ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις

α) Ικανοποιεί τη σχέση $v^T P v < 0$ για κάθε v .

β) Όλες οι ιδιοτιμές της είναι αρνητικές.

γ) Οι ορίζουσες D_i διαστάσεων $i \times i$ όπου $i = 1, 2, \dots, n$, που προκύπτουν με πρώτο στοιχείο το p_{11} της P είναι:

$$D_i < 0 \quad \text{για όλα τα περιττά} \quad i = 1, 3, 5, \dots$$

$$D_i > 0 \quad \text{για όλα τα άρτια} \quad i = 2, 4, 6, \dots$$

Αντίστοιχα **αρνητικά ημιορισμένη** είναι P εκείνη για την οποία α) $v^T P v \leq 0$, β) έχει ιδιοτιμές αρνητικές ή μηδέν και γ) έχει ορίζουσες D_i για τις οποίες ισχύουν οι προηγούμενες ανισότητες μαζί και με ισότητες.

Παράδειγμα 4.2.1

Η συνάρτηση βελτιστοποίησης μιας διαδικασίας είναι η ακόλουθη:

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + \frac{b}{x_1 x_2} + cx_2 + d$$

όπου a, b, c και d είναι θετικοί αριθμοί.

Ζητείται να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών x_1 και x_2 ώστε η f να ελαχιστοποιείται.

Η f είναι συνεχής και με συνεχείς βαθμώσεις. Τα πιθανά ελάχιστα της θα βρίσκονται στα σημεία όπου η βάρθρωσή της είναι μηδέν.

$$\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = a - \frac{b}{x_1^2 x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = c - \frac{b}{x_1 x_2^2} = 0$$

η οποία συνεπάγεται τιμές για τα x_1, x_2 :

$$x_1 = \left(\frac{bc}{a^2}\right)^{1/3}, \quad x_2 = \left(\frac{ab}{c^2}\right)^{1/3}$$

Για να είναι πράγματι τα σημεία αυτά ελάχιστα πρέπει να ικανοποιείται η 2η ικανή συνθήκη

$$\nabla^2 f(x) > 0 \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \frac{2b}{3x_1^3x_2} & \frac{b}{x_1^2x_2^2} \\ \frac{b}{x_1^2x_2^2} & \frac{2b}{x_1x_2^3} \end{bmatrix} > 0$$

Εξετάζουμε τις ορίζουσες D_i , $i = 1, 2$. Έτσι έχουμε:

$$D_1 = \frac{2b}{3x_1^3x_2} > 0$$

$$D_2 = \frac{2b}{3x_1^3x_2} \cdot \frac{2b}{x_1x_2^3} - \frac{b^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{3b^2}{4x_1^4x_2^4} > 0$$

Επειδή D_1 και D_2 είναι θετικές έπεται ότι το εξεταζόμενο σημείο αποτελεί ελάχιστο της f .

Παράδειγμα 4.2.2

Να εξετασθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2$$

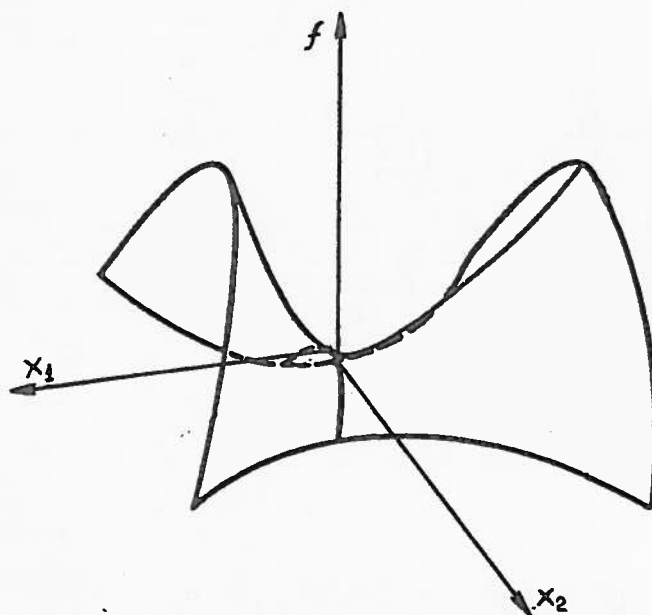
Έτσι, το σημείο $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, είναι πιθανό ακρότατο.

Εξετάζουμε τον πίνακα Hessian

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένος και γι' αυτό το εξεταζόμενο σημείο είναι σαγματικό σημείο. Εύκολα διαπιστώνεται ότι το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x_1, 0)$ και τοπικό μέγιστο της συνάρτησης $f(0, x_2)$.

Το Σχ. 4.1 δείχνει το σημείο αυτό.



Σχήμα 4.1 Σαγματικό σημείο της συνάρτησης του παραδείγματος 4.2.2.

4.3 ΤΟΠΙΚΑ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΚΑΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Για την εύρεση τοπικών ελαχίστων διατυπώσαμε την 1η και 2η αναγκαία και ικανή συνθήκη. Η 1η συνθήκη ορίζει τα πιθανά σημεία για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου ενώ η 2η συνθήκη εξασφαλίζει αν πράγματι τα σημεία είναι ελάχιστα. Η 2η αυτή συνθήκη ουσιαστικά εξασφαλίζει ότι η συνάρτησή μας είναι κυρτή στην περιοχή του πιθανού ελαχίστου. Η ισοδυναμία μεταξύ κυρτότητας και 2ης συνθήκης δίνεται με την παρακάτω πρόταση.

Μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα πεδίο α ν και μόνο αν η μήτρα Hessian $\nabla^2 f$ είναι θετικά ορισμένη στο S .

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor από τη σχέση (2.31) έχουμε:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \nabla^T f(x)\Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla^2 f(x+a\Delta x)\Delta x$$

για κάποιο $a: 0 < a < 1$.

Αν και μόνο αν η μήτρα Hessian είναι θετικά ορισμένη ισχύει:

$$f(x+\Delta x) > f(x) + \nabla^T f(x)\Delta x$$

και όπως θα αποδείξουμε στην επόμενη πρόταση

Μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα πεδίο S αν και μόνο αν:

$$f(x+\Delta x) > f(x) + \nabla^T f(x)\Delta x \quad \text{για όλα τα } x, x+\Delta x \text{ που ανήκουν στο } S.$$

Απόδειξη

Για κάθε $a: 0 < a < 1$ έχουμε από τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης

$$f[(1-a)x + a(x+\Delta x)] < (1-a)f(x) + af(x+\Delta x)$$

η οποία μετά από κάποιες αριθμητικές πράξεις δίνει:

$$\frac{f[x+a\Delta x] - f(x)}{a} < f(x+\Delta x) - f(x)$$

Θεωρώντας a πολύ μικρό καταλήγουμε στην:

$$\nabla^T f(x)\Delta x < f(x+\Delta x) - f(x)$$

4.4 ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΥΠΟΚΕΙΝΤΑΙ ΣΕ ΙΣΟΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης στην περίπτωση αυτή ορίζεται ως εξής: Ζητείται το ελάχιστο της συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f(x)$, όπου $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ που ταυτόχρονα ικανοποιεί την περιοριστική συνθήκη

$$g(x) = 0, \quad \text{όπου } g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]^T, \text{ με } m \leq n \quad (4.11)$$

Στα προηγούμενα εξετάσαμε την ύπαρξη τοπικού ελάχιστου χωρίς περιοριστικές συνθήκες για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Σαν βασικό αποτέλεσμα της προηγούμενης ανάλυσης είχαμε ότι τα υποψήφια τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης $f(x)$ πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη (4.3) για κάθε Δx , γεγονός που συνεπάγεται την 1^η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ελάχιστου.

Στην παρούσα περίπτωση η επιπρόσθετη περιοριστική συνθήκη $g(x) = 0$ δεν κάνει τίποτε άλλο από το να μας περιορίζει κατά m τους n βαθμούς ελευθερίας που είχαμε για την συνάρτηση $f(x)$ ψάχνοντας να βρούμε το ελάχιστό της. Για το λόγο αυτό πρέπει να ισχύει $m \leq n$ ώστε η ελαχιστοποίηση να έχει νόημα.

Η απλούστερη αντιμετώπιση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης που υπόκειται σε ισοτικούς περιορισμούς μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της απαλειφής. Λύνουμε δηλ. τις m περιοριστικές συνθήκες ως προς οποιεσδήποτε m από τις n ανεξάρτητες μεταβλητές, τις οποίες στη συνέχεια απαλείφουμε από τη συνάρτηση βελτιστοποίησης $f(x)$. Έτσι, η

$f(x)$ γίνεται από συνάρτηση n μεταβλητών συνάρτηση $(n-m)$ μεταβλητών. Στη νέα τροποποιημένη f εφαρμόζουμε τις μεθόδους ελαχιστοποίησης μέσω των συνθηκών (4.4) και (4.8) για την εύρεση των τοπικών ελαχίστων που ικανοποιούν και τις περιοριστικές συνθήκες ισότητας. Βασικό μειονέκτημα της μεθόδου αυτής αποτελεί η απαίτηση για λύση του συστήματος των περιοριστικών συνθηκών πράγμα που γενικά δεν είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το πρόβλημα με μια διαφορετική προσέγγιση. Για το λόγο αυτό ας θυμηθούμε για λίγο τη λογική που χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση της 1ης αναγκαίας και ικανής συνθήκης για την ύπαρξη τοπικού ελάχιστου χωρίς περιοριστικές συνθήκες. Τότε συγκρίναμε το ελάχιστο της $f(x)$ στη περιοχή γύρω από αυτό προς όλες (και τις n) διευθύνσεις. Τώρα πρέπει να ψάξουμε σε εκείνες μόνο τις διευθύνσεις που μας επιτρέπει η συνθήκη $g(x) = 0$. Αρα ο **ισοτικός περιορισμός ορίζει σ' αυτή την περίπτωση τα κατάλληλα Δx** όπου θα ψάξουμε για τα ελάχιστα της συνάρτησης.

Προφανώς εξακολουθεί να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\nabla^T f(x) \Delta x = 0 \quad \text{για κατάλληλα όμως } \Delta x \quad (4.12)$$

Η διαφορά της συνθήκης (4.12) από την (4.3) είναι ακριβώς ότι **δεν ισχύει για κάθε Δx** . Γι' αυτό δεν συνεπάγεται τώρα την 1η αναγκαία και ικανή συνθήκη (4.4). Η σχέση (4.12) επιβάλλει το γινόμενο των διανυσμάτων $\nabla f(x)$ και Δx να είναι μηδέν. Θεωρώντας λοιπόν τη σχέση αυτή διανυσματικά μας λέει ότι πρέπει να ισχύει:

$$\nabla f(x) \perp \Delta x \quad (4.13)$$

Αρα πρέπει να ψάξουμε για τα κατάλληλα Δx και να κινηθούμε σ' αυτά βρίσκοντας το σημείο που η βάρθρωση της συνάρτησης $f(x)$ είναι ορθογώνια.

Ας δούμε λοιπόν ποιά είναι τα Δx από την περιοριστική συνθήκη. Στο σημείο x αλλά και στο $x + \Delta x$ πρέπει οι ισοτικοί περιορισμοί να ικανοποιούνται. Πρέπει δηλ. να ισχύει $g_i(x) = 0$ και $g_i(x + \Delta x) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots, m$. Επειδή όμως η διαφορά $g_i(x + \Delta x) - g_i(x)$ ορίζει το διαφορικό της συνάρτησης g_i έπεται ότι το $dg_i = 0$ ή ισοδύναμα από τη σχέση (2.35)

$$\nabla^T g_i(x) \Delta x = 0 \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (4.14)$$

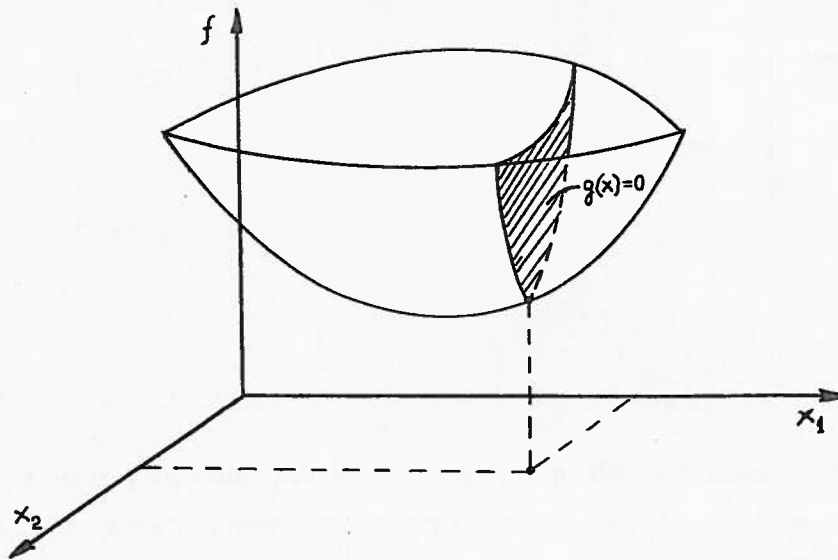
Η τελευταία αυτή συνθήκη μας ορίζει ότι **τα κατάλληλα Δx είναι ορθογώνια επίσης στις βαθμώσεις των $g_i(x)$** :

$$\nabla g_i(x) \perp \Delta x \quad (4.15)$$

Συμπερασματικά λοιπόν προκύπτει από την προηγούμενη ανάλυση ότι για την εύρεση τοπικού ελάχιστου υπό ισοτικούς περιορισμούς σαν πρώτη συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται η (4.13):

$$\nabla f(x) \perp \Delta x$$

$$\forall \Delta x \in T(x) = \{ \Delta x : \Delta x \text{ εφαπτομενικό προς οποιοδήποτε } v \perp \nabla g_i(x) \}.$$



Σχήμα 4.2 Ελάχιστο συνάρτησης δύο μεταβλητών υπό περιοριστικές συνθήκες ισότητας

4.5 ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ LAGRANGE

Η προηγούμενη διανυσματική - γεωμετρική προσέγγιση του προβλήματος της ελαχιστοποίησης συνάρτησης υπό συνθήκες, μας οδήγησε στη διατύπωση κάποιων αναγκαίων συνθηκών ορθογωνιότητας. Επειδή όμως ο χειρισμός τέτοιων συνθηκών δεν είναι εύκολος χρειαζόμαστε μια ισοδύναμη αλλά πιο μαθηματική (όχι γεωμετρική) διατύπωση των αναγκαίων συνθηκών.

Αφού λοιπόν πρέπει η βάρθρωση της $f(x)$ στο σημείο του ελάχιστου να είναι κάθετη προς όλα τα κατάλληλα Δx ($\nabla f(x) \perp \Delta x$) τα οποία Δx είναι όλα εκείνα που είναι ορθογώνια στις βαθμώσεις των $g_i(x)$ ($\Delta x \perp \nabla g_i(x)$), αμέσως προκύπτει ότι η **θάρθρωση της $f(x)$ οφείλει να είναι συγγραμική προς το γραμμικό συνδυασμό όλων των θαθμώσεων των $g_i(x)$.**

Αρα θα υπάρχει πάντοτε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, που θα ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\nabla^T f(x) + \lambda_1 \nabla^T g_1(x) + \lambda_2 \nabla^T g_2(x) + \dots + \lambda_m \nabla^T g_m(x) \quad \text{όπου } g(x) = 0 \quad (4.16)$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\nabla^T f(x) + \lambda^T \nabla g(x) = 0, \quad g(x) = 0 \quad (4.17)$$

όπου

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^T g_1(x) \\ \nabla^T g_2(x) \\ \vdots \\ \nabla^T g_m(x) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Τα στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ του διανύσματος λ ονομάζονται παράγοντες Lagrange.

Η σχέση (4.17) αποτελεί την **1^η αναγκαία και ικανή συνθήκη** που πρέπει να ικανοποιείται ώστε η $f(x)$ να έχει τοπικά ελάχιστα υπό περιορισμούς ισότητας. Είναι προφανές ότι η (4.17) ορίζει τα πιθανά τοπικά ελάχιστα. Το σύστημα (4.17) λύνεται ως προς $(n+m)$ μεταβλητές, δηλ. ως προς τα x και λ , και η λύση υπάρχει όταν το πρόβλημα είναι μη γραμμικό. Είναι όμως δυνατό η βέλτιστη λύση να υπάρχει σε κάποιο σημείο για το οποίο ισχύει $g(x) = 0$ με $g_{x_1} = g_{x_2} = \dots = g_{x_n} = 0$ ενώ κάποιες από τις $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ δεν μηδενίζονται. Τότε το σύστημα (4.17) δεν μπορεί να λυθεί και η μέθοδος των παραγόντων Lagrange δεν εφαρμόζεται. Το παράδειγμα 4.5.2 αντιστοιχεί σε τέτοια περίπτωση.

Η 1^η αναγκαία και ικανή συνθήκη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα πιθανά ελάχιστα της f είναι τα ίδια με αυτά της συνάρτησης:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) \quad \text{όπου } g(x) = 0 \quad (4.19)$$

Η συνάρτηση $L(x, \lambda)$ ονομάζεται **Lagrangian συνάρτηση**.

Ψάχνοντας για τα ελάχιστα της L ως προς όλες τις μεταβλητές της x και λ παίρνουμε:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 0 \quad \nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0 \quad (4.20)$$

Η σχέση (4.20) αποτελεί την ισοδύναμη έκφραση της συνθήκης (4.17)

2η αναγκαία και ικανή συνθήκη

Είναι προφανές ότι αν τα σημεία x που ορίζονται από την (4.17) είναι ελάχιστα της $L(x, \lambda)$ τότε θα ισχύει η 2η αναγκαία συνθήκη:

$$\nabla_x^2 L(x, \lambda) \geq 0 \quad (4.21)$$

Αντίστοιχα αν ισχύει

$$\nabla_x^2 L(x, \lambda) > 0 \quad (4.22)$$

τότε τα x είναι ελάχιστα της Lagrangian συνάρτησης (4.19) και έτσι η (4.22) αποτελεί την 2η ικανή συνθήκη για τοπικό ελάχιστο της L .

Επειδή όμως η f υπό τον περιορισμό $g = 0$ είναι μια συνάρτηση με $n-m$ ανεξάρτητες μεταβλητές ενώ η L είναι μια συνάρτηση με περισσότερες μεταβλητές **δεν υπάρχει πλήρης ισοδυναμία μεταξύ f και L** . Η ικανή συνθήκη (4.22) χειρίζεται και τις n μεταβλητές x σαν ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ στην πραγματικότητα μόνο $n-m$ από αυτές είναι ανεξάρτητες. Έτσι είναι δυνατόν η (4.22) να δίνει κάποιο σαγματικό σημείο για την L στις n διαστάσεις το οποίο όμως στις $n-m$ ανεξάρτητες διαστάσεις της f να είναι ελάχιστο, και η σαγματικότητα να προέρχεται από τις υπόλοιπες διαστάσεις οι οποίες λόγω του περιορισμού $g = 0$ δεν μας ενδιαφέρουν. Για το λόγο αυτό η **2η ικανή συνθήκη** για την διαπίστωση των τοπικών ελαχίστων της f είναι η ακόλουθη:

$$\nabla_{n-m}^2 f(x) > 0 \quad (4.23)$$

όπου οι m μεταβλητές ικανοποιούν την $g(x) = 0$. Ο τελεστής ∇_{n-m}^2 αντιστοιχεί σε πίνακα $(n-m) \times (n-m)$ διαστάσεων των πραγματικά ανεξαρτήτων μεταβλητών. Το παράδειγμα 4.5.3 είναι αντιπροσωπευτικό της περίπτωσης που συζητήθηκε.

Παράδειγμα 4.5.1

Ζητείται να διερευνηθεί ως προς τα τοπικά ελάχιστα η συνάρτηση $f = 4x_1^2 + 5x_2^2$ υπό τον περιορισμό $g = 2x_1 + 3x_2 - 8 = 0$.

Η συνάρτηση Lagrange για το πρόβλημα αυτό είναι:

$$L(x, \lambda) = (4x_1^2 + 5x_2^2) + \lambda(2x_1 + 3x_2 - 8)$$

Η πρώτη αναγκαία και ικανή συνθήκη ορίζει:

$$\nabla_{x_1} L = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \quad \text{ή} \quad 8x_1 + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \quad \text{ή} \quad 10x_2 + 3\lambda = 0$$

$$\nabla_{\lambda} L = 0 \quad \text{ή} \quad g = 0 \quad \text{ή} \quad 2x_1 + 3x_2 - 8 = 0$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε $x_1 = -1/4\lambda$ και $x_2 = -3/10\lambda$ τα οποία αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση. Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς λ παίρνουμε $\lambda = -30/7$. Οπότε τα σημεία:

$$x_1 = 1.071 \quad \text{και} \quad x_2 = 1.286$$

είναι πιθανά τοπικά ελάχιστα της f υπό την συνθήκη $g = 0$. Για το σημείο αυτό έχουμε:

$$\nabla_x^2 L = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} > 0$$

και το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 4.5.2

Ζητείται να βρεθεί, αν υπάρχει, το σημείο της καμπύλης $(x_1-2)^2 = (x_2-1)^3$ που είναι πλησιέστερο στο σημείο $(2, 0)$.

Το πρόβλημα αυτό αφορά την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $f = (x_1-2)^2 + x_2^2$ που αποτελεί το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο $(2, 0)$ στο χώρο $x_1 - x_2$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $g = (x_1-2)^2 - (x_2-1)^3 = 0$.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των παραγόντων Lagrange έχουμε ότι το πιθανό ελάχιστο θα ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2(x_1-2) + 2\lambda(x_1-2) = 2(x_1-2)(\lambda+1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2 + 3\lambda(x_2-1)^2 = 0$$

$$g = (x_1-2)^2 - (x_2-1)^3 = 0$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x_1 = 2$ ή $\lambda = -1$. Για την τιμή $x_1 = 2$ η τρίτη εξίσωση δίνει $x_2 = 1$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στη δεύτερη εξίσωση καταλήγουμε στο αδύνατο $2 = 0$. Αυτό συμβαίνει επειδή στην περίπτωση αυτή το σημείο $(2, 1)$ μηδενίζει τις μερικές παραγώγους της g : $\frac{\partial g}{\partial x_1}$ και $\frac{\partial g}{\partial x_2}$ ενώ η $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$. Ετσι, δεν μπορούμε με την μέθοδο των παραγόντων Lagrange να ελέγξουμε το σημείο αυτό το οποίο συμβαίνει να είναι πράγματι το ελάχιστο της f υπό την συνθήκη $g = 0$.

Παράδειγμα 4.5.3

Ζητούνται να ορισθούν οι διαστάσεις ενός κυλινδρικού δοχείου το οποίο να έχει τη μικρότερη δυνατή επιφάνεια για δεδομένο όγκο V .

Αν η ακτίνα του κυλίνδρου είναι r και το ύψος l τότε η συνολική επιφάνεια του κυλίνδρου θα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(r, l) = 2\pi r^2 + 2\pi r l$$

η οποία πρέπει να ελαχιστοποιηθεί υπό την συνθήκη $V = \pi r^2 l$. Η Lagrangian συνάρτηση για την περίπτωση αυτή είναι:

$$L = 2\pi r^2 + 2\pi r l + \lambda(\pi r^2 l - V)$$

Από την 1^η κανή και αναγκαία συνθήκη έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial r} + \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi l + 2\lambda\pi r l = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} + \lambda \frac{\partial g}{\partial l} = 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0$$

$$g = \pi r^2 l - V = 0$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις δίνουν σαν λύσεις: $r = 0$ και $l = 0$, η οποία απορρίπτεται για προφανείς λόγους, και $r = -2/\lambda$ και $\lambda = -4/\lambda$ τις οποίες αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση για να πάρουμε $\lambda = -\left(\frac{16\pi}{V}\right)^{1/3}$. Ετσι, τελικά έχουμε σαν πιθανή βέλτιστη λύση

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} \text{ και } l = 2 \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Εξετάζοντας, τώρα την Hessian της συνάρτησης Lagrange L παίρνουμε:

$$\nabla_x^2 L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial l} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial l} & \frac{\partial^2 L}{\partial l^2} \end{bmatrix} = \pi \cdot \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Η $\nabla_x^2 L$ έχει:

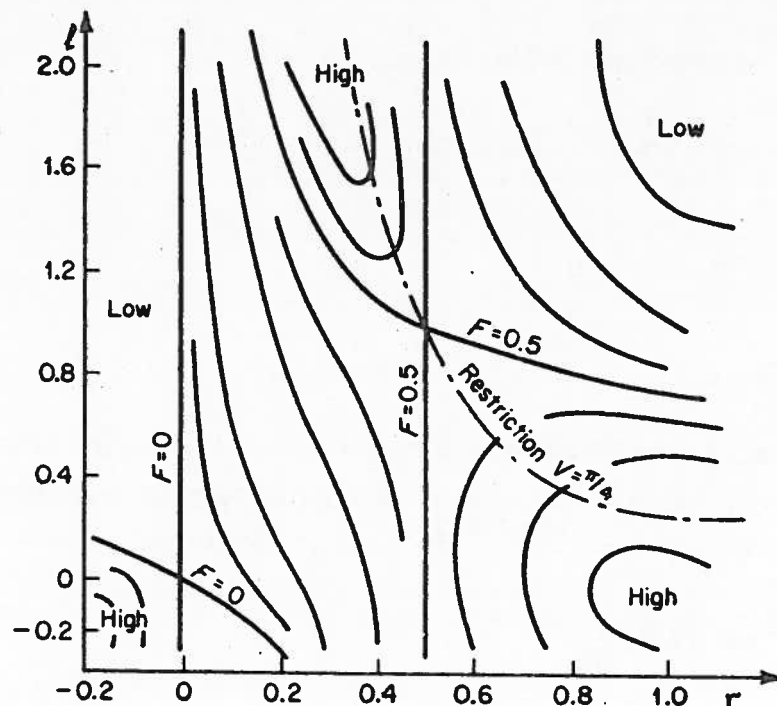
$$D_1 = -4 < 0 \text{ και } D_2 = -4 < 0$$

έτσι, ενώ το εξεταζόμενο σημείο αποτελεί τη βέλτιστη λύση ο έλεγχος της $\nabla_x^2 L$ το απορρίπτει σαν σαγματικό σημείο της συνάρτησης L . Ο σωστός έλεγχος γίνεται με χρήση της 2ης κανής συνθήκης (4.23) για την f στην οποία πρέπει να θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή μόνο μια από τις r και l , έστω την r , οπότε θα έχουμε:

$$\nabla_r^2 f = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial r} \right]$$

όπου $\frac{\partial f}{\partial l} = 2\pi r$, $\frac{\partial f}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi l$, $\frac{\partial l}{\partial r}$ δίνεται μέσω της λύσης της $g = 0$ ως προς l , δηλ. $l =$

$G(r, l) = \frac{V}{\pi r^2}$, και είναι $\frac{\partial l}{\partial r} = -2 \frac{V}{\pi r^3}$ οπότε τελικά μετά τις πράξεις παίρνουμε:



Σχήμα 4.3 Η Lagrangian του παραδείγματος 4.6.3.

$$\nabla_r^2 f = 8 \frac{V}{r^3} + 4\pi > 0$$

που πράγματι ορίζει ότι το εξεταζόμενο σημείο είναι ελάχιστο της f .

Το Σχήμα 4.3 δείχνει σε τομή τη μορφή της Lagrangian συνάρτησης για $V = \frac{\pi}{4}$.

Παρατηρούμε ότι ενώ το εξεταζόμενο σημείο είναι σαγματικό σημείο για την L , στην διεύθυνση που ορίζει ο περιορισμός $g = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

4.6 ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΥΠΟΚΕΙΝΤΑΙ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα ορίζεται ως η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f(x)$ που ταυτόχρονα ικανοποιεί την περιοριστική συνθήκη $g(x) \leq 0$.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, όπου εξετάσαμε την ελαχιστοποίηση της $f(x)$ υπό περιοριστικές συνθήκες ισότητας, διατυπώσαμε την ισοδυναμία της $g(x) = 0$ με τον περιορισμό των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος. Στην παρούσα περίπτωση ο ανισοτικός περιορισμός αποτελεί μια πολύ πιο ασθενέστερη συνθήκη που μόνον ορίζει τον υποχώρο μέσα στον οποίο θα πρέπει να ψάξουμε για την λύση. Για τον λόγο αυτό δεν χρειάζεται τώρα να ισχύει $m \leq n$. Έτσι το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί πάρα πολύ διακρίνοντας τις εξής περιπτώσεις:

(α) Τα τοπικά ελάχιστα της $f(x)$ χωρίς περιορισμούς, αν υπάρχουν εξετάζεται ως προς το αν ικανοποιούν τον ανισοτικό περιορισμό $g(x) \leq 0$.

(β) Εξετάζεται η συνάρτηση $f(x)$ για τοπικά ελάχιστα σε κάποια ή σε όλα από τα όρια του υποχώρου που ορίζει η $g(x) \leq 0$, δηλαδή στις περιοχές που ισχύει $g^k(x) = 0$ όπου $g^k(x)$ αποτελεί οποιοδήποτε υποσύνολο k στοιχείων του $g(x)$, δηλ.:

$$g^k(x) \subseteq g(x) \tag{4.24}$$

όπου

$$g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]^T \tag{4.25}$$

για κάθε $k: 1 \leq k \leq \{\min(m, n)\}$

Τότε λέμε ότι k από τους m ανισοτικούς περιορισμούς είναι ενεργοί (active). Οι υπόλοιποι $m - k$ περιορισμοί θα πρέπει τότε να ικανοποιούνται σαν ανισότητες. Αν το συμπλήρωμα του g ως προς το g^k το ονομάσουμε g^{m-k} θα πρέπει να ισχύει:

$$g^{m-k}(x) \leq 0 \quad (4.26)$$

Η λύση του προβλήματος στην περίπτωση (α) δεν παρουσιάζει καμιά ιδιαιτερότητα και βρίσκεται από τις γνωστές συνθήκες:

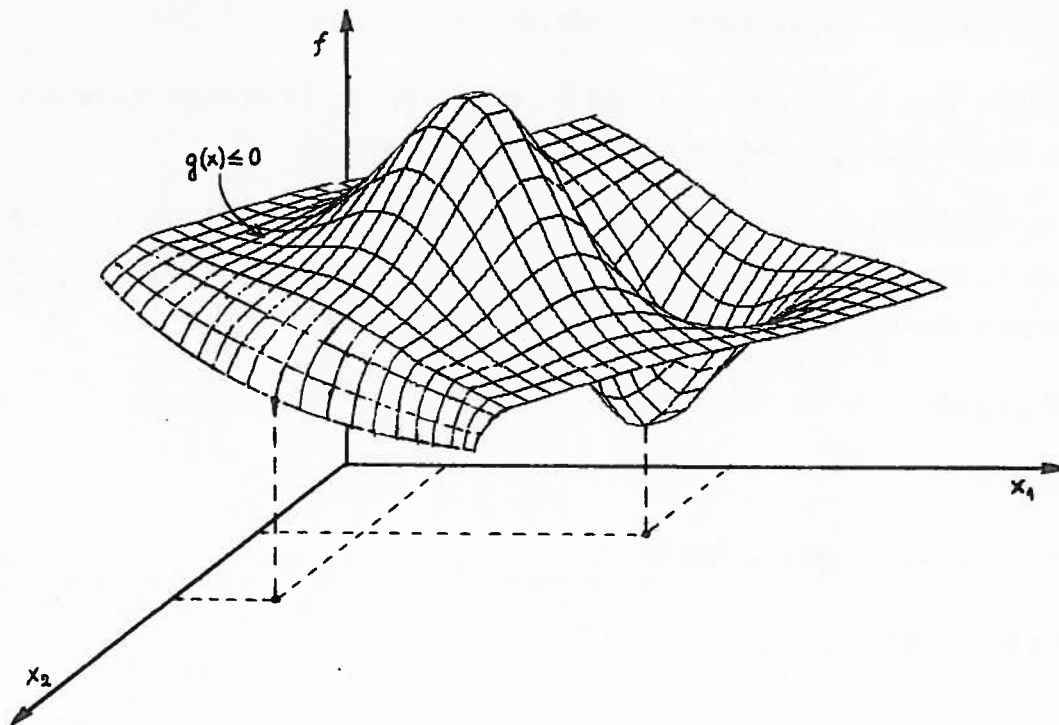
$$\begin{aligned} \nabla f(x) = 0 \quad \text{που ικανοποιούν:} \quad \nabla^2 f(x) > 0 \\ g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τι συμβαίνει στην περίπτωση (β) όταν δηλαδή κάποιες k από τις m ανισοτικές περιοριστικές συνθήκες είναι ενεργές σαν ισότητες. Αν λοιπόν κάποιο x είναι ελάχιστο της f στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει για οποιοδήποτε επιτρεπτό $x+\Delta x$ στην περιοχή γύρω από το x να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0 \quad (4.28)$$

και

$$g_i^k(x+\Delta x) - g_i^k(x) \leq 0 \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, k \quad (4.29)$$



Σχήμα 4.4 Ελάχιστα υπό περιοριστικές συνθήκες ανισοτήτων

Σύμφωνα δε με την σχέση (2.13) τα διαφορικά των συναρτήσεων f και g_i^k πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$df(x, \Delta x) = \nabla^T f(x) \Delta x \geq 0 \quad (4.30)$$

και

$$dg_i^k(x, \Delta x) = \nabla^T g_i^k(x) \Delta x \leq 0 \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, k \quad (4.31)$$

όπου g_i^k είναι στοιχείο του συνόλου g^k και Δx κατάλληλο.

Παράγοντες Lagrange

Οι σχέσεις (4.30) και (4.31) ορίζουν μια γεωμετρική σχέση μεταξύ των διανυσμάτων ∇f και ∇g_i^k . Συγκεκριμένα αφού η (4.30) ορίζει ένα γινόμενο " \geq " και η (4.31) ορίζει k γινόμενα " \leq " των βαθμώσεων με το ίδιο διάνυσμα επιτρεπτών μετατοπίσεων Δx , αυτά θα ικανοποιούνται τότε και μόνο τότε όταν η **θάθμωση της f είναι γεωμετρικά αντίρροπη κάποιου γραμμικού συνδυασμού όλων των βαθμώσεων των g_i^k** . Θα ισχύει δηλαδή:

$$\text{sign} \nabla f(x) = - \text{sign} \{ \lambda_1 \nabla g_1^k(x) + \dots + \lambda_k \nabla g_k^k(x) \} \quad \text{για } \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0 \quad (4.32)$$

Η σχέση (4.32) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι k περιοριστικές συνθήκες είναι ενεργές, δηλ. βρισκόμαστε πάνω στο όριο μηδέν γι' αυτές, οδηγεί στην πρόταση. Η $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο όταν $g^k(x)$ είναι ενεργές αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο πραγματικών θετικών αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\nabla^T f(x) + \lambda_1 \nabla^T g_1^k(x) + \lambda_2 \nabla^T g_2^k(x) + \dots + \lambda_k \nabla^T g_k^k(x) = 0 \quad \text{όπου } g^k(x) = 0 \quad (4.33)$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$\nabla^T f(x) + \lambda^T \nabla g^k(x) = 0, \quad g^k(x) = 0 \quad (4.34)$$

όπου το διάνυσμα $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]^T$ είναι το διάνυσμα των **παραγόντων Lagrange**.

Η σχέση (4.34) μαζί με την (4.26) αποτελούν την **αναγκαία και ικανή συνθήκη** που πρέπει να ικανοποιείται ώστε να υπάρχει ελάχιστο στην περίπτωση αυτή.

Όταν το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι πιο σύνθετο και περιέχει σαν περιοριστικές συνθήκες τόσο ισοτικές όσο και ανισοτικές σχέσεις είναι φανερό ότι αντιμετωπίζεται με συνδυασμό των μεθόδων που αναπτύχθηκαν για κάθε μια περίπτωση χωριστά.

