Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 8: Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης (LQ) για συστήματα διακριτού χρόνου

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συστήματα διακριτού χρόνου

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την αναδρομική σχέση:

$$x(j+1) = F(j)x(j) + G(j)u(j) \quad , \quad 0 \le j \le N \qquad (8.1)$$

με δεδομένη την τιμή του *x* για *j=0* :

$$x(0) = x_0 \qquad (8.2)$$

Κατ’ αναλογία προς το αντίστοιχο πρόβλημα για συστήματα συνεχούς χρόνου (Ενότητα 5), ζητάμε να βρούμε σε κάθε βήμα *j* από μηδέν μέχρι N-1, τη βέλτιστη είσοδο *u(j)* έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται κάποιο <u>τετραγωνικό</u> κριτήριο κόστους της μορφής:

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

$$J=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[x^{T}(j)Qx(j)+u^{T}(j)Ru(j)\right]+\frac{1}{2}x^{T}(N)Sx(N)\qquad(8.3)$$

Για <u>μήτρες βάρους</u> *Q,R* και *S* έχουμε ότι πρέπει να είναι συμμετρικές τετραγωνικές και επιπλέον η μήτρα *R* πρέπει να είναι <u>θετικά ημιορισμένη</u> και οι *Q* και *S* <u>θετικά ημιορισμένες</u>.

- Σχηματισμός Hamiltonian για το συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$\begin{aligned}H(j)=&\frac{1}{2}\left[x^{T}(j)Qx(j)+u^{T}(j)Ru(j)\right]+\\&+\lambda^{T}(j+1)\left[F(j)x(j)+G(j)u(j)\right]\end{aligned}\qquad(8.4)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- Τότε η συνθήκη βελτιστοποίησης δίνει:

$$\frac{\partial H(j)}{\partial u(j)} = Ru(j) + G^T \lambda(j+1) = 0 \qquad (8.5)$$

ενώ τα *λ(j)* βρίσκονται από την αναδρομική σχέση:

$$\lambda(j) = \frac{\partial H(j)}{\partial x(j)} = Qx(j) + F^T \lambda(j+1) \qquad (8.6)$$

με οριακή συνθήκη στο τελικό σημείο *j* = N:

$$\lambda(N) = \frac{\partial}{\partial x(N)} \Phi\left[x(N)\right] = Sx(N) \qquad (8.7)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

Λύση ανοικτού βρόχου

- Όπως προκύπτει από τη σχέση (8.5), η βέλτιστη λύση ανοικτού βρόχου θα δίνεται από

$$\boxed{u(j) = -R^{-1}G^{T}\lambda(j+1)} \qquad (8.8)$$

όπου τα *λ* δίνονται από την (8.6) με οριακή συνθήκη την (8.7).

- Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι ενώ η εξίσωση (8.1) λύνεται ξεκινώντας από *j*=0 προς το *j*=N, οι υπόλοιπες σχέσεις για τον καθορισμό του *u(j)* λύνονται αντίθετα, ξεκινώντας από *j*=N προς το *j*=0 . Το γεγονός αυτό δημιουργεί επιπρόσθετη δυσκολία στη λύση ανοικτού βρόχου.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

Λύση κλειστού βρόχου

- Οι παραπάνω δυσκολίες μπορούν να εξαλειφθούν αν προχωρήσουμε στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης κλειστού βρόχου, έτσι ώστε σε κάθε βήμα *j*, η είσοδος να εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος στο βήμα αυτό, δηλαδή αν:

$$u(j) = K(j)\,x(j) \qquad (8.9)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

Λύση κλειστού βρόχου

- Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τη λύση κλειστού βρόχου ας θεωρήσουμε ότι η *λ(j)* μπορεί να γραφεί σαν μετασχηματισμός της *x(j)* – μετασχηματισμός Riccati – σύμφωνα με τη σχέση:

$$\lambda(j) = P(j)x(j) \tag{8.10}$$

- Αντικαθιστώντας την (8.10) στην (8.8) και συνδυάζοντάς την με την (8.1) προκύπτει ότι:

$$x(j+1) = \left[I + GR^{-1}G^{T}P(j+1)\right]^{-1}Fx(j) \tag{8.11}$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

Λύση κλειστού βρόχου

- Συνδυάζοντας τώρα την εξίσωση (8.11) με τις σχέσεις (8.6) και (8.10), καταλήγουμε στην:

$$\left\{F^T P(j+1)\left[I+GR^{-1}G^T P(j+1)\right]^{-1} F+Q-P(j)\right\} x(j)=0 \quad (8.12)$$

