Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 4: Το γενικευμένο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου για συστήματα συνεχούς χρόνου

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης σύμφωνα με τη σχέση:

$$\dot{x} = F\left(x, u, t\right)$$

και το ακόλουθο γενικευμένο κριτήριο κόστους που περιέχει τον ξεχωριστό όρο $\Phi[x(t_f), t_f]$ για την τελική χρονική τιμή t_f .

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L\left(x, u, t\right) dt + \Phi\left[x\left(t_f\right), t_f\right]$$

με δεδομένα τα t_0 , $x(t_0)$ στο αρχικό όριο και γνωστά στο τελικό όριο ένα από τα t_f ή το $x(t_f)$.

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Θεωρούμε τη *Φ* <u>διαφορίσιμη</u> συνάρτηση ορίζουμε:

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L\left(x, u, t\right) + \dot{\Phi}\left[x\left(t\right), t\right] \right\} dt$$

Τότε η ελαχιστοποίηση του κριτηρίου *J* είναι ισοδύναμη με αυτή του *J** , όπως προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις:

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

$$\min_u J^* = \min_u \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L\left(x,u,t\right) + \dot{\Phi}\left[x\left(t\right),t\right] \right\} dt =$$

$$= \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_f} L\left(x,u,t\right) dt + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\Phi}\left[x\left(t\right),t\right] dt \right\} =$$

$$= \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_f} L\left(x,u,t\right) dt + \int_{t_0}^{t_f} d\Phi\left[x\left(t\right),t\right] \right\} =$$

$$= \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_f} L\left(x,u,t\right) dt + \Phi\left[x\left(t_f\right),t_f\right] - \Phi\left[x\left(t_0\right),t_0\right] \right\} =$$

$$= \min_u \left\{ J - \Phi\left[x\left(t_0\right),t_0\right] \right\}$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Επειδή όμως η *Φ[x(t₀),t₀]* έχει κάποια σταθερή τιμή στο όριο

$$\min_u J = \min_u J^*$$

Ταυτόχρονα αναλύοντας την παράγωγο της *Φ* χρησιμοποιώντας κατά σειρά μερικές παραγωγίσεις, παίρνουμε:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}x_i\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Έτσι τελικά, με αντικατάσταση του $\dot{\Phi}$ το κριτήριο κόστους *J** μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L\left(x,u,t\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} dt$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Αν σχηματίσουμε τη Lagrangian, θεωρώντας ως περιορισμούς το σύνολο των καταστατικών εξισώσεων του συστήματος, καταλήγουμε στο ακόλουθο ισοδύναμο κριτήριο:

$$J^{**} = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L(x,u,t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \lambda^T \left[F(x,u,t) - \dot{x} \right] \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} K(x, \dot{x}, u, \lambda, t)\, dt$$

όπου $\lambda = \left[\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n \right]^T$ το διάνυσμα των παραγόντων Lagrange.

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Τότε η ελαχιστοποίηση της *J*** θα δίνεται από τις εξισώσεις Euler – Lagrange ως προς όλες τις εμφανιζόμενες μεταβλητές *x*,*u*,*λ* .

- Έτσι, <u>ως προς το διάνυσμα *x*</u> θα πρέπει:

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \quad , \quad \text{με}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{L + \lambda^T F\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \lambda^T \dot{x}\right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \lambda$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Οπότε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \dot{\lambda}$$

- Θεωρώντας τη Hamiltonian

$$H = L + \lambda^T F$$

- Έχουμε τελικά

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right\} = 0$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Επειδή όμως

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^{T}\dot{x}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dt}{dt}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^{T}\dot{x}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]$$

- Έχω τελικά για την εξίσωση των <u>συμπληρωματικών καταστάσεων</u>:

$$\boxed{\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}}$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Από τις υπόλοιπες εξισώσεις Euler – Lagrange ως προς *u* και ως προς *λ* , καταλήγουμε αντίστοιχα στη συνθήκη βελτιστοποίησης:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} = 0}$$

από την οποία προκύπτει και ο βέλτιστος νόμος ελέγχου, και στην αρχική εξίσωση των δυναμικών του συστήματος:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = F\left(x, u, t\right)$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Η λύση στο γενικευμένο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου για συστήματα συνεχούς χρόνου δίνεται συνεπώς από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων των δυναμικών του συστήματος, μαζί με την εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων. Ο τελικός νόμος ελέγχου εφαρμόζεται μέσω της συνθήκης βελτιστοποίησης.

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} = 0}$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Για να επιλυθούν όμως οι διαφορικές εξισώσεις της δυναμικής του συστήματος και των συμπληρωματικών καταστάσεων χρειάζονται κάποιες αρχικές ή τελικές τιμές των μεταβλητών τους. Α΄πό αυτές έχουμε πάντοτε μόνο την αρχική συνθήκη $x(t_0)$ στο t_0 δεδομένο. Χρειαζόμαστε όμως άλλη μια οριακή συνθήκη. Αυτή θα τη βρούμε στο τελικό όριο t_f, για το οποίο διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

a) <u>Περίπτωση δεδομένης της τελικής κατάστασης</u> $x(t_f)$ και ελεύθερης της τελικής χρονικής στιγμής t_f.

Τότε ισχύει:

$$\left[K - \dot{x}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right]\Bigg|_{t_f} = 0$$

η οποία μετά τις αντικαταστάσεις δίνει

$$\left\{ H + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \lambda^T \dot{x} - \dot{x}^T \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \lambda\right] \right\}\Bigg|_{t_f} = 0$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

a) <u>Περίπτωση δεδομένης της τελικής κατάστασης</u> $x(t_f)$ και ελεύθερης της τελικής χρονικής στιγμής t_f.

Τότε ισχύει:

$$\left.\left[K-\dot{x}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right]\right|_{t_f}=0$$

η οποία μετά τις αντικαταστάσεις δίνει

$$\left.\left\{H+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^T\dot{x}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\lambda^T\dot{x}-\dot{x}^T\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\lambda\right]\right\}\right|_{t_f}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\left.\left[H+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]\right|_{t_f}=0}$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

b) Περίπτωση δεδομένου του τελικού χρόνου t_f και ελεύθερης της τελικής κατάστασης $x(t_f)$.

Τότε αντίστοιχα ισχύει:

$$\left.\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0$$

που μετά τις αντικαταστάσεις δίνει

$$\lambda\left(t_f\right) = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{t_f}$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015. Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Το γενικευμένο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου για συστήματα συνεχούς χρόνου». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.