Στο σημείο αυτό επισημαίνουμε ότι σ' όλες τις μεθόδους που αναπτύξαμε μέχρι τώρα στο Κεφάλαιο 4 χρειαζόταν να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι της f και της g και στη συνέχεια να λυθούν κάποιες εξισώσεις που περιείχαν αυτές τις παραγώγους ως προς τις μεταβλητές. Οι μεταβλητές όμως εμφανίζονται στις παραγώγους τότε και μόνο τότε όταν οι παραγωγιζόμενες συναρτήσεις είναι μη γραμμικές. Έτσι, για να υπάρχει λύση θα πρέπει τουλάχιστον κάποια από τις f και g να είναι μη γραμμική.

Παράδειγμα 4.6.1

Για τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $f = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$ ζητείται να βρεθούν τα τοπικά ελάχιστα που ικανοποιούν τη σχέση $x_1x_2 \leq a$ όπου $a > 0$.

Το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της f υπό την ανισοτική συνθήκη:

$$g = x_1x_2 - a \leq 0$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- α) Εξετάζουμε αν τα τοπικά ελάχιστα χωρίς περιορισμούς, αν υπάρχουν, ικανοποιούν τους περιορισμούς. Έτσι, από τις συνθήκες (4.27) έχουμε:

$$\nabla f = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 3x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 + 3x_1 + 6x_2 = 0$$

από τις οποίες παίρνουμε τα πιθανά ακρότατα της f

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \quad \text{ή} \quad x_1 = 3/4, x_2 = -3/2$$

Εξετάζουμε τώρα την Hessian μήτρα

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6x_2 + 6 \end{bmatrix}$$

η οποία μόνο για τις τιμές $x_1 = x_2 = 0$ είναι θετικά ορισμένη. Άρα το σημείο $(x_1, x_2) = (0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο αν ικανοποιεί και την περιοριστική συνθήκη $g \leq 0$, πράγμα που εύκολα διαπιστώνουμε ότι συμβαίνει.

β) Εξετάζουμε αν υπάρχει τοπικό ελάχιστο πάνω στο όριο $g = 0$. Έτσι σύμφωνα με τις σχέσεις (4.34) πρέπει να υπάρχει κάποιο $\lambda > 0$ για το οποίο να ισχύουν:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 6x_1 + 3x_2 + \lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 3x_2^2 + 3x_1 + 6x_2 + \lambda x_1 = 0$$

$$g = x_1 x_2 - a = 0$$

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε $x_2 = \frac{a}{x_1}$. Αν αντικαταστήσουμε την τιμή αυτή του x_2 στην πρώτη σχέση παίρνουμε:

$$6x_1 + 3\frac{a}{x_1} + \lambda\frac{a}{x_1} = 0$$

από την οποία προκύπτει:

$$\lambda = -6\frac{x_1^2}{a} - 3 < 0$$

άρα δεν είναι δυνατό να υπάρξει $\lambda > 0$ και συνεπώς δεν μπορεί να βρεθεί τοπικό ελάχιστο της f πάνω στο όριο $g = 0$.

4.7 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού στη γενική του μορφή συνίσταται στην εύρεση του μεγίστου μιας γραμμικής, ως προς τους αγνώστους, συνάρτησης η οποία υπόκειται σε συνθήκες γραμμικών και πάλι ανισοτήτων. Έτσι το πρόβλημα εκφράζεται σαν:

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (4.35)$$

όταν

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad (4.36)$$

και:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (4.37)$$

Υπό πιο συνοπτική μορφή το πρόβλημα μπορεί να εκφρασθεί σαν:

$$\max f(x) = c^T x \quad (4.38)$$

όταν:

$$Ax \leq b \quad (4.39)$$

και:

$$x \geq 0 \quad (4.40)$$

όπου $A = (a_{ij})$ είναι μια $m \times n$ γνωστή μήτρα, $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ και $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ είναι διανύσματα γνωστών συντελεστών ενώ το $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ είναι το διανύσμα των αγνώστων μεταβλητών που πρέπει να ορισθεί.

Είναι επίσης προφανές ότι αν πρόκειται να μας ζητηθεί η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης f αυτό ισοδυναμεί με την μεγιστοποίηση της $-f$. Ακόμη όταν στις συνθήκες περιλαμβάνονται ανισότητες της μορφής " \geq " αυτές μπορούν να μετατραπούν στη σπάνια μορφή " \leq " μετά από πολλαπλασιασμό τους με -1 .

Η λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει να καταλήγει σε ένα διάνυσμα x που πληροί τις ανισοτικές συνθήκες $Ax \leq b$. Η λύση αυτή θα είναι επιτρεπτή (ή εφικτή) όταν ταυτόχρονα πληροί τις συνθήκες μη αρνητικότητας $x \geq 0$. Για να υπάρχει λοιπόν επιτρεπτή λύση πρέπει $b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Τότε οι ανισοτικές συνθήκες των περιορισμών μαζί με τις συνθήκες μη αρνητικότητας ορίζουν μια κλειστή και κυρτή περιοχή (γιατί;) στο χώρο των n διαστάσεων.

Η βέλτιστη λύση μπορεί να βρεθεί γεωμετρικά με μετακίνηση του υπερεπιπέδου που ορίζει η f παράλληλα προς τον εαυτόν του μέχρις ότου να λάβει την μέγιστη τιμή του και ταυτόχρονα να διατηρηθεί ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον χώρο μέσα στον οποίο οφείλουν να βρίσκονται οι επιτρεπτές λύσεις.

Η τελευταία παρατήρηση αποτελεί την βάση για τη λύση του προβλήματος, επειδή προφανώς εάν υπάρχει βέλτιστη λύση αυτή θα κείται σ' ένα ακρότατο σημείο (κορυφή) του χώρου (πολυέδρου) των επιτρεπτών λύσεων.

4.8 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΑΤΙΣΜΟΥ

Τα συμπεράσματα από την προηγούμενη ανάλυση μπορούν να γίνουν πολύ περισσότερο κατανοητά επιχειρώντας μια γραφική γεωμετρική λύση με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

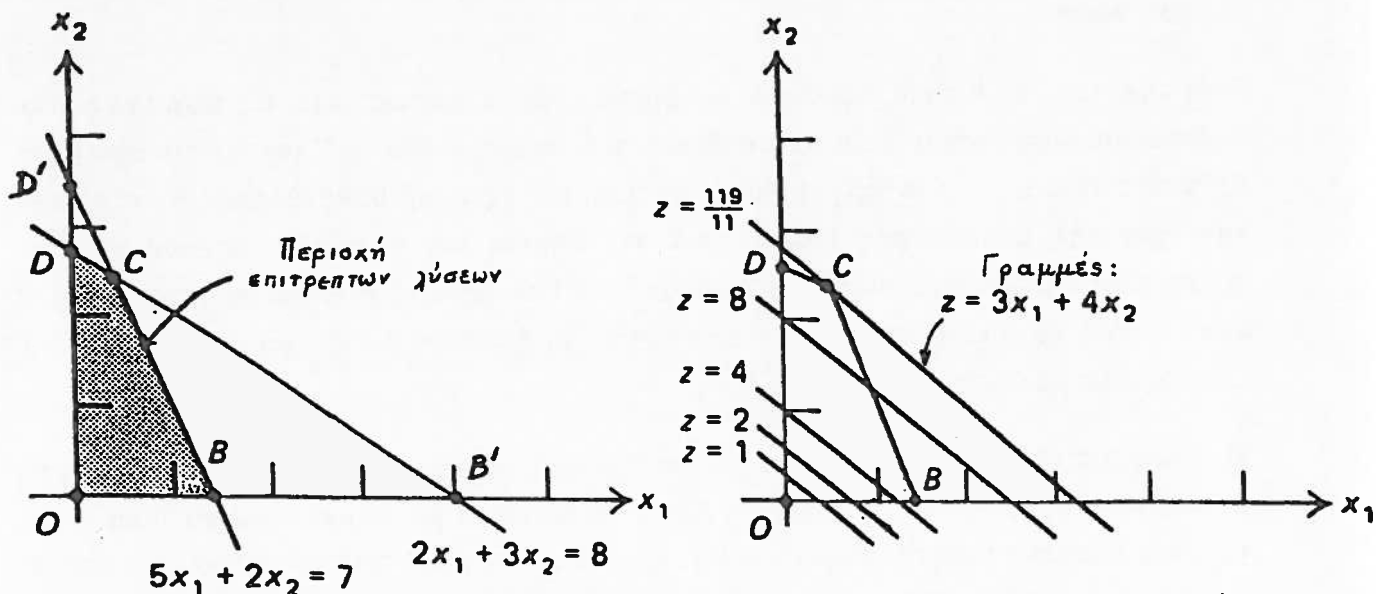
Ας θεωρήσουμε λοιπόν το παρακάτω πρόβλημα:

Παράδειγμα 4.8.1

Ζητείται να βρεθεί το μέγιστο της $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, υπό τους περιορισμούς $5x_1 + 2x_2 \leq 7$ και $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ για $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$.

Η πρώτη συνθήκη ορίζει ότι $5x_1 + 2x_2 \leq 7$. Αυτό σημαίνει ότι η βέλτιστη λύση (x_1^*, x_2^*)

πρέπει να είναι ένα σημείο στο $x_1 - x_2$ επίπεδο το οποίο θα κείται κάτω από τη γραμμή $5x_1 + 2x_2 = 7$. Κατά αντίστοιχο τρόπο η δεύτερη συνθήκη ορίζει ότι η βέλτιστη λύση θα κείται κάτω από τη γραμμή $2x_1 + 3x_2 = 8$.



Σχήμα 4.5 Γεωμετρική λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού 4.8.1

Επειδή πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ η λύση (x_1^*, x_2^*) πρέπει να βρίσκεται στη γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος, που ορίζει το χώρο των επιτρεπτών λύσεων.

Σχεδιάζοντας μερικές γραμμές της μορφής $f = 3x_1 + 4x_2 = z$, για διάφορες τιμές του z , γίνεται σαφές ότι η $f(x_1, x_2)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν τμήσει την περιοχή

των επιτρεπτών λύσεων στην κορυφή $C = (5/11, 26/11)$. Τότε η μέγιστη τιμή της f γίνεται $z^* = 3 \cdot \frac{5}{11} + 4 \cdot \frac{26}{11} = \frac{119}{11}$.

Είναι προφανές ότι είναι πολύ δύσκολο να επεκτείνουμε την παραπάνω γραφική-γεωμετρική διαδικασία σε ένα πρόβλημα που περιέχει περισσότερες από δύο μεταβλητές. Για παράδειγμα, σ' ένα πρόβλημα τριών μεταβλητών η περιοχή των επιτρεπτών λύσεων βρίσκεται στο χώρο των τριών διαστάσεων και περιορίζεται από επίπεδα. Στη γενική περίπτωση των n μεταβλητών η περιοχή των επιτρεπτών λύσεων σχηματίζει ένα πολυέδρο που ορίζεται μεταξύ υπερεπιπέδων.

4.9 ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Επιχειρώντας να ξεφύγουμε από τη γεωμετρική λύση, η οποία άλλωστε είναι αδύνατο να εφαρμοσθεί για προβλήματα με περισσότερες από τρεις μεταβλητές που δεν μπορούν να παρασταθούν γραφικά, πρέπει να αναπτύξουμε ένα καθαρά μαθηματικό αλγόριθμο που να δίνει ένα συστηματικό τρόπο ελέγχου των πιθανών λύσεων όπως προέκυψαν από τη γραφική λύση.

Ετσι πρώτον, οι λύσεις οφείλουν να βρίσκονται σε κάποια από τις κορυφές του πολυέδρου που σχηματίζουν οι συνθήκες των περιορισμών μαζί με τις συνθήκες μη αρνητικότητας. Άρα ο αλγόριθμος πρέπει να έχει τη δυνατότητα να εξετάζει την τιμή της συνάρτησης f διαδοχικά στα σημεία των κορυφών. Επειδή μάλιστα το σημείο $x = 0$ πάντοτε αποτελεί μια κορυφή του πολυέδρου αυτού (και μάλιστα αυτή που δεν μπορεί να αποτελέσει με κανένα τρόπο τη βέλτιστη λύση), θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με αφετηρία το σημείο αυτό.

Σε αναφορά τώρα προς το παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου, και ειδικά προς το σχήμα που παριστά την γεωμετρική λύση, το επόμενο βήμα μας είναι να πάμε στην αμέσως επόμενη από το σημείο $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ κορυφή του πολυέδρου (με στόχο πάντοτε την κορυφή C). Διπλάνες κορυφές από το 0 είναι δύο: η B και η D και συνακόλουθα οι δρόμοι που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι αντίστοιχα δύο: ο δρόμος $0 - B - C$ ή ο $0 - D - C$. Παρατηρώντας την κλίση των ευθειών $f = 3x_1 + 4x_2$ στο επίπεδο x_1, x_2 περιμένουμε ότι η βέλτιστη λύση μας είναι πιθανό να βρίσκεται μάλλον κοντύτερα προς τον άξονα x_2 παρά προς τον x_1 . Ετσι ο αλγόριθμός μας καλό θα είναι να μπορεί με βάση αυτό το κριτήριο να επιλέξει το δρόμο προς το D και όχι προς το B (στην περίπτωση βέβαια του συγκεκριμένου παραδείγματος και από τους δύο δρόμους γίνεται έλεγχος ίδιου ακριβώς αριθμούς κορυφών).

Το επόμενο βήμα λοιπόν είναι να κινηθούμε πάνω στον άξονα x_2 και να βρούμε το D, που είναι το σημείο τομής της συνθήκης $2x_1 + 3x_2 = 8$ με την $x_1 = 0$. Εδώ, πρέπει προφανώς ο αλγόριθμός μας να ξεχωρίσει και να επιλέξει το σημείο D και όχι το σημείο D', που δεν βρίσκεται στην επιτρεπτή περιοχή λύσεων και που αντίστοιχα είναι η τομή της συνθήκης $5x_1 + 2x_2 = 7$ με την $x_1 = 0$. Σε μια πιο σύνθετη περίπτωση μπορεί να είχαμε ακόμη πιο πολλά σημεία τομής πάνω στον άξονα x_2 . Αυτό που πάντα όμως επιλέγουμε είναι το **πλησιέστερο** προς το σημείο από το οποίο προερχόμαστε.

Στη συνέχεια από το σημείο D πρέπει να αλλάξουμε κατεύθυνση και να πάμε στο C. Δηλαδή αντίστοιχα να κινηθούμε πάνω στη γραμμή (συνθήκη) $2x_1 + 3x_2 = 8$ και μάλιστα να πάμε στο **πλησιέστερο** σημείο, που είναι το C, και όχι στο απομακρυσμένο B'.

Ο αλγόριθμός μας βέβαια σε κάθε βήμα πρέπει να εκτιμά ότι πηγαίνει σε σημεία που δίνουν τιμές της f μεγαλύτερες κάθε φορά από τις προηγούμενες, και αντίστοιχα να τελειώνει στο σημείο εκείνο που προβλέπει ότι με το επόμενο βήμα θα οδηγηθεί σε τιμή μικρότερη.

Συνοψίζοντας λοιπόν όλα αυτά και εισάγοντας m βοηθητικές (slack) μεταβλητές - μια για κάθε ανισοτική συνθήκη, που αντίστοιχα αντιπροσωπεύουν την απόσταση του εξεταζομένου κάθε φορά σημείου από το όριο της αντίστοιχης ισοτικής συνθήκης - είμαστε έτοιμοι να προτείνουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο που στη βιβλιογραφία ονομάζεται μέθοδος Simplex.

Ο αλγόριθμος της μεθόδου Simplex δίνεται περιληπτικά από τα παρακάτω βήματα:

Πρώτο βήμα:

Ορίζουμε m βοηθητικές μεταβλητές και μετασχηματίζουμε το πρόβλημα στο:

$$\max f = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} = [C^T \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \underline{x} \end{bmatrix}$$

υπό συνθήκες ισότητας:

$$[A \ I_m] \begin{bmatrix} x \\ \underline{x} \end{bmatrix} = b$$

Θέτουμε τις n μεταβλητές $x = 0$ ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$), λύνουμε τις ισοτικές συνθήκες και παίρνουμε αρχικές τιμές για τις βοηθητικές μεταβλητές:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 = b$$

Δεύτερο βήμα:

Παίρνουμε την μεταβλητή εκείνη της f που έχει το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή (x_i : $\max c_i$ $i = 1, 2, \dots, n$) και τη θεωρούμε διάφορη του μηδενός. Από τις εξισώσεις των συνθηκών θεωρώντας προς στιγμή τις βοηθητικές μεταβλητές μηδέν πάμε και βρίσκουμε τη μικρότερη δυνατή τιμή γι' αυτή τη μεταβλητή που θεωρήσαμε διάφορη του μηδενός. Τότε κατ' ανάγκη μια από τις αρχικές βοηθητική μεταβλητή γίνεται μηδέν και αντικαθιστά την προηγούμενη.

Τρίτο βήμα:

Μεταφέρουμε στη μορφή βοηθητικών μεταβλητών τις μη μηδενικές x του προηγούμενου βήματος (μετασχηματίζουμε δηλαδή το διάνυσμα των slack μεταβλητών), και αντίστοιχα μετασχηματίζουμε τους περιορισμούς, έτσι ώστε σε κάθε περιορισμό να εμφανίζεται μόνο μια από τις νέες βοηθητικές μεταβλητές.

Τέταρτο βήμα:

Εκφράζουμε την f συναρτήσει των μη slack μεταβλητών του προηγούμενου βήματος που έχουν τιμή μηδέν (με αντικαταστάσεις)

Πέμπτο βήμα:

Γυρίζουμε στο βήμα ένα ελέγχοντας τους νέους συντελεστές της συνάρτησης που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε. Η διαδικασία τελειώνει όταν κανείς συντελεστής δεν είναι θετικός.

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο της μεθόδου Simplex στο παράδειγμα 4.8.1 (που εξετάσαμε γεωμετρικά) έχουμε κατά σειρά:

a) Εισάγουμε δύο βοηθητικές (slack) μεταβλητές x_3 και x_4 και μετασχηματίζουμε το πρόβλημα στο:

$$\max (3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4) \quad (4.41)$$

όταν:

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \quad (4.42)$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8 \quad (4.43)$$

Θεωρούμε τις αρχικές μεταβλητές μηδέν: $x_1 = 0, x_2 = 0$, οπότε από τις σχέσεις (4.42) και (4.43) αντίστοιχα ορίζονται οι αρχικές τιμές για τις slack μεταβλητές: $x_3 = 7$ και $x_4 = 8$.

b) Επειδή από την (4.41) βλέπουμε ότι ο συντελεστής της x_2 είναι ο μεγαλύτερος, κρατάμε την άλλη μεταβλητή $x_1 = 0$ ενώ θέτουμε την $x_2 \neq 0$. Η νέα τιμή της x_2 δίνεται από την μικρότερη τιμή που ορίζουν οι εξισώσεις (4.42) και (4.43) των περιορισμών για $x_1 = 0, x_3$ και $x_4 = 0$. Οι τιμές που προκύπτουν από τις (4.42) και (4.43) είναι αντίστοιχα $x_2 = \frac{7}{2}$ ή $x_2 = \frac{8}{3}$ από τις οποίες επιλέγουμε προφανώς την $x_2 = \frac{8}{3}$. Για την τιμή $(x_1, x_2) = (0, \frac{8}{3})$ η συνθήκη (4.43) δίνει $x_4 = 0$.

c) Ορίζουμε σαν νέες slack μεταβλητές τις μη μηδενικές: x_2, x_3 . Τότε οι εξισώσεις των συνθηκών μετασχηματίζονται: Η (4.43) σε:

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + x_2 = \frac{8}{3} \quad (4.44)$$

και η (4.42) με χρήσης της (4.44):

$$\frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 + x_3 = \frac{5}{3} \quad (4.45)$$

d) Αντίστοιχα η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε γίνεται:

$$f = \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{32}{3} + 0x_2 + 0x_3 \quad (4.46)$$

e) Το πρόβλημα έχει μετασχηματισθεί σ' αυτό που ορίζουν η σχέση (4.46) με περιορισμούς τις εξισώσεις (4.44) και (4.45).

Ετσι θέτουμε $x_1 = 0, x_4 = 0$, οπότε προκύπτουν από τις (4.44) και (4.45):

$$x_2 = \frac{8}{3} \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{5}{3}$$

f) Από την (4.46) παρατηρούμε ότι ο μεγαλύτερος συντελεστής των μεταβλητών είναι αυτός του x_1 . Ετσι κρατάμε την $x_4 = 0$ και ορίζουμε μη μηδενική τιμή για την x_1 από τις συνθήκες (4.44) και (4.45) για $x_4 = 0$ και $x_2 = x_3 = 0$. Οι τιμές που προκύπτουν είναι αντίστοιχα $x_1 = 4$ ή $x_1 = \frac{5}{11}$. Σαν x_1 εκλέγουμε τη μικρότερη, $x_1 = \frac{5}{11}$, οπότε από την (4.45) αντίστοιχα προκύπτει $x_3 = 0$.

g) Ορίζουμε τώρα σαν νέες slack μεταβλητές τις x_1 και x_2 . Τότε οι συνθήκες (4.45) και (4.44) μετασχηματίζονται αντίστοιχα στις:

$$-\frac{2}{11}x_4 + \frac{3}{11}x_3 + x_1 = \frac{5}{11} \quad (4.47)$$

$$-\frac{15}{33}x_4 - \frac{6}{33}x_3 + x_2 = \frac{26}{11} \quad (4.48)$$

h) Αντίστοιχα η f μετασχηματίζεται (με χρήση της (4.47) στην:

$$f = -\frac{42}{33}x_4 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{357}{33} + 0x_1 + 0x_2$$

i) Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές και των δύο μη slack μεταβλητών είναι αρνητικοί. Συνεπώς έχουμε φθάσει στην τελική λύση που δίνεται θέτοντας $x_3 = 0$ και $x_4 = 0$ οπότε αντίστοιχα από τις σχέσεις (4.47) και (4.48) παίρνουμε τις τελικές τιμές για τις x_1 και x_2 :

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{5}{11}, \frac{26}{11}\right)$$

Οι τιμές αυτές πράγματι αντιστοιχούν στο σημείο C της βέλτιστης λύσης που προέκυψε και γεωμετρικά.

Σημειώνεται ότι η λογική της χρησιμοποίησης βοηθητικών μεταβλητών (slack) έτσι ώστε οι ανισοτικές περιοριστικές συνθήκες να μετατρέπονται σε ισοτικές μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε γενικότερες περιπτώσεις μη γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιοριστικές συνθήκες ανισοτήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΑΛΕΙΦΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΒΑΘΜΩΣΗΣ

Η γενική διαδικασία που ακολουθείται αποτελείται από τα εξής βήματα: 1) Εκλέγεται με κάποιο τρόπο μία πρώτη προσέγγιση \bar{x}_1 μέσα στην εφικτή περιοχή. 2) Προσδιορίζεται μία κατάλληλη διεύθυνση \bar{s}_1 η οποία φέρει προς την βέλτιστη λύση. 3) Προσδιορίζεται κατά μήκος της \bar{s}_1 , το μέγεθος του βήματος μετατόπισης λ_1^* . 4) Προκύπτει έτσι η δεύτερη προσέγγιση $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \lambda_1^* \bar{s}_1$. ε) Τα βήματα 2, 3 και 4 επαναλαμβάνονται μέχρις ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο βελτιστοποίησης που έχει τεθεί κατά περίπτωση.

Είναι φανερό ότι η αποδοτικότητα μιας τέτοιας μεθόδου εξαρτάται τόσο από την επιλογή της διεύθυνσης \bar{s}_i , όσο και από την τιμή του βήματος λ_i^* .

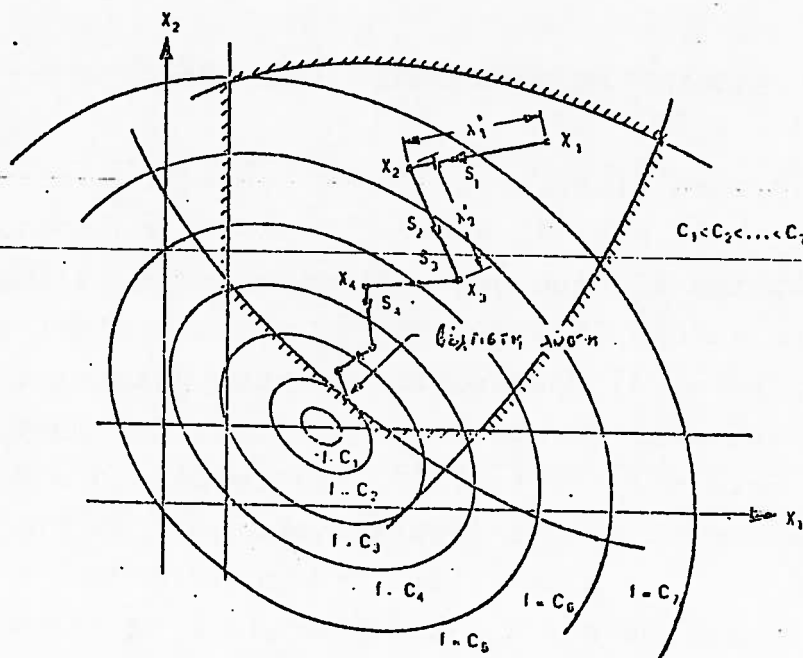
Όταν η διεύθυνση \bar{s}_i έχει προσδιορισθεί τότε για μια προσέγγιση \bar{x}_i (που έχει προκύψει από το προηγούμενο βήμα) το πρόβλημα της εύρεσης του λ_i^* μετατίθεται στην εύρεση της τιμής $\lambda_i = \lambda_i^*$ που ελαχιστοποιεί την

$$f(\bar{x}_{i+1}) = f(\bar{x}_i + \lambda_i \bar{s}_i) = f(\lambda_i) \quad (2)$$

Δηλαδή πρόκειται για βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής δεδομένου ότι τα \bar{x}_i και \bar{s}_i είναι σταθερά. Με άλλα λόγια η μεθοδολογία για την επίλυση του γενικού προ-

βλήματος βελτιστοποίησης προϋποθέτει εν γένει την ύπαρξη μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης μιας διάστασης.

Σχηματική παράσταση της διαδικασίας που περιγράφηκε παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί. Για λόγους εποπτείας η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί εξαρτώνται από δύο μεταβλητές x_1 και x_2 .



Σχ.

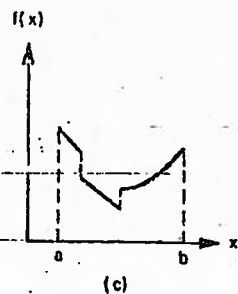
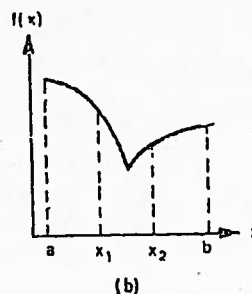
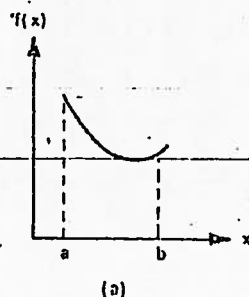
Οι αριθμητικές μέθοδοι για την ελαχιστοποίηση συναρτήσεων μιας μεταβλητής κατανέμονται σε δύο κατηγορίες: τις μεθόδους απαλειφής και τις μεθόδους με χρήση παραγώνων. Σε όλες τις αριθμητικές αυτές μεθόδους τα συμπεράσματα για την βέλτιστη τιμή συνάγονται από τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και ενδεχόμενα της παραγώγου της, για διάφορες τιμές της μεταβλητής. Οι τελευταίες επιλέγονται κατάλληλα ανάλογα με την χρησιμοποιούμενη μέθοδο.

Στις επόμενες δυο παραγράφους θα αναπτύξουμε τις κυριώ-

τερες από τις αριθμητικές μεθόδους ελαχιστοποίησης μιας διάστασης.

2. Μέθοδοι απαλειφής

Οι μέθοδοι της κατηγορίας αυτής αρχίζουν με ένα διάστημα της μεταβλητής στο οποίο υποτίθεται εκ των προτέρων ότι η αντικειμενική συνάρτηση έχει ένα τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο). Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση είναι μονοτροπική (unimodal) στο συγκεκριμένο διάστημα. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων φαίνονται στο σχήμα 7. Είναι φανερό ότι μία μονοτροπική συνάρτηση μπορεί να μη παραγωγίζεται στο διάστημα ορισμού της (b) ή ακόμη και να είναι ασυνεχής σ' αυτό (c). Στην συνέχεια το αρχικό διάστημα περιορίζεται, εξακολουθώντας όμως να περιέχει το τοπικό ακρότατο και αυτό υπό τον όρο ότι η τιμή της συνάρτησης είναι γνωστή σε δύο σημεία του διαστήματος. Με διαδοχικούς περιορισμούς του διαστήματος που περιέχει το ακρότατο επιτυγχάνεται τελικά η προσέγγισή τους σε μία ακρίβεια που εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος.



Σχ. 7

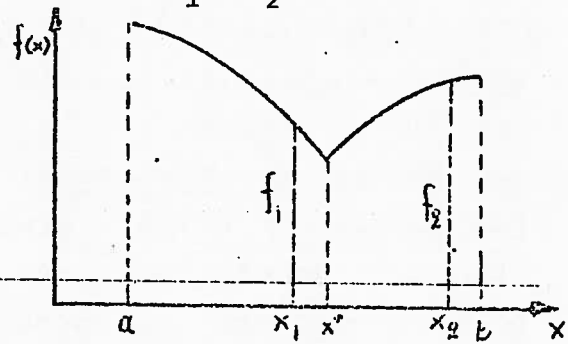
και από τον αριθμό των επαναλήψεων.

Θεωρήσουμε ότι ζητείται το ελάχιστο μιας συνάρτησης f η οποία υποτίθεται μονοτροπική στο διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ακόμη ότι οι τιμές της συνάρτησης μπορούν να προσεγγισθούν ικανοποιητικά σε κάθε σημείο του διαστήματος είτε από τον τύπο της είτε από τα αριθμητικά δεδομένα του προ-

βλήματος. Αν $x_1, x_2 \in [a, b]$ και είναι $x_1 < x_2$ τότε:

α) Αν $f(x_1) < f(x_2)$, (Σχ. 8)

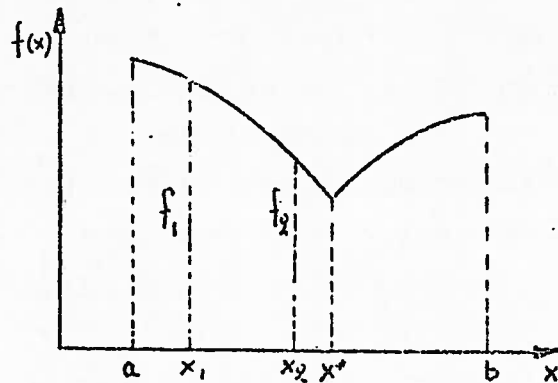
τότε το ελάχιστο δεν μπορεί να είναι δεξιά του x_2 και έτσι το διάστημα στο οποίο βρίσκεται το ελάχιστο περιορίζεται στο $[a, x_2]$.



Σχ. 8

β) Αν $f(x_1) > f(x_2)$, (Σχ. 9)

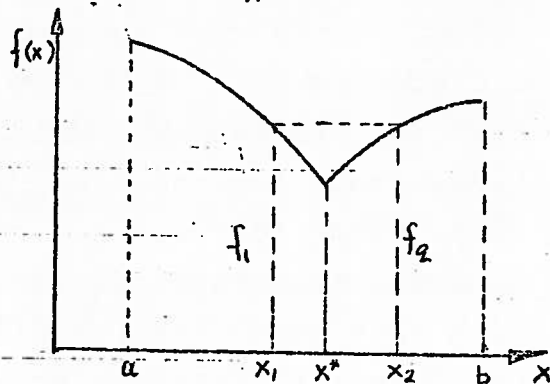
τότε το ελάχιστο δεν μπορεί να βρίσκεται αριστερά του x_1 και έτσι το διάστημα που περιέχει το ελάχιστο περιορίζεται στο $[x_1, b]$.



Σχ. 9

γ) Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε το ελάχιστο οφείλει να βρίσκεται μέσα στο διάστημα $[x_1, x_2]$ (Σχ. 10).

Προκειμένου για μέγιστο, αντίστοιχα συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν βάσει



Σχ. 10

των οποίων το διάστημα που περιέχει το μέγιστο συρικνώνεται συνεχώς μέχρις ότου το τελευταίο προσεγγισθεί στην επιθυμητή ακρίβεια. Όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι πολυτροπική (multimodal) δηλ. έχει σ'ένα διάστημα περισσότερα από ένα ακρότατα τότε το διάστημα αυτό χωρίζεται σε υποδιαστήματα κατά τρόπο ώστε σε κάθε ένα από αυτά η συνάρτηση να είναι μονοτροπική.

Υπάρχουν τεχνικές που εξειδικεύουν την παραπάνω διαδικασία ανάλογα με τις εφαρμογές και τα δεδομένα. Οι βασικότερες από τις τεχνικές αυτές περιγράφονται στις παραγράφους που ακολουθούν

2.1 Τεχνική της διχοτόμου

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην απλή σκέψη πως αν τα πρώτα δύο σημεία x_1 και x_2 επιλεγούν κοντά στο μέσο του αρχικού διαστήματος $[a, b]$ τότε το διάστημα που "απορρίπτεται" μετά την σύγκριση των $f(x_1)$ και $f(x_2)$ είναι σχετικά μεγάλο και έτσι η σύγκλιση στην βέλτιστη τιμή είναι ταχύτερη.

Ειδικότερα, αν $[a, b]$ είναι το αρχικό διάστημα τότε επιλέγουμε τα x_1, x_2 να είναι

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

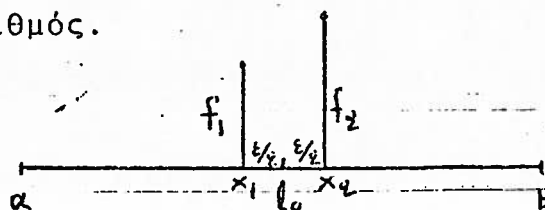
ή

$$x_1 = l_0 - \frac{\epsilon}{2}, \quad x_2 = l_0 + \frac{\epsilon}{2}, \quad l_0 = \frac{a+b}{2} \quad (3)$$

όπου ϵ είναι μικρός θετικός αριθμός.

Έτσι αν $f(x_1) < f(x_2)$,

Σχ. 11, τότε το νέο διάστημα που περιέχει το ελάχιστο και



που στα επόμενα θα ονομάζουμε διάστημα αβεβαιότητας, θα είναι

$$\left[a, \frac{2l_0 + \varepsilon}{2} \right]$$

Θεωρούμε στην συνέχεια το μέσο του διαστήματος αυτού και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρις ότου επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το μέγιστο της συνάρτησης

$$f(x) = x(1.5 - x) \quad (4)$$

στο διάστημα $(0, 1)$.

Επιλέγουμε το $\varepsilon = 0.001$. Τα δύο πρώτα σημεία είναι

$$x_1 = \frac{l_0}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 0.4995, \quad x_2 = \frac{l_0}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 0.5005$$

και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης

$$f(x_1) \approx 0.49975, \quad f(x_2) \approx 0.50025$$

Είναι $f(x_2) > f(x_1)$ και το νέο διάστημα αβεβαιότητας θα είναι $(0.4995, 1.0)$. Τό δεύτερο ζευγάρι τιμών θα είναι

$$x_3 = \frac{0.4995 + 1.0}{2} - 0.0005 = 0.74925,$$

$$x_4 = \frac{0.4995 + 1.0}{2} + 0.0005 = 0.75025,$$

με τιμές της συνάρτησης

$$f(x_3) \approx 0.56249944, \quad f(x_4) \approx 0.56249994$$

Είναι $f(x_3) < f(x_4)$ και έτσι το νέο διάστημα αβεβαιότητας είναι $(0.74925, 1.0)$.