- Για να ισχύει η σχέση (8.12) για κάθε *j* – δηλαδή για κάθε *x(j)*- πρέπει ο παράγοντας μπροστά από το *x(j)* να είναι μηδέν. Έτσι η μήτρα μετασχηματισμού *P(j)* που είναι μια <u>τετραγωνική, συμμετρική, θετικά ορισμένη</u> μήτραδίνεται από τη λύση της αναδρομικής εξίσωσης:

$$\boxed{P(j)=F^T P(j+1)\left[I+GR^{-1}G^T P(j+1)\right]^{-1} F+Q} \qquad (8.13)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

Λύση κλειστού βρόχου

με οριακή συνθήκη όπως προκύπτει από την (8.7) σε συνδυασμό με την (8.10):

$$\boxed{P(N) = S} \qquad (8.14)$$

Τότε, όπως προκύπτει από την (8.6), επειδή:

$$P(j+1)x(j+1) = F^{-T}\left[P(j) - Q\right]x(j) \qquad (8.15)$$

η λύση κλειστού βρόχου βρίσκεται από την (8.8) για *λ(j+1)=P(j+1)x(j+1)* και είναι:

$$\boxed{u(j) = -R^{-1}G^{T}F^{-T}\left[P(j) - Q\right]x(j)} \qquad (8.16)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

Λύση κλειστού βρόχου

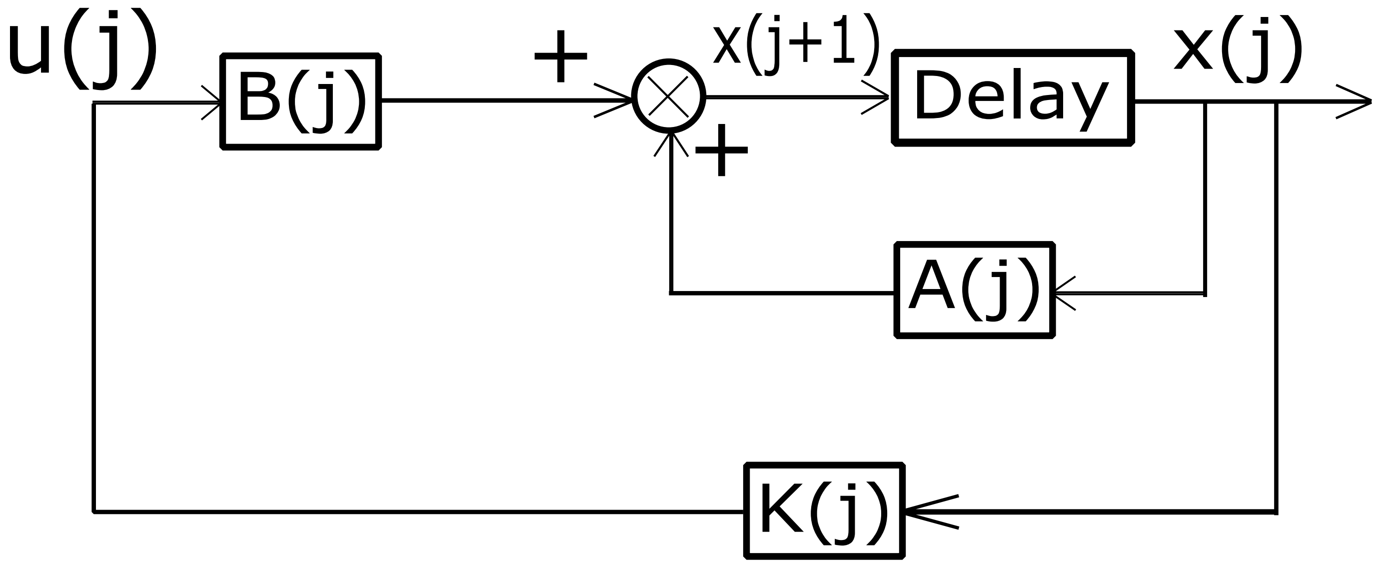
Δηλαδή ο βρόχος ανάδρασης κατάστασης έχει κέρδος:

$$\boxed{K(j) = -R^{-1}G^{T}F^{-1}\left[P(j)-Q\right]} \qquad (8.17)$$

- <u>Βασική Παρατήρηση</u>

Από τις σχέσεις (8.13) ως (8.17) η μήτρα ανάδρασης *K(j)* είναι ανεξάρτητη του *x(j)* . Αυτό δίνει τη δυνατότητα στην εξίσωση Riccati να μπορεί να λυθεί εκ των προτέρων, αρχίζοντας από την τελική τιμή *P(N)* και πηγαίνοντας προς την αρχή έτσι ώστε τα *K(j)* να <u>προαποθηκευτούν</u> στη μνήμη ενός υπολογιστή και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν κατά τη λειτουργία του συστήματος.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης



<u>Σχήμα 8.1:</u> Το κλειστό βέλτιστο σύστημα διακριτού χρόνου

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015. Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης (LQ) για συστήματα διακριτού χρόνου». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.