Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 3: Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Έστω το βαθμωτό δυναμικό σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$$\dot{x} = F\left(x, u, t\right)$$

για το οποίο ζητάμε τη βέλτιστη είσοδο *u** για την οποία ελαχιστοποιείται το κριτήριο

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L\left(x, u, t\right) dt$$

με δεδομένα και ορισμένα το t_0 , $x(t_0)$, t_f και το $x(t_f)$. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό σαν πρόβλημα <u>βέλτιστου ελέγχου δύο οριακών τιμών</u>.

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Εισάγοντας τον παράγοντα Lagrange *λ(t)* σχηματίζουμε το ισοδύναμο κριτήριο

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L\left(x,u,t\right) + \lambda\left(t\right)\left[F\left(x,u,t\right) - \dot{x}\right]\right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} K\left(\dot{x},x,u,\lambda,t\right) dt$$

όπου

$$K\left(\dot{x},x,u,\lambda,t\right) = L\left(x,u,t\right) + \lambda\left(t\right)\left[F\left(x,u,t\right) - \dot{x}\right]$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Τότε η ελαχιστοποίηση του κριτηρίου κόστους θα δίνεται κατά τα γνωστά από τις εξισώσεις Euler – Lagrange, ως προς όλες τις εμφανιζόμενες μεταβλητές *x,u,λ.*

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{u}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}}\right) = 0$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Προφανώς ισχύει:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = -\lambda$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{u}} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}} = 0$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{d}{dt}\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\left\{L + \lambda F\right\} + \dot{\lambda} = 0$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Αν ορίσουμε τη συνάρτηση, η οποία ονομάζεται Hamiltonian,

$$\boxed{H = L + \lambda F}$$

έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{L + \lambda F\right\} + \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}}$$

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων *λ*.

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Η δεύτερη εξίσωση Euler – Lagrange δίνει:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(L + \lambda F\right) = 0$$

ή

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} = 0}$$

που αποτελεί τη <u>Συνθήκη Βελτιστοποίησης</u>, από την οποία προκύπτει ο βέλτιστος νόμος ελέγχου.

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Τέλος, η Τρίτη εξίσωση Euler – Lagrange καταλήγει στην αρχική εξίσωση των δυναμικών του συστήματος:

$$\boxed{\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = F\left(x, u, t\right)}$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Συνεπώς, στο πρόβλημα των δύο οριακών τιμών για βαθμωτά συστήματα, η εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

μαζί με τη συνθήκη βελτιστοποίησης:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

και τη διαφορική εξίσωση του συστήματος αποτελούν τις αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ελαχίστου.

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Παρόμοιες σχέσεις προκύπτουν και στην περίπτωση όπου η κατάσταση *x* και η είσοδος *u* είναι διανύσματα διαστάσεων n και m αντίστοιχα.
- Έστω ότι

$$x = \left[x_1 \; x_2 \ldots x_n\right]^T, \; u = \left[u_1 \; \mathrm{u}_2 \ldots u_m\right]^T$$

$$F\left(x,u,t\right) = \left[F_1\left(x,u,t\right) \; F_2\left(x,u,t\right) \ldots F_n\left(x,u,t\right)\right]^T$$

όπου ζητάμε τη βέλτιστη είσοδο για την ελαχιστοποίηση του κριτηρίου

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L\left(x,u,t\right) dt$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Εισάγοντας τους παράγοντες Lagrange *λ*, η ελαχιστοποίηση της *J* είναι ισοδύναμη προς την ελαχιστοποίηση της *J** .

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L(x,u,t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \left[F_j(x,u,t) - \dot{x}_j \right] \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} K(x,\dot{x},u,\lambda,t)\, dt$$

όπου

$$K(x,\dot{x},u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \left[F_j(x,u,t) - \dot{x}_j \right]$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Οι εξισώσεις Euler – Lagrange στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

$$\frac{\partial K}{\partial u_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{u}_i}\right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, m$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}_i}\right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Επειδή:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} = -\lambda_i$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{u}_i} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0$$

και ορίζοντας σαν Hamiltonian συνάρτηση την

$$H = L + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j F_j = L + \lambda^T F$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Η πρώτη εξίσωση Euler – Lagrange γίνεται:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left\{-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i}\right\}=0$$

από την οποία προκύπτει η συνθήκη των <u>συμπληρωματικών καταστάσεων</u>:

$$\dot{\lambda}_i=-\frac{\partial L}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

που μπορούν να γραφτούν σε διανυσματική μορφή ως:

$$\boxed{\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}}\quad,\quad\frac{\partial H}{\partial x}=\left[\frac{\partial H}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial H}{\partial x_n}\right]^T$$

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου

- Αντίστοιχα προκύπτει και η συνθήκη βελτιστοποίησης σε διανυσματική μορφή

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} = 0} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \left[\frac{\partial H}{\partial u_1} \cdots\cdots \frac{\partial H}{\partial u_n} \right]^T$$

Ενώ η τελευταία εξίσωση Euler – Lagrange καταλήγει πάλι στο αρχικό σύστημα

$$\boxed{\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = F(x,u,t)} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \cdots\cdots \frac{\partial H}{\partial \lambda_n} \right]^T$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων συνεχούς χρόνου». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.