Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 11: Στοχαστικός βέλτιστος έλεγχος γραμμικών συστημάτων με χρήση τετραγωνικών κριτηρίων (LQG Problem)

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

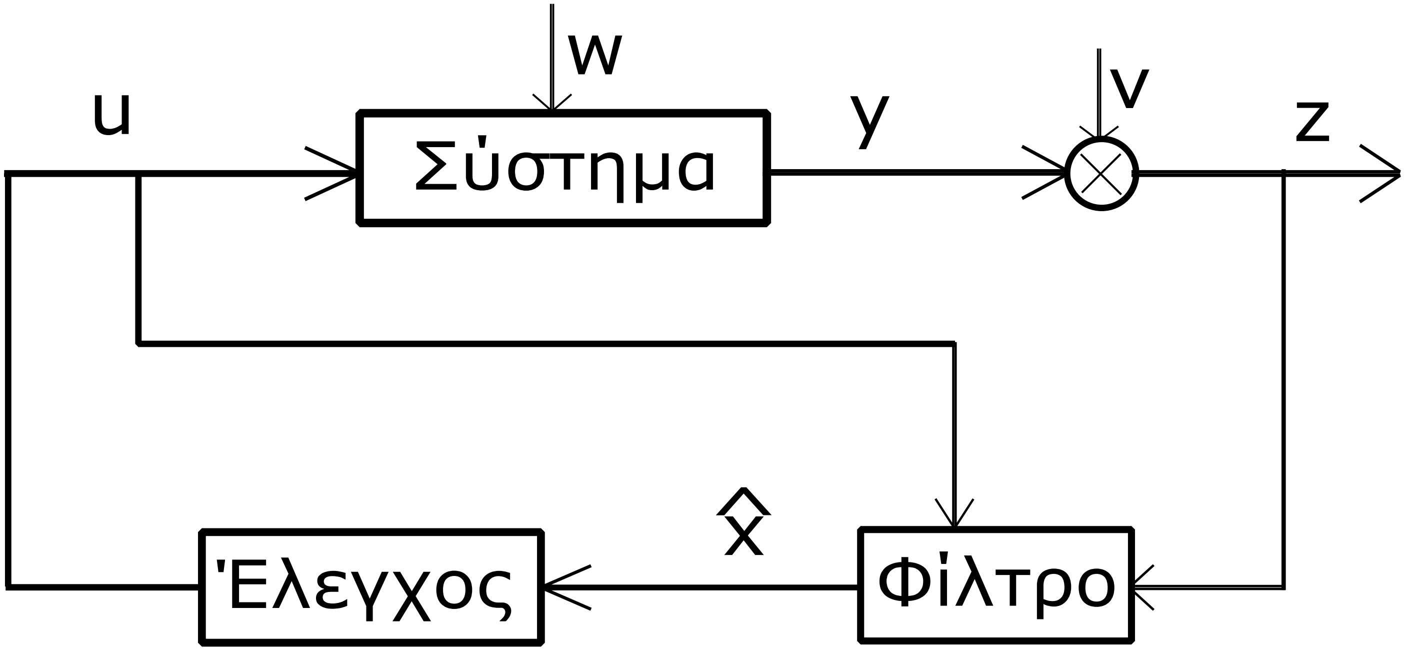
Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Ο στοχαστικός βέλτιστος έλεγχος αφορά συστήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου στα οποία επιδρούν ανεπιθύμητοι θόρυβοι τόσο στο ίδιο σύστημα όσο και στις μετρούμενες εξόδους.

Στις περιπτώσεις αυτές το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ανάγεται στα εξής επιμέρους προβλήματα. Πρώτον, στο φιλτράρισμα των εξόδων και στην όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση των πραγματικών καταστάσεων από το μετρούμενο διάνυσμα ελέγχου. Δεύτερο, στον υπολογισμό του βέλτιστου νόμου ελέγχου. Σχεδιάζουμε δηλαδή ένα βέλτιστο στοχαστικό παρατηρητή και ένα βέλτιστο βρόχο ελέγχου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.1 .

