Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 9: Αρχή της Βελτιστοποίησης-Θεωρία Hamilton Jacobi

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

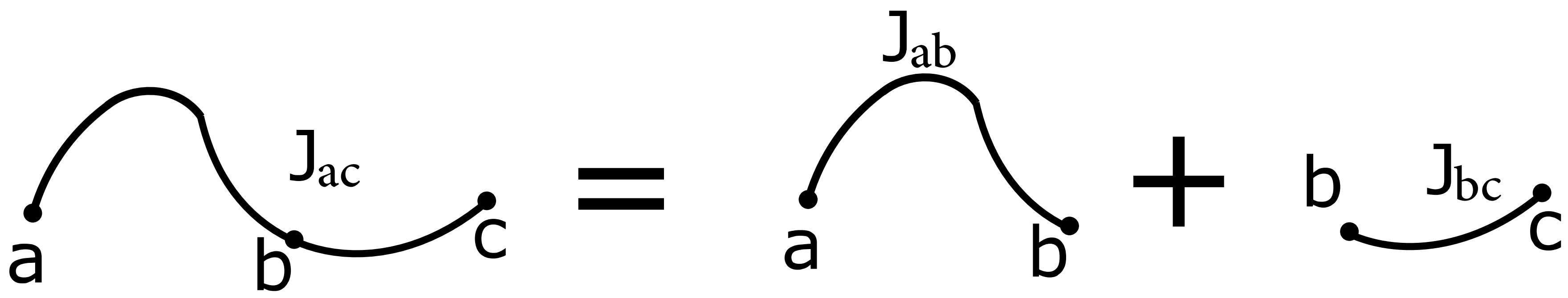
Αρχή της Βελτιστοποίησης
Θεωρία Hamilton Jacobi

Αρχή της Βελτιστοποίησης

Αν θεωρήσουμε μια διαδικασία βελτιστοποίησης πολλών βημάτων τότε ο συνολικός βέλτιστος δρόμος είναι αυτός που προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους βέλτιστων βημάτων. Έστω, δηλαδή, ότι έχουμε μια διαδικασία βελτιστοποίησης από το a στο c, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.1 , η οποία ενδιαμέσως περνά από το σημείο b. Τότε, αν το ολικό βέλτιστο κόστος από το a στο c είναι J_{ac} αυτό θα είναι ακριβώς το άθροισμα του βέλτιστου κόστους των επιμέρους βημάτων J_{ab} και J_{bc} .

$$J_{ac} = J_{ab} + J_{bc} \tag{9.1}$$

Αρχή της Βελτιστοποίησης



Σχήμα 9.1: Διαδικασία βέλτιστοποίησης πολλών βημάτων

Αρχή της Βελτιστοποίησης

Η χαρακτηριστική αυτή ιδιότητα της εύρεσης του βέλτιστου δρόμου ονομάστηκε από τον Bellman <u>Αρχή της Βελτιστοποίησης</u> και διατυπώθηκε με την ακόλουθη πρόταση:

– Μια πολιτική βελτιστοποίησης έχει την ιδιότητα ότι <u>οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική κατάσταση και η αρχική απόφαση, οι ακολουθούσες αποφάσεις πρέπει να είναι βέλτιστες</u> σε σχέση με την κατάσταση που προέκυψε από την αρχική απόφαση.

Για τα γραμμικά δυναμικά συστήματα διατυπώσαμε την πολιτική αυτή του βέλτιστου ελέγχου κατευθείαν σε σχέση με την κατάσταση κάθε φορά του συστήματος (λύσεις κλειστού βρόχου). Μια χαρακτηριστική παρατήρηση σε όλες αυτές τις περιπτώσεις που εξετάσαμε ήταν ότι ο προκύπτον <u>Βέλτιστος νόμος ελέγχου υπολογιζόταν από το τελικό όριο προς το αρχικό</u>.

Αρχή της Βελτιστοποίησης

Χρησιμοποιώντας την Αρχή της Βελτιστοποίησης για συστήματα συνεχούς χρόνου θα μπορούσαμε να την αξιοποιήσουμε για να βρούμε το βέλτιστο νόμο ελέγχου αν διατυπώναμε έναν αλγόριθμο που θα έδινε Βέλτιστη πολιτική ελέγχου γενικά σαν συνάρτηση της κατάστασης στην οποία βρίσκεται το σύστημα.

