Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 6: Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης έχει σαν αντικείμενο τη σχεδίαση του βέλτιστου ελέγχου που οδηγεί την έξοδο κάποιου γραμμικού δυναμικού συστήματος να ακολουθήσει κάποια είσοδο αναφοράς σύμφωνα με κάποιο τετραγωνικό κριτήριο σφάλματος ως προς την είσοδο αναφοράς.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- Έστω το γραμμικό δυναμικό σύστημα που δίνεται από τη σχέση (6.1):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (6.1)$$

με έξοδο:

$$y(t) = C(t)x(t) \qquad (6.2)$$

για το οποίο θέλουμε η έξοδος να ακολουθεί κάποια <u>μη μηδενική</u> είσοδο αναφοράς *r(t)*.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- Έστω το γραμμικό δυναμικό σύστημα που δίνεται από τη σχέση (6.1):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (6.1)$$

με έξοδο:

$$y(t) = C(t)x(t) \qquad (6.2)$$

για το οποίο θέλουμε η έξοδος να ακολουθεί κάποια <u>μη μηδενική</u> είσοδο αναφοράς *r(t)*.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- Αν ορίσουμε το σφάλμα *e* μεταξύ της εξόδου και του σήματος αναφοράς:

$$e(t) = y(t) - r(t) \qquad (6.3)$$

το κριτήριο που ελαχιστοποιούμε είναι το ακόλουθο:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt + \frac{1}{2}e^T(t_f)S(t_f) \qquad (6.4)$$

όπου τα $t_0, x(t_0), t_f$ θεωρούνται δεδομένα, ενώ αφήνεται ελεύθερο το $x(t_f)$.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- Οι μήτρες βάρους *Q,R,S* λαμβάνονται πραγματικές, συμμετρικές, τετραγωνικές, με τη μήτρα *R* θετικά ορισμένη, ενώ οι μήτρες *Q* και *S* θετικά ημιορισμένες.
- Η Hamiltonian για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι:

$$H = \frac{1}{2}(Cx - r)^T Q(Cx - r) + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T [Ax + Bu] \quad (6.5)$$

- Η συνθήκη βελτιστοποίησης, όπως και στην περίπτωση του προβλήματος βέλτιστης ρύθμισης, δίνει:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda = 0 \quad (6.6)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- Η εξίσωση συμπληρωματικών καταστάσεων γίνεται:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(C^T Q C x + A^T \lambda - C^T Q r\right) \qquad (6.7)$$

με οριακή συνθήκη στον τελικό χρόνο t_f :

$$\lambda\left(t_f\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(Cx - r\right)^T S\left(Cx - r\right)\right]\Bigg|_{t=t_f} = \qquad (6.8)$$

$$= C^T S C x\left(t_f\right) - C^T S r\left(t_f\right)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση ανοιχτού βρόχου**

Όπως προκύπτει από τη σχέση (6.6), η βέλτιστη λύση ανοιχτού βρόχου είναι:

$$\boxed{u = -R^{-1}B^{T}\lambda} \tag{6.9}$$

όπου το λ δίνεται από τη λύση του συστήματος συμπληρωματικών καταστάσεων (6.8) μαζί με την αρχική εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική του συστήματος:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{T} \\ -C^{T}QC & -A^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C^{T}Q \end{bmatrix} r} \tag{6.10}$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση ανοιχτού βρόχου**

  με οριακές συνθήκες στο t_0 και t_f :

$$x(t_0) = x_0 \qquad (6.11)$$

και

$$\lambda(t_f) = C^T S\left[Cx(t_f) - r(t_f)\right] \qquad (6.12)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση κλειστού βρόχου**

Θεωρούμε ότι το διάνυσμα συμπληρωματικών καταστάσεων *λ* μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του διανύσματος κατάστασης *x*. Επειδή όμως, σύμφωνα με τη σχέση (6.9), η είσοδος είναι ανάλογη του *λ* και στη μόνιμη κατάσταση θα πρέπει το σφάλμα *e* να μηδενίζεταικαι επομένως να ισχύει:

$$y(t)=r(t) \qquad (6.13)$$

πράγμα που σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας του συστήματος δε βρίσκεται πλέον στο σημείο *x=0* . Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι για τη λύση κλειστού βρόχου πρέπει να δρα επίσης και μια ανεξάρτητη από το διάνυσμα κατάστασης συνιστώσα σαν είσοδος που θα εξασφαλίζει την ισορροπία του συστήματος σε κάποιο μη μηδενικό σημείο.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση κλειστού βρόχου**