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος



Σχήμα 11.1: Στοχαστικός βέλτιστος έλεγχος συστημάτων

$$J=\sum_{j=0}^{N-1} L_j\left[x(j),u(j)\right]+\Phi\left[x(N)\right]$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Ας θεωρήσουμε το δυναμικό, γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw \qquad (11.1)$$

όπου *u* η είσοδος και *w* τυχαία μεταβολή, με μετρούμενη έξοδο:

$$z = Cx + v \qquad (11.2)$$

όπου *v* παριστά την αβεβαιότητα στη μέτρηση. Επίσης θεωρούμε ότι η αρχική τιμή του διανύσματος κατάστασης $x(t_0)$ παρουσιάζει αβεβαιότητα.

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Για τα τυχαία σήματα *w,v* και $x(t_0)$, θεωρούμε ότι ισχύουν τα παρακάτω στοχαστικά δεδομένα :

Για το θόρυβο *w* στο σύστημα:

$$E\left\{w(t)\right\}=0 \tag{11.3}$$

$$E\left\{w(t)w^T(\tau)\right\}=\hat{Q}\delta(t-\tau) \tag{11.4}$$

Για το θόρυβο *v* στο σύστημα:

$$E\left\{v(t)\right\}=0 \tag{11.5}$$

$$E\left\{v(t)v^T(\tau)\right\}=\hat{R}\delta(t-\tau) \tag{11.6}$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα συνεχούς χρόνου

όπου *δ(t-τ)* η συνάρτηση Kronecker:

$$\delta\left(t-\tau\right)=\begin{cases}1 & \text{όταν } t=\tau\\ 0 & \text{όταν } t\neq\tau\end{cases} \qquad (11.7)$$

ενώ για την αρχική τιμή της κατάστασης:

$$E\left\{x\left(t_0\right)\right\}=\overline{x}_0 \qquad (11.8)$$

$$E\left\{\left[x\left(t_0\right)-\overline{x}_0\right]\left[x\left(t_0\right)-\overline{x}_0\right]^T\right\}=\hat{P}_0 \qquad (11.9)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα συνεχούς χρόνου</u>

Για τα διαφορετικά σήματα θορύβου θεωρούμε ότι δεν υπάρχει μεταξύ τους ετεροσυσχέτιση:

$$E\left[w(t)v^T(\tau)\right] = E\left[w(t)x^T(\tau)\right] = E\left[v(t)x^T(\tau)\right] = 0 \quad (11.10)$$

Για το πρόβλημα αυτό θεωρούμε το παρακάτω κριτήριο κόστους:

$$J = E\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(x^T Q x + u^T R u\right)dt + \frac{1}{2}x^T\left(t_f\right)Sx\left(t_f\right)\right\} \quad (11.11)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα συνεχούς χρόνου

το οποίο αναφέρεται στη μέση τιμή E επειδή αφορά στοχαστικές διαδικασίες όπου οι μήτρες Q και S είναι πραγματικές, συμμετρικές και τουλάχιστον θετικά ημιορισμένες, ενώ η R είναι πραγματική συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Από τη σχέση (11.11) παρατηρούμε ότι το κριτήριο κόστους αναφέρεται στο ακριβές διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, ενώ ο σχεδιασμός του βέλτιστου βρόχου ελέγχου βασίζεται στο εκτιμούμενα κατάστασης μέσω κάποιου κατάλληλου φίλτρου.

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα συνεχούς χρόνου</u>

Εισάγοντας τη διαφορά *e* μεταξύ του πραγματικού και του εκτιμούμενου διανύσματος κατάστασης:

$$e = x - \hat{x} \qquad (11.12)$$

και αντικαθιστώνταςτο διάνυσμα κατάστασης *x* στην (11.11) μέσω της (11.12) καταλήγουμε στο ακόλουθο κριτήριο κόστους:

$$J = J_1 + J_2 \qquad (11.13)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα συνεχούς χρόνου

όπου:

$$J_1 = E\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\hat{x}^T Q\hat{x} + u^T R u\right]dt + \frac{1}{2}\hat{x}^T\left(t_f\right)Sx\left(t_f\right)\right\} \quad (11.14)$$

$$J_2 = E\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} e^T Q e dt + \frac{1}{2}e^T\left(t_f\right)Se\left(t_f\right)\right\} \quad (11.15)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Το αρχικό κριτήριο κόστους εκφράστηκε σαν άθροισμα δύο ανεξάρτητων κριτηρίων J_1 και J_2 . Το πρώτο κριτήριο αναφέρεται στον ανεξάρτητο σχεδιασμό του βέλτιστου ελέγχου έχοντας σαν δεδομένο την εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης $\hat{x}$. Τότε ο βέλτιστος νόμος ελέγχου θα δίνεται από τη σχέση:

$$u = K\hat{x} \qquad (11.16)$$

όπου :

$$K = -R^{-1}B^T P \qquad (11.17)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα συνεχούς χρόνου</u>