Αρχή της Βελτιστοποίησης

Έστω λοιπόν η γενικευμένη περίπτωση όπου το δυναμικό σύστημα περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από την εξίσωση:

$$\dot{x} = F\left(x,u,t\right) \quad , \quad x\left(t_0\right) = x_0$$

και το κριτήριο κόστους από τη σχέση :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L\left(x,u,t\right) dt + \Phi\left[x\left(t_f\right), t_f\right]$$

Αρχή της Βελτιστοποίησης

Τότε σύμφωνα με την αρχή της βελτιστοποίησης θα πρέπει για οποιαδήποτε χρονική στιγμή *t* και οποιαδήποτε κατάσταση *x(t)* η πολιτική ελέγχου από εκεί και πέρα να είναι βέλτιστη. Επομένως, με βάση το κριτήριο κόστους *J* μπορούμε να ορίσουμε για κάθε *x(t)* και *t* την πολιτική βελτιστοποίησης με τη μαθηματική έκφραση:

$$V\left[x,t\right]=\min_{u}\left\{\int_{t}^{t_f} L\left(x,u,t\right)dt+\Phi\left[x\left(t_f\right),t_f\right]\right\} \qquad (9.2)$$

Αρχή της Βελτιστοποίησης

Αλλά σύμφωνα πάλι με την αρχή της βελτιστοποίησης όπως εκφράζεται από τη σχέση (9.1) είναι:

$$V\left[x,t\right]=\min_{u}\left\{\int_{t}^{t+\Delta t}L\left(x,u,t\right)dt+\int_{t+\Delta t}^{t_f}L\left(x,u,t\right)dt+\Phi\left[x\left(t_f\right),t_f\right]\right\} \quad (9.3)$$

όπου όμως:

$$\int_{t+\Delta t}^{t_f}L\left(x,u,t\right)dt+\Phi\left[x\left(t_f\right),t_f\right]=V\left[x+\Delta x,t+\Delta t\right] \quad (9.4)$$

Θεωρώντας επιπλέον Δt αρκετά μικρό, ισχύει:

$$\int_{t}^{t+\Delta t}L\left(x,u,t\right)dt\cong L\left(x,u,t\right) \quad (9.5)$$

Αρχή της Βελτιστοποίησης

Έτσι η σχέση (9.2) γίνεται:

$$V\left[x,t\right] = \min_{u}\left\{V\left[x+\Delta x, t+\Delta t\right] + L\left(x,u,t\right)\right\} \qquad (9.6)$$

Η σχέση (9.6) αποτελεί έναν <u>επαναληπτικό αλγόριθμο</u> βελτιστοποίησης. Κάνοντας χρήση της επέκτασης Taylor για την *V[x+Δx, t+Δt]* παίρνουμε:

$$V\left[x,t\right] = V\left[x,t\right] + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^{T}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t \qquad (9.7)$$

όπου έχουν παραληφθεί οι όροι υψηλότερης τάξης.

Αρχή της Βελτιστοποίησης

Αντικαθιστώντας την (9.7) στην (9.6) και θεωρώντας Δt→0 , τότε η *V[x,t]* πρέπει να ικανοποιεί την <u>εξίσωση Hamilton-Jacobi:</u>

$$\min_u \left\{ \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t} + L\left(x,u,t\right) \right\} = 0 \qquad (9.8)$$

ή την

$$\boxed{\min_u \left\{ \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T F\left(x,u,t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} + L\left(x,u,t\right) \right\} = 0} \qquad (9.9)$$

Αρχή της Βελτιστοποίησης

με τελική τιμή στο t_f όπως προκύπτει από την (9.2):

$$V\left[x\left(t_f\right),t_f\right]=\Phi\left[x\left(t_f\right),t_f\right] \qquad (9.10)$$