Γι’ αυτό η *λ(t)* δεν μπορεί να περιγραφεί μόνο σαν συνάρτηση του *x(t)* αλλά πρέπει να έχει και μια επιπλέον ανεξάρτητη του *x* συνιστώσα. Θα είναι δηλαδή:

$$\lambda(t) = P(t)\,x(t) + \xi(t) \qquad (6.14)$$

Έτσι για τη λύση κλειστού βρόχου πρέπει να ορίσουμε τη μήτρα μετασχηματισμού *P(t)* καθώς και την αυθαίρετη συνιστώσα *ξ(t)*.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση κλειστού βρόχου**

Χρησιμοποιώντας την (6.14) έτσι ώστε να απαλείψουμε το λ, η (6.10) δίνει:

$$\dot{x} = \left[A - BR^{-1}B^{T}P \right] x - BR^{-1}B^{T}\xi \qquad (6.15)$$

και

$$\dot{\lambda} = \left[-C^{T}QC - A^{T}P \right] x + C^{T}Qr - A^{T}\xi \qquad (6.16)$$

Διαφορίζοντας όμως την (6.14) προκύπτει για το $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} + \dot{\xi} \qquad (6.17)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση κλειστού βρόχου**

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.15) ως (6.16) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}&\left[\dot{P}+PA+A^{T}P-PBR^{-1}B^{T}P+C^{T}QC\right]x(t)+\\&+\left[\dot{\xi}(t)-PBR^{-1}B^{T}\xi(t)+A^{T}\xi(t)-C^{T}Qr(t)\right]=0\end{aligned} \tag{6.18}$$

Επειδή η προηγούμενη σχέση πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε *x(t)*, *ξ(t)* και *r(t)* ο όρος μπροστά από το *x(t)* πρέπει να είναι μηδέν.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση κλειστού βρόχου**

Έτσι η μήτρα *P* , η οποία είναι μια θετικά ορισμένη, τετραγωνική nxn συμμετρική μήτρα με n(n+1)/2 διαφορετικά στοιχεία, δίνεται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati:

$$\boxed{\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - C^T QC} \qquad (6.19)$$

με οριακή συνθήκη που προκύπτει από τις σχέσεις (6.12) και (6.14):

$$\boxed{P\left(t_f\right) = C^T SC} \qquad (6.20)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση κλειστού βρόχου**

Για τον ίδιο λόγο πρέπει και ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (6.18) να είναι μηδέν, οπότε προκύπτει για την *ξ(t)* η διαφορική εξίσωση:

$$\boxed{\dot{\xi} = \left[PBR^{-1}B^T + A^T \right]\xi + C^T Qr(t)} \qquad (6.21)$$

με οριακές συνθήκες

$$\boxed{\xi(t_f) = -C^T Sr(t_f)} \qquad (6.22)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση κλειστού βρόχου**

Τότε η λύση κλειστού βρόχου θα ορίζεται από την:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B^{T}\left[P(t)x(t)+\xi(t)\right]= \\ &= K(t)x(t)-R^{-1}B^{T}\xi(t) \end{aligned}} \qquad (6.23)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- <u>Σχόλια</u>
  - Η μήτρα ανάδρασης είναι ανεξάρτητη του *x(t)*. Έτσι, η εξίσωση Riccati μπορεί να λυθείέκ των προτέρων, αρχίζοντας από την τελική τιμή $P(t_f)$ και πηγαίνοντας προς την αρχή, ώστε η μήτρα ανάδρασης να μπορεί να προαποθηκευτεί στη μνήμη ενός υπολογιστή και να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια κατά τη λειτουργία του συστήματος.
  - Από τις σχέσεις (6.21) και (6.22) φαίνεται ότι και η αυθαίρετη μεταβλητή *ξ(t)* μπορεί να προϋπολογιστεί αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων την είσοδο αναφοράς.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση απείρου χρόνου (*$t_f \rightarrow \infty$*)**

Για τη λύση απείρου χρόνου το κριτήριο κόστους γίνεται:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[e^T(t)Q(t)e(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \qquad (6.24)$$

Για σύστημα ευσταθές είναι προφανές ότι η λύση απείρου χρόνου πρέπει να οδηγήσει τελικά σε κάποια μόνιμη κατάσταση λειτουργίας (steady state). Για συστήματα αμετάβλητα στο χρόνο (invariant time systems) που βρίσκονται στη μόνιμη κατάσταση, το πρόβλημα παρακολούθησης περιγράφεται από αλγεβρικές και όχι διαφορικές εξισώσεις όταν:

