Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 7: Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συστήματα διακριτού χρόνου

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Για ένα βαθμωτό σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$x(j+1)=F\left[x(j),u(j)\right] \qquad (7.1)$$

με δεδομένο το αρχικό $x(0)=x_0$, ο βέλτιστος έλεγχος συνίσταται στην εύρεση της βέλτιστης εισόδου u^* σε κάθε βήμα από 0 μέχρι N-1 έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κριτήριο κόστους:

$$J=\sum_{j=0}^{N-1}L_j\left[x(j),u(j)\right]+\Phi\left[x(N)\right] \qquad (7.2)$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης *J* σε κάθε βήμα i ($0 \le i \le N\text{-}1$), υπό τον περιορισμό της εξίσωσης διαφορών του συστήματος. Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπό ισοτικούς περιορισμούς.

- Εισάγοντας λοιπόν τους παράγοντες Lagrange σχηματίζουμε τη Lagrangian για κάθε βήμα I:

$$\sum_{j=0}^{i} L_j\left[x(j),u(j)\right]+\lambda(j+1)\left\{F\left[x(j),u(j)\right]-x(j+1)\right\} \quad (7.3)$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Η ελαχιστοποίηση της ως προς *u* και *x* θα δώσει τις αναγκαίες συνθήκες σε κάθε βήμα για την εύρεση του βέλτιστου *u**.

Έτσι, για τον αρχικό έλεγχο (i=0) θα ισχύει:

$$\frac{\partial L_0}{\partial u(0)} + \lambda(1)\frac{\partial F\left[x(0),u(0)\right]}{\partial u(0)} = 0 \qquad (7.4)$$

με $x(0)=x_0$ δεδομένο.

Για το πρώτο βήμα (i=1) αντίστοιχα θα είναι:

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Για το πρώτο βήμα (i=1) αντίστοιχα θα είναι:

$$\frac{\partial L_1}{\partial u(1)} + \lambda(2)\frac{\partial F\left[x(1),u(1)\right]}{\partial u(1)} = 0 \qquad (7.5)$$

και

$$\frac{\partial L_1}{\partial x(1)} + \lambda(2)\frac{\partial F\left[x(1),u(1)\right]}{\partial x(1)} - \lambda(1) = 0 \qquad (7.6)$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Αντίστοιχα για το I βήμα (όπου 0≤i ≤N-1) θα είναι :

$$\frac{\partial L_i}{\partial u(i)} + \lambda(i+1)\frac{\partial F\left[x(i),u(i)\right]}{\partial u(i)} = 0 \qquad (7.7)$$

και

$$\frac{\partial L_i}{\partial x(i)} + \lambda(i+1)\frac{\partial F\left[x(i),u(i)\right]}{\partial x(i)} - \lambda(i) = 0 \qquad (7.8)$$

ενώ για το τελικό όριο i=N θα ισχύει:

$$\boxed{\lambda(N) = \frac{\partial}{\partial x(N)}\Phi\left[x(N)\right]} \qquad (7.9)$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Ορίζοντας σαν Hamiltonian συνάρτηση την

$$H(i) = L_i + \lambda(i+1) F\left[x(i), u(i)\right] \qquad (7.10)$$

τότε για το κάθε βήμα I, ο βέλτιστος έλεγχος θα δίνεται από τη συνθήκη:

$$\boxed{\frac{\partial H(i)}{\partial u(i)} = 0 \quad , \quad i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, N-1} \qquad (7.11)$$

ενώ οι παράγοντες Lagrange θα ορίζονται από την:

$$\boxed{\lambda(i) = \frac{\partial H(i)}{\partial x(i)} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, N-1} \qquad (7.12)$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

με τελική τιμή αυτή που δίνεται από τη σχέση (7.9) .

- Στην περίπτωση κατά την οποία η σχέση (7.1) περιγράφει ένα σύστημα πολλών εισόδων – εξόδων, είναι δηλαδή

$$x(j)=\begin{bmatrix} x_1(j) & x_2(j) & x_3(j) & \dots & x_n(j) \end{bmatrix}^T$$

ένα n τάξης διάνυσμα και

$$u(j)=\begin{bmatrix} u_1(j) & u_2(j) & u_3(j) & \dots & u_m(j) \end{bmatrix}^T$$

ένα m τάξης διάνυσμα και αντίστοιχα:

$$F\left[x(j),u(j)\right]=\begin{bmatrix} F_1\{x(j),u(j)\} & F_2\{x(j),u(j)\} & \dots\dots & F_n\{x(j),u(j)\} \end{bmatrix}^T$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου

Τότε η ελαχιστοποίηση της J καταλήγει σε ίδιες ακριβώς συνθήκες με τις προηγούμενες (7.11), (7.12) και (7.9), σε διανυσματική όμως μορφή, αφού:

$$\lambda(j)=\left[\lambda_1(j)\quad \lambda_2(j)\quad \lambda_3(j)\quad \ldots\quad \lambda_n(j)\right] \tag{7.13}$$

είναι ένα διάνυσμα n τάξης.

Τότε, αντίστοιχα, η Hamiltonian έχει τη μορφή:

$$H(j)=L_j\left[x(j),u(j)\right]+\lambda^T(j+1)F\left[x(j),u(j)\right] \tag{7.14}$$

ή

$$H(j)=L_j\left[x(j),u(j)\right]+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(j+1)F_k\left[x(j),u(j)\right] \tag{7.15}$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων διακριτού χρόνου». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.