Οι επόμενες τιμές είναι

$$x_5 = \frac{0.74925 + 1.0}{2} - 0.0005 = 0.874125 ,$$

$$x_6 = \frac{0.74925 + 1.0}{2} + 0.0005 = 0.875125$$

και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι

$$f(x_5) = 0.547093 , \quad f(x_6) = 0.546843$$

~~Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου η αρχή και το τέλος του διαστήματος συμπέσουν στην επιθυμητή ακρίβεια.~~

2.2. Η μέθοδος Fibonacci

Μία από τις πιο αποδοτικές μεθόδους απαλειφής είναι αυτή που χρησιμοποιεί την ακολουθία αριθμών Fibonacci που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n , \quad F_0 = 1, \quad F_1 = 1 , \quad n \in \mathbb{N} . \quad (5)$$

Τα βήματα της μεθόδου αυτής περιγράφονται ως εξής:

1. Προκαθορίζεται μία ανοχή σφάλματος ε .
2. Προσδιορίζεται ο μικρότερος αριθμός Fibonacci που ικανοποιεί την σχέση $F_N \varepsilon \geq b - a$, όπου $[a, b]$ είναι το αρχικό διάστημα.
3. Αν $\varepsilon^* = (b-a) / F_N$ τότε τα δύο πρώτα σημεία ορίζονται από τις εκφράσεις

$$x_1 = a + F_{N-1} \varepsilon^* = a + \frac{F_{N-1}}{F_N} (b-a) ,$$

$$x_2 = b - F_{N-1} \varepsilon^* = b - \frac{F_{N-1}}{F_N} (b-a) .$$

4. Το αρχικό διάστημα αβεβαιότητας περιορίζεται βάσει της αρχής της μονοτροπικότητας έστω στο $[x_2, b]$.

5. Τα επόμενα σημεία x_j προσδιορίζονται σε απόσταση $F_j \varepsilon^*$, $j = N-2, N-3, \dots, 2$ από το τελευταίο σημείο.

Παράδειγμα

Να προσεγγισθεί το μέγιστο της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x(5\pi - x)$ στο διάστημα $[0, 20]$ με ανοχή σφάλματος $\varepsilon = 1$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι $f''(x) = -2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η συνάρτηση είναι μονοτροπική. Από την σχέση $F_N \varepsilon \geq b-a$ ή $F_N \times 1 \geq 20-0$ προκύπτει ο μικρότερος αριθμός Fibonacci $F_7 = 21$ δηλ. $N = 7$. Τότε το $\varepsilon^* = \frac{b-a}{F_N} = 0.9524$. Τα δύο πρώτα σημεία είναι

$$x_1 = a + F_6 \varepsilon^* = 0 + 13 \times 0.9524 = 12.38 ,$$

$$x_2 = b - F_6 \varepsilon^* = 7.62 .$$

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι

$$f(x_1) = 41.20 \quad \text{και} \quad f(x_2) = 61.63 .$$

Επειδή $f(x_1) < f(x_2)$ το μέγιστο βρίσκεται αριστερά του x_1 και έτσι το διάστημα περιορίζεται στο $[0, 12.38]$.

Ο επόμενος μικρότερος αριθμός Fibonacci είναι ο $F_5 = 8$. Το επόμενο σημείο θα είναι

$$x_2 \quad \text{και} \quad x_3 \quad ;$$

$$x_3 = x_1 + F_5 \varepsilon^* = 12.38 - 7.619 = 4.761$$

με $f(x_3) = 52.12$.

Είναι $f(x_1) < f(x_3)$, το μέγιστο βρίσκεται δεξιά από το x_3 και το διάστημα περιορίζεται στο $[4.761, 12.38]$.

Ο επόμενος αριθμός Fibonacci είναι $F_4 = 5$:

~~x_3~~ και ~~x_4~~ :

$$x_4 = 4.761 + F_4 \varepsilon^* = 9.523, \quad f(x_4) = 58.90$$

Το διάστημα περιορίζεται στο $[4.761, 9.523]$:

Η διαδικασία συνεχίζεται με τα βήματα:

$$F_3 = 3, \quad x_5 = 9.523 - 3 \times 0.9524 = 6.666, \quad f(x_5) = 60.27$$

Νέο διάστημα: $[6.666, 9.523]$

$$F_2 = 2, \quad x_6 = 6.666 + 2 \times 0.9524 = 8.571, \quad f(x_6) = 61.17$$

Νέο διάστημα: $[6.666, 8.571]$.

Το μέσο του διαστήματος αυτού δεχόμαστε σαν μέγιστο. Παρατηρούμε ότι συμπίπτει με το $x_2 = 7.62$ και η αντίστοιχη τιμή είναι $f(x_2) = 61.63$.

Περισσότερα για τον αλγόριθμο Fibonacci

Ένας τρόπος περιγραφής της μεθόδου Fibonacci είναι ο εξής

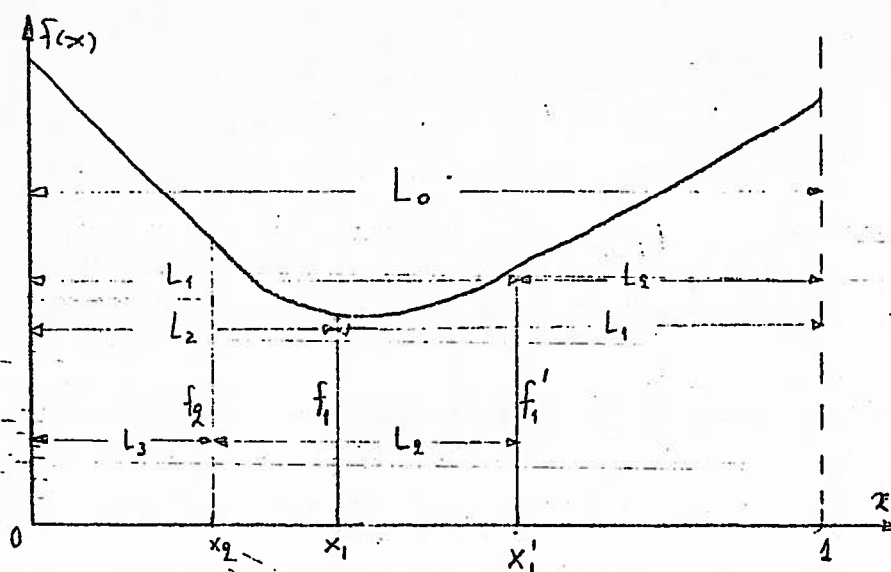
Υποθέτουμε ότι το ελάχιστο μίας συνάρτησης f αναζητείται στο διάστημα $[a, b]$. Με τον μετασχηματισμό

$$y = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a, b], \quad (6)$$

το διάστημα $[a, b]$ απεικονίζεται στο $[0, 1]$. Έτσι χωρίς

βλάβη της γενικότητας εξετάζουμε το ελάχιστο της συνάρτησης f στο $[0, 1]$. Έστω $L_0 = 1$, το μήκος αυτού του διαστήματος και $L_1, L_2, L_3, \dots, L_N$ τα μήκη των υποδιαστημάτων στα οποία περιορίζεται διαδοχικά το αρχικό διάστημα. Θεωρητικά η ακολουθία L_n , $n \in \mathbb{N}$ θα πρέπει να συγκλίνει στο ελάχιστο, x^* . Στην πράξη όμως οι υπολογισμοί θα σταματήσουν όταν στο διάστημα, έστω L_N , δεν μπορεί να βρεθούν δύο σημεία x_1, x_2 για τα οποία η τιμή της συνάρτησης θα είναι διαφορετική, στην ακρίβεια των εκτελούμενων υπολογισμών, ώστε με την αρχή της μονοτροπικότητας να προκύψει διάστημα μικρότερου μήκους που θα περιέχει το x^* . Έστω ότι ε είναι η ελάχιστη μεταβολή του x για την οποία η τιμή της $f(x + \varepsilon)$ είναι διάφορη της $f(x)$ στην χρησιμοποιούμενη ακρίβεια υπολογισμών. Τότε θα πρέπει να είναι $L_N < 2\varepsilon$.

Θεωρούμε δύο σημεία $x_1, x'_1 \in [0, 1]$, $x'_1 > x_1$ τέτοια ώστε τα δύο διαστήματα $[0, x'_1]$ και $[x_1, 1]$ να είναι του ίδιου μήκους L_1 . Τότε το x^* θα βρίσκεται ή στο ένα ή στο άλλο διάστημα. Έστω ότι $x^* \in [0, x'_1]$. Για τον προσδιορισμό του επόμενου διαστήματος χρειάζονται δύο σημεία στο $[0, x'_1]$ από τα οποία το ένα είναι το x_1 . Επιλέγουμε το δεύτερο, x_2 , ώστε τα διαστήματα $[0, x_1]$ και $[x_2, x'_1]$ να έχουν το ίδιο μήκος L_2 .



Σχ. 12

Από την σύγκριση των f_1 και f_2 προκύπτει σαν επόμενο διάστημα αβεβαιότητας το $[x_2, x_1']$ που έχει μήκος L_2 και περιέχει το ελάχιστο. Τότε τα διαστήματα $[0, x_2]$ και $[x_1, x_1']$ έχουν μήκος, έστω L_3 . Παρατηρούμε ότι

$$L_0 = L_1 + L_2 \quad \text{και} \quad L_1 = L_2 + L_3 \quad (7)$$

Επιλέγοντας τα επόμενα σημεία με τον ίδιο τρόπο θα έχουμε ότι τα υποδιαστήματα θα προκύπτουν από την αναδρομική σχέση

$$L_j = L_{j+1} + L_{j+2}, \quad j=0, 1, \dots, N-2 \quad (8)$$

όπου $L_0 = 1$, ενώ θέτουμε $L_{N-1} = 2L_N$.

Η σχέση αυτή γράφεται αναλυτικά

$$\begin{aligned} L_N &= L_N = F_1 L_N, \\ L_{N-1} &= 2L_N = F_2 L_N, \\ L_{N-2} &= L_{N-1} + L_N = (F_1 + F_2) L_N = F_3 L_N, \\ &\dots \\ L_{N-K} &= L_{N-K+1} + L_{N-K+2} = \dots = F_{K+1} L_N, \\ &\dots \\ L_0 = 1 &= L_1 + L_2 = \dots = F_{N+1} L_N \end{aligned} \quad (9)$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L_N &= 1/F_{N+1}, \\ L_j &= F_{N+1-j} / F_{N+1}, \quad j=0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (10)$$

Επομένως, με την προϋπόθεση ότι το N είναι γνωστό, οι σχέσεις (10) παρέχουν τα μήκη των διαδοχικών διαστημάτων αβεβαιότητας που περιέχουν το x^* . Ένα κριτήριο για την επιλογή του N λαμβάνεται ως εξής:

Έχουμε ότι

$$L_N < 2\varepsilon \quad \text{και} \quad L_N = 1/F_{N+1} \quad (11)$$

ενώ θα πρέπει $L_{N-1} = 2L_N > 2\varepsilon$. Έτσι θα είναι

$$\varepsilon < L_N < 2\varepsilon \quad \text{ή} \quad \varepsilon < \frac{1}{F_{N+1}} < 2\varepsilon$$

ή

$$\frac{1}{2\varepsilon} < F_{N+1} < \frac{1}{\varepsilon} \quad (12)$$

Από την (12) προκύπτει η τιμή του F_{N+1} και η αντίστοιχη τιμή του N . Αν το διάστημα δεν έχει αναχθεί στο $[0, 1]$ αλλά είναι $[a, b]$, η σχέση (12) γίνεται

$$\frac{b-a}{2\varepsilon} < F_{N+1} < \frac{b-a}{\varepsilon} \quad (13)$$

Μία παραλλαγή της μεθόδου Fibonacci είναι η μέθοδος της χρήσης τομής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αναλυτικές μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί για τη λύση προβλημάτων βελτιστοποίησης βασίζονται στην πλήρη γνώση των αναλυτικών μοντέλων (δηλ. αναλυτική γνώση της συνάρτησης βελτιστοποίησης και των περιοριστικών συνθηκών, αν τυχόν υπάρχουν). Αυτές όμως οι μέθοδοι δεν είναι πάντοτε εύκολο να εφαρμοστούν σε πρακτικές περιπτώσεις κυρίως λόγω της πολυπλοκότητας των απαιτούμενων μαθηματικών ή ακόμη και της ασυνέχειας των συναρτήσεων. Πολύ περισσότερο μοντέλα με άγνωστη την αναλυτική συνάρτηση βελτιστοποίησης (μοντέλα μαύρων κουτιών) δεν μπορούν να ερευνηθούν με τον αναλυτικό τρόπο. Έτσι αναγκαστικά, αριθμητικές τεχνικές πρέπει να καλύψουν με αποδοτικότερο τρόπο τα προβλήματα βελτιστοποίησης n -διαστάσεων. Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης που διερευνούν προβλήματα n -διάστασης και οι οποίες αντιμετωπίζουν τις συναρτήσεις βελτιστοποίησης σαν να παράγονται είτε από μοντέλα μαύρων κουτιών (πλήρως άγνωστα αναλυτικά μοντέλα), είτε από μοντέλα για τα οποία υπάρχει κάποιου βαθμού γνώση για το αναλυτικό μοντέλο (όπως π.χ. αν αυτό είναι τετραγωνικό κλπ.). Προφανώς η πλήρης γνώση του αναλυτικού μοντέλου είναι σαφώς υποβοηθητική για την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων.

Δυστυχώς οι μέθοδοι που βρέθηκαν τόσο ικανοποιητικές στη μία διάσταση (π.χ. μέθοδος Fibonacci) δεν μπορούν απλά να επεκταθούν και να χειριστούν συστήματα n -διαστάσεων. Σ' αυτή την περίπτωση έχει αναπτυχθεί μία εντελώς διαφορετική φιλοσοφία που εφαρμόζεται απ' ευθείας στη έρευνα πολυμεταβλητών συναρτήσεων, παρόλο που οι γενικές αρχές βασίζονται στις συνθήκες που έχουν ορισθεί από τον αναλυτικό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος που είναι είναι κοινός και ανεξάρτητος προς την διάσταση. Οι αναλυτικές μέθοδοι γίνονται πιο πολύπλοκες όταν συμπεριλαμβάνουν περισσότερες από μία μεταβλητές. Ομοίως αντίστοιχα πιο πολύπλοκες γίνονται και οι αριθμητικές μέθοδοι.

Στα προβλήματα αριθμητικών μεθόδων μιας διάστασης οριζόταν ένα μέτρο απόδοσης της έρευνας. Για παράδειγμα, η μέθοδος Fibonacci εμφάνιζε τόσο μεγαλύτερη απόδοση όσο οι αριθμοί των δοκιμών ήταν περισσότεροι. Στα n -διάστατα συστήματα κανένα τέτοιο μέτρο έρευνας δεν προτείνεται, ούτε ακόμη και για τις

μονοτροπικές συναρτήσεις. Στα γενικά προβλήματα n -διαστάσεων καμία τεχνική δεν μπορεί να επιλεγεί ως η “καλύτερη” ή η “αποδοτικότερη” και κάθε μία πρέπει να αξιολογείται σε σχέση με το συγκεκριμένο πρόβλημα εφαρμογής. Σημειώνουμε μόνο ότι ορισμένες αριθμητικές μέθοδοι είναι καλά δοκιμασμένες σε πραγματικά προβλήματα έτσι ώστε να μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικές χωρίς αυτό να μπορεί να τεκμηριωθεί με αναλυτικό τρόπο. Έτσι λόγω εμπειρίας είναι πιθανό να προτιμηθεί μία μέθοδος από κάποια άλλη για κάποιο εξειδικευμένο πρόβλημα.

Την έρευνα για μία μέγιστη τιμή μπορούμε να την συνοψίσουμε σε μία σειρά ερευνών που περιλαμβάνουν επιτυχείς υπολογισμούς των νέων τιμών της συνάρτησης και σύγκριση αυτών των τιμών με τις καλύτερες τιμές που έχουν μέχρι τώρα επιτευχθεί. Με αυτή την επαναλαμβανόμενη διαδικασία, η βασική διαφορά στις αριθμητικές μεθόδους βρίσκεται στη φιλοσοφία επιβολής της εκλογής της επόμενης θέσης για την εκτίμηση της συνάρτησης. Στη γενική περίπτωση (μέθοδος μελέτης) αυτή η εκλογή ίσως γίνει με έναν αυθαίρετο τρόπο, ίσως τυχαίο που πολλές φορές μπορεί να καθοδηγείται από τη διαίσθηση. Εάν αυτή η εκλογή δεν είναι αποτελεσματική, τα αποτελέσματα της έρευνας θα είναι πιο ανεπαρκή όσον αφορά τον αριθμό δοκιμών που απαιτούνται για να προσεγγίσουμε την επιθυμητή βέλτιστη περιοχή.

Σε οποιαδήποτε λογική μέθοδο, η εκλογή της νέας θέσης για την εκτίμηση της συνάρτησης είναι πρώτιστης σημασίας. Η διαδικασία της εκλογής συχνά περιγράφεται σε βήματα. Γενικά, επιλέγεται ένα βολικό βασικό σημείο και εκτελούνται μία σειρά δοκιμαστικών πειραμάτων στην περιοχή του βασικού σημείου. Αυτή η δοκιμή γίνεται αρχικά για να μελετηθεί η συμπεριφορά της συνάρτησης στη γειτονιά της αρχικής επιλογής, έτσι παίρνουμε πληροφορίες για εκείνες τις κατευθύνσεις που πιθανολογούμε ότι θα μας δώσουν βελτιωμένες λύσεις. Αυτό το βήμα παρομοιάζεται με την κίνηση ενός τυφλού που στέκεται σε λόφο στον οποίο ψηλαφίζει την γύρω περιοχή με το πόδι του για να εξακριβώσει την κλίση της πλαγιάς. Τα συμπεράσματα από αυτό το βήμα μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να βρουν μία προσεγγιστική επιφάνεια που αντιπροσωπεύει τις τοπικές συνθήκες γύρω από το βασικό σημείο.

Έτσι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό οποιαδήποτε μεθόδου έρευνας είναι η επιλογή της κατεύθυνσης της κίνησης. Αν η κατεύθυνση επιλεγεί μόνο από έναν πεπερασμένο αριθμό εκλογών, η κατεύθυνση που θα πάρουμε θα είναι απλώς η σωστότερη αλλά όχι απαραίτητα της μεγαλύτερης βελτίωσης. Έτσι για παράδειγμα, η κατεύθυνση ίσως οριοθετηθεί παράλληλα στους άξονες ανεξάρτητα από τις μεταβλητές. Από την άλλη, αν η εκλογή δεν περιορίζεται, η κατεύθυνση κατά μήκος της καμπύλης που θα ακολουθηθεί αναμένεται να οδηγεί στην καλύτερη βελτίωση.

Αν επιχειρηθεί επιτάχυνση της έρευνας μπορεί να βρεθούν άλλες κατευθύνσεις βασισμένες στα αποτελέσματα των προηγούμενων κινήσεων .

Το δεύτερο ουσιαστικό χαρακτηριστικό της πολυμεταβλητής έρευνας είναι η απόσταση(βήμα) της κίνησης πάνω στην επιλεγμένη κατεύθυνση. Ουσιαστικά το βήμα είναι εκείνο το οποίο οδηγεί σε βελτίωση ως προς τις τιμές της συνάρτησης, ενώ όλη η προηγούμενη διαδικασία απαιτείται για να θέσει τις βάσεις για την σωστή κίνηση. Η κίνηση στην επιλεγμένη κατεύθυνση μπορεί να είναι ένα απλό βήμα ή ακόμη μία σειρά από επιμέρους βήματα στα οποία η συνάρτηση δοκιμάζεται σε κάθε βήμα και η κίνηση σ' αυτή την κατεύθυνση συνεχίζεται όσο η συνάρτηση βελτιώνεται.

Χρησιμοποιώντας την τελική θέση των προηγούμενων κινήσεων σαν αρχική θέση(νέο βασικό σημείο), ο κύκλος των δοκιμαστικών πειραμάτων συνεχίζεται ενώ η εκλογή της κατεύθυνσης της κίνησης και η κίνηση διορθώνονται για όσο χρειάζεται. Σε κάθε κύκλο της έρευνας η τιμή της συνάρτησης πρέπει να βελτιώνεται ή τουλάχιστον θα παραμένει σταθερή. Όταν καμία περαιτέρω βελτίωση δεν πετυχαίνει πολλές φορές δοκιμάζουμε μειώνοντας το μέγεθος του βήματος. Η έρευνα για την επιθυμούμενη βελτιστοποίηση θα τελειώσει αν ικανοποιείται ένας απαιτούμενος βαθμός ακρίβειας ή αν οι τιμές βρεθούν σε προεπιλεγμένη περιοχή τιμών. Η βασική δομή μιας αριθμητικής μεθόδου θα επιτρέπει την διερεύνηση στην κατεύθυνση της περιοχής που έχει τουλάχιστον ένα τοπικό ακρότατο. Αν υπάρχουν συνθήκες περιορισμού είναι συνήθως απαραίτητος, ένας εναλλακτικός τρόπος για συνέχιση της κίνησης σε επιτρεπτές περιοχές και σε κάθε περίπτωση μία ειδική διαδικασία θα είναι πάντα απαραίτητη για να καθορίζει το τοπικό ακρότατο και να σταματά την διαδικασία.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι μέθοδοι που ισχύουν για την αριθμητική έρευνα συναρτήσεων μιας διάστασης δεν μπορούν απ' ευθείας να επεκταθούν σε η-διάστατα προβλήματα. Βασικό μειονέκτημα αποτελεί η παντελής έλλειψη ενός μέτρου της αποδοτικότητας της έρευνας. Οι περισσότεροι ερευνητές χρησιμοποιούν μία ειδική συνάρτηση ή μία σειρά συναρτήσεων για να συγκρίνουν διάφορες προτεινόμενες μεθόδους. Αυτή η διαδικασία δεν είναι πολύ ικανοποιητική, εφόσον εισάγει αυθαίρετες εκτιμήσεις αφού στην πράξη μία μέθοδος μπορεί να εκτελείται καλύτερα για ένα ειδικό πρόβλημα ενώ μπορεί να μη λειτουργεί όταν εφαρμόζεται σ' ένα άλλο. Έτσι γενικά συμπεράσματα δύσκολα μπορούν να εξαχθούν. Τέλος στη η-διάστατη έρευνα δύο είναι τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά που λαμβάνονται υπόψη στις διάφορες μεθόδους: η εκλογή της κατάλληλης κατεύθυνσης της κίνησης προς βελτιωμένες περιοχές και η εκλογή του κατάλληλου βήματος.

Τοπικό και απόλυτο μέγιστο

Σε ειδικές περιπτώσεις βρίσκουμε αρχίζοντας από ένα ειδικό αρχικό σημείο γνωρίζοντας την περιοχή που βρίσκεται το απόλυτο ακρότατο. Αν μία συνάρτηση δεν είναι γνωστό ότι περιέχει ένα μόνο ακρότατο, μία αποδεκτή διαδικασία είναι να αρχίσει η έρευνα με έναν αριθμό αρχικών σημείων εκτενώς χωρισμένα. Αν βρίσκεται η ίδια τιμή για όλα τα αρχικά σημεία, αυτή η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ολικό ακρότατο με κάποιο βαθμό βεβαιότητας. Αν αρκετά ακρότατα βρεθούν, επιλέγεται το καλύτερο. Είναι κατανοητό ότι η εύρεση του απόλυτου μέγιστου ή ελάχιστου είναι ένα πραγματικό πρόβλημα το οποίο μόνο κατά ένα μέρος λύνεται με τους τρόπους που προτάθηκαν παραπάνω. Αυτή η άποψη της αριθμητικής έρευνας για τα πιθανά πολλαπλά μέγιστα είναι θέμα συνεχόμενης έρευνας. Δεν έχει προταθεί μία αυστηρή μέθοδος καθιέρωσης του ολικού μέγιστου, εκτός μιας περιορισμένης τάξης προβλημάτων, τέτοια όπως η ελαχιστοποίηση μιας κυρτής συνάρτησης στη κυρτή περιοχή, επειδή γενικά δεν υπάρχει εγγύηση εύρεσης του επιθυμητού σημείου.

Σειριακή διαδικασία

Όπως βρέθηκε στη μία διάσταση, η διαδικασία των δοκιμών μπορούν είτε να εφαρμόζονται ταυτόχρονα είτε να σχεδιάζονται σειριακά. Αυτή η έρευνα πάνω σε ολόκληρη την περιοχή ίσως μας οδηγήσει στην υποπεριοχή που περιέχει την απαιτούμενη μέγιστη τιμή. Η έρευνα στην υποπεριοχή μπορεί να γίνει από μία σειριακή προσέγγιση.

Οι αρχές της σειριακής έρευνας στη μία διάσταση ή σε η-διαστάσεις είναι βασικά οι ίδιες και μπορούν να αθροιστούν στα έξι παρακάτω βήματα:

1. Επιλέγεται ένα σύνολο βολικών τιμών για τις ανεξάρτητες μεταβλητές, οι οποίες ικανοποιούν κάθε περιορισμό. Αυτό είναι το αρχικό βασικό σημείο.
2. Εκτιμάμε τη συνάρτηση στο βασικό αυτό σημείο.
3. Επιλέγουμε με μία από τις μεθόδους μία δεύτερη θέση.
4. Εκτιμάμε τη συνάρτηση στη δεύτερη θέση.
5. Συγκρίνουμε την τιμή της συνάρτησης στη δεύτερη θέση με αυτή του βασικού σημείου.
6. Αν το δεύτερο σημείο είναι καλύτερο, κινούμαστε σε αυτό το σημείο το οποίο παίρνουμε τώρα σαν νέο βασικό σημείο και συνεχίζουμε την έρευνα. Αν το αρχικό βασικό σημείο είναι καλύτερο, η έρευνα συνεχίζεται σε διαφορετική κατεύθυνση, ίσως με μικρότερο βήμα ή σταματάμε.

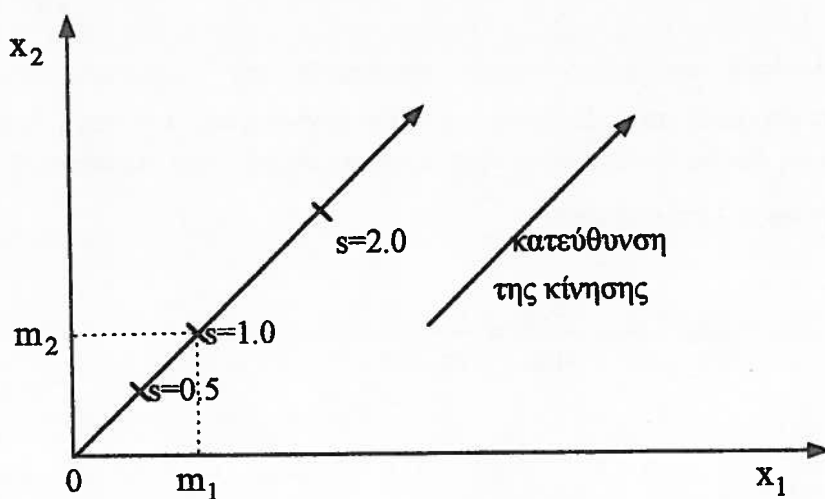
Βασικά οι διαφορετικές μέθοδοι αλλάζουν μόνο στο βήμα 3. Η εκλογή της νέας κατεύθυνσης και απόστασης της έρευνας είναι συνήθως περισσότερο ή λιγότερο τυχαία, ή τουλάχιστον εξαρτάται αρκετά στην διαίσθηση του ερευνητή, και η εκλογή

της μεταβλητής δεν περιορίζεται στις μεταβλητές του συστήματος, αλλά ίσως περιλαμβάνει το ίδιο το σύστημα. Οι λογικές μέθοδοι συζητιούνται στις τρεις ακόλουθες ενότητες: χωρίς συνθήκες περιορισμών, με ισοτικούς περιορισμούς και με ανισοτικούς περιορισμούς.

Οι ποικίλες τεχνικές ομαδοποιούνται σύμφωνα με τις μεθόδους που καθορίζουν την κατεύθυνση και την απόσταση της επόμενης δοκιμής από το βασικό σημείο. Έτσι για φυσικά προβλήματα, οι απ' ευθείας έρευνες ίσως ακολουθήσουν κατευθύνσεις αρχικά παράλληλες με τους άξονες συντεταγμένων ή μπορεί να γίνουν με επαναληπτικές δοκιμές νέων γεωμετρικών σχημάτων, ενώ οι τεχνικές βάρθρωσης απαιτούν μία εκτίμηση της πρώτης παραγώγου για να βρεθεί ένα καλύτερο σημείο προς την σωστή κατεύθυνση.

Επιλογή της κατεύθυνσης

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της τεχνικής μιας έρευνας είναι το κριτήριο που εφαρμόζεται για να καθοριστεί η κατεύθυνση της έρευνας από το βασικό σημείο. Η κατεύθυνση της κίνησης που δίνεται από το διάνυσμα ξ , αντιπροσωπεύεται από η αριθμούς $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ έτσι ώστε κάθε κίνηση θα γίνεται κατά μήκος μιας γραμμής που σχεδιάζουμε παράλληλα στη γραμμή που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1. Δηλαδή στο δυσδιάστατο χώρο, το διάνυσμα $\{1,0\}$ παρουσιάζει μία κατεύθυνση παράλληλη στον θετικό άξονα x_1 , ενώ το $\{0,-1\}$ είναι η κατεύθυνση παράλληλα στον αρνητικό άξονα x_2 και το $\{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$ είναι η κατεύθυνση παράλληλη στη γραμμή 45° στην κατεύθυνση που αυξάνονται τα x_1 και x_2 . Έτσι στο δυσδιάστατο χώρο η κατεύθυνση ξ μπορεί να καθοριστεί από ένα ζευγάρι αριθμών $\{m_1, m_2\}$.



Σχήμα 6.1

Οι περισσότεροι υπολογισμοί προσπαθούν να βελτιώσουν τη συνάρτηση κινούμενοι προς μια σίγουρη κατεύθυνση s από ένα βολικό βασικό σημείο στην συγκεκριμένη κατεύθυνση ξ . Οι συντεταγμένες x_{j+1} του νέου σημείου δίνονται από

$$x_{j+1} = x_j + s\xi$$

όπου x_j είναι το βασικό σημείο. Στο τύπο συνιστωσών έχουμε:

$$x_{i,j+1} = x_{i,j} + sm_i \quad (6.1)$$

Υποθέτουμε ότι το ξ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, δηλαδή

$$\xi^T \xi = \sum_{i=1}^n m_i^2 = 1 \quad (6.2)$$

Για να γίνει κατανοητό σημειώνουμε ότι αν μία γραμμή σχεδιαστεί από την αρχή των αξόνων μέχρι το σημείο $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, τότε κάθε σημείο πάνω στη γραμμή μπορεί να βρεθεί με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου s στην εξίσωση:

$$x_i = sm_i \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.3)$$

Αυτή είναι η παραμετρική εξίσωση μιας γραμμής που περνάει από την αρχή των αξόνων. Αν s είναι 0, τότε το σημείο που καθορίζεται είναι η αρχή. Αν s είναι μονάδα, το σημείο που καθορίζεται είναι $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Και αν s βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και 1, τότε το σημείο βρίσκεται ανάμεσα στην αρχή και στο $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$.

Φαίνεται καθαρά ότι όποιο σημείο ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση βρίσκεται πάνω στη γραμμή αυτή. Εφόσον η γραμμή περνάει από την αρχή, η κλίση είναι x_2 / x_1 για τη δυσδιάστατοι επιφάνεια. Όλα τα σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση έχουν την ίδια κλίση που είναι:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{sm_2}{sm_1} = \frac{m_2}{m_1}$$

και η οποία είναι ανεξάρτητη του s . Εντούτοις το s καθορίζει την απόσταση από την αρχή των αξόνων και η απόσταση είναι:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{s^2 m_1^2 + s^2 m_2^2} = s$$

Οι εξισώσεις (6.3) είναι παραμετρικές μιας ευθείας γραμμής που η κατεύθυνση καθορίζεται από η αριθμούς m_i . Αν γράψουμε την εξίσωση (6.1) ως:

$$s\xi_i = x_{i,j+1} - x_{i,j} = sm_i$$

τότε καθορίζοντας μία νέα αρχή αξόνων για τη συντεταγμένη x_j , βρίσκουμε ίδιου τύπου εξίσωση με την (6.3). Γι' αυτό οι δύο γραμμές είναι παράλληλες αλλά μετατοπισμένες, αφού η μία μόνο περνάει από την αρχή των αξόνων.

Το συμπέρασμα είναι ότι η εξίσωση (6.1) παρουσιάζει μία κίνηση παράλληλη στην κατεύθυνση ξ και η απόσταση της κίνησης χαρακτηρίζεται από την παράμετρο s . Κάθε μέθοδος πρέπει να έχει ένα τρόπο εκλογής μιας "καλής" κατεύθυνσης ξ και απόστασης s . Με το "καλή" εννοούμε μία πιθανή σύγκλιση στο πλησιέστερο μέγιστο, εφόσον η έρευνα επαναλαμβάνεται αρκετές φορές.

Τελικό στάδιο

Άσχετα με την τεχνική της έρευνας που χρησιμοποιείται, έτσι και αλλιώς η έρευνα προσχεδιάζεται ή επακολουθεί σταδιακά, το τελικό αποτέλεσμα είναι ο καθορισμός του επιθυμητού ακρότατου μέσα σ' ένα δεδομένο βαθμό ακρίβειας. Όταν βρούμε την περιοχή του μέγιστου με κάποια μέθοδο, η συνεχόμενη εφαρμογή της διαδικασίας της έρευνας ακόμη και με μείωση του βήματος, είναι αυτοκαταστροφική λόγω της έλλειψης του καθορισμού των γραμμικών όρων της κλίσης.

6.2 ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

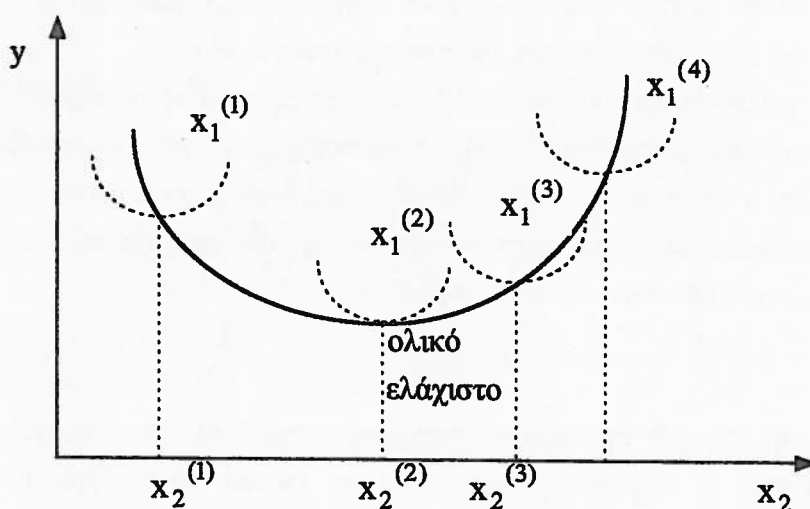
Όλες οι αριθμητικές μέθοδοι είναι ουσιαστικά μέθοδοι μελέτης στις οποίες μία λύση του συστήματος συγκρίνεται με κάποια άλλη, αλλά είναι αποδεκτό ότι η περιγραφή εφαρμόζεται σε εκείνες τις τεχνικές στις οποίες οι εκλογές δεν προσδιορίζονται με συστηματική λογική.