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση απείρου χρόνου (*$t_f \rightarrow \infty$*)**

$$r(t) = \overline{r} = \text{σταθερά} \qquad (6.25)$$

Άμεσο επακόλουθο είναι ότι και ο βρόχος ανάδρασης ορίζεται πλέον από μια σταθερή τιμή κέρδους:

$$K(t) = K \qquad (6.26)$$

η οποία θα προέρχεται από τη λύση μόνιμης κατάστασηςτης εξίσωσης Riccati που προκύπτει για :

$$\dot{P}(t) = 0$$

και είναι:

$$\boxed{PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T QC = 0} \qquad (6.27)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

- **Λύση απείρου χρόνου (*t_f*→∞)**

και της αλγεβρικής εξίσωσης ως προς *ξ*, όπως προκύπτει από την (6.21) για $\dot{\xi}=0$:

$$\boxed{\xi=\left[A^T-PBR^{-1}B^T\right]^{-1}C^TQ\bar{r}} \qquad (6.28)$$

Επειδή όμως η εξίσωση Riccati (6.19) με την οριακή συνθήκη (6.20) λύνεται προς τα πίσω στο χρόνο, αυτή φτάνει στη μόνιμη κατάσταση που εκφράζεται από τη αλγεβρική εξίσωση Riccati (6.27) όσο πηγαίνουμε από το t_f προς το t_0 .

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης

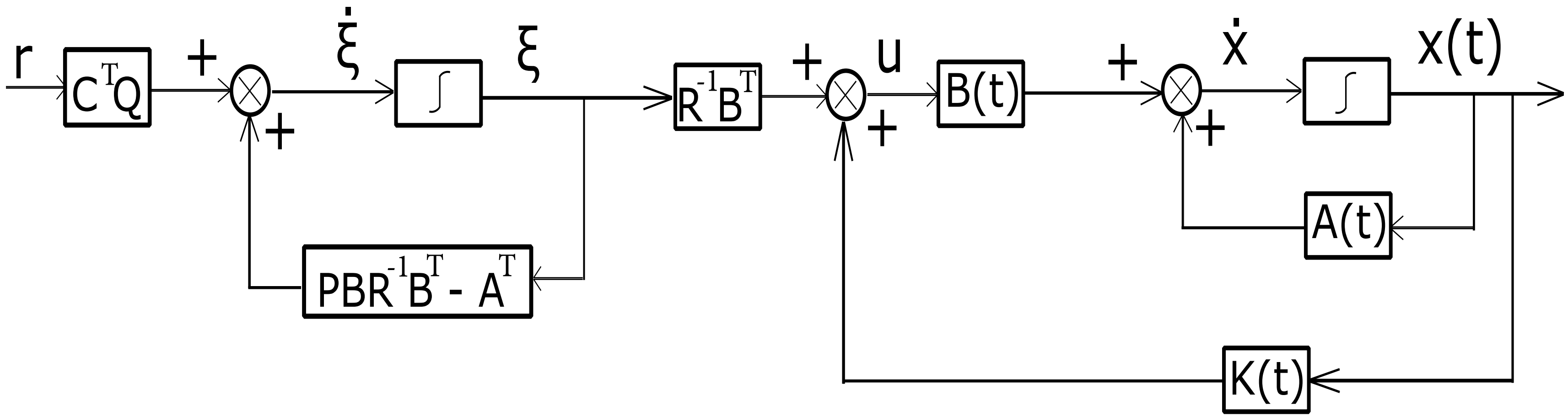
- **Λύση απείρου χρόνου ($t_f \rightarrow \infty$)**

Για t_f άπειρο, δηλαδή πολύ μεγάλο, αφού η μήτρα βάρους στο τελικό όριο *S* είναι 0, η λύση της Riccati θα ξεκινάει από την τιμή $P(\infty)=0$ και θα πηγαίνει σε κάποια σταθερή τιμή *P* για χρόνους που πλησιάζουν το t_0 . Έτσι, για προβλήματα στα οποία το τελικό όριο πηγαίνει στο άπειρο, η λύση κλειστού βρόχου είναι εξαρχής (από το t_0) <u>σταθερή</u> και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{K = -R^{-1}B^{T}P} \tag{6.29}$$

όπου *P* η λύση της αλγεβρικής Riccati (6.27) .

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης



<u>Σχήμα 6.1:</u> Το κλειστού βρόχου βέλτιστο σύστημα

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015. Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.