Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 2: Εισαγωγή στον βέλτιστο έλεγχο

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Εισαγωγή στον βέλτιστο έλεγχο

Πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου – χρόνου

- Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι επιθυμούμε η κατάσταση ενός συστήματος να οδηγηθεί από μια αρχική τιμή $x(t_0)$ σε μια συγκεκριμένη τελική τιμή $x(t_f)$ σε ελάχιστο χρόνο, όπου το t_f δεν δίνεται. Είναι το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου – χρόνου, όπως ονομάζεται.
- Η ποσότητα προς ελαχιστοποίηση είναι το χρονικό διάστημα

$$t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

Γι’ αυτό στο κριτήριο χρησιμοποιείται η $L(x,u,t) = 1$.

Πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου – χρόνου

- Η *L* δεν είναι συνάρτηση των *x* και *u* και δεν τίθεται κανένας περιορισμός στα διανύσματα αυτά.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0$$

Είναι φανερό ότι εφαρμόζοντας μια οσοδήποτε μεγάλη είσοδο, το χρονικό αυτό διάστημα μπορεί να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερο, κάτι καθόλου πρακτικό.

Πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου – ελάχιστης προσπάθειας

- Σε αντίθεση με την απαίτηση ελαχίστου χρόνου, μπορούμε να θεωρήσουμε την απαίτηση για έλεγχο *u* ελάχιστης προσπάθειας (minimum effort) . Ένα κατάλληλο κριτήριο για το πρόβλημα αυτό είναι:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{r} u_i^2 dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(u^T u \right) dt$$

Η εξίσωση αυτή συνήθως γενικεύεται εισάγοντας ένα συντελεστή βάρους για κάθε είσοδο ελέγχου.

Πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου – ελάχιστης ενέργειας εισόδου

- Ένα πιο ευέλικτο κριτήριο πετυχαίνεται εισάγοντας μια μήτρα βάρους *R*, οπότε:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(u^T R u \right) dt$$

- Έτσι, η $L(x,u,t)=u^T R u$, όπου *R* είναι μια πραγματική χρονικά μεταβαλλόμενη ή χρονικά αμετάβλητη, θετικά ορισμένη μλητρα βάρους. Για αναλυτική ευκολία η μήτρα βάρους είναι συμμετρική. Προβλήματα όπου χρησιμοποιούνται κριτήρια αυτής της μορφής καλούνται προβλήματα βέλτιστου ελέγχου – ελάχιστης ενέργειας εισόδου.

Πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου – ελάχιστης ενέργειας εισόδου

- Μια λύση για την οποία το παραπάνω κριτήριο γίνεται ελάχιστο είναι $u^*(x,t) = 0$, οπότε $J = 0$. Για αυτήν την τιμή το σύστημα φτάνει στην τελική του κατάσταση σε $t_f = \infty$ γεγονός μη αποδεκτό.

Ελαχιστοποίηση των καταστάσεων σφάλματος ή των αποκλίσεων των καταστάσεων

- Παρόμοιο κριτήριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ελαχιστοποίηση των καταστάσεων σφάλματος ή των αποκλίσεων των καταστάσεων. Όταν η τελική κατάσταση $x(t_f)$ ορίζεται ως αρχή των αξόνων και η αρχική κατάσταση περιγράφει τις αρχικές συνθήκες, τότε η κατάσταση ορίζεται με το σφάλμα και το αντίστοιχο κριτήριο είναι το παρακάτω:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T x \right) dt$$

με $L(x,u,t)=x^T x$ και καθορισμένα τα όρια του ολοκληρώματος.

Ελαχιστοποίηση των καταστάσεων σφάλματος ή των αποκλίσεων των καταστάσεων

- Εισάγοντας μήτρα βάρους *Q* το κριτήριο παίρνει την πιο γενική του μορφή:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x \right) dt$$

όπου *Q* μήτρα βάρους, τάξεως n, και $L(x,u,t)= x^T Qx \geq 0$.

Η μήτρα *Q* επιλέγεται συμμετρική, πραγματική και θετικά ορισμένη (ή θετικά ημιορισμένη).

- Και σε αυτήν την περίπτωση, η ικανοποίηση του κριτηρίου οδηγεί σε τιμή εισόδου άπειρη, άρα και μη αποδεκτή.

Τετραγωνικό κριτήριο

- Η χρήση ενός πιο σύνθετου κριτηρίου που είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο τελευταίων περιπτώσεων χρησιμοποιείται ευρέως στο σχεδιασμό βέλτιστου ελέγχου. Ονομάζεται <u>τετραγωνικό κριτήριο</u> και έχει τη μορφή:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt$$

Η εφαρμογή του στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου πετυχαίνει ένα βέλτιστο σύστημα, συνδυάζοντας τα κριτήρια του <u>ελάχιστου σφάλματος</u> και <u>ελάχιστης ενέργειας</u>. Για το κριτήριο αυτό οι μήτρες *Q* και *R* είναι πραγματικές και συμμετρικές. Σύμφωνα με τη *Συνθήκη 3,* η $L(x,u,t)=x^TQx+u^TRu$ πρέπει να είναι θετικά ορισμένη.

Τετραγωνικό κριτήριο

- Η *R* πρέπει να είναι οπωσδήποτε θετικά ορισμένη και η *Q* τουλάχιστον θετικά ημιορισμένη.
- Για το γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

το πρόβλημα του προσδιορισμού του *u* το οποίο ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό στοιχείο με όρια ολοκλήρωσης από 0 έως ∞ ,

$$J = \int_0^\infty L\left(x, u, t\right) dt = \int_0^\infty \left[x^T\left(t\right) Q x\left(t\right) + u^T\left(t\right) R u\left(t\right) \right] dt$$

ονομάζεται <u>γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ελέγχου απείρου χρόνου</u>.

Τετραγωνικό κριτήριο

- Με αυτά τα όρια ο προκύπτων βέλτιστος νόμος ελέγχου μπορεί να είναι σταθερά ανάλογος μόνο του διανύσματος κατάστασης *x(t)* για συστήματα αμετάβλητα στο χρόνο, γεγονός που επιτρέπει την εφαρμογή ελέγχου ανάδρασης κατάστασης <u>κλειστού βρόχου</u>:

$$u^*\left[x(t)\right] = Kx(t)$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015. Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Εισαγωγή στον βέλτιστο έλεγχο». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.