Για κάποια προβλήματα βελτιστοποίησης, η μέθοδος μελέτης είναι μόνο πιθανή προσέγγιση, για παράδειγμα συγκρίνοντας διαφορετικές συναρτήσεις που μπορεί να περιλαμβάνει ένα σύστημα, ή διαφορετικές επιλογές περιοριστικών συνθηκών που εφαρμόζονται από συγκεκριμένη υποχρέωση. Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν υπάρχουν γενικά κοινή ομάδα μεταβλητών, αλλά μόνο κοινή συνάρτηση. Η τεχνική είναι ότι η μέθοδος της έρευνας συχνά χρησιμοποιείται από πειραμαμένους σχεδιαστές. Αρκετές έρευνες εφαρμόζονται και τα αποτελέσματά τους, συνήθως τα

καλύτερα για κάθε υποσύστημα, συγκρίνονται και μελετώνται προσεκτικά και οδηγούν στο καλύτερο αποτέλεσμα που μπορεί να βρεθεί. Η μέθοδος μελέτης δεν εύχρηστη, όταν υπάρχουν περισσότερες από δύο ή τρεις μεταβλητές, επειδή είναι ασυνήθιστα δύσκολα να φανταστεί κανείς τις αλληλεπιδράσεις των συναρτήσεων.

Γραφική έρευνα

Μια τυπική μελέτη προσέγγισης παρουσιάζεται από μία από τις γραφικές μεθόδους.



Σχήμα 6.2

Στη περίπτωση δύο μεταβλητών η ακόλουθη μέθοδος χρησιμοποιείται συχνά. Η γενική προσέγγιση είναι να κρατήσουμε μία μεταβλητή, έστω το x_1 και να σχεδιάσουμε τη συνάρτηση με τη μεταβλητή x_2 ελεύθερη. Τότε καθορίζεται η βέλτιστη τιμή του x_2 γι' αυτή τη τιμή του x_1 . Μια άλλη τιμή του x_1 επιλέγεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Οι διακεκομμένες γραμμές του σχήματος 1.2. απεικονίζουν την καμπή της σταθερής x_1 , δείχνοντας τη συνάρτηση $y(x_1, x_2)$ σαν συνάρτηση του x_2 . Ο γεωμετρικός τόπος των διαφόρων ελαχίστων παρουσιάζεται από τη συνεχή γραμμή και η λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι καθαρά το ελάχιστο αυτού του γεωμετρικού τόπου.

Αυτό το σχήμα δεν συνιστάτε για περισσότερες από δύο μεταβλητές, και ακόμη και για δύο μεταβλητές η μέθοδος δεν είναι αποτελεσματική στον αριθμό των υπολογισμών που απαιτείται για να φθάσει σε μία αποδεκτή εκτίμηση του βέλτιστου. Αυτό είναι αλήθεια, εφόσον δεν υπάρχει οδηγός στην επιλογή των τιμών του x_1 απαραίτητος για την εξαγωγή του αποτελέσματος.

6.3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΧΩΡΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

Κατ' αρχήν ας θεωρήσουμε το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου μιας συνάρτησης $y(x)$ όταν και η συνάρτηση και οι μεταβλητές δεν υπόκεινται σε περιορισμούς. Διακρίνουμε δύο ξεχωριστούς τύπους της μεθόδου έρευνας εκείνοι που εκτιμάται μόνο η συνάρτηση και εκείνοι που και η συνάρτηση και οι πρώτες παράγωγοι (κλίσεις) υπολογίζονται για κάθε δεδομένο σημείο. Αυτές οι δύο ομάδες χαρακτηρίζονται ως απευθείας και βαθμωτές μέθοδοι αντίστοιχα.

Μέθοδοι απ' ευθείας έρευνας

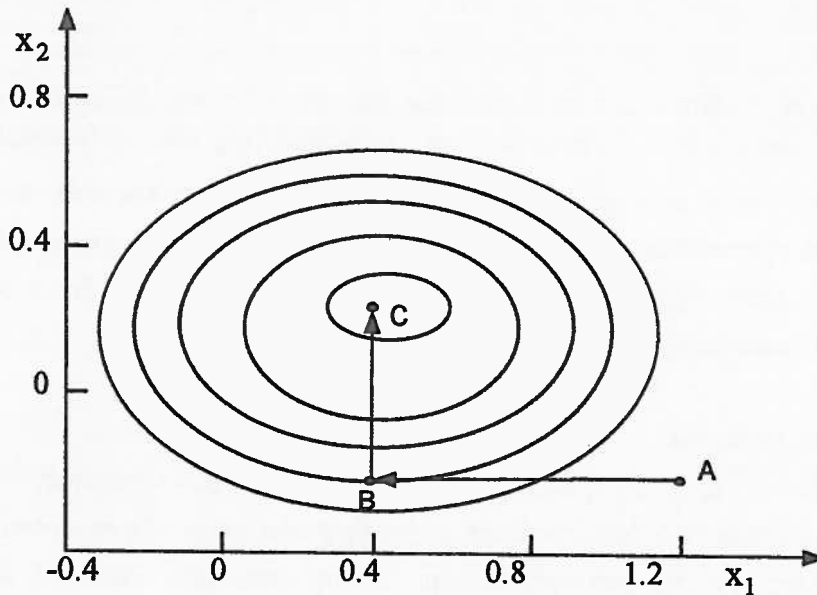
Οι απ' ευθείας έρευνας μέθοδοι απαιτούν μόνο τον υπολογισμό της συνάρτησης στη συγκεκριμένη θέση αντίθετη με τις βαθμωτές τεχνικές που απαιτούν να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης και της κλίσης για κάθε θέση. Η κλίση υπολογίζεται από τοπική εξέταση με αρκετές δοκιμές, αν δεν μπορεί να βρεθεί απ' ευθείας από την αναλυτική έκφραση.

Γι' αυτό η απ' ευθεία μέθοδος είναι περισσότερο αποτελεσματική στο χρόνο υπολογισμού, παρόλο που μπορεί να μην κινηθεί στη "σωστή" κατεύθυνση, επειδή δεν χρειάζεται τοπική εξέταση για να καθοριστεί η κατεύθυνση της κίνησης. Τυπικές κατευθύνσεις επιλέγονται παράλληλα με τους άξονες συντεταγμένων ή κινούνται σαν ένα κανονικό γεωμετρικό σχήμα. Όχι μόνο η εκλογή της κατεύθυνσης αλλά και το μήκος της κίνησης καθορίζονται από απλούς κανόνες. Πρακτικά αυτό μπορεί να σημαίνει ένα απλό προκαθορισμένο βήμα ή ένα βήμα που προκύπτει από επιμέρους βελτιστοποίηση στη μία διάσταση.

6.4 Μονομεταβλητή έρευνα παράλληλη στους άξονες

Η απλούστερη απ' ευθείας έρευνα είναι αυτή στην οποία μία μόνο μεταβλητή τη φορά αλλάζει και ονομάζεται επίσης τμηματική μέθοδος. Κρατώντας η-1 από τις η μεταβλητές σταθερές, η εναπομένουσα μεταβλητή μπορεί να αλλάξει με χρήση οποιασδήποτε κατάλληλης τεχνικής, εφόσον η έρευνα είναι μιας διάστασης. Όταν η μεγαλύτερη βελτίωση στη συνάρτηση βρίσκεται σε ένα δεδομένο βαθμό ακρίβειας, η κατάλληλη θέση καθορίζεται και διατηρείται στο νέο βασικό σημείο. Η έρευνα συνεχίζεται σε νέα κατεύθυνση. Αυτή η κατεύθυνση (μία από τις πιθανές η-1, αφού μία κατεύθυνση έχει ήδη ερευνηθεί) επιλέγεται συστηματικά παίρνοντας συνδυαστικά κάθε κατεύθυνση με τη σειρά. Όταν όλες οι η-κατευθύνσεις έχουν ερευνηθεί με τη σειρά, το πρώτο στάδιο θεωρείται ότι ολοκληρώθηκε και η υπόλοιπη διαδικασία της σειριακής βελτιστοποίησης επαναλαμβάνεται κατά ανάλογο τρόπο. Ο

υπολογισμός θα σταματήσει όταν καμία επιπλέον βελτίωση δεν παρατηρείται στην συνάρτηση βελτιστοποίησης.



Σχήμα 6.3

Για να κάνουμε τη γενική περιγραφή της μεθόδου πιο σαφή, θεωρούμε ένα δυοδιάστατο πρόβλημα βελτιστοποίησης που απεικονίζεται στο σχήμα 6.3. Σαν το αρχικό βασικό σημείο θεωρείται το σημείο A. Το x_2 είναι καθορισμένο και μία μονοδιάστατη έρευνα αρχίζει κατά μήκος του x_1 για να βρεθεί μία προσέγγιση του περιορισμένου βέλτιστου στο B για την καθορισμένη τιμή του x_2 . Αυτή η προσέγγιση βρίσκεται με μία ακρίβεια που καθορίζεται από ένα αρχικό βήμα ή ένα βήμα που επιλέγεται με μεθόδους βελτιστοποίησης στην κατεύθυνση x_1 . Συνεχίζοντας την έρευνα από το σημείο B στην κατεύθυνση του καθορισμένου x_1 , όπως φαίνεται στο σχήμα, η έρευνα προχωρά μέχρι μία λογική προσέγγιση σε ένα νέο τοπικό βέλτιστο, το σημείο C. Αυτή η διαδικασία της εναλλακτικής έρευνας στις κατευθύνσεις x_1 και x_2 επαναλαμβάνεται μέχρι που καμία επιπλέον πρόοδος δεν είναι πιθανή.

Η κατεύθυνση της έρευνας ξ_j είναι πάντα παράλληλη στον έναν άξονα συντεταγμένων και η απόσταση s είναι καθορισμένη ως απόσταση που φέρει ένα βέλτιστο κατά μήκος του ξ_j . Εντούτοις φαίνεται ότι δεν είναι τόσο σημαντικό στη μονοδιάστατη έρευνα να βρεθεί το τοπικό βέλτιστο. Είναι καλύτερα να βρεθεί μια προσέγγιση γρήγορα και μετά να κινηθεί στο επόμενο στάδιο. Οποιοδήποτε μειονέκτημα της μη-προσέγγισης σε κάθε τοπικό βέλτιστο είναι μικρής σημασίας σε σχέση με το πλεονέκτημα της γρήγορης κίνησης.

Η μονομεταβλητή έρευνα είναι μία πολύ απλή και εύκολα εφαρμοζόμενη μέθοδος, παρόλο τη μη γρήγορη σύγκλισή της σε μία λύση. Η εκλογή της

κατεύθυνσης και της απόστασης οποιαδήποτε κίνησης σε η-διαστατά προβλήματα μπορεί να αθροιστεί στα παρακάτω.

Βήμα 1. Υποθέτοντας ότι ένα βασικό σημείο x_j έχει επιλεγεί αρχικά, η κατεύθυνση της κίνησης επιλέγεται στο j -στο κύκλο σύμφωνα με την σχέση

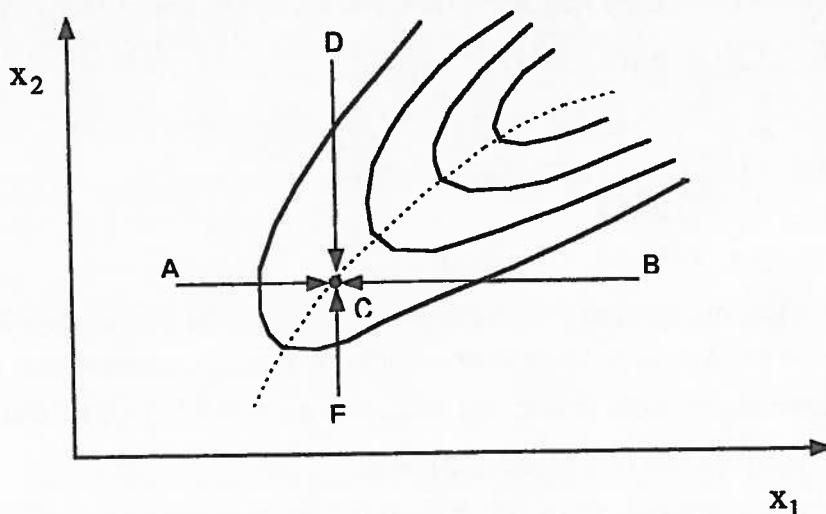
$$x_{j+1} = x_j + s_j \xi_j$$

$$\text{όπου } \xi_j = \begin{cases} (1, 0, 0, \dots, 0) & \text{για } j = 1, n+1, 2n+1, \dots \\ (0, 1, 0, \dots, 0) & \text{για } j = 2, n+2, 2n+2, \dots \\ (0, 0, 1, \dots, 0) & \text{για } j = 3, n+3, 2n+3, \dots \\ \dots & \dots \\ (0, 0, 0, \dots, 1) & \text{για } j = n, 2n, 3n, \dots \end{cases}$$

Βήμα 2. Η απόσταση της κίνησης s_j επιλέγεται τέτοια ώστε το βέλτιστο της συνάρτησης να βρίσκεται κατά μήκος της κατεύθυνσης ξ_j .

Τα δύο πρώτα βήματα καθορίζουν την απόσταση και την κατεύθυνση οποιαδήποτε κίνησης.

Βήμα 3. Από τα βήματα 1 και 2 έχουμε κινηθεί από το βασικό σημείο x_j σε μία νέα θέση x_{j+1} , το οποίο ορίζεται σαν νέο βασικό σημείο. Αυξάνοντας το j κατά ένα, τα βήματα 1 και 2 επαναλαμβάνονται κυκλικά μέχρι να μην υπάρχει σημαντική αλλαγή στη συνάρτηση ή μέχρι να μην υπάρχει καμία αλλαγή στη προεπιλεγμένη τιμή.



Σχήμα 6.4

Η γενική μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω έχει το μειονέκτημα να ταλαντεύεται με σταθερή εξέλιξη προς το βέλτιστο. Γι' αυτό είναι απαραίτητο να

σταματάμε σε σημείο κοντά στο βέλτιστο. Όταν υπάρχουν απότομες ακμές, η μέθοδος ίσως δεν συγκλίνει. Για παράδειγμα στο σχήμα 6.4 η πρώτη έρευνα κατά μήκος του AB δίνει τοπικό βέλτιστο το C. Αν η έρευνα μιας διάστασης εφαρμοστεί από κοινού με βήματα πεπερασμένου μήκους, μία δεύτερη έρευνα κατά μήκος του DE η οποία περνάει από το C θα δώσει πάλι το C σαν τοπικό βέλτιστο. Έτσι η έρευνα σταματά στο σημείο C, παρόλο που δεν είναι το τοπικό βέλτιστο. Το παραπάνω δείχνει την αποτυχία της τεχνικής, όταν καμπύλες του συστήματος πηγαίνουν σ' μία απότομη ακμή. Το "απότομο" είναι σχετικός όρος, ο οποίος δεν προϋποθέτει απαραίτητα ασυνέχεια. Μία απότομη ακμή βρίσκεται αν η ακμή είναι στενότερη από το βήμα της έρευνας.

Επίσης βρίσκεται ότι αν οι κύριες ακμές της συνάρτησης δεν είναι παράλληλες με ένα άξονα συντεταγμένων, η έρευνα είναι αργή.

Παράδειγμα 1 (μονομεταβλητή έρευνα)

Οι καμπύλες της συνάρτησης

$$y = 3 + 6x_1 + 7x_2 - 7x_1^2 + 2x_1x_2 - 16x_2^2$$

φαίνονται στο σχήμα 6.3. Ας αναζητήσουμε το μέγιστο της συνάρτησης χρησιμοποιώντας τη μονοδιάστατη μέθοδο, αρχίζοντας από το σημείο A: {1.2, -0.2}. Πρώτα ερευνούμε την κατεύθυνση x_1 , κρατώντας τη x_2 σταθερή (-0.2 ο παρών κύκλος). Έτσι κινούμαστε κατά μήκος της γραμμής $x_2 = -0.2$, μέχρι η μέγιστη τιμή της y να βρεθεί. Το μέγιστο είναι το σημείο B. Το σημείο B καθορίζεται αφήνοντας το $x_2 = -0.2$ στην έκφραση της y και έπειτα μεγαλώνουμε με προσοχή το x_1 . Έτσι,

$$y(x_1, -0.2) = 0.96 + 5.4x_1 - 7x_1^2$$

Η συντεταγμένη που μεγιστοποιεί την συνάρτηση είναι:

$$x_1 = 0.3857$$

και δίνει

$$y = 2.00$$

Αυτός ο πρώτος κύκλος της έρευνας δίνει το σημείο B σαν τη νέα βελτιωμένη θέση. Στον επόμενο κύκλο το x_1 είναι τώρα καθορισμένο και το x_2 μεταβάλετε, έτσι βρίσκεται το μέγιστο της y κατά μήκος της γραμμής $x_1 = 0.3857$. Στο δεύτερο κύκλο το σημείο C τοποθετείται στη βελτιωμένη θέση.

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι οι διαδοχικές βελτιστοποιήσεις να γίνουν μικρές έτσι ώστε καμία επιπλέον δοκιμή να δικαιολογείται.

Γεωμετρική έρευνας

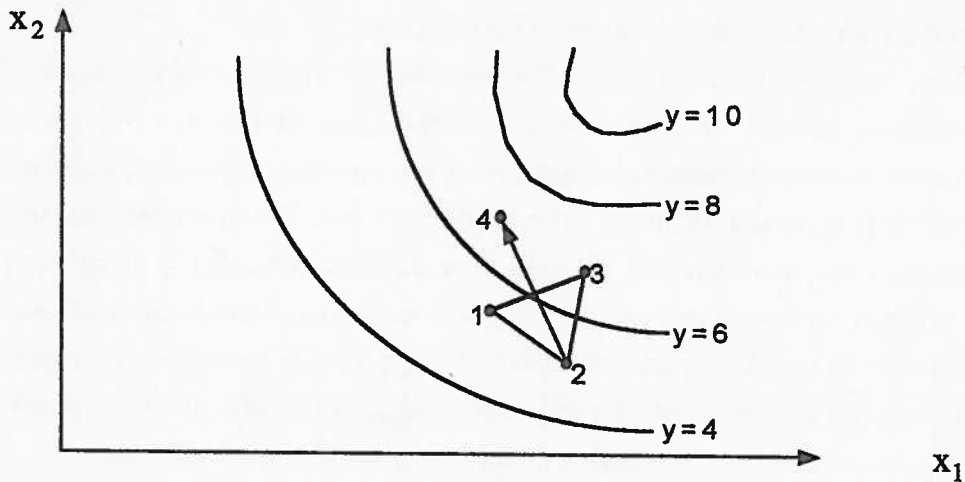
Η μέθοδος που περιγράφηκε βασισμένη στη μονοδιάστατη έρευνα έχει δύο αδυναμίες. α) η έρευνα ίσως να μην συγκλίνει στο αληθινό βέλτιστο και β) η λύση ίσως να ταλαντώνεται κοντά στο βέλτιστο έτσι απαιτείται τροποποίηση της βασικής προσέγγισης για να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα.

Αντί να ακολουθούμε κατευθύνσεις παράλληλες με τους άξονες, μία αποτελεσματική μέθοδος είναι να επιτραπεί να αλλάξει η κατεύθυνση της έρευνας με κάποιον τρόπο ενώ έχει καθοριστεί η απόσταση της κίνησης. Η μέθοδος αυτή παίρνει ένα κανονικό γεωμετρικό σχήμα σαν μία βάση. Έτσι στις δύο διαστάσεις διαλέγουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Δοκιμές γίνονται έτσι ώστε να εκτιμηθεί η συνάρτηση στα σημεία που σχηματίζονται από τις κορυφές του τριγώνου. Κάθε φορά η μία κορυφή απορρίπτεται σαν χειρότερη από τις άλλες. Τότε η γενική κατεύθυνση της έρευνας παίρνεται προς εκείνη την κατεύθυνση που είναι αντίθετη από αυτό το (χειρότερο) σημείο δηλ. διαλέγεται τέτοια ώστε η κατεύθυνση της κίνησης να περάσει διαμέσου του κέντρου βάρους των υπολοίπων σημείων. Τότε ένα νέο σημείο επιλέγεται κατά μήκος της κατεύθυνσης αυτής τέτοιο που να διατηρεί το ίδιο γεωμετρικό σχήμα και υπολογίζεται ξανά η συνάρτηση στο σημείο αυτό. Η μέθοδος προχωρά, απορρίπτοντας και δημιουργώντας κορυφές μέχρι το σχήμα να "καβαλικεύει" το βέλτιστο ώστε καμία επόμενη κίνηση δεν οδηγεί σε επιπλέον βελτίωση. Θα παρουσιάσουμε πρώτα το δυσδιάστατο πρόβλημα που ακολουθείται από μία γενίκευση των βημάτων της έρευνας.

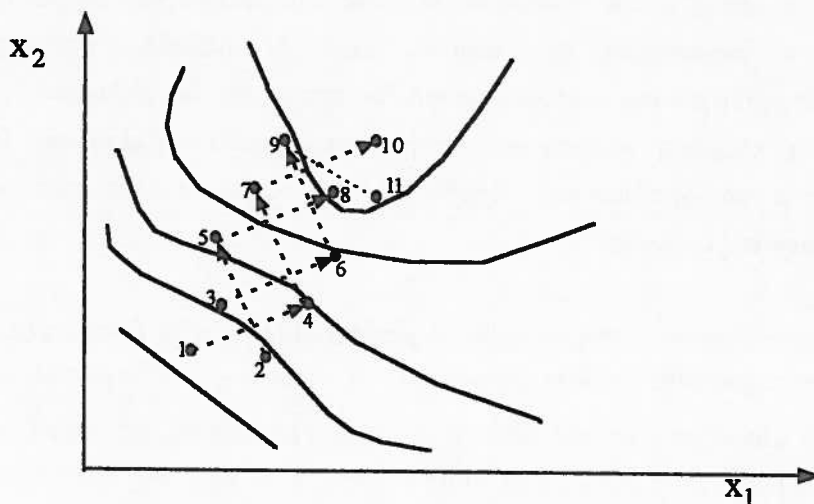
Δυσδιάστατη γεωμετρική έρευνα. Θα μελετηθεί η μεγιστοποίηση μιας δυσδιάστατης συνάρτησης χωρίς περιορισμούς με δύο μεταβλητές x_1 και x_2 . Επιλέγονται τρία σημεία έτσι ώστε να ισαπέχουν το ένα από το άλλο, σχηματίζοντας το ισόπλευρο τρίγωνο που φαίνεται στο σχήμα 6.5 από τα σημεία 1 έως 3. Η τιμή της συνάρτησης υπολογίζεται για τις τιμές των x_1 και x_2 που αντιστοιχούν στις τρεις κορυφές αυτές. Γενικά, η τιμή της y στα τρία σημεία δεν θα είναι ίδια και στο σχήμα φαίνεται ότι η τιμή στο σημείο 2, y_2 , είναι η χειρότερη από τις τρεις.

Η τεχνική επιλέγει μία κατεύθυνση για να βρει νέα σημεία, όπου η συνάρτηση έχει καλύτερες τιμές. Απορρίπτεται το σημείο που η y έχει την χειρότερη τιμή (εδώ το σημείο 2) και αντικαθίσταται από ένα σημείο που βρίσκεται από την αντανάκλαση του απορριπτέου σημείου στην απέναντι πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου, το σημείο 4. Παίρνοντας το συμμετρικό του χειρότερου σημείου και τα άλλα δύο σχηματίζουμε ένα νέο ισόπλευρο τρίγωνο, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιεί σαν βάση για νέες κινήσεις. Έτσι η τιμή της y θα υπολογιστεί στο σημείο 4 και η σύγκριση θα γίνει στις τιμές των σημείων 1, 3, και 4. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Τη διαδικασία αυτή ονομάζουμε *κανόνα 1*. Παρατηρούμε ότι η εκλογή της νέας κατεύθυνσης της κίνησης

προχωράει συνεχώς προς τη σωστή κατεύθυνση. Εφόσον η επιφάνεια y είναι πλάγια, κάθε κίνηση οδηγεί σε μία περιοχή με καλύτερες τιμές της y . Συνεχίζοντας καταλήγουμε σε μία σειρά σημείων που φαίνεται στο σχήμα 6.6.



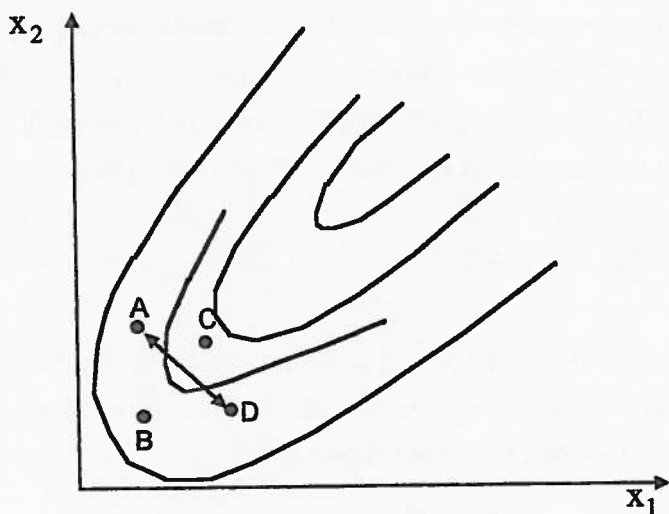
Σχήμα 6.5



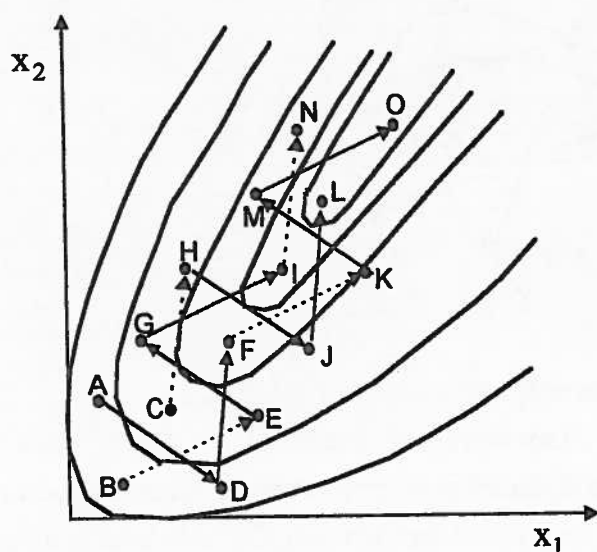
Σχήμα 6.6

Υπάρχουν αρκετές δυσκολίες υπάρχουν στην εφαρμογή του κανόνα αυτού. Η πρώτη συναντιέται όταν ένα από τα τρίγωνα κάθετα σε μία ακμή που σχηματίζεται από τη συνάρτηση y , όπως φαίνεται από το τρίγωνο ABC στο σχήμα 6.7. Στη περίπτωση αυτή ένας φαύλος κύκλος αρχίζει. Αν η y είναι χειρότερη στο A, ο πρώτος κανόνας απορρίπτει το σημείο A και αντανακλά στη πλευρά BC και δίνει το σημείο D, παίρνοντας το νέο τρίγωνο BCD. Στο νέο τρίγωνο BCD, η y έχει χειρότερη τιμή στο σημείο D, έτσι η εφαρμογή του ίδιου κανόνα θα προκαλέσει αντανάκλαση του σημείου D και αντικατάσταση με το αρχικό σημείο A, και το αρχικό τρίγωνο ABC θα ξαναεισαχθεί. Συνεπώς η μέθοδος δεν μπορεί να πλησιάσει το αληθινό βέλτιστο. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης έχει κολλήσει πάνω στην ακμή. Αυτό το πρόβλημα

αποφεύγεται εύκολα, με τον κανόνα 2: καμία επιστροφή δεν γίνεται στα σημεία που έχουν ήδη περαστεί. Στο παραπάνω σχήμα, αντί να απορριφθεί το σημείο όπου η y έχει τη χειρότερη τιμή, απορρίπτεται το σημείο που η y έχει τη δεύτερη χειρότερη τιμή. Η επίδραση αυτού στη συμπεριφορά της διαδικασίας φαίνεται στο σχήμα 6.8. Τα τόξα με συνεχείς γραμμές παρουσιάζουν τα βήματα όπου οι χαμηλότερες τιμές της y απορρίπτονται στη σειρά, ενώ τα τόξα με διακεκομμένες γραμμές παρουσιάζουν την εφαρμογή του δεύτερου κανόνα.



Σχήμα 6.7



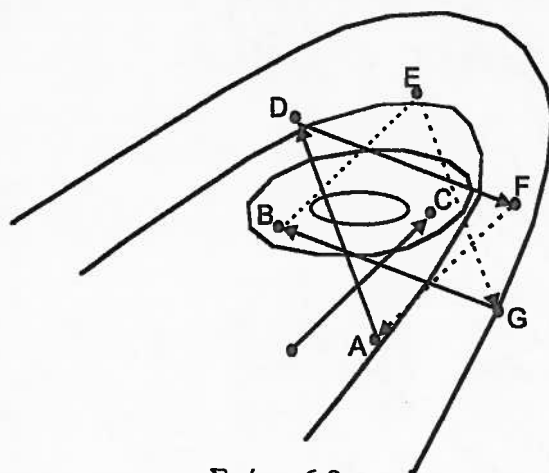
Σχήμα 6.8

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους δύο κανόνες, η βελτιστοποίηση μπορεί να φθάσει μέχρι τη περιοχή που περιέχει το επιθυμητό βέλτιστο. Στη περιοχή αυτή το τελευταίο ισόπλευρο τρίγωνο θα καθίσει στην κορυφή, ή τουλάχιστον θα βρίσκεται σε απόσταση ενός βήματος από τη κορυφή. Στο σημείο αυτό δεν είναι δυνατόν τα τρία σημεία στις κορυφές του τελευταίου ισόπλευρου τριγώνου να φθάσουν

κοντύτερα στο βέλτιστο σημείο και αρχίζει να επαναλαμβάνεται το ίδιο, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.9. Όταν γίνεται τέτοιος κύκλος, η κορυφή που όλο το σχεδιάγραμμα περιστρέφεται είναι η καλύτερη προσέγγιση της βέλτιστης θέσης, η οποία μπορεί να βρεθεί μειώνοντας το μέγεθος του τριγώνου. Γενικά, τα τελικά βήματα που πλησιάζουν το επιθυμητό βέλτιστο χαρακτηρίζονται ως μία κορυφή της μεθόδου, που παραμένει στο ίδιο σημείο αρκετό χρόνο. Η λύση είναι μία μείωση του βήματος. Η εισαγωγή του κανόνα 3 το επιτρέπει αυτό. Ο κανόνας αυτός ενεργοποιείται αν η καλύτερη κορυφή δεν αλλάζει για περισσότερες από M επαναλήψεις, τότε το μέγεθός της μειώνεται κρατώντας την απόσταση για τις άλλες κορυφές από αυτή την κορυφή. Το μέγεθος του M εξαρτάται από τον αριθμό των μεταβλητών. Από έρευνες έχει καθιερωθεί να ορίζεται το M από την σχέση:

$$M = 1.65n + 0.05n^2$$

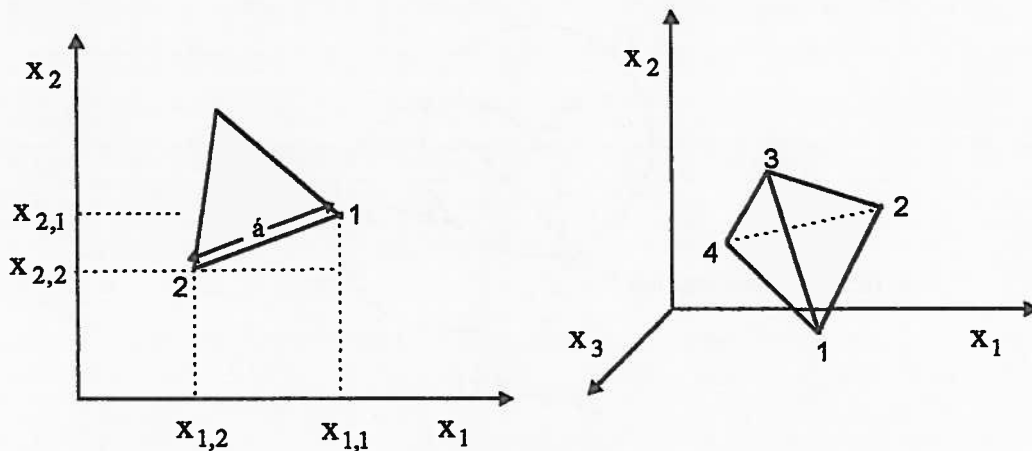
Η έρευνα σταματά όταν το βήμα είναι τόσο μικρό που δίνει τη θέση του βέλτιστου ικανοποιητικά. Η θέση του βέλτιστου έχει επιλεγεί με ένα βαθμό ακρίβειας που καθορίζεται από το μέγεθος της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου.



Σχήμα 6.9

Η μέθοδος έχει κάποια πλεονεκτήματα απέναντι σε άλλες αριθμητικές τεχνικές έρευνας. Αντί να αναζητούμε ακρίβεια στην κίνηση, δίνεται έμφαση στην ταχύτητα της εκλογής και κίνησης στη σωστή κατεύθυνση. Οποιοδήποτε μειονέκτημα αντισταθμίζεται από την ταχύτητα των υπολογισμών και της κίνησης.

Η γεωμετρική μέθοδος σε η διαστάσεις. Είδαμε ότι στις δύο διαστάσεις ο τύπος της μεθόδου είναι το ισόπλευρο τρίγωνο. Στις τρεις διαστάσεις, το ισόπλευρο σχέδιο είναι επέκταση προσθέτοντας ένα σημείο, έτσι ώστε υπάρχουν τέσσερα σημεία-κορυφές σ' ένα κανονικό τετράεδρο (Σχήμα 6.10). Η γενίκευση των σχεδίων είναι φανερή διαδικασία πλέον.



Σχήμα 6.10

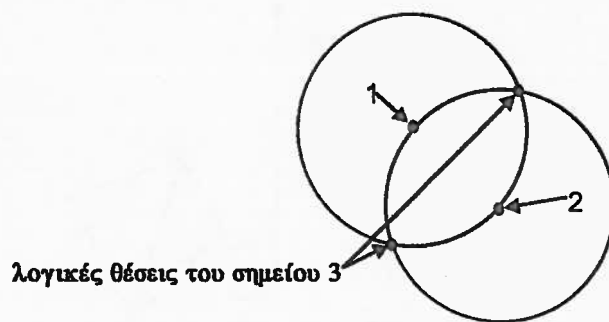
Ας εκφράσουμε τα παραπάνω με μαθηματικούς όρους. Στις δύο διαστάσεις μπορούμε να γράψουμε το μήκος μιας πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των δύο σημείων. Αν οι συντεταγμένες των σημείων 1 και 2 είναι $x_1 = \{x_{1,1}, x_{2,1}\}$ και $x_2 = \{x_{1,2}, x_{2,2}\}$ αντίστοιχα, το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ 1 και 2 είναι:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_{1,1} - x_{1,2})^2 + (x_{2,1} - x_{2,2})^2 = a^2$$

Η γενική μορφή του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ των σημείων j και k γράφεται:

$$(x_{1,j} - x_{1,k})^2 + (x_{2,j} - x_{2,k})^2 = \sum_{i=1}^2 (x_{i,j} - x_{i,k})^2 = a^2 \quad \text{για } j \neq k$$

Αυτή δίνεται για τους συνδυασμούς (1,2), (2,3) και (3,1), έτσι θα υπάρχουν τρεις εξισώσεις για να καθορίσουν το σχέδιο, μία για κάθε επιλογή δύο κορυφών από τις τρεις, επειδή $C_2^3 = 3! / 2!1! = 3$. Έτσι για το σημείο x_1 , τα σημεία x_2 βρίσκονται σε κύκλο με ακτίνα a και κέντρο το σημείο x_1 . Παίρνοντας οποιοδήποτε σημείο x_2 στον κύκλο, καθορίζουν και ένα σημείο x_3 . Εφόσον και αυτό θα βρίσκεται στους κύκλους με ακτίνα a , μόνο δύο θέσεις είναι πιθανές για το σημείο x_3 , όπως φαίνεται στο σχήμα 6.11. Γι' αυτό ο καθορισμός του τριγώνου δεν είναι μοναδικός. Η τελευταία συνθήκη είναι απαραίτητη, εφόσον όταν εφαρμόσαμε το κανόνα 1, κρατήσαμε δύο σημεία σταθερά και απορρίψαμε το τρίτο. Γι' αυτό είναι απαραίτητη η ύπαρξη των δυο θέσεων για το x_3 .