και P είναι η λύση της εξίσωσης Riccati :

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \qquad (11.18)$$

με αρχική τιμή στο όριο t_f :

$$P\left(t_f\right) = S \qquad (11.19)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Το δεύτερο κριτήριο J_2 , σύμφωνα με τη σχέση (11.15) σχετίζεται μόνο προς το σφάλμα εκτίμησης *e* του φίλτρου-εκτιμητή και αποτελεί το κριτήριο βέλτιστου σχεδιασμού ενός τέτοιου φίλτρου. Ένα τέτοιο φίλτρο πλήρους τάξης (φίλτρο Kalman-Bucy) Μπορεί να σχεδιαστεί σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\dot{\hat{x}} = \left(A - K_e C\right)\hat{x} + Bu + K_e z \qquad (11.20)$$

με

$$\hat{x}\left(t_0\right) = x_0 \qquad (11.21)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα συνεχούς χρόνου</u>

Το κέρδος K_e , του φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$K_e = \hat{P} C^T \hat{R}^{-1} \qquad (11.22)$$

με $\hat{P}$ τη λύση της ακόλουθης εξίσωσης Riccati :

$$\dot{\hat{P}} = A\hat{P} + \hat{P}A^T - \hat{P}C^T\hat{R}^{-1}C\hat{P} + D^T\hat{Q}D \qquad (11.23)$$

με αρχική τιμή:

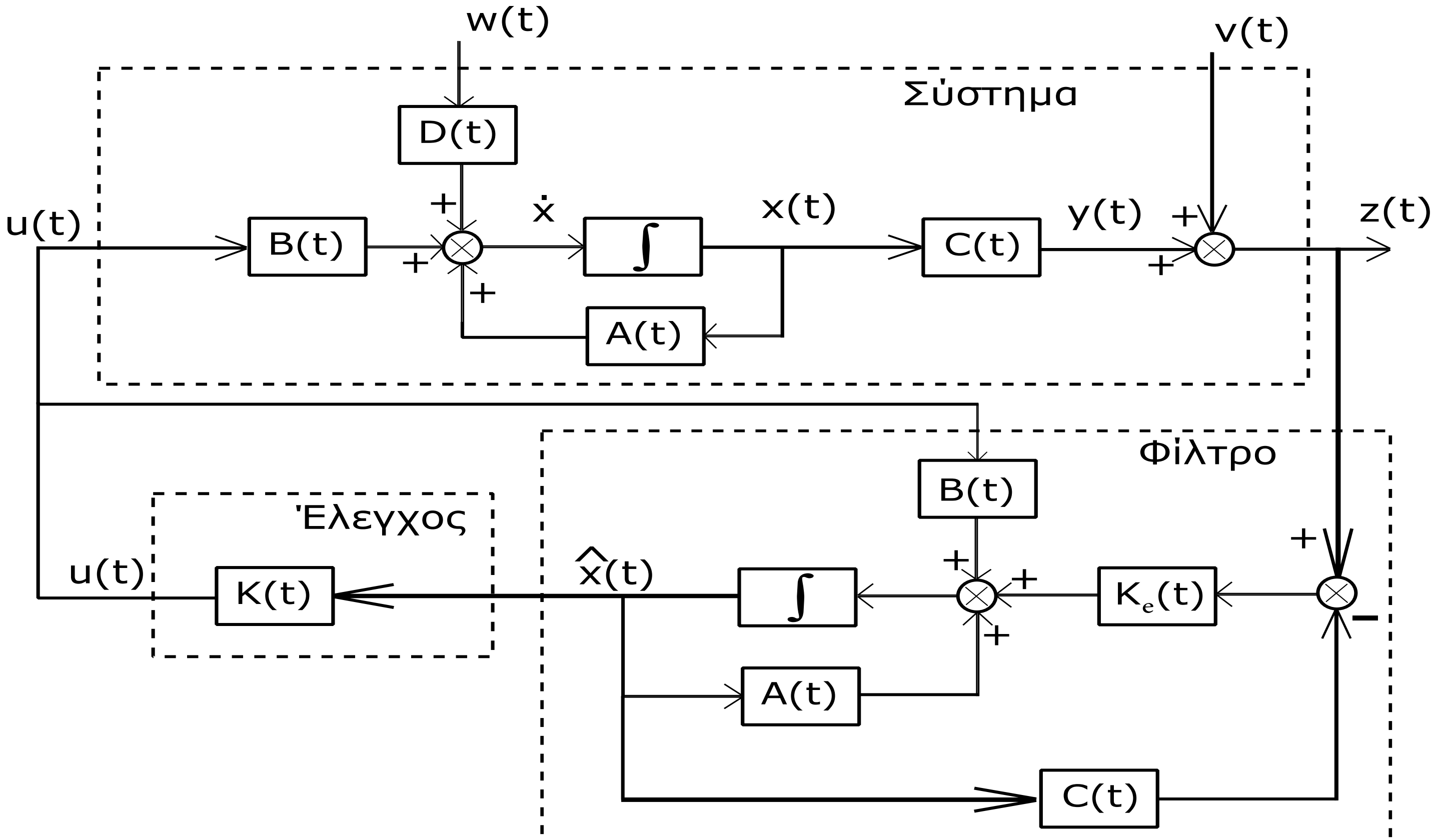
$$\hat{P}(t_0) = \hat{P}_0 \qquad (11.24)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Από την προηγηθείσα ανάλυση αποδείχτηκε ότι ο συνδυασμός του βέλτιστου ελέγχου για γραμμικά στοχαστικά συστήματα γίνεται ανεξάρτητα για το βρόχο ελέγχου και ανεξάρτητα για το βέλτιστο εκτιμητή. Η βασική αυτή ιδιότητα αναφέρεται στη βιβλιογραφία σαν Αρχή του ανεξάρτητου σχεδιασμού μεταξύ του νόμου ελέγχου και του παρατηρητή. Το πρόβλημα που αναλύθηκε , το στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου αναφέρεται σαν γραμμικό, τετραγωνικό Gaussian πρόβλημα (Linear Quadratic Gaussian) επειδή αναφέρεται σε γραμμικό σύστημα, χρησιμοποιεί τετραγωνικό κριτήριο και περιέχει στοχαστικές συνιστώσες με Gaussian κατανομές. Το Σχήμα 11.2 δείχνει την παράσταση ενός τέτοιου συστήματος ελέγχου.