Ο νόμος του βέλτιστου ελέγχου που θα ικανοποιεί την (9.9) προκύπτει από την ελαχιστοποίησητης εξίσωσης Hamilton-Jacobi ως προς την u:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T F\left(x,u,t\right)+\frac{\partial V}{\partial t}+L\left(x,u,t\right)\right\}=0 \qquad (9.12)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi

Ας θεωρήσουμε τη γνωστή δυναμική εξίσωση:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad\qquad x(t_0) = x_0$$

με το τετραγωνικό κριτήριο κόστους:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f)$$

- Η συνάρτηση κόστους από t έως t_f σύμφωνα με τη θεωρία Hamilton-Jacobi είναι:

$$V\left[x(t), t\right] = \min_u \left\{ \frac{1}{2}\int_{t}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) \right\} \quad (9.12)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi

- Αντίστοιχα, η εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι:

$$\min_{u}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]^{T}\left(Ax+Bu\right)+\frac{1}{2}\left(x^{T}Qx+u^{T}Ru\right)\right\}=0 \quad (9.13)$$

και ο νόμος βέλτιστου ελέγχου θα προκύπτει αντίστοιχα από την:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]^{T}\left(Ax+Bu\right)+\frac{1}{2}\left(x^{T}Qx+u^{T}Ru\right)\right\}=0 \quad (9.14)$$

η οποία μετά τις πράξεις δίνει:

$$u=-R^{-1}B^{T}\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (9.15)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi

- Αντικαθιστώντας τώρα το νόμο ελέγχου (9.15) στην εξίσωση Hamilton-Jacobi (9.13) παίρνουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T Ax-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T BR^{-1}B^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}x^T Qx=0 \quad (9.16)$$

- Με σκοπό να φθάσουμε σε μια <u>κλειστού βρόχου</u> λύσηθεωρούμε:

$$V\left[x,t\right]=\frac{1}{2}x^T P\left(t\right)x \qquad (9.17)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi

έτσι ώστε ο νόμος ελέγχου (9.15) που εξαρτάται από την $\frac{\partial V}{\partial x}$ να είναι ανάλογος του *x* , αφού:

$$\frac{\partial V\left[x,t\right]}{\partial x} = P\left(t\right)x \qquad (9.18)$$

Επίσης η μερική παράγωγος της *V[x(t)]* ως προς *t* θα είναι:

$$\frac{\partial V\left[x,t\right]}{\partial t} = \frac{1}{2}x^{T}\dot{P}\left(t\right)x \qquad (9.19)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους, σύμφωνα με τις σχέσεις (9.18) και (9.19), στην (9.16), έχουμε:

$$\frac{1}{2}x^T\dot{P}x + x^T PAx - \frac{1}{2}x^T PBR^{-1}B^T Px + \frac{1}{2}x^T Qx = 0 \qquad (9.20)$$

Όπως εύκολα αποδεικνύεται , είναι:

$$x^T PAx = x^T\left[\frac{1}{2}PA + \frac{1}{2}A^T P\right]x = 0 \qquad (9.21)$$

οπότε η (9.20) καταλήγει στην:

$$\frac{1}{2}x^T\left[\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q\right]x = 0 \qquad (9.22)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi

Η τελευταία σχέση οφείλει να ισχύει για κάθε *x≠0* , γεγονός που οδηγεί στη διαφορική εξίσωση Riccati:

$$\boxed{\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q} \qquad (9.23)$$

με οριακή συνθήκη που προκύπτει στο τελικό όριο από την :

$$V\left[x\left(t_f\right), t_f\right] = \frac{1}{2} x^T\left(t_f\right) S x\left(t_f\right) \qquad (9.24)$$

και είναι σε συνδυασμό με την (9.17):

$$\boxed{P\left(t_f\right) = S} \qquad (9.25)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi

Ο νόμος βέτιστου ελέγχου θα είναι:

$$\boxed{u = -R^{-1}B^{T}Px} \qquad (9.26)$$

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος Hamilton-Jacobi κατέληξε στις ίδιες ακριβώς σχέσεις βελτιστοποίησης όπως αυτές έχουν προκύψει με διαφορετικό τρόπο στις προηγούμενες ενότητες.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015. Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Αρχή της Βελτιστοποίησης-Θεωρία Hamilton Jacobi». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.