Σχήμα 6.11

Όμοια για τις τρεις διαστάσεις γενικεύουμε το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των σημείων j και k :

$$\sum_{i=1}^3 (x_{i,j} - x_{i,k})^2 = a^2$$

Εφόσον το σχέδιο έχει έξι ακμές, απαιτούνται έξι εξισώσεις για να καθοριστεί η μέθοδος και αυτό επειδή $C_2^4 = 4! / 2!2! = 6$.

Επεκτεινόμαστε στις n διαστάσεις και η γενική μέθοδος θα έχει $n+1$ κορυφές με την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^n (x_{i,j} - x_{i,k})^2 = a^2$$

καθορίζει την απόσταση a μεταξύ δύο οποιαδήποτε σημείων j και k . Εφόσον υπάρχουν $n+1$ σημεία, δύο διαφορετικές κορυφές μπορούν να διαλεχτούν με C_2^{n+1} τρόπους, δηλαδή

$$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Έχοντας καθορίσει τις απαραίτητες σχέσεις, ένα αρχικό σχήμα πρέπει να βρεθεί για να αρχίσει η έρευνα. Μόλις βρεθεί, τα ακολουθούντα σχήματα θα καθοριστούν από την αλλαγή μόνο μιας κορυφής στον κάθε κύκλο. Δεν παίζει ρόλο ποια μέθοδος χρησιμοποιείται για να αρχίσουν οι υπολογισμοί και ποια σημεία αρκεί να σχηματίζουν τον επιθυμητό τύπο σχήματος.

Προτείνεται το σύνολο των $\eta+1$ σημείων (πίνακας 1.1) σαν αρχή για ένα πρόβλημα η -διαστάσεων, όταν η έρευνα ξεκινάει από την αρχή των αξόνων. Με τους μετασχηματισμούς, το τελευταίο βασικό σημείο μπορεί να παίρνεται πάντα ως αρχή των αξόνων για κάθε νέο κύκλο έρευνας.

η συντεταγμένες για κάθε σημείο

σημείο j	$\zeta_{1,j}$	$\zeta_{2,j}$	$\zeta_{3,j}$	$\zeta_{4,j}$...	$\zeta_{\eta-1,j}$	$\zeta_{\eta,j}$
1	0	0	0	0	...	0	0
2	p	q	q	q	...	q	q
3	q	p	q	q	...	q	q
.....
η	q	q	q	q	...	p	q
$\eta+1$	q	q	q	q	...	q	p

Πίνακας 1.1

$$p = \frac{\alpha}{\eta\sqrt{2}}(\sqrt{\eta+1} + \eta - 1)$$

όπου

$$q = \frac{\alpha}{\eta\sqrt{2}}(\sqrt{\eta+1} - 1)$$

Γι' αυτό θα αναφέρουμε τη σχέση των συντεταγμένων κορυφών x_j από τη θέση ζ_j σχετικά με το βασικό σημείο x_1 . Τότε οι συντεταγμένες για κάθε κορυφή θα δίνονται:

$$x_j = \zeta_j + x_1 \quad \text{για } j = 1, 2, 3, \dots, \eta + 1$$

Παρατηρούμε ότι εκτός από τη πρώτη γραμμή των μηδενικών (αρχή των αξόνων) και τη διαγώνιο των p , ο πίνακας αποτελείται μόνο από q . Αυτό το σημείο είναι ένα από τα πιο απλά.

Ας καθορίσουμε κατάλληλες τιμές για τα p και q , έτσι ώστε να σχηματίσουμε τη μέθοδο. Οι συνθήκες για να σχηματίσουμε τις κορυφές εφαρμόζονται με σειρά στο κάθε ζευγάρι σημείων. Έτσι για το σημείο 1 και j , το τετράγωνο της απόστασης ανάμεσά τους είναι:

$$(0 - p)^2 + (\eta - 1)(0 - q)^2 = \alpha^2$$

και δίνει $p^2 + (\eta - 1)q^2 = \alpha^2$

Ομοίως ανάμεσα στα σημεία 2 και 3, η εξίσωση είναι

$$2(p - q)^2 + (\eta - 2)(q - q)^2 = \alpha^2$$

ή $2(p - q)^2 = \alpha^2$

Οι τιμές των p και q πρέπει να διαλεχτούν ώστε να ικανοποιούν και τις δύο προηγούμενες εξισώσεις. Οι λύσεις των p και q δίνονται:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\alpha}{\eta\sqrt{2}} (\eta - 1 + \sqrt{\eta + 1}) \\ q &= \frac{\alpha}{\eta\sqrt{2}} (-1 + \sqrt{\eta + 1}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Εδώ το α είναι το μέγεθος της πλευράς.

Παράδειγμα 2 (η μέθοδος σε δύο διαστάσεις)

Διαλέγουμε μία αρχική τιμή για τη περίπτωση δύο διαστάσεων. Εδώ για $\eta=2$, έχουμε

$$\begin{aligned} p &= \frac{\alpha(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = 0.9657\alpha \\ q &= \frac{\alpha(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}} = 0.2587\alpha \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα για $\eta=2$, οι συντεταγμένες των ζητούμενων σημείων είναι $\{0,0\}$, $\{0.9657\alpha, 0.2587\alpha\}$ και $\{0.2587\alpha, 0.9657\alpha\}$. Εδώ το α , η πλευρά του τριγώνου, παίρνεται αυθαίρετα. Αυτή η τιμή ανταποκρίνεται στο μέγεθος του βήματος και όσο μικρότερο είναι, τόσο ακριβέστερη είναι η έρευνα, αλλά πιο αργή η πρόοδος. Ελέγχουμε αν υπάρχουν συντεταγμένες των κορυφών σ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Αν ξεκινήσουμε την έρευνα από το βασικό σημείο $\{3.1, 6.7\}$, τότε οι συντεταγμένες θα είναι:

κορυφή j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$
1	3.1	6.7
2	$3.1+0.9657\alpha$	$6.7+0.2587\alpha$
3	$3.1+0.2587\alpha$	$6.7+0.9657\alpha$

Δημιουργία νέου σημείου. Στη σχεδιαστική έρευνα, χρησιμοποιώντας τη σειριακή μέθοδο, απορρίπτουμε μία κορυφή και διαλέγουμε μια νέα. Η νέα κορυφή σε κάθε κύκλο φτιάχεται από τις παραμένουσες κορυφές του αρχικού σχήματος, μαζί με μία νέα κορυφή. Η νέα κορυφή διαλέγεται σαν τον φανταστικό καθρέφτη της απορριπτέας κορυφής, που αντανακλάται στο επίπεδο που σχηματίζουν οι υπόλοιπες κορυφές.

Στις δύο διαστάσεις (σχήμα 6.12), αν αντανακλαστεί η κορυφή R ενός ισόπλευρου τριγώνου στην απέναντι πλευρά, μία γραμμή από το R κάθετη στη πλευρά που ενώνει τα 1 και 2, κόβει αυτή στο σημείο F . Η γραμμή RF προεκτείνεται μέχρι το σημείο N . Το σημείο F είναι το μέσο, ή το κέντρο της βαρύτητας και των δύο γραμμών. Οι συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου N βρίσκονται, αφού καθοριστούν οι συντεταγμένες x_F του F . Εφόσον το F είναι το μέσο της γραμμής 1-2, έχουμε:

$$x_{1,F} = 1/2(x_{1,1} + x_{1,2}) \quad x_{2,F} = 1/2(x_{2,1} + x_{2,2})$$

ή γενικά, $x_{i,F} = 1/2(x_{i,1} + x_{i,2})$ για $i = 1,2$

Όμοια, το F είναι το μέσο της RF , έτσι

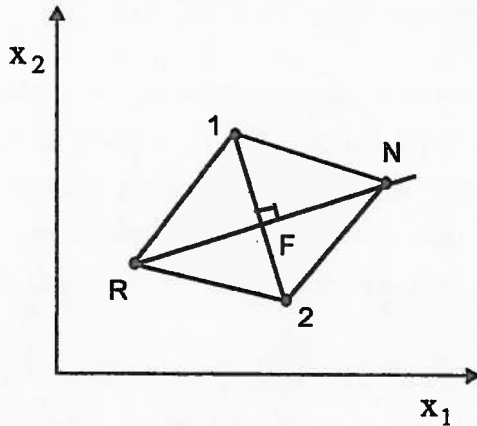
$$x_{i,F} = 1/2(x_{i,R} + x_{i,N}) \quad \text{για } i = 1,2 \quad (6.5)$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις παίρνουμε:

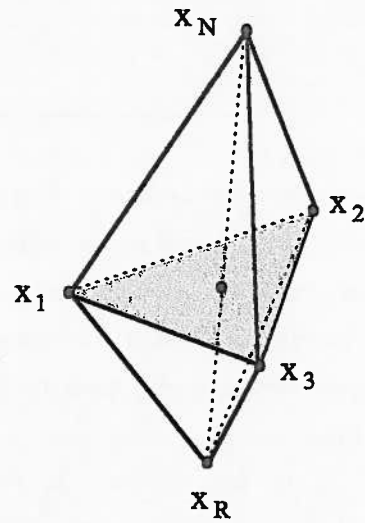
$$\frac{x_{i,R} + x_{i,N}}{2} = \frac{x_{i,1} + x_{i,2}}{2} \quad (6.6)$$

Έτσι καθορίζουμε το ζητούμενο $x_{i,N}$:

$$x_{i,N} = \frac{2(x_{i,1} + x_{i,2})}{2} - x_{i,R} \quad (6.7)$$



Σχήμα 6.12



Σχήμα 6.13

Το συμβαίνει και στις τρεις διαστάσεις. Θεωρούμε την τριγωνική πυραμίδα του σχήματος 1.13. Η νέα κορυφή N βρίσκεται ενώνοντας την απορριπτέα κορυφή R με το κέντρο βαρύτητας F του επιπέδου που σχηματίζεται από τις απομένουσες κορυφές 1,2 και 3 της αρχικής θέσης και προεκτείνοντας τη γραμμή RF μέχρι το N . Προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε τις συντεταγμένες του σημείου F με δύο τρόπους. Το F βρίσκεται στο κέντρο της βαρύτητας των κορυφών, εκτός της R ,

$$(x_{i,F} - x_{i,1}) + (x_{i,F} - x_{i,2}) + (x_{i,F} - x_{i,3}) = 0$$

ή

$$x_{i,F} = 1/3(x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3}) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 x_{i,j} \quad (6.8)$$

και επίσης βρίσκεται στο κέντρο της βαρύτητας της RN όταν οι συντεταγμένες του εκφράζονται από την (6.5). Εξισώνοντας την (6.5) και (6.8), παίρνουμε τις συντεταγμένες $x_{i,N}$ του νέου σημείου N :

$$\frac{x_{i,R} + x_{i,N}}{2} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 x_{i,j} \quad \text{για } i = 1,2,3 \quad (6.9)$$

Εναλλακτικά γράφουμε το δεξί μέλος:

$$\frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^4 X_{i,j} - X_{i,R} \right)$$

έτσι ώστε ο αριθμητής να είναι το άθροισμα όλων των συντεταγμένων, εκτός του απορριπτέου σημείου.

Γενικά, οι συντεταγμένες του νέου σημείου N για η-διαστάσεις δίνονται από:

$$\frac{X_{i,R} + X_{i,N}}{2} = X_{i,F} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} X_{i,j} - X_{i,R}}{n}$$

Η απαιτούμενη συντεταγμένη είναι:

$$X_{i,N} = \left[\frac{2}{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} X_{i,j} - X_{i,R} \right) \right] - X_{i,R} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.10)$$

Αυτή η εξίσωση βρίσκει ένα νέο σημείο N , το οποίο με η σημεία της αρχικής θέσης, θα σχηματιστεί ένα νέο κανονικό σχήμα.

Όλες οι απαραίτητες εξισώσεις έχουν αναπτυχθεί και επιτρέπουν να χρησιμοποιηθεί η σειριακή μέθοδος, εφαρμόζοντας τους ίδιους απλούς κανόνες της απόρριψης, δημιουργίας και διακοπής, όπως παρουσιάστηκαν νωρίτερα για τις δύο διαστάσεις.

Παράδειγμα 3 (σειριακή έρευνα)

Θα εντοπίσουμε το μέγιστο της συνάρτησης

$$y = 100 - (10 - x_1)^2 - (5 - x_2)^2$$

με ακρίβεια 1%.

Στάδιο 1 Η πρώτη θέση σε δύο διαστάσεις δίνεται από τον πίνακα 1.1. Τα p και q δίνονται από την (6.4) και το παράδειγμα 2, δηλαδή

$$p = 0.9657\alpha$$

$$q = 0.2587\alpha$$

το α είναι το βήμα. Αν διαλέξουμε αυθαίρετα το $\alpha=2$ και η έρευνα αρχίσει από την αρχή των αξόνων, οι συντεταγμένες και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης δίνονται από τα σημεία 1 έως 3 στον πίνακα 1.2.

Η έρευνα μπορεί να προχωρήσει σύμφωνα με τους κανόνες 1 ή 2, όπως εξηγήσαμε παραπάνω. Έτσι στην αρχική θέση θα διαγράψουμε το σημείο 1, εφόσον έχει τη μικρότερη τιμή του y και δημιουργούμε ένα νέο σημείο x_4 , χρησιμοποιώντας την (6.10). Έχουμε:

$$\frac{x_{i,4} + x_{i,1}}{2} = \frac{x_{i,2} + x_{i,3}}{2}$$

και δίνει: $x_{i,4} = x_{i,2} + x_{i,3} - x_{i,1}$

Απ' αυτό x_4 είναι:

$$x_{1,4} = 1.9314 + 0.5174 - 0 = 2.4488$$

$$x_{2,4} = 0.5174 + 1.9314 - 0 = 2.4488$$

και $y(x_4) = 26.5$

Έτσι απορρίπτουμε το σημείο 1 από το αρχικό τρίγωνο 123 και σχηματίζουμε ένα νέο 234. Προχωρούμε με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας τον κανόνα 2 μόνο όταν η εφαρμογή του κανόνα 1 μας εξαναγκάζει να επιστρέψουμε σ' ένα προηγούμενο απορριπτό σημείο.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία 18 και 19 είναι ακριβώς τα σημεία 10 και 12. Είμαστε σ' ένα κλειστό κύκλο με κέντρο το 13. Αυτή η τελική έρευνα κλειστού κύκλου μπορεί να ανακαλυφθεί από τον αριθμό M του άξονα που εμφανίζεται στο τελικό σύνολο των τριγώνων, που το σημείο 13 εμφανίζεται περισσότερες από έξι φορές. Κανονικά σταματάμε την έρευνα την τέταρτη φορά στο ίδιο σημείο. Γι' αυτό, αυτό το σημείο θεωρείται η καλύτερη προσέγγιση του βέλτιστου σημείου, έτσι το βέλτιστο θα βρίσκεται στη περιοχή του:

$$x_1 = 10.1744 \pm \alpha = 10.2 \pm 2$$

$$x_2 = 4.5184 \pm \alpha = 4.5 \pm 2$$

με την καλύτερη τιμή της $y(x_{13}) = 99.74$.

Αυτό το βήμα δεν έχει βρει την τελική περιοχή με την επιθυμητή ακρίβεια, επειδή σκόπιμα χρησιμοποιήσαμε μεγάλο βήμα για να καθοριστεί ταχέως το βέλτιστο. Ας ακολουθήσουμε μία νέα έρευνα χρησιμοποιώντας ένα μικρότερο βήμα με $\alpha=0.1$.

σημείο j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	y_j	απορ. σημείο	κανόνας απόρριψης	σημεία	simplex	
1	0	0	-25					
2	1.9314	0.5174	14.9	αρχή	simplex	1	2	3
3	0.5174	1.9314	0.6					
4	2.4488	2.4488	26.5	1	1	4	2	3
5	3.8628	1.0348	46.6	3	1	4	2	5
6	4.3802	2.9662	64.3	2	1	4	6	5
7	5.7972	1.5522	70.3	4	1	7	6	5
8	6.3116	3.4836	84.1	5	1	7	6	8
9	7.7256	2.0696	79.4	6	1	7	9	8
10	8.2430	4.0010	95.9	7	1	10	9	8
11	6.8290	5.4150	89.7	9	1	10	11	8
12	8.7604	5.9324	97.60	8	1	10	11	12
13	10.1744	4.5184	99.74	11	1	10	13	12
14	10.6918	6.4498	97.42	10	1	14	13	12
15	12.1054	5.0358	95.57	12	2	14	13	15
16	11.5884	3.1044	93.88	14	2	16	13	15
17	9.6574	2.5870	94.06	15	2	16	13	17
18	8.2434	4.0010	95.92	16	1	18	13	17
19	8.7604	5.9324	97.60	17	1	18	13	19

Πίνακας 1.2

Στάδιο 2 Με $\alpha=0.1$, μπορούμε να σχηματίσουμε την αρχική θέση στο νέο στάδιο είτε κρατώντας το προηγούμενο καλύτερο σημείο και δημιουργώντας δύο ακόμη κορυφές με απόσταση α προς τις απομένουσες κορυφές της τελικής θέσης του προηγούμενου σταδίου, ή χρησιμοποιώντας τα $p=0.0966$ και $q=0.0259$ του πίνακα 1.1. Τέλος θα βρούμε το ζ_i από το νέο βασικό σημείο έτσι ώστε οι συντεταγμένες και η τιμή της συνάρτησης μπορούν να υπολογιστούν ως:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \begin{Bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{1,0} + 0 \\ x_{2,0} + 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.1744 \\ 4.5184 \end{Bmatrix} \\
 x_2 &= \begin{Bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{1,0} + p \\ x_{2,0} + q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.2709 \\ 4.5442 \end{Bmatrix} \\
 x_3 &= \begin{Bmatrix} x_{1,3} \\ x_{2,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{1,0} + q \\ x_{2,0} + p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.2002 \\ 4.6149 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

για να δώσουν τα σημεία 1 έως 3 του πίνακα 1.3. Εδώ το $x_0 \equiv x_{1,3}$ είναι του σταδίου 1.

Τελικά βρίσκεται ότι σ' αυτό το στάδιο, το σημείο 13 εμφανίζεται έξι φορές στην έρευνα, έτσι ώστε να σχηματίζει το τελικό κέντρο. Το βέλτιστο θα βρίσκεται στην τελική περιοχή

$$x_1^* = 10.0389 \pm \alpha = 10.03 \pm 0.10$$

$$x_2^* = 5.0200 \pm \alpha = 5.02 \pm 0.10$$

με 2 και 4 τις εκατό αντίστοιχα. Το σημείο 13 δίνει τη καλύτερη προσέγγιση του βέλτιστου, με $y=99.998$.

Επιπλέον στάδια εφαρμόζονται με μικρότερο βήμα α και φυσικά η ακριβής λύση είναι:

$$y^* = 100.00 \quad \text{στο} \quad x_1^* = 10.0, \quad x_2^* = 5.0$$

Σχόλια πάνω στη σειριακή τεχνική Αυτή η μέθοδος συνιστάται εφόσον είναι απλό και εύκολο να προγραμματιστεί και απαιτεί μόνο μία επιπλέον δοκιμή για κάθε κίνηση.

Τα σφάλματα στο καθορισμό της συνάρτησης σε κάθε θέση προκαλούν κάποιες κινήσεις προς τα κάτω αντί προς τα πάνω, αλλά αυτές οι λανθασμένες κινήσεις διορθώνονται ταχέως και απλώς επιβραδύνουν το ρυθμό της ανάβασης. Όταν κάποια σφάλματα εμφανίζονται ένας προσθετικός κανόνας, κανόνας 1α, τακτοποιεί τις παρατηρήσεις που είναι ξεπερασμένες. Αυτός ο κανόνας βεβαιώνει ότι αν μία τιμή μιας κορυφής εμφανίστηκε στο $n+1$ βήμα και δεν απορρίφθηκε από τον κανόνα 1, τότε καμία κίνηση δεν θα πρέπει να γίνει. Το αποτέλεσμα θα απορριφθεί και θα αντικατασταθεί από μία νέα παρατήρηση στο ίδιο σημείο. Αν το σημείο είναι το αληθινό βέλτιστο, η επαναλαμβανόμενη παρατήρηση θα τείνει να γίνει υψηλότερη, αλλά αν δεν είναι, το αποτέλεσμα είναι πιθανό να απορριφθεί εν καιρό.

σημείο j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	y_j	απορ. σημείο	κανόνας απόρριψης	σημεία	simplex	
1	10.1744	4.5184	99.738					
2	10.2709	4.5442	99.719	αρχή	simplex	1	2	3
3	10.2002	4.6149	99.811					
4	10.2967	4.6407	99.783	1	1	4	2	3
5	10.2260	4.7114	99.866	2	1	4	5	3
6	10.1295	4.6856	99.884	4	1	6	5	3
7	10.1553	4.7821	99.929	3	1	6	5	7
8	10.0588	4.7563	99.932	5	1	6	8	7
9	10.0846	4.8528	99.972	6	1	9	8	7
10	9.9881	4.8270	99.970	7	1	9	8	10
11	10.0135	4.9235	99.994	8	1	9	11	10
12	10.1100	4.9493	99.985	10	1	9	11	12
13	10.0389	5.0200	99.998	9	1	13	11	12
14	9.9424	4.9942	99.997	12	1	13	11	14
15	9.9678	5.0907	99.991	11	1	13	15	14
16	10.0643	5.1165	99.982	14	2	13	15	16
17	10.1354	5.0458	99.980	15	2	13	17	16
18	10.1100	4.9493	99.985	16	2	13	17	18

Πίνακας 1.3

Ο Himsworth [1962] απέδειξε ότι η μέθοδος αυτή είναι πάντα πιο αποτελεσματική από άλλες, όσο ο αριθμός των μεταβλητών μεγαλώνει και το σφάλμα μεγαλώνει. Οι Brooks και Mickley [1961] έχουν δείξει ότι η πιο αποτελεσματική δοκιμή ή το σχέδιο για εκτίμηση της κλίσης μιας επιφάνειας (π.χ. το σχέδιο που δίνει την πληροφορία ανά παρατήρηση στην εμφάνιση του σφάλματος) είναι η κανονική simplex. Αυτό είναι το σχέδιο που χρησιμοποιείται στην σειριακή μέθοδο.

Η μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι όλοι οι υπολογισμοί είναι ασήμαντοι, χωρίς απαίτηση μαθηματικής ή στατιστικής γνώσης και κάθε κίνηση είναι πλήρως καθορισμένη από τα προηγούμενα αποτελέσματα και έτσι δεν απαιτείται κρίση ή εικασία. Δεν είναι απαραίτητο να κρατηθεί μεγάλος χώρος μνήμης στον υπολογιστή, εφόσον απαιτείται γνώση μόνο της τελευταίας θέσης και μία μέτρηση του αριθμού που κάθε κορυφή έχει εμφανιστεί στη τελευταία αυτή θέση ενώ είναι εύκολο να προστεθεί μια μεταβλητή για το σκοπό αυτό. Έτσι μία νέα μεταβλητή που προστίθεται στο δυσδιάστατο πρόβλημα, μπορεί να υπολογισθεί προσθέτοντας ένα σημείο στο υπάρχον ισόπλευρο τρίγωνο και σχηματίζοντας ένα κανονικό τετράεδρο. Η επέκταση φαίνεται να είναι μοναδική, αλλά η αντίθετη διαδικασία μιας μεταβλητής δεν είναι τόσο εύκολη και το σύστημα πρέπει να ξαναρχίσει σε μία από τις τελικές κορυφές.

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος έχει έλλειψη ενός τύπου επιτάχυνσης, εφόσον ο βασικός τύπος μπορεί μόνο να διορθώσει το βήμα. Αυτό είναι ικανοποιητικό, εκτός κι αν οι περιοχές είναι απροσδόκητες. Τότε η μέθοδος αυξάνει το βήμα για γρήγορη προσέγγιση. Οι τροποποιήσεις γίνονται για να μεταβάλλουν την κανονικότητα του σχήματος και για να κινηθούν γρηγορότερα σε κάποιες κατευθύνσεις. Οι τροποποιήσεις στη βασική μέθοδο που περιλαμβάνει τέτοια μεγέθυνση και παραμόρφωση έχουν προταθεί από τους Camprey και Nickols [1961], Nelder και Mead [1964,1965] και Box [1965].

Μέθοδοι επιτάχυνσης στην απ' ευθείας έρευνα

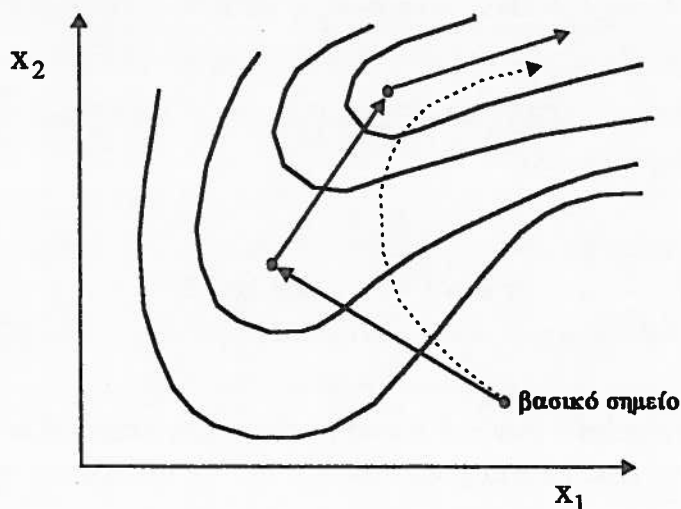
Στις μεθόδους απ' ευθείας έρευνας που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα, η επιλογή της κατεύθυνσης είναι ανεξάρτητη των προηγούμενων επιτυχιών και αποτυχιών. Οι μέθοδοι επιτάχυνσης είναι εκείνες που βασίζονται σε κάποια επέκταση στα προηγούμενα επιτυχημένα αποτελέσματα. Υπάρχουν μέθοδοι επιτάχυνσης για βαθμωτές και μη-βαθμωτές έρευνες, αλλά περιορίζουμε την προσοχή μας στις απ' ευθείας έρευνες.

Η επιτάχυνση μπορεί να συνδεθεί με μία καλύτερη επιλογή της απόστασης, μία καλύτερη επιλογή της κατεύθυνσης, ή συνδυασμό και της απόστασης και της κατεύθυνσης. Όλα βασίζονται πάνω σε γνώση των προηγούμενων και των παρόντων αποτελεσμάτων.

6.2 Μέθοδοι βάθμωσης

Ως γνωστόν οι παράγωγοι μιας συνάρτησης με αναφορά σε κάθε μια από τις η μεταβλητές καλούνται *βαθμώσεις της συνάρτησης*. Η βάθμωση είναι ένα διάνυσμα σ' ένα σημείο στο χώρο η-διαστάσεων. Ο μεγαλύτερος ρυθμός της βελτίωσης της συνάρτησης θα βρεθεί αν κινηθούμε κατά μήκος της βάθμωσης. Αυτό καλείται *κατεύθυνση απότομης ανόδου*, αν αναζητούμε ένα μέγιστο. Δυστυχώς η κατεύθυνση απότομης ανόδου είναι τοπική ιδιότητα και όχι ολική, εφόσον μία κίνηση που ξεκινά στην κατεύθυνση απότομης ανόδου δεν θα τελειώνει απαραίτητα, ευθυγραμμίζοντας κατά μήκος της νέας κατεύθυνσης απότομης ανόδου που συνδέεται με το νέο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.14. Μ' άλλα λόγια η κατεύθυνση απότομης ανόδου ποικίλει από σημείο σε σημείο και ο γεωμετρικός τόπος των άπειρων μικρών κινήσεων κατά μήκος της γραμμής της απότομης ανόδου θα είναι μία κυρτή γραμμή.

Αυτή η σημαντική άνοδο θα συνεχιστεί με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Εντούτοις είναι αρκετό να σημειώσουμε ότι η κατεύθυνση απότομης ανόδου έχει χρησιμοποιηθεί σαν βάση για πολλές τεχνικές. Αυτές οι μέθοδοι καλούνται *μέθοδοι βάθμωσης* και διαιρούνται σε δύο κατηγορίες. Η μία ομάδα ακολουθεί την κατεύθυνση απότομης ανόδου όσο το δυνατόν πιο πιστά, ενώ η άλλη χρησιμοποιεί την μέθοδο σαν οδηγό στην έρευνα, αλλά οι κινήσεις δεν είναι απαραίτητα στην κατεύθυνση απότομης ανόδου.



Σχήμα 6.14

Έρευνα στην κατεύθυνση απότομης ανόδου ή καθόδου

Η βασική μέθοδος της απότομης ανόδου είναι μία κυκλική τεχνική, η οποία δεν ακολουθεί την συνεχή γραμμή της απότομης ανόδου, αλλά κατά προσέγγιση από μια σειρά ευθειών γραμμών. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα στάδιο στην έρευνα στην οποία η τοπική βάθμωση καθορίζεται και ένα σύνολο κινήσεων γίνεται κατά μήκος της αποτελεσματικής κατεύθυνση απότομης ανόδου, ερευνώντας μια διάσταση

για την θέση του περιορισμένου βέλτιστου. Αυτό το σημείο χρησιμεύει σαν βάση για το επόμενο στάδιο. Πριν μελετήσουμε τη μέθοδο, εξετάζουμε το νόημα της κατεύθυνσης απότομης ανόδου και την αξία της.

Δυσδιάστατα βαθμωτά και υψομετρικές εφαιπόμενες Θεωρούμε μια συνάρτηση $y(x_1, x_2)$ που έχει συνεχή μερικές παραγώγους. Η συνάρτηση έχει μια καθορισμένη τιμή για κάθε σημείο $\{x_1, x_2\}$. Για μικρές αλλαγές στο σημείο P σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, η αλλαγή στο y δίνεται από

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)_P dx_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)_P dx_2 \quad (6.11)$$

όπου το P δείχνει ότι οι μερικές παράγωγοι εκτιμώνται στο σημείο P και δεν αλλάζουν, χωρίς να λογαριάζουν τις τιμές των μικρών μετακινήσεων από P, dx_1 και dx_2 . Υποθέτουμε ότι επιλέγουμε ένα σύνολο τιμών για τα dx_1 και dx_2 και γι' αυτό αναγκαζόμαστε να κινηθούμε πάνω στη γραμμή με κλίση α , η οποία περνάει από το P, (σχήμα 6.15). Έστω s μία μέτρηση της απόστασης πάνω στη γραμμή. Τότε

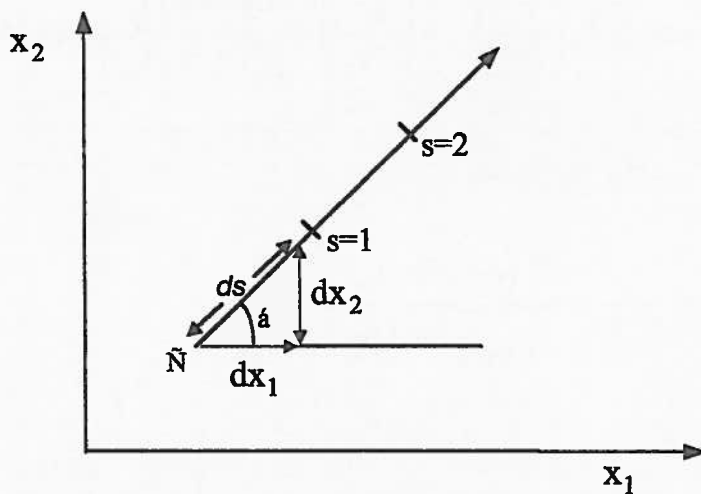
$$\frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)_P \left(\frac{dx_1}{ds} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)_P \left(\frac{dx_2}{ds} \right) \quad (6.12)$$

και από την κατασκευή, $dx_2 / dx_1 = \tan \alpha$, $dx_1 / ds = \cos \alpha$ και $dx_2 / ds = \sin \alpha$, η παράγωγος γίνεται:

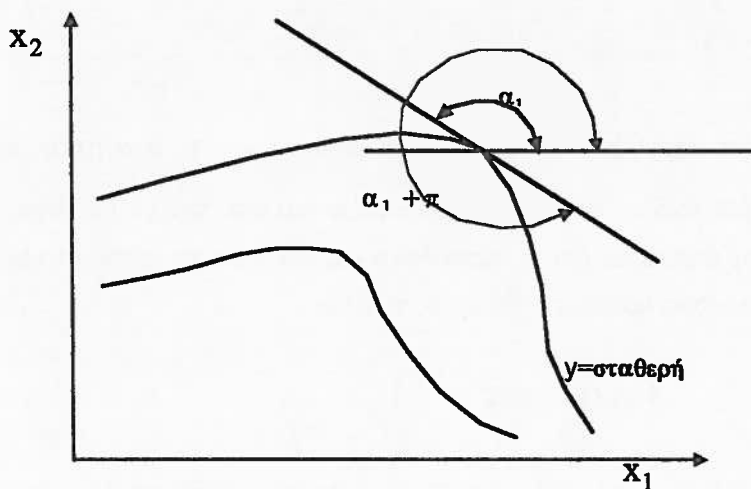
$$\frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)_P \cos \alpha + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)_P \sin \alpha \quad (6.13)$$

Αυτή η έκφραση ερμηνεύεται σαν την αλλαγή στην y που απορρέει από την κίνηση πάνω στην γραμμή με κλίση α στο χώρο των x_1, x_2 . Αν αλλάξουμε το α με το P καθορισμένο, η παράγωγος αλλάζει και υπάρχει μία τιμή του α για την οποία η παράγωγος χάνεται. Αυτή η συνθήκη παρουσιάζει μία κίνηση με σταθερή τιμή της y και είναι μία εφαιπτομενική κίνηση στην υψομετρική y_P . Αν η dy / ds απειρίζεται, τότε από την (6.13) έχουμε:

$$\tan \alpha_1 = \frac{-(\partial y / \partial x_1)_P}{(\partial y / \partial x_2)_P} \quad (6.14)$$



Σχήμα 6.15



Σχήμα 6.16

Αυτή η έκφραση καθορίζει την υψομετρική εφαπτόμενη στο σημείο P. Φυσικά υπάρχουν δύο τιμές α_1 που ικανοποιούν αυτή την εξίσωση, που εξαρτώνται από την κατεύθυνση που γίνεται η κίνηση. Όπως βλέπουμε στο σχήμα (6.16), α_1 είναι η μία λύση και $\alpha_1 + \pi$ η άλλη. Μεταξύ των δύο τιμών πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα μέγιστο της dy/ds . Το μέγιστο τοποθετείται σε μια διεύθυνση τέτοια που το dy/ds είναι στάσιμη αναφορικά με τη μεταβολή του α . Η στάσιμη συνθήκη $d(dy/ds)/\alpha = 0$ οδηγεί στο

$$\tan \alpha^* = \frac{(\partial y / \partial x_2)_P}{(\partial y / \partial x_1)_P} \quad (6.15)$$

όπου α^* είναι η γωνία που κάνει το dy/ds στάσιμο. Γι' αυτό

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)_{\text{στασιμ.ο}} = \cos \alpha^* \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_P + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_P \frac{(\partial y / \partial x_2)_P}{(\partial y / \partial x_1)_P} \right] \quad (6.16)$$

Εφόσον από την (6.15),

$$\cos \alpha^* = \frac{(\partial y / \partial x_1)_P}{\pm \sqrt{(\partial y / \partial x_1)_P^2 + (\partial y / \partial x_2)_P^2}}$$

η εξίσωση (6.16) γίνεται:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)_{\text{στασιμ.ο}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_P^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_P^2} \quad (6.17)$$

Το θετικό πρόσημο δίνει στο $(dy / ds)_{\text{στασιμ.ο}}$ ένα μέγιστο και το αρνητικό δίνει το ελάχιστο. Γι' αυτό και μία από τις γωνίες που καθορίζονται από την (6.15) δίνουν στη παράγωγο ένα μέγιστο. Φαίνεται ότι η κατεύθυνση είναι κάθετη στην υψομετρική εφαπτόμενη, εφόσον το αποτέλεσμα της βάρθρωσης είναι

$$\tan \alpha_1 \tan \alpha^* = -1$$

μία συνθήκη για δύο γραμμές στο χώρο των x_1, x_2 να είναι κάθετες. Η μεγαλύτερη αλλαγή στη y γίνεται όταν μία κίνηση είναι κάθετη στην υψομετρική y -σταθερή.