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος



<u>Σχήμα 11.2:</u> Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος γραμμικού συστήματος συνεχούς χρόνου

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα διακριτού χρόνου</u>

Ας θεωρήσουμε τώρα το αντίστοιχο πρόβλημα για συστήματα διακριτού χρόνου:

$$x(j+1) = F(j)x(j) + G(j)u(j) + D(j)w(j) \quad (11.25)$$

με μετρούμενη έξοδο:

$$z(j) = C(j)x(j) + v(j) \quad (11.26)$$

όπου *w* ο θόρυβος στο σύστημα και *v* η αβεβαιότητα στη μέτρηση. Επίσης θεωρούμε ότι η αρχική τιμή του διανύσματος κατάστασης *x(0)* παρουσιάζει αβεβαιότητα.

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα διακριτού χρόνου</u>

Για τα τυχαία σήματα *w,v* και *x(0)*, θεωρούμε ότι ισχύουν τα παρακάτω στοχαστικά δεδομένα:

Για το θόρυβο *w* στο σύστημα:

$$E\left\{w(j)\right\}=0 \qquad (11.27)$$

$$E\left\{w(j)w^{T}(j)\right\}=\hat{Q}\delta(j-i) \qquad (11.28)$$

Για το θόρυβο *v* στη μέτρηση:

$$E\left\{v(j)\right\}=0 \qquad (11.29)$$

$$E\left\{v(j)v^{T}(j)\right\}=\hat{R}\delta(j-i) \qquad (11.30)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα διακριτού χρόνου</u>

όπου *δ(j-i)* η συνάρτηση Kronecker:

$$\delta(j-i) = \begin{cases} 1 & \text{όταν } j = i \\ 0 & \text{όταν } j \neq i \end{cases} \qquad (11.31)$$

Για την αρχική τιμή της κατάστασης ισχύει:

$$E\{x(0)\} = \bar{x}_0 \qquad (11.32)$$

$$E\left\{\left[x(0)-\bar{x}_0\right]\left[x(0)-\bar{x}_0\right]^T\right\} = \hat{P}_0 \qquad (11.33)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα διακριτού χρόνου