Κατεύθυνση απότομης ανόδου σε η διαστάσεις Μια εναλλακτική μέθοδο του καθορισμού της κατεύθυνσης απότομης ανόδου έχει δοθεί από τον Kelley. Αυτή η προσέγγιση αποδεικνύει ένα αναλυτικό και όχι γεωμετρικό επιχείρημα προς την κατεύθυνση απότομης ανόδου και αυτή η άποψη ενισχύεται από αυτή τη μέθοδο έρευνας.

Το πρόβλημα είναι να πάρουμε ένα μικρό ds με τέτοιο τρόπο που η συνάρτηση να αυξάνει όσο είναι δυνατόν. Εδώ

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2 \quad (6.18)$$

Υποθέτοντας ότι η y είναι διαφορίσιμη, η αλλαγή στη y που συνδέεται με ένα σύνολο μετατοπίσεως dx_i δίνεται από

$$(dy) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) dx_i$$

ή

$$\frac{dy}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} \quad (6.19)$$

Τώρα ένα συγκεκριμένο σύνολο μετατοπίσεων θα κάνει το dy/ds τόσο μεγάλο (μικρό) όσο είναι δυνατόν. Αυτή είναι η κατεύθυνση απότομης ανόδου (καθόδου). Θετώντας μ' ένα άλλο τρόπο, βλέπουμε ότι το πρόβλημα είναι μία βελτιστοποίηση με εξαναγκασμό. Πρέπει να μεγιστοποιήσουμε (ελαχιστοποιήσουμε) το dy/ds με τη συνθήκη ότι το ds δίνεται από την εξ. (6.18). Το σωστό σύνολο dx_i/ds είναι το σύνολο που βρίσκει τα στάσιμα σημεία της τροποποιημένης συνάρτησης

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} + \lambda \left[1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 \right]$$

όπου λ είναι ένας Lagrangian πολλαπλασιαστής. Διαφορίζοντας αναφορικά με το dx_j/ds , βρίσκουμε ότι η απαραίτητη συνθήκη είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} - 2\lambda \frac{dx_j}{ds} = 0$$

ή

$$\frac{dx_j}{ds} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial y}{\partial x_j} \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, n \quad (6.20)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας λέει ότι η κατεύθυνση απότομης ανόδου (καθόδου) είναι ανάλογη με τις μερικές παραγώγους της y , ή στη διανυσματική ορολογία η κατεύθυνση απότομης ανόδου (καθόδου) είναι ένα διάνυσμα παράλληλο με τη βάρθρωση της συνάρτησης.

Αν σε κάποιο σημείο x_0 , η βάρθρωση έχει η τιμές $(\partial y / \partial x_i)_0$, τότε μία γραμμή που σχεδιάζεται από το σημείο αυτό στην κατεύθυνση απότομης βάρθρωσης μπορεί να παρουσιαστεί στον παραμετρικό τύπο,

$$x_j - x_{j,0} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)_0 s = m_{j,0} s \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, n \quad (6.21)$$

όπου $m_{j,0}$ δείχνει μια κατεύθυνση που εκτιμάται στο σημείο x_0 . Αυτή η έκφραση καθορίζει την κατεύθυνση απότομης βάρθρωσης στο σημείο x_0 .

Μέχρι τώρα δεν έχουμε βρει την κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης (μείωσης) αλλά μόνο τη γραμμή απότομης βάρθρωσης. Γι' αυτό ερευνούμε αυτή την άνοδο περισσότερο. Αντικαθιστώντας στην (6.20) την (6.18) παίρνουμε:

$$1 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{dx_j}{ds} \right)^2 = \frac{1}{4\lambda^2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^2$$

Λύνοντας ως προς λ παίρνουμε

$$2\lambda = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^2}$$

Ακόμη από την (6.19), βλέπουμε ότι,

$$\frac{dy}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^2 = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^2} \quad (6.22)$$

Το θετικό πρόσημο δίνει την κατεύθυνση της απότομης αύξησης στη y , ενώ το αρνητικό δίνει την κατεύθυνση της απότομης μείωσης στην y . Έτσι αν μία κίνηση επιθυμεί να αυξήσει την τιμή της y , τότε από την (6.21) η κατεύθυνση ξ καθορίζεται από:

$$m_j = \frac{\partial y / \partial x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^2}}$$

(6.23)

Από την άλλη, η κατεύθυνση που οδηγεί σε μικρότερες τιμές της y καθορίζεται από:

$$m_j = \frac{-\partial y / \partial x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^2}}$$

(6.24)

Παράδειγμα 4 (Η υψομετρική εφαπτόμενη και η κατεύθυνση απότομης ανόδου χρησιμοποιώντας μία δυσδιάστατη γραμμική συνάρτηση)

Καθορίζουμε τις κατευθύνσεις απότομης ανόδου και υψομετρικής εφαπτόμενης για μια γραμμική συνάρτηση σε δύο διαστάσεις. Καθορίζουμε πρώτα την κατεύθυνση της υψομετρικής εφαπτόμενης για τη γραμμική συνάρτηση:

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

χρησιμοποιώντας την εξ. (6.14). Έτσι η κλίση της υψομετρικής εφαπτόμενης δίνεται από:

$$\tan \alpha_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Οι εφαπτόμενες κατευθύνσεις είναι γι' αυτό ανεξάρτητες της θέσης, το οποίο ισχύει μόνο για τις γραμμικές υψομετρικές, όπως εδώ. Εύκολα δείχνεται ότι οποιαδήποτε γραμμή έχει κλίση $-\alpha_1 / \alpha_2$ είναι μία γραμμή σταθερής y . Τέτοια γραμμή είναι γενικά:

$$x_2 = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) x_1 + b$$

όπου b είναι η τιμή της διαφοράς δύο υψομετρικών γραμμών. Αντικαθιστώντας στην συνάρτηση παίρνουμε:

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 \left[\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) x_1 + b \right] = \alpha_2 b = \text{σταθερά}$$

Για την περίπτωση $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 5$, οι υψομετρικές φαίνονται στο σχήμα (6.17). Τι γίνεται όμως με την κατεύθυνση απότομης ανόδου; Από την εξ. (6.23) βλέπουμε ότι,

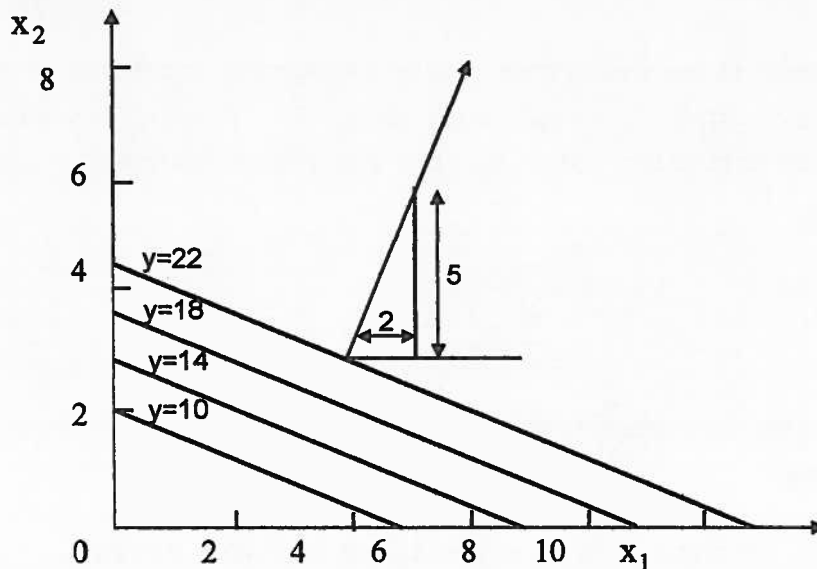
$$m_1 = \frac{\partial y / \partial x_1}{\sqrt{(\partial y / \partial x_1)^2 + (\partial y / \partial x_2)^2}} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$m_2 = \frac{\partial y / \partial x_2}{\sqrt{(\partial y / \partial x_1)^2 + (\partial y / \partial x_2)^2}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

έτσι η κατεύθυνση της μεγαλύτερης αύξησης είναι η ξ , ή στον παραμετρικό τύπο τις εξ. (6.21),

$$\begin{aligned} x_1 - x_{1,0} &= \frac{\alpha_1 s}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \frac{5s}{\sqrt{29}} \\ x_2 - x_{2,0} &= \frac{\alpha_2 s}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \frac{2s}{\sqrt{29}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Εδώ φαίνεται ότι τα m_1 και m_2 είναι ανεξάρτητα των x_1 και x_2 , δείχνοντας ότι η κατεύθυνση της μεγαλύτερης αύξησης είναι συνολική και όχι τοπική ιδιότητα. Αυτή η κατάσταση είναι ειδική περίπτωση λόγω γραμμικότητας και γενικά η κατεύθυνση της βάρθρωσης εξαρτάται από τη θέση.



Σχήμα 6.17

Αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο A στο σχήμα (6.17) και κατασκευάζουμε τη γραμμή από τον παραμετρικό τύπο που δίνεται από την εξ. (6.25), τότε αυτή η γραμμή θα είναι κάθετη στις υψομετρικές και το σημείο προς την κατεύθυνση της μεγαλύτερης αύξησης της y . Επιπλέον, κάθε διάνυσμα παράλληλο στην κατασκευή στο σημείο A θα είναι επίσης στην κατεύθυνση της μεγαλύτερης αύξησης για την γραμμική περίπτωση.

Τελικά σημειώνεται ότι η κατεύθυνση της μεγαλύτερης μείωσης καθορίζεται από:

$$m_1 = -\frac{5}{\sqrt{29}} \quad m_2 = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

Σημειώνεται ότι στη γενική περίπτωση, οι υψομετρικές εφαιπτόμενες και κατευθύνσεις της απότομης καθόδου (ανόδου) εξαρτώνται από τη θέση. Αυτό το γεγονός είναι ένα ουσιαστικό συστατικό κατανόησης της αδυναμίας μερικών απ' ευθείας ερευνών βασισμένες στην απότομη άνοδο.

Παράδειγμα 5 (Η κατεύθυνση απότομης μείωσης είναι τοπική ιδιότητα)

Ας εκτιμήσουμε τη βάρθρωση της συνάρτησης $y = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$ και φαίνεται ότι είναι μία τοπική ιδιότητα. Θα βρούμε τη βάρθρωση σε ένα σημείο στην υψομετρική $y = 10$, και στη διασταύρωση της γραμμής της απότομης μείωσης με την υψομετρική $y = 5$. Η βάρθρωση σε οποιοδήποτε σημείο καθορίζεται από δύο αριθμούς $\partial y / \partial x_1 = 6x_1 + 4x_2$ και $\partial y / \partial x_2 = 4x_2 + 4x_1$, που έχουν τιμές

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -10.92 \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -7.28$$

στο σημείο $A\{-1.82, 0\}$, όπως φαίνεται στο σχήμα (6.18). Από την εξ. (6.24) η κατεύθυνση απότομης μείωσης φαίνεται να είναι ξ_A , όπου

$$m_{1,A} = \frac{10.92}{\sqrt{(10.92)^2 + (7.28)^2}} = 0.833$$

$$m_{2,A} = \frac{7.28}{\sqrt{(10.92)^2 + (7.28)^2}} = 0.555$$

Ο παραμετρικός τύπος αυτής της κατεύθυνσης απότομης μείωσης θα είναι από την εξ. (6.21),

$$x_1 + 1.82 = 0.833s$$

$$x_2 = 0.555s$$

Αυτή η γραμμή φαίνεται στο σχήμα (6.18), σχεδιάζεται από το σημείο A και διασταυρώνεται με την υψομετρική $y = 5$, όταν s ικανοποιεί την:

$$5 = 3(0.833s - 1.82)^2 + 2(0.555s)^2 + 4(0.833s - 1.82)0.555s$$

και δίνει δύο τιμές 0.44 και 2.44 για το s . Η θέση της πλησιέστερης διασταύρωσης B είναι:

$$x_1 = (0.833s - 1.82)_{s=0.44} = -1.454$$

$$x_2 = (0.555s)_{s=0.44} = 0.244$$

Η βάρθρωση στο νέο σημείο B είναι:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_B = 6(-1.454) + 4(0.244) = -7.75$$

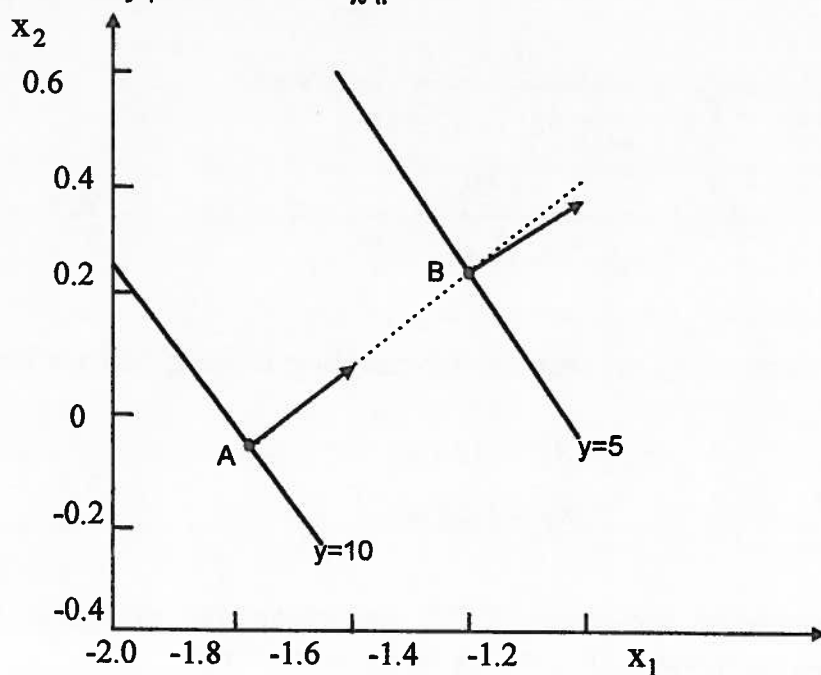
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_B = 4(0.244) - 4(1.454) = -4.84$$

Η κατεύθυνση απότομης μείωσης στο σημείο B καθορίζεται από το ξ_B , από την εξ. (6.24),

$$m_{1,B} = 0.849$$

$$m_{2,B} = 0.528$$

Φαίνεται ότι αυτή η κατεύθυνση είναι διαφορετική από εκείνη που καθορίστηκε στο σημείο A, και η κατεύθυνση απότομης βάρθρωσης είναι μία τοπική ιδιότητα. Οι δύο κατευθύνσεις φαίνονται στο σχήμα.



Σχήμα 6.18

Εκτίμηση της βάρθρωσης Σε μερικές περιπτώσεις είναι πιθανό να βρεθεί μία αναλυτική έκφραση για τη βάρθρωση διαφορίζοντας τη συνάρτησης. Στη πλειοψηφία των προβλημάτων, η συνάρτηση είναι πολύ πολύπλοκη για να τη διαφορίσουμε ή είναι μαύρο κουτί. Σε τέτοιες περιπτώσεις η βάρθρωση καθορίζεται από μία σειρά δοκιμών έτσι ώστε οι συντελεστές της πολυωνυμικής επιφάνειας να μπορούν να εκτιμηθούν. Η απλούστερη παρουσίαση είναι να χρησιμοποιήσουμε μία επίπεδη επιφάνεια με γραμμική εξίσωση

$$\Delta y = \beta_1 \zeta_1 + \beta_2 \zeta_2 + \dots + \beta_n \zeta_n \quad (6.26)$$

όπου Δy = η τιμή της συνάρτησης σχετικά με το βασικό σημείο x_0

ζ_i = μεταβολές $x_i - x_{i,0}$ στο βασικό σημείο

β_j = πειραματικά καθορισμένοι συντελεστές

Αυτή η έκφραση ισχύει μόνο σε μια κλειστή περιοχή στο βασικό σημείο. Εντούτοις μία εκτίμηση της κατεύθυνσης απότομης ανόδου πετυχαίνεται παρατηρώντας την

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{\partial(\Delta y)}{\partial x_j} = \beta_j \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, n \quad (6.27)$$

έτσι ώστε η κατεύθυνση απότομης ανόδου, ξ_1 καθορίζεται από η αριθμούς,

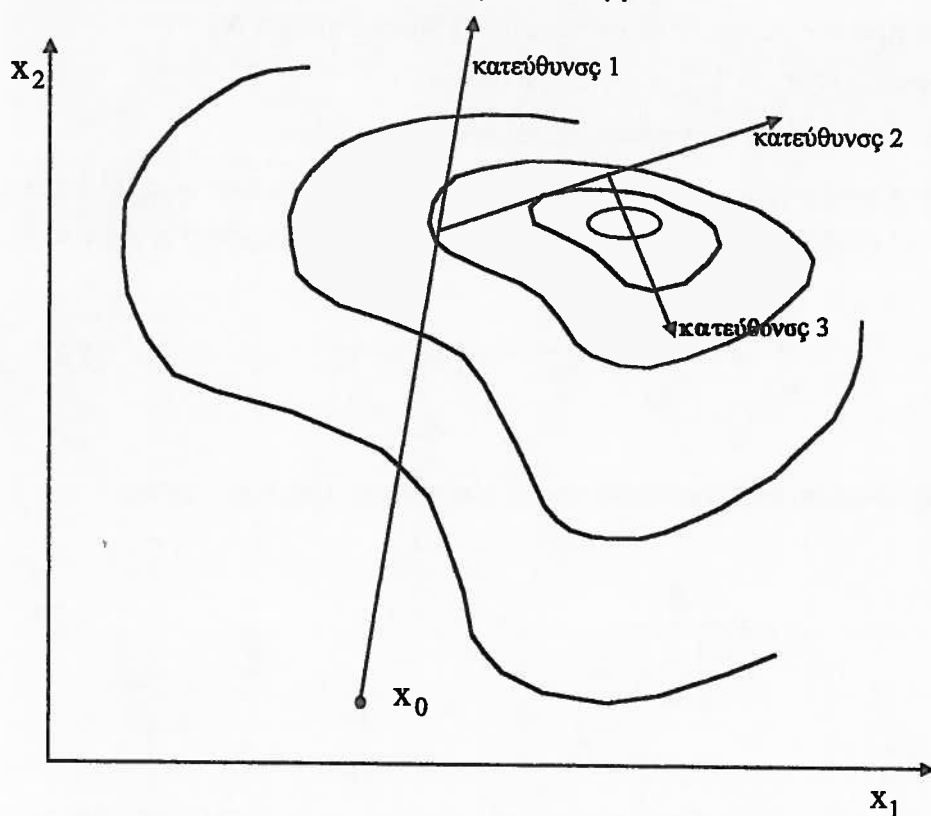
$$m_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}} \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, n \quad (6.28)$$

Η κατεύθυνση απότομης ανόδου μπορεί γι' αυτό να καθοριστεί από μία σειρά δοκιμών, που εκτιμάται από τα β_i . Αν ένα στατιστικά σχεδιασμένο σύνολο δοκιμών χρησιμοποιηθεί, πετυχαίνονται επίσης εκτιμήσεις σφαλμάτων στα β_i .

Η απόσταση της κίνησης στη μέθοδο απότομης ανόδου (καθόδου) Στο δεδομένο βασικό σημείο με καθορισμένη κατεύθυνση της μεγαλύτερης βελτίωσης, το επόμενο πρόβλημα είναι να αποφασιστεί η απόσταση της κίνησης. Αρκετές μέθοδοι είναι διαθέσιμες. Μια επιλογή είναι να προχωρήσει πάνω στη γραμμή απότομης ανόδου από το βασικό σημείο, αρχίζοντας με δεδομένο βήμα:

$$x_{j+1} = x_j + \xi_j s \quad (6.29)$$

Η έρευνα θα συνεχιστεί μέχρι μία προσέγγιση του βέλτιστου να βρεθεί. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα νέο βασικό σημείο και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Αυτό σχηματίζει τη βάση της μεθόδου απότομης ανόδου (καθόδου). Η έρευνα σταματά όταν το βήμα πέφτει κάτω από ένα συμφωνημένο ελάχιστο. Τα αποτελέσματα λίγων σταδίων μιας τέτοιας έρευνας απεικονίζονται στο σχήμα 6.19 για τη δυσδιάστατη περίπτωση. Η έρευνα αρχίζει στο βασικό σημείο x_0 και η κατεύθυνση απότομης ανόδου καθορίζεται. Κατόπιν μία σειρά δοκιμών προς αυτή την κατεύθυνση πραγματοποιούνται για να περιορίσουν το βέλτιστο στο x_1 με προσέγγιση ενός βήματος. Μία νέα τοπική έρευνα στο x_1 δίνει μία νέα κατεύθυνση απότομης ανόδου και ο υπολογισμός επαναλαμβάνεται.



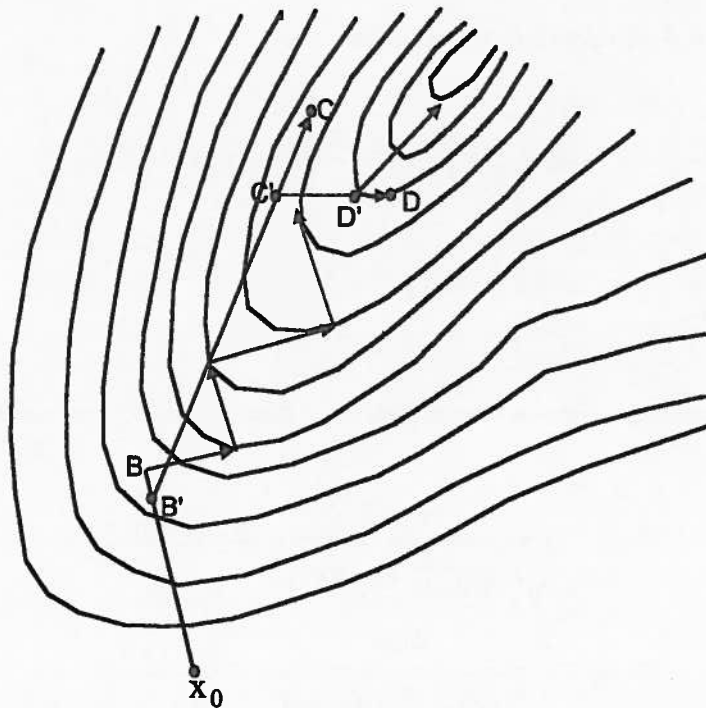
Σχήμα 6.19

Είναι φανερό ότι οι κινήσεις προς την κατεύθυνση απότομης βάρμωσης σε κάθε στάδιο μπορεί να γίνει με ποικίλους τρόπους. Ακόμη ίσως να κινηθούμε μόνο κατά ένα απλό βήμα προκαθορισμένου μήκους, ή να κινηθούμε προς το ίδιο το περιορισμένο βέλτιστο. Στη τελευταία περίπτωση σημειώνεται ότι επιτυχημένες κατευθύνσεις της κίνησης θα είναι ορθογώνιες η μία στην άλλη, εφόσον έχοντας βρει ένα στάδιο βελτίωσης η επόμενη κατεύθυνση μεγαλύτερης βελτίωσης θα είναι σε ορθή γωνία.

Η μέθοδος απότομης ανόδου φαίνεται να είναι η "ύστατη" στις τεχνικές έρευνας, εφόσον κάθε δυσδιάστατη έρευνα αρχίζει στη "καλύτερη" κατεύθυνση.

Εντούτοις, λόγω του γεγονότος ότι η κατεύθυνση απότομης ανόδου είναι μία τοπική ιδιότητα, σε πολλές περιπτώσεις ειδικά σε εκείνες με μεγάλες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μεταβλητών, η μέθοδος δεν είναι αποτελεσματική.

Θεωρούμε την κατάσταση που απεικονίζεται στο σχήμα 6.20, στο οποίο οι υψομετρικές σχηματίζουν μία μακριά και στενή ακμή. Η μέθοδος απότομης ανόδου θα κάνει "ζιγκ-ζαγκ" στην ακμή, με τον ίδιο τρόπο όπως στη μία-τη-φορά μέθοδο. Εφόσον οι παράγωγοι της συνάρτησης πρέπει να εκτιμηθούν σε κάθε νέο σημείο, x_0, x_1, \dots , ένας αρκετά μεγάλος αριθμός δοκιμών θα απαιτηθεί προφανώς για να βρεθεί το βέλτιστο.



Σχήμα 6.20

Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, ο Booth [1955] πρότεινε να τροποποιηθεί η μέθοδος σε κίνηση μόνο στο 90% της απόστασης της βέλτιστης τιμής κατά μήκος της γραμμής απότομης ανόδου και στη διάρκεια τεσσάρων ή πέντε κινήσεων τότε γίνεται ένα ολόκληρο βήμα στην πέμπτη κίνηση. Αυτή η διαδικασία έχει το πλεονέκτημα ότι ακολουθεί την ακμή από κοντά (σχήμα 6.20). Έτσι αρχίζοντας από το σημείο A προς την κατεύθυνση απότομης ανόδου, βρίσκουμε το σημείο B σαν βέλτιστο. Αντί να κρατήσουμε το B ως το επόμενο βασικό σημείο, θα διαλέγουμε το σημείο B', όπου $AB' = 0.9(AB)$. Ομοίως, στον επόμενο κύκλο έρευνας το C παίρνεται ως το νέο βασικό σημείο, όπου $B'C' = 0.9(B'C)$. Το αποτέλεσμα είναι ότι η μακριά στενή ακμή διασχίζει με λιγότερες δοκιμές από την βασική προσέγγιση.

Παράδειγμα 6 (Απότομη κάθοδος εφαρμόζεται σε μια Rosenbrock συνάρτηση)

Ο Rosenbrock [1960] χρησιμοποίησε το παρακάτω τέστ για να συγκρίνει διάφορες τεχνικές έρευνας. Θα ελαχιστοποιήσουμε την y , όπου

$$y = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (6.30)$$

Ας χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο απότομης καθόδου για να βρούμε το βέλτιστο. Η απόσταση της κίνησης είναι τέτοια που βελτιστοποιεί την συνάρτηση κατά μήκος της γραμμής έρευνας.

Στάδιο 1 Έστω το σημείο $x_0 = \{2,2\}$ είναι το αρχικό βασικό σημείο. Οι πρώτες παράγωγοι εκτιμώνται στο βασικό σημείο είναι:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_0 &= -400(x_2 x_1 - x_1^3) - 2(1 - x_1) = 1.602 \\ \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_0 &= 200(x_2 - x_1^2) = -400 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Η κατεύθυνση απότομης καθόδου στο σημείο x_0 δίνεται από ξ_0 με συνιστώσες:

$$\begin{aligned} m_{1.0} &= \frac{-1.602}{\sqrt{(1.602)^2 + (400)^2}} = -0.9702 \\ m_{2.0} &= \frac{400}{\sqrt{(1.602)^2 + (400)^2}} = 0.2422 \end{aligned}$$

Η παραμετρική της ευθεία γραμμής στην κατεύθυνση απότομης καθόδου δίνεται από:

$$x_1 = 2 - 0.9702s$$

$$x_2 = 2 + 0.2422s$$

Έτσι η συνάρτηση γίνεται:

$$y = 100[2 + 0.2422s - (2 - 0.9702s)^2]^2 + [1 - (2 - 0.9702s)]^2$$

και η τιμή του s μπορεί να επιλεγεί τέτοιο ώστε η y να ελαχιστοποιείται προς αυτή την κατεύθυνση. Γι' αυτό χρησιμοποιώντας μία μονοδιάστατη τεχνική έρευνας, βρίσκουμε $s = 0.555(\pm 0.003)$ και $y = 0.213$ στο νέο σημείο που συγκρίνεται με $y = 401$ στο βασικό σημείο. Οι νέες συντεταγμένες είναι:

$$x_{1,1} = 2 - 0.9702(0.555) = 1.4615$$

$$x_{2,1} = 2 + 0.2422(0.555) = 2.1345$$

Στάδιο 2 Η βάθμωση στο νέο βασικό σημείο έχει συνιστώσες

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0.922 \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$$

Σημειώνουμε ότι αυτές οι τιμές είναι αρκετά διαφορετικές από εκείνες του προηγούμενου σημείου, που δείχνει ξανά ότι η βάθμωση είναι μία τοπική ιδιότητα. Τώρα ερευνούμε μία δεύτερη φορά στην κατεύθυνση παράλληλη στη νέα βάθμωση, που καθορίζεται από

$$m_{1,2} = -1.0 \quad \text{και} \quad m_{2,2} = 0.0$$

Έτσι θέλουμε να ερευνήσουμε κατά μήκος μιας γραμμής που καθορίζεται παραμετρικά ως

$$x_1 = 1.4615 - s$$

$$x_2 = 2.1345$$

για να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης:

$$y = 100[2.1345 - (1.4615 - s)^2]^2 + (0.4615 - s)^2$$

Η απόσταση της κίνησης είναι αρκετά μικρή, εδώ βρίσκουμε $s = 0.0010$, που δίνει $y = 0.212$. Πράγματι, η έρευνα απότομης καθόδου θα προχωρήσει υπερβολικά αργά στο βέλτιστο, για αυτή τη συνάρτηση έχει σχεδιαστεί από τον Rosenbrock για να αμφισβητήσει τη μέθοδο απότομης καθόδου.

Ακόμη με τέτοιες τροποποιήσεις υπάρχει ένα σημαντικό πλήθος ταλαντώσεων, εφόσον η κατεύθυνση απότομης βάθμωσης δεν κατευθύνεται πάντα προς το επιθυμητό βέλτιστο. Αυτό φαίνεται από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $y = 16x_1^2 + x_2^2$. Αυτό παράγει ένα ταλαντωμένο μονοπάτι έρευνας, εφόσον οι διαδοχικές κατευθύνσεις απότομης καθόδου δεν περνάει από το ελάχιστο. Αν καθορίσουμε $x_3 = 4x_1$, τότε η συνάρτηση γίνεται $y = x_3^2 + x_2^2$, και η κίνηση από οποιοδήποτε σημείο προς την κατεύθυνση απότομης καθόδου θα περάσει από το ελάχιστο. Οι μέθοδοι απότομης βάθμωσης θα δουλεύουν καλύτερα αν η συνάρτηση

μπορεί να μετασχηματιστεί σε κάποια με σχεδόν κυκλικές υψομετρικές. Αυτό μπορεί μερικές φορές να κατορθωθεί, αλλά είναι πιθανό καλύτερα να μελετήσουμε άλλες βαθμωτές μέθοδοι.

Άλλη βαθμωτή μέθοδος - Συζυγείς κατευθύνσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε εκείνες τις τεχνικές έρευνας που η κατεύθυνση της κίνησης γίνεται από ένα βασικό σημείο προς την κατεύθυνση απότομης ανόδου. Οι περισσότερες μέθοδοι απότομης ανόδου τείνουν να αποδώσουν μία ταλαντευόμενη προσέγγιση στο τοπικό βέλτιστο, ειδικά όταν οι υψομετρικές της συνάρτησης είναι επιμήκεις. Υπάρχουν άλλες μέθοδοι έρευνας που χρησιμοποιούν τις βαθμωτές για να προσδιορίσουν την κατεύθυνση της κίνησης, αλλά όχι απαραίτητα κίνηση στην κατεύθυνση απότομης ανόδου. Αυτές που θα μελετηθούν εδώ έχουν την ιδιότητα της τετραγωνικής σύγκλισης στο ελάχιστο $y(x^*)$ της συνάρτησης

$$y = y(x^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} (x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) \quad (6.32)$$

βρίσκονται με πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, συνήθως η. Εδώ τα $\alpha_{i,j}$ είναι συμμετρικά ($\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$) και θετικά ορισμένα, έτσι που ο όρος

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} h_i h_j$$

να είναι μεγαλύτερος από μηδέν για όλα τα $h_i (= x_i - x_i^*)$. Αυτή είναι μία επαρκής συνθήκη για το σταθερό σημείο της y που είναι το ελάχιστο.

Αυτές οι μέθοδοι που εκτελούνται σ' ένα σύνολο κατευθύνσεων, ονομάζονται *συζυγής κατευθύνσεις*, και εξασφαλίζουν ότι το βέλτιστο της τετραγωνικής συνάρτησης βρίσκεται σ' ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε μία μαθηματική απόδειξη για να συμπληρώσουμε την προηγούμενη μελέτη.

Κοινή χαρακτηριστική της μεθόδου συζυγής κατεύθυνσης Μια κατεύθυνση $\xi^{(k)} = \{m_1^{(k)}, m_2^{(k)}, \dots, m_n^{(k)}\}$ στο k -στο στάδιο της επανάληψης έχει επιλεγεί. Όλες οι μέθοδοι που μελετώνται εδώ απαιτούν μία κίνηση μήκους $s^{(k)}$ προς μία κατεύθυνση τέτοια ώστε η συνάρτηση να βελτιστοποιείται. Συγκεκριμένα, αν $x^{(k)}$ είναι η κατεύθυνση της κίνησης, τότε $s^{(k)}$ επιλέγεται έτσι ώστε η

$y(x^{(k)} + s^{(k)}\xi^{(k)})$ να βελτιστοποιείται στο $(k+1)$ στάδιο. Είναι απαραίτητο γι' αυτό να διαλέξουμε το $s^{(k)}$ ως:

$$\frac{dy^{(k+1)}}{ds^{(k)}} = 0$$

όπου $y^{(k+1)} = y(x^{(k+1)}) = y(x^{(k)} + s^{(k)}\xi^{(k)})$.

Τώρα για οποιοδήποτε σύνολο μετακινήσεων στο σημείο $x^{(k+1)}$,

$$dy = \sum_{i=1}^n y_{x_i}^{(k+1)} dx_i$$

όπου οι μερικές παράγωγοι εκτιμώνται στο $x^{(k+1)}$. Για μία μετακίνηση προς την κατεύθυνση της κίνησης από το σημείο $x^{(k)}$ στο $x^{(k+1)}$, έχουμε

$$\frac{dy}{ds^{(k)}} = \sum_{i=1}^n y_{x_i}^{(k+1)} \frac{dx_i}{ds^{(k)}} = \sum_{i=1}^n y_{x_i}^{(k+1)} m_i^{(k)}$$

Αν θέσουμε

$$\sum_{i=1}^n y_{x_i}^{(k+1)} m_i^{(k)} = 0 \quad (6.33)$$

τότε το $s^{(k)}$ θα επιλεγεί έτσι ώστε η y να βελτιστοποιηθεί προς αυτή την κατεύθυνση. Αυτό είναι πολύ σημαντικό αποτέλεσμα και θα χρησιμοποιηθεί πολλές φορές παρακάτω. Δείχνει ότι η έρευνα προς την δοθείσα κατεύθυνση θα συνεχιστεί μέχρι να βρεθεί το σημείο στο οποίο η βάρθρωση της συνάρτησης να είναι κάθετη (ορθογώνια) στη κατεύθυνση της έρευνας.

Η εξ. (6.33) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί μία σαφής έκφραση για το $s^{(k)}$. Έτσι διαφορίζοντας την εξ. (6.32) και χρησιμοποιώντας την συμμετρική ιδιότητα για το $\alpha_{i,j}$, έχουμε ότι

$$y_{x_i} = \sum_{r=1}^n \alpha_{i,r} (x_r - x_r^*)$$

Γι' αυτό

$$y_{x_i}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^n \alpha_{i,r} (x_r^{(k+1)} - x_r^*) \quad (6.34)$$

$$\eta \quad y_{x_i}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^n \alpha_{i,r} (x_r^{(k)} + s^{(k)} m_r^{(k)} - x_r^*)$$

Τακτοποιώντας την παίρνουμε

$$y_{x_i}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^n \alpha_{i,r} (x_r^{(k)} - x_r^*) + s^{(k)} \sum_{r=1}^n \alpha_{i,r} m_r^{(k)} \quad (6.35)$$

Αφού αντικαταστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στην εξ. (6.33), έχουμε

$$s^{(k)} = - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \alpha_{i,r} (x_r^{(k)} - x_r^*) m_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \alpha_{i,r} m_i^{(k)} m_r^{(k)}} \quad (6.36)$$

το οποίο μειώνεται με την βοήθεια της εξ. (6.34) σε

$$s^{(k)} = - \frac{\sum_{i=1}^n y_{x_i}^{(k)} m_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \alpha_{i,r} m_i^{(k)} m_r^{(k)}} \quad (6.37)$$

Όλες οι μέθοδοι που μελετώνται επιλέγουν το $s^{(k)}$, τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την εξ. (6.37) και διαφέρουν μόνο στην επιλογή μιας κατεύθυνσης της έρευνας.

Συζυγής κατευθύνσεις Πως να διαλέξουμε ένα σύνολο συζυγών κατευθύνσεων για την έρευνα; Σε οποιοδήποτε πρακτικό πρόβλημα η συνάρτηση δεν θα έχει τον τύπο που δίνεται από την εξ. (6.32), ή αν τον έχει (αυτό το γεγονός είναι άγνωστο), εφόσον δεν είναι απαραίτητο η συνάρτηση να ξεκινά από αυτό τον τύπο. Εντούτοις παρακάτω υποθέτουμε ότι ο τετραγωνικός τύπος της συνάρτησης είναι ο κατάλληλος και ότι είναι γνωστός. Αυτή η υπόθεση θα εξαφανιστεί στην επόμενη παράγραφο.

Αρχίζοντας με το βασικό σημείο στο $(j+1)$ στάδιο, μπορούμε να γράψουμε

$$x_i^{(j+2)} = x_i^{(j+1)} + s^{(j+1)} m_i^{(j+1)} \quad (6.38)$$

όπου το $s^{(j+1)}$ επιλέγεται από την εξ. (6.37).

Εφόσον

$$x_i^{(j+3)} = x_i^{(j+2)} + s^{(j+2)} m_i^{(j+2)}$$

τότε
$$x_i^{(j+3)} = x_i^{(j+2)} + s^{(j+1)} m_i^{(j+1)} + s^{(j+2)} m_i^{(j+2)}$$

Συνεχίζοντας γράφουμε γενικά ότι

$$x_i^{(n)} = x_i^{(j+1)} + \sum_{r=j+1}^{n-1} s^{(r)} m_i^{(r)} \quad \text{για } \forall j \text{ στο } 0 \leq j \leq n-1 \quad (6.39)$$

Επίσης η έκφραση για τη βάθμωση, εξ. (6.34), μπορεί να γραφεί

$$y_{x_i}^{(n)} = y_{x_i}^{(j+1)} + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^{n-1} \alpha_{i,r} s^{(l)} m_r^{(l)} \quad (6.40)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη της έκφρασης με $m_i^{(j)}$ και αθροίσουμε στο i , τότε παίρνουμε την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^n y_{x_i}^{(n)} m_i^{(j)} = \sum_{i=1}^n y_{x_i}^{(j+1)} m_i^{(j)} + \sum_{l=j+1}^{n-1} \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_{i,r} s^{(l)} m_r^{(l)} m_i^{(j)} \quad (6.41)$$

Ένα συζυγές σύνολο κατευθύνσεων καθορίζεται το σύνολο που ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_{r,i} m_r^{(l)} m_i^{(l)} = 0 \quad \text{για } l \neq j \quad (6.42)$$

Σημειώνεται ότι αυτή η έκφραση δεν καθορίζει ένα μοναδικό σύνολο κατευθύνσεων. Υπάρχει ένας άπειρος αριθμός συζυγών κατευθύνσεων που αντιστοιχεί σ' ένα δοσμένο σύνολο $\alpha_{i,j}$.

Αν δεχτούμε μόνο συζυγής κατευθύνσεις για έρευνα, τότε η εξ. (6.41) μειώνεται σε:

$$\sum_{i=1}^n y_{x_i}^{(n)} m_i^{(j)} = 0 \quad (6.43)$$

Ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά εξαφανίζεται επειδή το $s^{(j)}$ επιλέχτηκε να ικανοποιεί την εξ. (6.33) και ο δεύτερος όρος εξαφανίζεται επειδή οι κατευθύνσεις είναι συζυγής.

Εφόσον η εξ. (6.33) ικανοποιείται για όλα τα j στο διάστημα $0 \leq j \leq n-1$, η μόνη πιθανή λύση είναι:

$$y_{x_i}^{(n)} = 0$$

Εντούτοις για την τετραγωνική έκφραση ύστερα από μελέτη, οι βαθμωτές εξαφανίζονται μόνο στο ελάχιστο και γι' αυτό η $x^{(n)}$ είναι η λύση.

Πραγματικά το συμπέρασμα ότι η $y_{x_i}^{(n)}$ πρέπει να εξαφανιστεί για να ικανοποιείται η εξ. (6.33) είναι πιθανό στην υπόθεση ότι ο $\xi^{(j)}$ σχηματίζει ένα γραμμικό ανεξάρτητο σύνολο η διανυσμάτων. Εντούτοις τα η διανύσματα κατευθύνσεων $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n-1)}$ σχηματίζουν ένα γραμμικό ανεξάρτητο σύνολο, αν είναι συζυγής κατευθύνσεις και αν ο τετραγωνικός όρος είναι θετικά ορισμένος, όπως υποθέσαμε εδώ. Αυτή η απόδειξη δόθηκε από τον Beckman [1960].

Η κατάσταση συνοψίζεται στα εξής: Δεδομένου κάποιου συζυγές συνόλου κατευθύνσεων (και υπάρχει άπειρος αριθμός τέτοιων συνόλων), ερευνώντας κάθε τέτοια κατεύθυνση, μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο μιας τετραγωνικής συνάρτησης σε η ή λιγότερα στάδια. Λιγότερα από η στάδια ίσως χρειαστούν αν κάποια από τις κατευθύνσεις εξαφανιστεί.

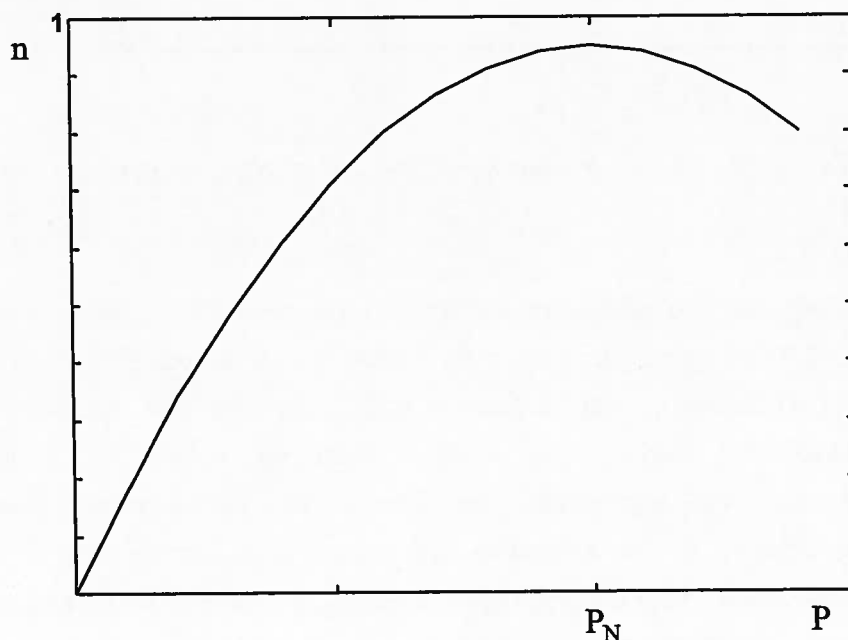
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ:

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

7.1 Εισαγωγή

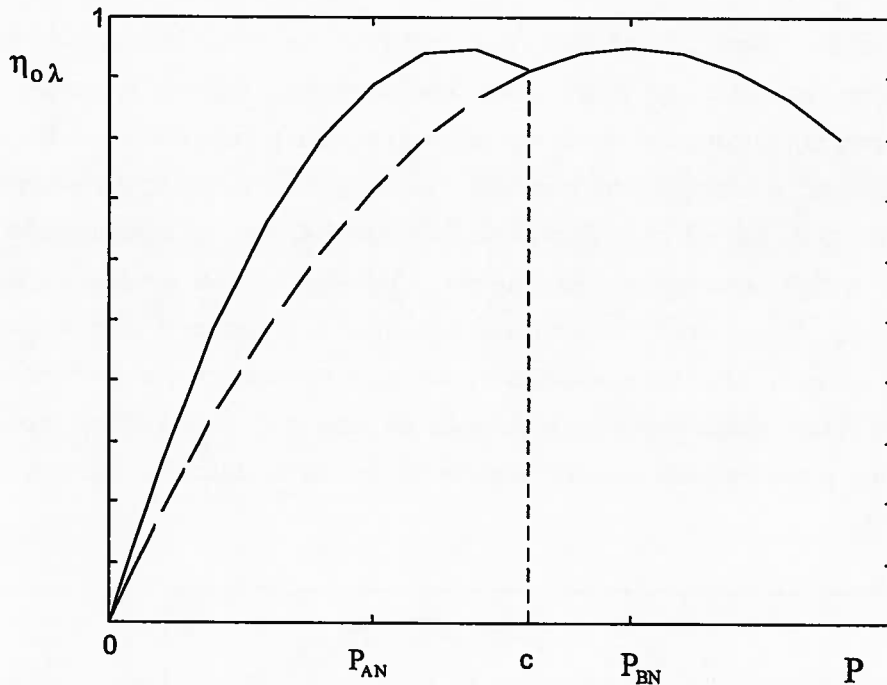
Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται μια μέθοδος για τον καθορισμό των ονομαστικών στοιχείων και της δομής μιας εγκατάστασης ισχύος, η οποία να εξυπηρετεί στη μόνιμη κατάσταση κάποιο μεταβλητό φορτίο με την βέλτιστη δυνατή απόδοση. Συγκεκριμένα, επιχειρείται να δοθεί ένα σχήμα λειτουργίας στη μόνιμη κατάσταση το οποίο να οδηγεί σε αύξηση του βαθμού απόδοσης μιας βιομηχανικής διαδικασίας για μια ευρεία περιοχή λειτουργίας, δηλαδή για μια ευρεία περιοχή ζητούμενης ισχύος. Όπως είναι γνωστό οποιαδήποτε εγκατάσταση ισχύος είναι σχεδιασμένη να αποδίδει τον μέγιστο βαθμό απόδοσης κοντά στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας της. Όσο απομακρύνεται η λειτουργία από την ονομαστική τόσο ο βαθμός απόδοσης μειώνεται και μάλιστα ακολουθεί εν γένει καμπύλες της μορφής του σχήματος 7.1.



Σχήμα 7.1: Τυπική καμπύλη βαθμού απόδοσης-ισχύος

Έτσι για την βελτιστοποίηση του βαθμού απόδοσης στη μόνιμη λειτουργία προτείνεται ο διαχωρισμός της εγκατάστασης σε δύο παρόμοιες εγκαταστάσεις

διαφορετικής ονομαστικής ισχύος η καθεμία, έτσι ώστε ανάλογα με το επιθυμητό σημείο λειτουργίας να χρησιμοποιούνται είτε η μικρότερη για χαμηλότερες ισχύεις λειτουργίας είτε η μεγαλύτερη μονάδα για μεγάλες ισχύεις λειτουργίας είτε και οι δύο μαζί παράλληλα για ακόμη μεγαλύτερες ισχύεις. Έτσι έχουμε σαν αποτέλεσμα ότι η λειτουργία στη μόνιμη κατάσταση θα βρίσκεται κοντύτερα στα ονομαστικά σημεία λειτουργίας των εγκαταστάσεων απ' ότι, αν χρησιμοποιούσαμε μία μόνο μονάδα για όλο το επιθυμητό εύρος λειτουργίας (βλέπε σχήμα 7.2 σε σχέση με σχήμα 7.1).



Σχήμα 7.2: Συνολικός βαθμός απόδοσης-ισχύος δύο παρόμοιων εγκαταστάσεων

Τα προβλήματα που πρέπει να λυθούν για την παράλληλη αυτή λειτουργία είναι τα εξής: α) Η ανάπτυξη ενός γενικού μαθηματικού μοντέλου για το βαθμό απόδοσης της εγκατάστασης λαμβανόμενου υπόψη ότι διαθέτει χαρακτηριστικά μεγάλης εγκατάστασης ισχύος. Το μοντέλο αυτό θα πρέπει να μπορεί να προσαρμόζεται και να περιγράφει την λειτουργία για μονάδες διαφόρων ονομαστικών στοιχείων. β) Για δεδομένο επιθυμητό εύρος λειτουργίας να γίνεται κάθε φορά ο κατάλληλος διαχωρισμός της λειτουργίας, δηλαδή η κατάλληλη επιλογή του ονομαστικού μεγέθους της μικρότερης και μεγαλύτερης μονάδας που θα εξυπηρετούν την διαδικασία σε όλο το προκαθορισμένο εύρος λειτουργίας.

Επιμέρους προβλήματα που προκύπτουν για τον καθορισμό του κατάλληλου διαχωρισμού είναι π.χ. Αν το εύρος αυτό λειτουργίας ξεκινά από το μηδέν μέχρι κάποιο ορισμένο μέγιστο ή αν θεωρούμε ότι υπάρχει κάποιο ελάχιστο μεγαλύτερο του μηδενός κάτω από το οποίο υποθέτουμε ότι δεν θα έχουμε ζήτηση. Ή αν ακόμη η

λειτουργία μέσα στο προκαθορισμένο αυτό εύρος έχει πάντα την ίδια πιθανότητα να ζητηθεί για οποιοδήποτε σημείο ή αν η πιθανότητα για κάποιο σημείο λειτουργίας είναι μεγαλύτερη από τα υπόλοιπα, οπότε χρειάζεται και η εμπλοκή πιθανοτικής περιγραφής στην αναμενόμενη ζήτηση κ.λ.π.

Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίζονται στη συνέχεια και δίνονται πρωτότυπες και επιτυχείς λύσεις διαχωρισμού της διαδικασίας με σημαντική βελτίωση του συνολικού βαθμού απόδοσης.

7.2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Σαν διάταξη με χαρακτηριστικά μεγάλης εγκατάστασης ο βαθμός απόδοσης της θεωρούμε ότι ακολουθεί τις καμπύλες της μορφής του σχήματος 7.1.

Με σκοπό την ανεξαρτητοποίηση των καμπυλών του βαθμού απόδοσης από την συγκεκριμένη ονομαστική τιμή της εγκατάστασης χρησιμοποιούμε αντί της καμπύλης του σχήματος 7.1 τις αντίστοιχες ημιανηγμένες καμπύλες του βαθμού απόδοσης ως προς τα ονομαστικά τους μεγέθη, δηλαδή τις καμπύλες $n = f\left(\frac{P}{P_N}\right)$, όπου P_N η ονομαστική τιμή ισχύος της εγκατάστασης (σχήμα 7.3).

Έτσι το μέγιστο στην ημιανηγμένη καμπύλη εμφανίζεται πάντοτε στο σημείο τεταγμένης 1 αντί του P_N ανεξάρτητα προς την τιμή του P_N (αν δηλαδή $P_N = P_{AN}$ ή $P_N = P_{BN}$).

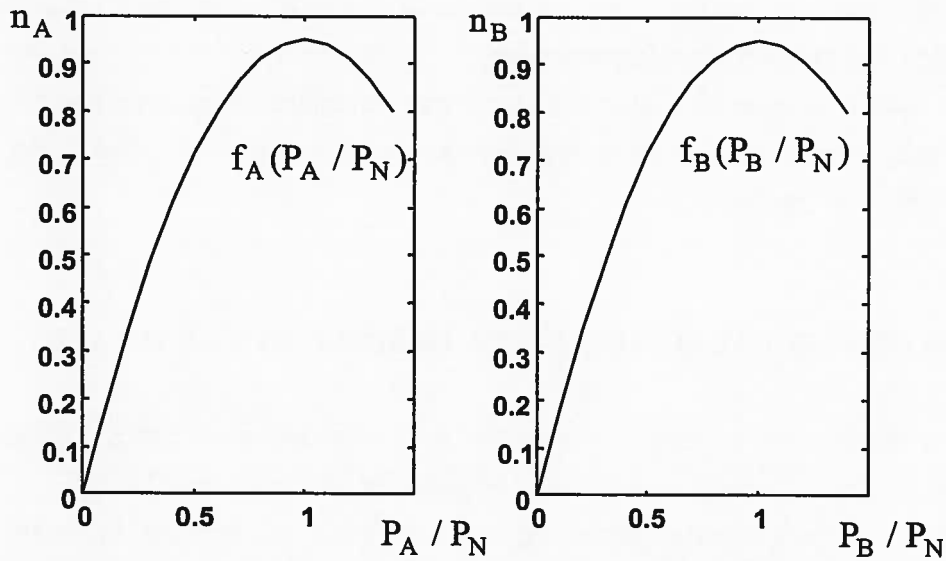
Στη συνέχεια αναπτύσσουμε τα μοντέλα που περιγράφουν τον βαθμό απόδοσης σε δύο περιπτώσεις: α) όταν οι καμπύλες $n = f\left(\frac{P}{P_N}\right)$ είναι ακριβώς ίδιες, β) όταν οι καμπύλες αυτές διαφοροποιούνται μερικά ως προς το μέγιστο (στη λογική ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ισχύς της εγκατάστασης τόσο μεγαλύτερος βαθμός απόδοσης επιτυγχάνεται για την ονομαστική λειτουργία).

7.2.1 Περίπτωση α: Ίδιες ημιανηγμένες καμπύλες βαθμού απόδοσης

Στην περίπτωση αυτή έχουμε καμπύλες της ίδιας μορφής (Σχήμα 7.3), δηλαδή ισχύει για τις ημιανηγμένες καμπύλες:

$$n_A = n_B \Rightarrow f_A\left(\frac{P_A}{P_{AN}}\right) = f_B\left(\frac{P_B}{P_{BN}}\right) \quad (7.1)$$

οι οποίες έχουν ένα μέγιστο για $P_A = P_{AN}$ και $P_B = P_{BN}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 7.3: Ίδιες καμπύλες βαθμού απόδοσης-ισχύος

Αυτό σημαίνει ότι για να υπάρχει μέγιστο πρέπει $f'' < 0$ και μπορούμε να θεωρήσουμε σαν απλούστερο μοντέλο αυτό που προκύπτει από την σχέση:

$$f'_A = c_A (1 - x_A) \quad (7.2)$$

όπου $x_A \equiv P_A/P_{AN}$ και $c_A > 0$. Τότε ολοκληρώνοντας την (7.2) παίρνουμε την ακόλουθη δευτεροβάθμια περιγραφή του βαθμού απόδοσης

$$f_A = c_A x_A - \frac{c_A}{2} x_A^2 + d_A \quad (7.3)$$

Αν θεωρήσουμε για την διαδικασία αυτή ονομαστικό βαθμό απόδοσης $\eta_A = 0.95$

τότε σύμφωνα με την αναμενόμενη μορφή της ισχύουν τα εξής:

για $x_A = 0$ και $\eta_A = 0$ παίρνουμε $d_A = 0$ και

για $x_A = 1$ και $\eta_A = 0.95$ παίρνουμε $c_A = 1.9$.

Επομένως

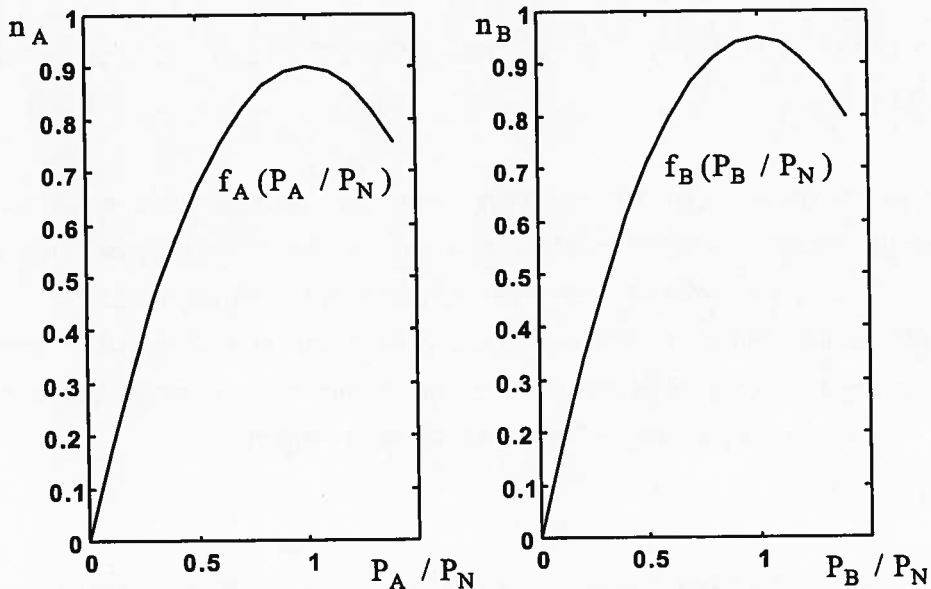
$$f_A = 1.9x_A - 0.95x_A^2 \quad (7.4)$$

και επειδή οι καμπύλες είναι ίδιες έχουμε κατά παρόμοιο τρόπο ότι

$$f_B = 1.9x_B - 0.95x_B^2 \quad (7.5)$$

7.2.2 Περίπτωση β: Διαφοροποιημένες ημιανηγμένες καμπύλες βαθμού απόδοσης

Στην περίπτωση αυτή έχουμε καμπύλες παρόμοιας μορφής, οι οποίες έχουν διαφορετική τιμή για το μέγιστο στο $P_A = P_{AN}$ και $P_B = P_{BN}$ αντίστοιχα (Σχήμα 7.4).



Σχήμα 7.4: Διαφορετικού μεγίστου καμπύλες βαθμού απόδοσης-ισχύος

Για να υπάρχει μέγιστο η καμπύλη πρέπει $f'' < 0$ με $c_A > 0$, και μπορούμε να πάρουμε το απλούστερο μοντέλο όπως προηγουμένως ως εξής :

$$f'_A = c_A(1 - x_A) \quad (7.6)$$

Ομοίως ολοκληρώνοντας την (7.6) έχουμε:

$$f_A = c_A x_A - \frac{c_A}{2} x_A^2 + d_A \quad (7.7)$$

για την οποία θεωρώντας ονομαστικό βαθμό απόδοσης $n_A = 0.9$ ισχύουν:

για $x_A = 0$ και $n_A = 0$ παίρνουμε $d_A = 0$ και

για $x_A = 1$ και $n_A = 0.9$ παίρνουμε $c_A = 1.8$.

Επομένως

$$f_A = 1.8x_A - 0.9x_A^2 \quad (7.8)$$

Η δεύτερη καμπύλη για ονομαστικό βαθμό απόδοσης 0.95 είναι αντίστοιχα:

$$f_B = 1.9x_B - 0.95x_B^2 \quad (7.9)$$

7.3 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ

Με βάση τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο θα προχωρήσουμε στον βέλτιστο ορισμό των ονομαστικών περιοχών της κάθε περίπτωσης. Τέτοιες περιπτώσεις όπως όταν το εύρος της λειτουργίας ξεκινά από το μηδέν μέχρι κάποιο ορισμένο μέγιστο, ή όταν ξεκινά από κάποιο σημείο κάτω του οποίου δεν υπάρχει ζήτηση. Ή ακόμη όταν η λειτουργία στο προκαθορισμένο εύρος δεν έχει την ίδια πιθανότητα να ζητηθεί για οποιοδήποτε σημείο.

7.3.1 Λειτουργία υπό ομοιόμορφη πιθανότητα ζήτησης από 0 μέχρι κάποιο μέγιστο (περίπτωση ίδιων ημιανηγμένων καμπυλών βαθμού απόδοσης)

Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ζήτησης είναι ομοιόμορφη για οποιοδήποτε σημείο λειτουργίας από το μηδέν μέχρι κάποιο ορισμένο μέγιστο. Ανάγουμε την μία καμπύλη στην άλλη (σχήμα 7.5), δηλαδή υποθέτουμε ότι ισχύει $P_{AN} = kP_{BN}$, με $0 < k < 1$ και παίρνουμε την συνολική καμπύλη. Δηλαδή ανάγουμε και τις δύο καμπύλες στο ίδιο σχήμα θεωρώντας ως τεταγμένη x :

$$x = \frac{P}{P_{BN}}$$

και συνεπώς

$$x = \begin{cases} \frac{P_A}{P_{BN}} & \text{για } 0 \leq x \leq c \\ \frac{P_B}{P_{BN}} & \text{για } x > c \end{cases} \quad (7.10)$$

Οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} f_A &= 1.9 \frac{P_A}{P_{AN}} - 0.95 \left(\frac{P_A}{P_{AN}} \right)^2 = 1.9 \left(\frac{P_A}{kP_{BN}} \right) - 0.95 \left(\frac{P_A}{kP_{BN}} \right)^2 = \\ &= \frac{1.9}{k} x - \frac{0.95}{k^2} x^2 \end{aligned} \quad (7.11)$$

και

$$f_B = 1.9x - 0.95x^2 \quad (7.12)$$

Στο σημείο $x = c$ η πρώτη καμπύλη φθίνει και συναντά την δεύτερη, δηλαδή έχουμε $f_A = f_B$. Εξισώνοντας τις (7.11) και (7.12) παίρνουμε:

$$\frac{1.9}{k} x - \frac{0.95}{k^2} x^2 = 1.9x - 0.95x^2 \Rightarrow x = \frac{2k}{k+1}$$

δηλαδή

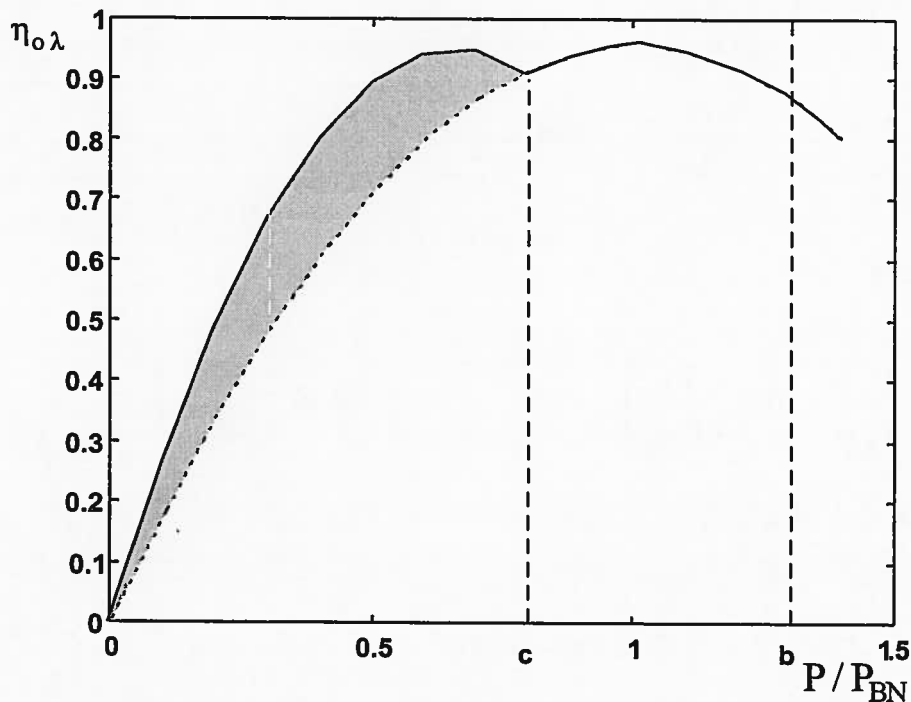
$$c(k) = \frac{2k}{k+1} \quad \text{ή} \quad k = \frac{c}{2-c} \quad (7.13)$$

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος δίνεται αν θελήσουμε να βελτιστοποιήσουμε το εμβαδό της διαφοράς μεταξύ των δύο συναρτήσεων στο διάστημα $0 < x < c$ (σχήμα 7.5). Το εμβαδό αυτό δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$h = \int_0^c (f_A - f_B) dx = \int_0^c \left[\frac{1.9}{k} x - \frac{0.95}{k^2} x^2 - (1.9x - 0.95x^2) \right] dx \quad (7.14)$$

Υπολογίζοντας το εμβαδό έχουμε:

$$h = \frac{1.9}{2k} c^2 - \frac{0.95}{3k^2} c^3 - 0.95c^2 + \frac{0.95}{3} c^3$$



Σχήμα 7.5: Συνολικός βαθμός απόδοσης-ισχύος ίδιων ημιανηγμένων καμπυλών

Αντικαθιστώντας το k από την (7.13) έχουμε:

$$h = -\frac{19c(c-1)}{30} \quad (7.15)$$

Για να ελαχιστοποιήσω το εμβαδό πρέπει

$$\frac{\partial h}{\partial c} = 0 \Rightarrow 2c - 1 = 0 \quad (7.16)$$

που δίνει λύση $c = 0.5$.

7.3.2 Λειτουργία υπό ομοιόμορφη πιθανότητα ζήτησης από $\alpha > 0$ μέχρι κάποιο μέγιστο (περίπτωση ίδιων ημιανηγμένων καμπυλών βαθμού απόδοσης)

Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ζήτησης είναι ομοιόμορφη για οποιοδήποτε σημείο λειτουργίας από κάποιο ελάχιστο μεγαλύτερο του μηδενός μέχρι κάποιο ορισμένο μέγιστο. Ανάγουμε την μία καμπύλη στην άλλη (σχήμα 7.6), δηλαδή υποθέτουμε ότι ισχύει $P_{AN} = kP_{BN}$, με $0 < k < 1$ και παίρνουμε την συνολική

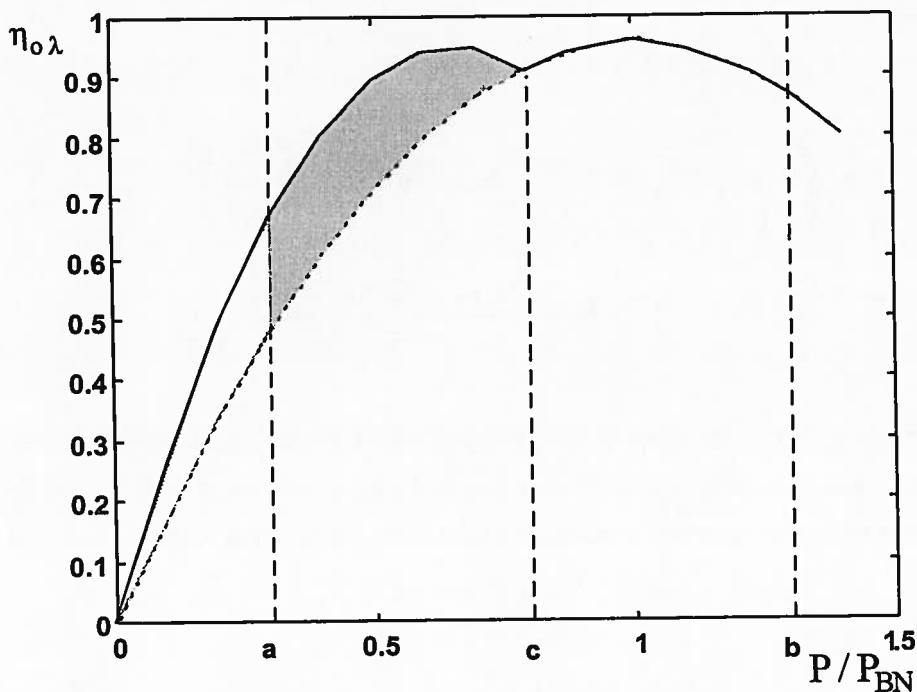
καμπύλη. Δηλαδή ανάγουμε και τις δύο καμπύλες στο ίδιο σχήμα θεωρώντας την τεταγμένη x από την εξ. (7.10). Οπότε παίρνουμε τις καμπύλες από τις εξ. (7.11) και (7.12), όπως και την σχέση μεταξύ του c και του k από την εξ. (7.13).

Μία βέλτιστη λύση του προβλήματος δίνεται αν θελήσουμε να βελτιστοποιήσουμε το εμβαδό της διαφοράς μεταξύ των δύο συναρτήσεων στο διάστημα $a < x < c$ (σχήμα 7.6). Το εμβαδό αυτό δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$h = \int_a^c (f_A - f_B) dx = \int_a^c \left[\frac{1.9}{k} x - \frac{0.95}{k^2} x^2 - (1.9x - 0.95x^2) \right] dx \quad (7.17)$$

Υπολογίζοντας το εμβαδό έχουμε:

$$h = \frac{1.9}{2k} (c^2 - a^2) - \frac{0.95}{3k^2} (c^3 - a^3) - 0.95(c^2 - a^2) + \frac{0.95}{3} (c^3 - a^3)$$



Σχήμα 7.6: Συνολικός βαθμός απόδοσης-ισχύος ίδιων ημιανηγμένων καμπυλών

Αντικαθιστώντας το k από την (7.13) έχουμε:

$$h = -\frac{19(c-1)(2\alpha^3 - 3\alpha^2c + c^3)}{30c^2} \quad (7.18)$$

Για να ελαχιστοποιήσω το εμβαδό πρέπει $\frac{\partial h}{\partial c} = 0$, δηλ.

$$\Rightarrow 2c^4 - c^3 - (3\alpha^2 + 2\alpha^3)c + 4\alpha^3 = 0 \quad (7.19)$$

Επειδή το α είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, την εξαιρούμε και η εξίσωση μετατρέπεται σε 3^ο βαθμού πολυώνυμο, η οποία είναι:

$$2c^3 + (2\alpha - 1)c^2 + (2\alpha^2 - \alpha)c - 4\alpha^2 = 0$$

Η πραγματική ρίζα της γενικής εξίσωσης $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ δίνεται από γνωστούς τύπους

$$x_1 = S + T - 1/3a_1 \quad (7.20)$$

όπου
$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

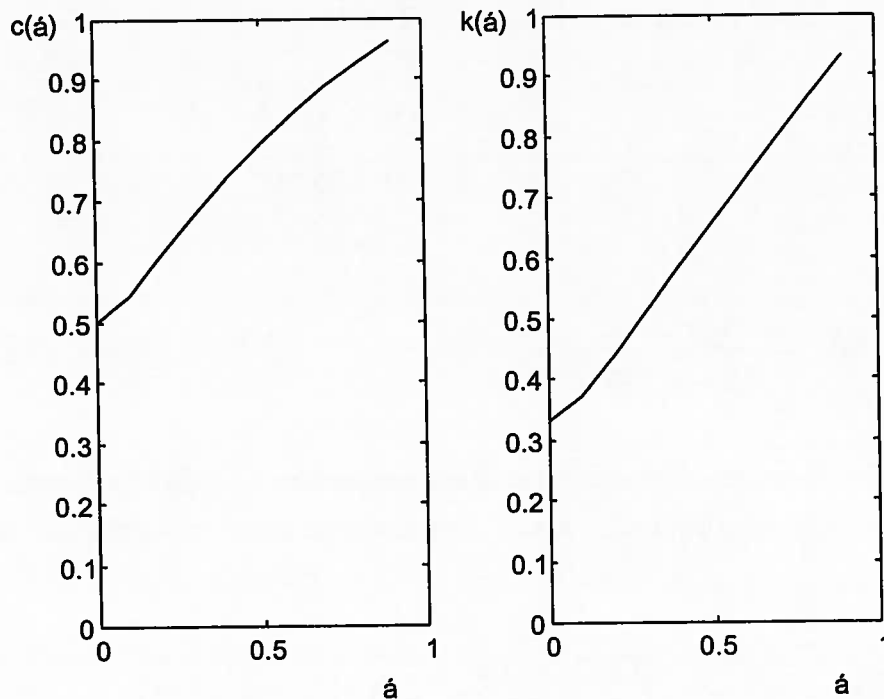
και
$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

Δίνοντας τιμές στο α παίρνουμε τιμές για τη θέση του σημείου c στον άξονα x και επομένως και για το k . Γνωρίζοντας ότι πρέπει να ισχύει $\alpha < k < c < 1 < b$ κρατάμε στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 7.1) μόνο τις αποδεκτές λύσεις.

α	c	k
0	0.5	0.333
0.1	0.5419	0.3716
0.2	0.6118	0.4407
0.3	0.6789	0.5139
0.4	0.7395	0.5868
0.5	0.7937	0.6579
0.6	0.8428	0.7283
0.7	0.8872	0.7973
0.8	0.9280	0.8657
0.9	0.9654	0.9331

Πίνακας 7.1

Από τον πίνακα παρατηρούμε σταδιακή αύξηση των c και k συναρτήσεων του α , η οποία φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα 7.7.



Σχήμα 7.7: Συσχέτιση των c και k συναρτήσεων του α

7.3.3 Λειτουργία υπό ομοιόμορφη πιθανότητα ζήτησης από $\alpha > 0$ μέχρι κάποιο μέγιστο (περίπτωση διαφοροποιημένων ημιανηγμένων καμπυλών βαθμού απόδοσης)

Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ζήτησης είναι ομοιόμορφη για οποιοδήποτε σημείο λειτουργίας από κάποιο ελάχιστο μεγαλύτερο του μηδενός μέχρι κάποιο ορισμένο μέγιστο. Ανάγουμε την μία καμπύλη στην άλλη (σχήμα 7.8), δηλαδή υποθέτουμε ότι ισχύει $P_{AN} = kP_{BN}$, με $0 < k < 1$ και παίρνουμε την συνολική καμπύλη. Δηλαδή ανάγουμε και τις δύο καμπύλες στο ίδιο σχήμα θεωρώντας την τεταγμένη x από την εξ. (7.10). Οπότε προκύπτουν

$$\begin{aligned} f_A &= 1.8 \frac{P_A}{P_{AN}} - 0.9 \left(\frac{P_A}{P_{AN}} \right)^2 = 1.8 \left(\frac{P_A}{kP_{BN}} \right) - 0.9 \left(\frac{P_A}{kP_{BN}} \right)^2 = \\ &= \frac{1.8}{k} x - \frac{0.9}{k^2} x^2 \end{aligned} \quad (7.21)$$

και

$$f_B = 1.9x - 0.95x^2 \quad (7.12)$$

Στο σημείο $x = c$ η πρώτη καμπύλη φθίνει και συναντά την δεύτερη, δηλαδή έχουμε $f_A = f_B$. Εξισώνοντας τις (7.21) και (7.22) παίρνουμε:

$$\frac{1.8}{k} x - \frac{0.9}{k^2} x^2 = 1.9x - 0.95x^2 \Rightarrow x = \frac{1.8k - 1.9k^2}{0.9 - 0.95k^2}$$

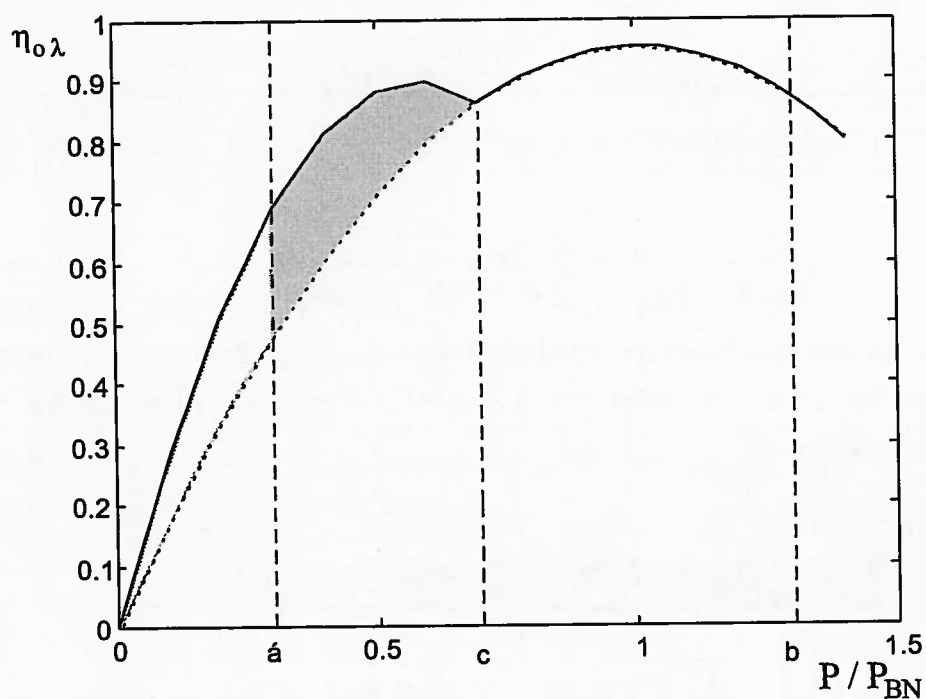
δηλαδή

$$c(k) = \frac{1.8k - 1.9k^2}{0.9 - 0.95k^2} \quad (7.23)$$

Για τη λύση του προβλήματος μας ελαχιστοποιούμε το εμβαδό ανάμεσα στις δύο συναρτήσεις στο διάστημα $\alpha < x < c$. Για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε πρώτα το εμβαδό :

$$h = \int_{\alpha}^c (f_A - f_B) dx = \int_{\alpha}^c \left[\frac{1.8}{k} x - \frac{0.9}{k^2} x^2 - (1.9x - 0.95x^2) \right] dx \quad (7.24)$$

και βρίσκουμε



Σχήμα 7.8: Συνολικός βαθμός απόδοσης-ισχύος διαφοροποιημένων ημιανηγμένων καμπυλών

$$h = - \frac{\alpha^3(19k^2 - 18) - 3\alpha^2k(19k - 18) - c^2[c(19k^2 - 18) - 3k(19k - 18)]}{60k^2}$$

Αντικαθιστώντας την (7.23) στην προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$h = - \frac{\alpha^3(19k^2 - 18)^3 - 3\alpha^2k(19k - 18)(19k^2 - 18)^2 + 4k^3(19k - 18)^3}{60k^2(19k^2 - 18)^2}$$

Στη συνέχεια για να ελαχιστοποιήσουμε το παραπάνω εμβαδό πρέπει $\frac{\partial h}{\partial k} = 0$,

δηλαδή:

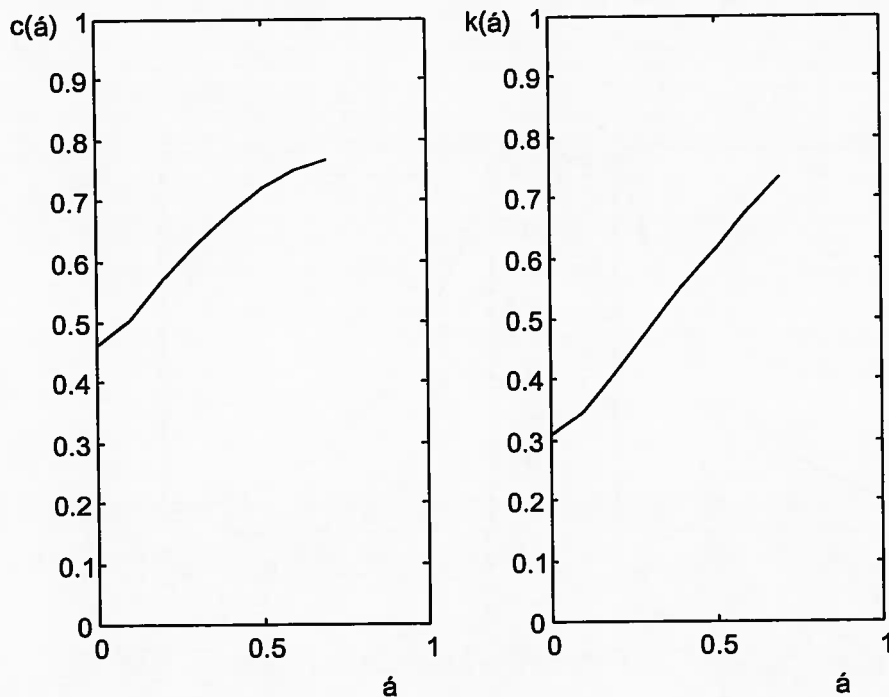
$$-\frac{3}{10k^3(19k^2 - 18)^3} \left[2\alpha^3(6859k^6 - 19494k^4 + 18468k^2 - 5832) - \right. \\ \left. - 3\alpha^2k(6859k^6 - 19494k^4 + 18468k^2 - 5832) + \right. \\ \left. + 4k^3(20577k^4 - 66424k^3 + 76950k^2 - 36936k + 5832) \right] = 0$$

Από τις λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης πρέπει να εξαιρέσουμε τις τιμές του παρονομαστή, οι οποίες είναι: 0, ± 0.97332 . Δίνοντας τιμές στο α παίρνουμε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης για το k και επομένως για τη θέση του στον άξονα x . Γνωρίζοντας ότι πρέπει να ισχύει $\alpha < k < c < 1 < b$ κρατάμε στον πίνακα 7.2 μόνο τις αποδεκτές λύσεις.

α	c	k
0	0.4619	0.3080
0.1	0.5036	0.3468
0.2	0.5693	0.4142
0.3	0.6288	0.4838
0.4	0.6788	0.5514
0.5	0.7188	0.6160
0.6	0.7486	0.6770
0.7	0.7665	0.7338
0.8	-	0.9556

Πίνακας 7.2

Οι συναρτήσεις $c(\alpha)$ και $k(\alpha)$ φαίνονται γραφικά στο παρακάτω σχήμα 7.9.



Σχήμα 7.9: Συσχέτιση των c και k συναρτήσεων του α

7.3.4 Εισαγωγή πιθανοτικού μοντέλου ζήτησης στη λειτουργία της εγκατάστασης

Στις προηγούμενες παραγράφους υπολογίσαμε σε ποιο σημείο θα πρέπει να εισαχθεί η δεύτερη διαδικασία, έτσι ώστε ο βαθμός απόδοσης-ισχύος του συνολικού συστήματος να διατηρηθεί στο μέγιστο.

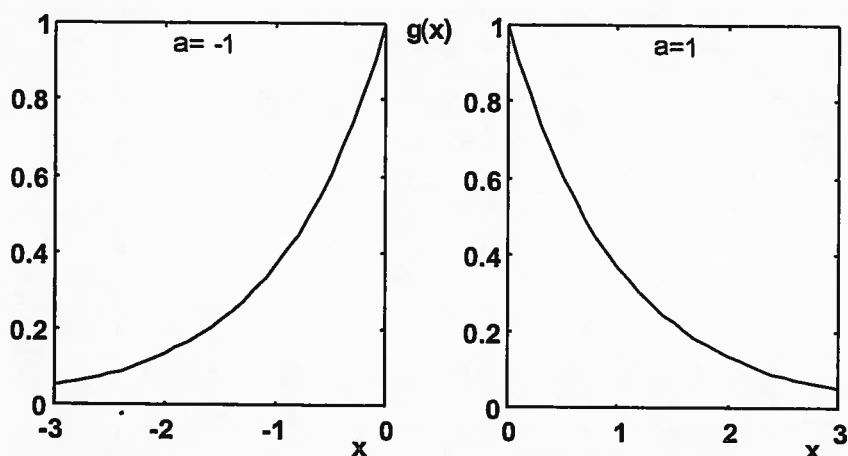
Είχαμε υποθέσει ότι η ζήτηση είναι ομοιόμορφη. Αυτό όμως στην πραγματικότητα δεν ισχύει. Κάθε σημείο της καμπύλης έχει διαφορετική πιθανότητα ζήτησης, δηλαδή κάποιο συντελεστή βάρους. Οι συντελεστές βάρους εισάγονται στο σύστημα με μορφή πιθανοτικής καμπύλης. Σαν κατάλληλη πιθανοτική καμπύλη επιλέξαμε την εκθετική:

$$g(x) = e^{-ax}, \quad a, x \in \mathfrak{R} \quad (7.25)$$

Προσπαθώντας να εντάξουμε την εκθετική στο σύστημα την προσδιορίζουμε έτσι ώστε να έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.10 για

$$a = 1 \text{ παίρνουμε: } g(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

και $a = -1$ παίρνουμε: $g(x) = e^x$, $x < 0$.



Σχήμα 7.10: Εκθετική πιθανοτική καμπύλη

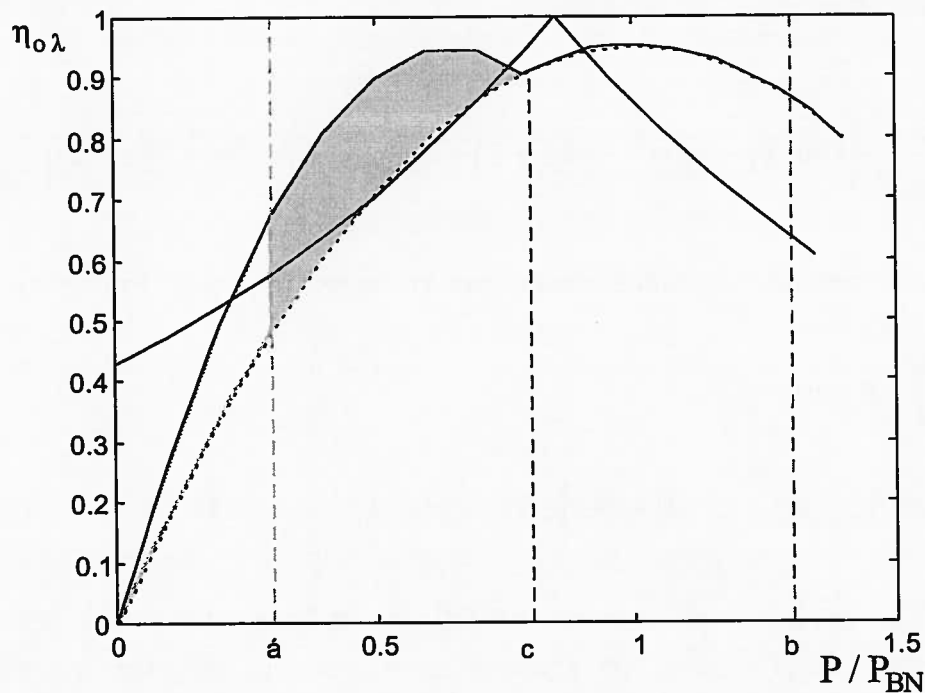
Προσθέτοντας τα δύο μέρη παίρνουμε την ολική συνάρτηση πιθανότητας, η οποία είναι η εξής :

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (7.26)$$

Η παραπάνω συνάρτηση πιθανότητας έχει κέντρο $\chi=0$ και εισάγοντάς την στην ολική συνάρτηση του βαθμού απόδοσης πρέπει να μετατοπιστεί το κέντρο της προς το σημείο μέγιστης πιθανότητας ζήτησης. Επιλέγουμε το κέντρο της εκθετικής καμπύλης να βρίσκεται στο $\chi=0.8$, δηλαδή η εκθετική καμπύλη γίνεται:

$$g(x) = \begin{cases} e^{x-0.8}, & x < 0.8 \\ e^{-(x-0.8)}, & x > 0.8 \end{cases} \quad (7.27)$$

Η επιλογή αυτή είναι αυθαίρετη, και στην πράξη προκύπτει από την λειτουργία της διάταξης. Έτσι με αυτό τον τρόπο δίνουμε το βάρος μας στις πραγματικές συνθήκες λειτουργίας, δηλαδή εκεί όπου αναμένεται να λειτουργεί κατά το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα η διάταξη.



Σχήμα 7.11: Συνολικός βαθμός απόδοσης-ισχύος ίδιων ημιανηγμένων καμπυλών με εισαγωγή πιθανοτικής εκθετικής καμπύλης

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.11 πρέπει να ισχύει $\alpha < k < c < 0.8$. Αν θεωρήσουμε ότι στα αποτελέσματα το c δεν ξεπερνάει την τιμή των 0.8, δεν είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη τον δεύτερο κλάδο της εκθετικής. Για το λόγο αυτό υπολογίζουμε το σκιαγραφημένο εμβαδό ως εξής:

$$\begin{aligned}
 h &= \int_{\alpha}^c e^{x-0.8} [f_A - f_B] dx = \\
 &= \int_{\alpha}^c e^{x-0.8} \left[\frac{1.9}{k} x - \frac{0.95}{k^2} x^2 - 1.9x + 0.95x^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{e^{-0.8}}{20k^2} \left[19e^c (c^2(k^2 - 1) - 2c(2k^2 - k - 1) + 2(2k^2 - k - 1)) - \right. \\
 &\quad \left. - 19e^{\alpha} (\alpha^2(k^2 - 1) - 2\alpha(2k^2 - k - 1) + 2(2k^2 - k - 1)) \right]
 \end{aligned}$$

αλλά ισχύει $k = \frac{c}{2-c}$, οπότε:

$$h = \frac{-e^{-0.8}}{5c^2} \left[19e^{\alpha}(c-1)(\alpha^2 - \alpha(c+2) + c + 2) + 19e^c(c-2)(c-1) \right] \quad (7.29)$$

Θα ελαχιστοποιήσουμε το εμβαδό θεωρώντας την πρώτη παράγωγο ίση προς μηδέν.

$$\frac{\partial h}{\partial c} = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$19e^c [c^3 - 3c^2 + 5c - 4] - 19e^{\alpha} [\alpha^2(c-2) + \alpha(4-c) + c - 4] = 0 \quad (7.30)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε πολύπλεξη πολυωνυμικής και εκθετικής συνάρτησης. Για να λύσουμε την εξίσωση χρησιμοποιούμε τους τέσσερις πρώτους όρους της σειράς Taylor, ώστε να έχουν μία όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (\text{σειρά Taylor})$$

δηλαδή έχουμε:

$$e^c = 1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{6} \quad (7.31)$$

Αντικαθιστούμε την (7.31) στην (7.30) και παίρνουμε την εξίσωση:

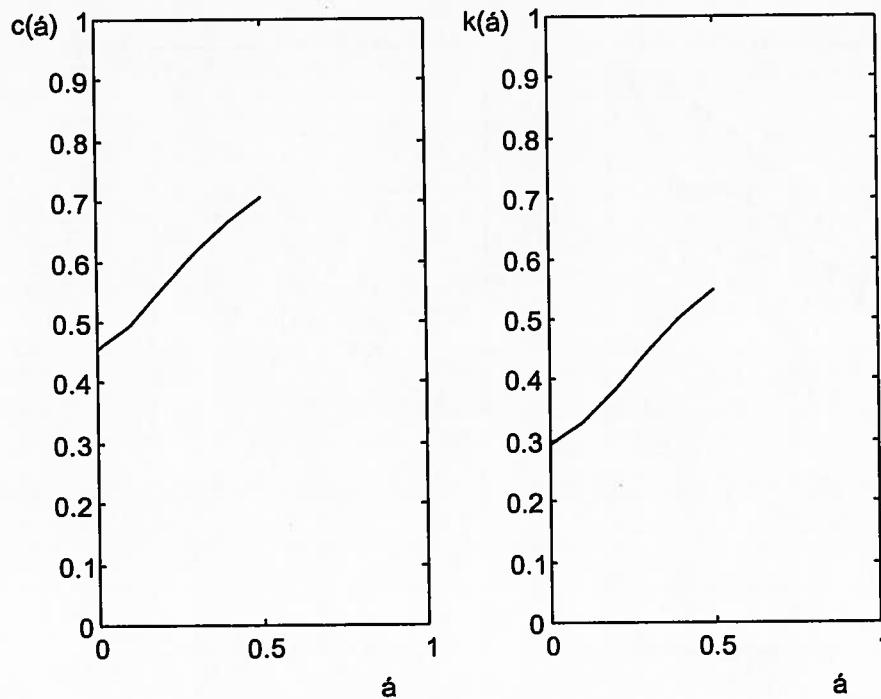
$$\left(1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{6} \right) (c^3 - 3c^2 + 5c - 4) - e^{\alpha} [\alpha^2(c-2) + \alpha(4-c) + c - 4] = 0$$

Δίνοντας τιμές στην παράμετρο α παίρνουμε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης για το c . Γνωρίζοντας ότι πρέπει να ισχύει $\alpha < k < c < 0.8$ δίνουμε στον πίνακα 7.1 μόνο τις αποδεκτές λύσεις.

α	c	k
0	0.4534	0.2932
0.1	0.4927	0.3288
0.2	0.5571	0.3861
0.3	0.6172	0.4463
0.4	0.6686	0.5022
0.5	0.7084	0.5485
0.6	καμία	-

Πίνακας 7.3

Η σχέση των $c(\alpha)$ και $k(\alpha)$ για την περίπτωση αυτή φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα 7.12.



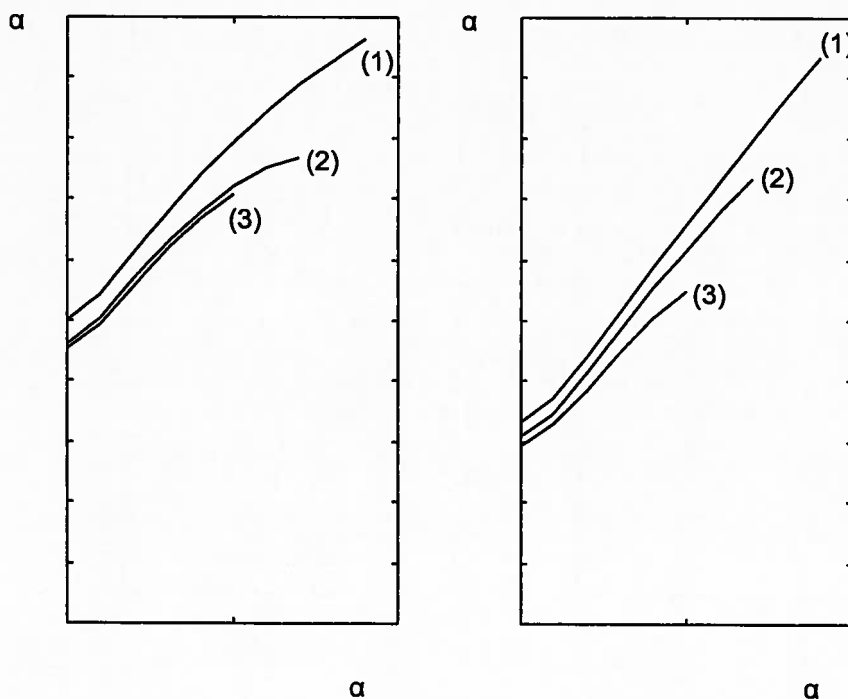
Σχήμα 7.12: Συσχέτιση των c και k συναρτήσει του α

7.4 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τις διάφορες περιπτώσεις που εξετάστηκαν πρέπει να λάβουμε υπόψη τις προσεγγίσεις που κάναμε στη διάρκεια

των υπολογισμών. Συγκεκριμένα επιλέγουμε δεδομένες συναρτήσεις για να μελετήσουμε το πρόβλημα διαχωρισμού της διαδικασίας με σκοπό την βελτίωση του συνολικού βαθμού απόδοσης. Τα μοντέλα βαθμού απόδοσης όπως χρησιμοποιήθηκαν, είναι γενικής μορφής και μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν σύμφωνα με τις πραγματικές πειραματικές μετρήσεις. Μειονέκτημα τους θα μπορούσε να θεωρηθεί ο μικρός βαθμός πολωνύμου που χρησιμοποιείται, δηλαδή μια απλή δευτεροβάθμια συνάρτηση. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερου βαθμού πολωνύμου, που δυσκολεύει το πρόβλημα αριθμητικά, αλλά όμως το αντιπροσωπεύει πιστότερα. Η επιλογή του βαθμού του πολωνύμου της συνάρτησης του βαθμού απόδοσης είναι θέμα που πρέπει να σταθμιστεί κατά την σχεδίαση σύμφωνα με τις απαιτήσεις του προβλήματος ως προς την ακρίβεια που επιθυμούμε σε σχέση προς την πολυπλοκότητα που συνεπάγεται.

Επίσης στην περίπτωση εισαγωγής της σειράς Taylor, εισάγουμε μόνο τέσσερις όρους της σειράς και επομένως και στο σημείο αυτό εισέρχεται κάποιο σφάλμα προσέγγισης.



Σχήμα 7.13: Σύγκριση των τριών περιπτώσεων

Στο παραπάνω σχήμα 7.13 παραθέτονται τα αποτελέσματα της εργασίας. Το γράφημα (1) παρουσιάζει τα αποτελέσματα, όταν οι δύο παράλληλες διαδικασίες έχουν ίδιο μέγιστο βαθμό απόδοσης-ισχύος. Το γράφημα (2) παρουσιάζει τα αποτελέσματα, όταν η πρώτη διαδικασία έχει μικρότερο μέγιστο βαθμό απόδοσης

από τη δεύτερη. Όταν οι διαδικασίες μελετώνται με την εισαγωγή της πιθανοτικής εκθετικής καμπύλης τα αποτελέσματα εκφράζονται στο γράφημα (3).

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι στη δεύτερη περίπτωση σε σχέση με την πρώτη, το σημείο c μετατοπίζεται προς τα αριστερά, δηλαδή προς μικρότερες τιμές. Αυτό είναι αναμενόμενο, επειδή η πρώτη διαδικασία έχει μικρότερο μέγιστο βαθμό απόδοσης.

Επίσης συγκρίνοντας την πρώτη με την τρίτη περίπτωση παρατηρούμε ότι ξανά το σημείο c μετατοπίζεται προς τα αριστερά. Αυτό δικαιολογείται επειδή στη πιθανοτική μελέτη ενισχύονται οι περιοχές μέγιστου βαθμού απόδοσης που βρίσκονται στην περιοχή λειτουργίας της μεγαλύτερης εγκατάστασης B .

7.5 ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΕΠΙ ΜΕΡΟΥΣ ΜΟΝΑΔΩΝ Α ΚΑΙ Β

Στα προηγούμενα εξετάστηκε η βέλτιστη διάσπαση μιας εγκατάστασης ισχύος σε δύο παρόμοιες μονάδες για διάφορες συνθήκες λειτουργίας. Αν θεωρήσουμε ότι από την προηγούμενη αναζήτηση προκύπτει P_{AN} η ονομαστική ισχύς λειτουργίας της μονάδος A και P_{BN} η ονομαστική ισχύς λειτουργίας της μονάδος B , τότε η μέγιστη συνολική ισχύς $P_{L,max}$, που μπορεί να εξυπηρετηθεί από τις δύο διατάξεις σε ταυτόχρονη λειτουργία ισούται προφανώς προς το άθροισμα των ονομαστικών τους ισχύων (θεωρώντας μηδενική υπερφόρτιση των μονάδων). Δηλαδή ισχύει

$$P_{L,max} = P_{AN} + P_{BN} \quad (7.32)$$

Έτσι για οποιοδήποτε ζητούμενο φορτίο P_L θα ισχύουν οι εξής συνθήκες λειτουργίας:

- α) Για $0 < P_L < c$ λειτουργία της μονάδος A
- β) Για $0 < P_L < b$ λειτουργία της μονάδος B
- γ) Για $b < P_L < P_{L,max}$ ταυτόχρονη λειτουργία και της A και της B .

Στο προηγούμενο σχήμα λειτουργίας θεωρήσαμε ότι υπάρχει δυνατότητα υπερφόρτισης κάθε μονάδας. Χωρίς σημαντικό λάθος μπορούμε να θεωρήσουμε και το αντίστοιχο σχήμα χωρίς την δυνατότητα υπερφόρτισης, δηλαδή:

- α) Για $0 < P_L \leq P_{AN}$ λειτουργία της μονάδος A
- β) Για $P_{AN} < P_L \leq P_{BN}$ λειτουργία της μονάδος B
- γ) Για $P_{BN} < P_L \leq P_{L,max}$ ταυτόχρονη λειτουργία και της A και της B .

Για την περίπτωση της ταυτόχρονης λειτουργίας και των δύο μονάδων (περιπτώσεις (γ)) το πρόβλημα που προκύπτει είναι η βέλτιστη κατανομή P_A και P_B του ζητούμενου συνολικού φορτίου P_L σε κάθε μια από τις μονάδες A και B. Το πρόβλημα αυτό εξετάζεται στη συνέχεια.

7.5.1 Βέλτιστη κατανομή του φορτίου στις επί μέρους μονάδες

Θεωρούμε την περίπτωση κατά την οποία $b \leq P_L \leq P_{L,max}$ ή $P_{BN} < P_L \leq P_{L,max}$. Αν κατά την παράλληλη λειτουργία είναι P_A η αποδιδόμενη ισχύς από την μονάδα A και P_B η αποδιδόμενη ισχύς από την μονάδα B, τότε για την εξυπηρέτηση του ζητούμενου φορτίου P_L θα ισχύει:

$$P_L = P_A + P_B \quad (7.33)$$

και ο συνολικός βαθμός απόδοσης της εγκατάστασης θα είναι

$$\eta_{ολ} = \frac{P_L}{P_{προσδ.ολ.}} \quad (7.34)$$

όπου η προσδιδόμενη ολική ισχύς $P_{προσδ.ολ.}$ θα κατανέμεται στις επιμέρους μονάδες σύμφωνα με τη σχέση

$$P_{προσδ.ολ.} = P_{προσδ.Α} + P_{προσδ.Β} \quad (7.35)$$

Αν θεωρήσουμε τις ημιανηγμένες καμπύλες βαθμού απόδοσης της κάθε εγκατάστασης, δηλαδή τις καμπύλες $\eta_A = f_A\left(\frac{P_A}{P_{AN}}\right)$ και $\eta_B = f_B\left(\frac{P_B}{P_{BN}}\right)$ θα ισχύουν και γι' αυτές οι σχέσεις

$$\eta_A = \frac{P_A}{P_{προσδ.Α}} \quad \text{και} \quad \eta_B = \frac{P_B}{P_{προσδ.Β}} \quad (7.36)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.36) με την (7.35) παίρνουμε

$$P_{προσδ.ολ.} = \frac{P_A}{\eta_A} + \frac{P_B}{\eta_B} \quad (7.37)$$

Από τις (7.34) και (7.37) προκύπτει ο συνολικός βαθμός απόδοσης

$$n_{o\lambda} = \frac{n_A n_B P_L}{n_B P_A + n_A P_B} \quad (7.38)$$

Έτσι, για την βέλτιστη κατανομή του φορτίου ζήτησης έχουμε να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης: Την μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης $n_{o\lambda}$ (σχέση 7.33). Για το σκοπό αυτό φτιάχνουμε την Lagrangian του προβλήματος

$$L(P_A, P_B, \lambda) = \frac{n_A n_B P_L}{n_B P_A + n_A P_B} + \lambda(P_A + P_B - P_L) \quad (7.39)$$

όπου λ ο παράγοντας Lagrange.

Το μέγιστο της L βρίσκεται εκεί όπου μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι:

$$\frac{\partial L}{\partial P_A} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial P_B} = 0 \quad (7.40)$$

Αλλά, ισχύει

$$\frac{\partial L}{\partial P_A} = \frac{\partial L}{\partial n_A} \frac{\partial n_A}{\partial P_A} + \frac{\partial L}{\partial P_A} \quad (7.41)$$

η οποία δίνει την ακόλουθη σχέση, λαμβανομένης υπόψη και της μορφής της ημιανηγμένης συνάρτησης $n_A = f_A\left(\frac{P_A}{P_{AN}}\right)$.

$$\frac{\partial L}{\partial P_A} = \frac{n_B P_L (n_B P_A + n_A P_B) - n_A n_B P_L P_B}{(n_B P_A + n_A P_B)^2} \cdot \frac{1}{P_{AN}} f'_A - \frac{n_A n_B^2 P_L}{(n_B P_A + n_A P_B)} + \lambda = 0 \quad (7.42)$$

Οπότε μετά από πράξεις παίρνουμε

$$\frac{P_L P_A n_B^2 \cdot f'_A}{P_{AN}} - P_L n_A n_B^2 = -\lambda (n_B P_A + n_A P_B)^2 \quad (7.43)$$

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε και για την δεύτερη συνθήκη $\frac{\partial L}{\partial P_B} = 0$ την εξίσωση

$$\frac{P_L P_B n_A^2 \cdot f'_B}{P_{BN}} - P_L n_B n_A^2 = -\lambda (n_B P_A + n_A P_B)^2 \quad (7.44)$$

Παρατηρούμε στις σχέσεις (7.43) και (7.44) ότι τα δεύτερα μέλη τους είναι τα ίδια. Συνδυάζοντας λοιπόν τις (7.43) και (7.44) απαλείφουμε το λ και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{P_A}{P_{AN}} n_B^2 f'_A - n_A n_B^2 = \frac{P_B}{P_{BN}} n_A^2 f'_B - n_B n_A^2 \quad (7.45)$$

η οποία συμπληρώνεται από την συνθήκη (7.33).

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε τη συμμετρία της συνθήκης (7.45) που προέκυψε από τη χρήση των ημιανηγμένων καμπυλών απόδοσης των μονάδων. θεωρώντας παρόμοιες μονάδες, δηλαδή μονάδες με παρόμοια μοντέλα βαθμού απόδοσης, έχουμε

$$n_A = f_A \left(\frac{P_A}{P_{AN}} \right) = f_B \left(\frac{P_B}{P_{BN}} \right) = n_B \quad (7.46)$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι και

$$f'_A = f'_B \quad (7.47)$$

Αντικαθιστώντας στην (7.45) τα n_A και f'_A από τις (7.46) και (7.47) προκύπτει σαν βέλτιστη λύση η ακόλουθη κατανομή

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{P_{AN}}{P_{BN}} \quad (7.48)$$

ή σύμφωνα με τις σχέσεις της παραγράφου 7.3.1

$$\frac{P_A}{P_B} = k \quad (7.49)$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση (7.49) με την συνθήκη (7.33) τελικά παίρνουμε την βέλτιστη κατανομή

$$P_A = \frac{k}{1+k} P_L \quad \text{και} \quad P_B = \frac{k}{1+k} P_L \quad (7.50)$$

Σαν συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι η σχέση (7.48) ορίζει την ακόλουθη απλή συνθήκη βέλτιστης κατανομής του ζητούμενου φορτίου: Η βέλτιστη κατανομή φορτίου για παράλληλη λειτουργία γίνεται ανάλογα προς τις ονομαστικές δυνατότητες της κάθε μονάδος. Η συνθήκη αυτή ισχύει για μονάδες που μπορούν να περιγραφούν με τις ίδιες ακριβώς ημιανηγμένες καμπύλες βαθμού απόδοσης. Όταν οι καμπύλες αυτές είναι ελαφρά διαφοροποιημένες η συνθήκη (7.48) εξακολουθεί να ισχύει με πρακτικά αμελητέο σφάλμα. Είναι προφανές όμως ότι για έντονα διαφοροποιημένες ημιανηγμένες καμπύλες η ακριβής λύση προκύπτει από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (7.33) και (7.45).

7.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό αντιμετωπίστηκε μια πραγματική εφαρμογή βελτιστοποίησης βιομηχανικών διαδικασιών. Η κύρια προσπάθεια ήταν η εφαρμογή της θεωρίας της βελτιστοποίησης σε πραγματικό σύστημα και η εξαγωγή απλών συμπερασμάτων που μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν στην πράξη. Τα συμπεράσματα αυτά συμπεριλαμβάνονται είτε σε γραφικές παραστάσεις είτε σε διατύπωση απλών συνθηκών. Είναι βέβαια σαφές ότι το πρόβλημα που εξετάστηκε επιδέχεται και κάποιες επιμέρους διαφοροποιήσεις ή επεκτάσεις, όπως για παράδειγμα την εφαρμογή επιπλέον παραδοχών που πρέπει να ληφθούν υπόψη, όπως η υπερφόρτιση των μονάδων μόνο κατά συγκεκριμένο μικρό ποσοστό (π.χ. 5%) ή ακόμη η δυνατότητα διαχωρισμού της διαδικασίας σε περισσότερες από δύο επιμέρους διαδικασίες.