Για τα διαφορετικά σήματα θορύβου θεωρούμε ότι δεν υπάρχει μεταξύ τους ετεροσυσχέτιση:

$$E\left[w(j)v^T(j)\right] = E\left[w(j)x^T(j)\right] = E\left[v(j)x^T(j)\right] = 0 \quad (11.34)$$

Για το πρόβλημα αυτό θεωρούμε το ακόλουθο κριτήριο κόστους:

$$J = E\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\left[x^T(j)Q(j)x(j) + u^T(j)R(j)u(j)\right] + x^T(N)Sx(N)\right\} \quad (11.35)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα διακριτού χρόνου

το οποίο αναφέρεται στη μέση τιμή E επειδή αφορά στοχαστικές διαδικασίες . Οι μήτρες Q και S είναι πραγματικές, συμμετρικές και τουλάχιστον θετικά ημιορισμένες, ενώ η μήτρα R είναι πραγματική, συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Και εδώ το κριτήριο κόστους αναφέρεται στο ακριβές διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, ενώ ο σχεδιασμός του βέλτιστου βρόχου ελέγχου βασίζεται στο εκτιμούμενο διάνυσμα κατάστασης μέσω κάποιου κατάλληλου φίλτρου.

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα διακριτού χρόνου

Εισάγοντας τη διαφορά *e* μεταξύ του πραγματικού και του εκτιμούμενου διανύσματος κατάστασης :

$$e = x - \hat{x} \qquad (11.36)$$

και αντικαθιστώντας το διάνυσμα κατάστασης *x* στην (11.35) μέσω της (11.36) μετασχηματίζουμε το αρχικό κριτήριο κόστους στο άθροισμα των επιμέρους κριτηρίων:

$$\boxed{J = J_1 + J_2} \qquad (11.37)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα διακριτού χρόνου</u>

Για τα επιμέρους κριτήρια έχουμε:

$$J_1 = E\left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \left[\hat{x}^T(j) Q(j) \hat{x}(j) + u^T(j) R(j) u(j) \right] + \hat{x}^T(N) S \hat{x}(N) \right\} \qquad (11.38)$$

και

$$J_2 = E\left\{ \sum_{j=0}^{N-1} e^T(j) Q(j) e(j) + e^T(N) S e(N) \right\} \qquad (11.39)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

Συστήματα διακριτού χρόνου

Το πρώτο κριτήριο αναφέρεται στον ανεξάρτητο σχεδιασμό του βέλτιστου ελέγχου έχοντας σαν δεδομένο την εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης $\hat{x}$. Τότε ο βέλτιστος νόμος ελέγχου θα δίνεται από τη σχέση:

$$u(j) = K(j)\hat{x}(j) \tag{11.40}$$

όπου

$$K(j) = -R^{-1}G^{T}F^{-T}\left[P(j) - Q\right] \tag{11.41}$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα διακριτού χρόνου</u>

και *P(j)* είναι η λύση της εξίσωσης Riccati:

$$P(j) = F^T P(j+1)\left[I + GR^{-1}G^T P(j+1)\right]^{-1} F + Q \quad (11.42)$$

με αρχική τιμή στο όριο N:

$$P(N) = S \quad (11.43)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα διακριτού χρόνου</u>

Το δεύτερο κριτήριο J_2 σχετίζεται <u>μόνο</u> προς το σφάλμα εκτίμησης e του φίλτρου και αποτελεί το κριτήριο βέλτιστου σχεδιασμού ενός τέτοιου φίλτρου. Ένα τέτοιο φίλτρο (φίλτρο Kalman διακριτού χρόνου) μπορεί να σχεδιαστεί σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\hat{x}(j+1) = \hat{x}(j+1|j) + K_e(j+1)\left[z(j+1) - C\hat{x}(j+1|j)\right] \quad (11.44)$$

με αρχική συνθήκη:

$$\hat{x}(0) = \overline{x}_0 \quad (11.45)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος

<u>Συστήματα διακριτού χρόνου</u>

Όπου:

$$\hat{x}\left(j+1|\,j\right)=F\hat{x}\left(j\right)+Gu\left(j\right) \qquad (11.46)$$

$$K_e\left(j+1\right)=P_e\left(j+1|\,j\right)C^T\left[CP_e\left(j+1|\,j\right)C^T+\hat{R}\right]^{-1} \qquad (11.47)$$

και

$$P_e\left(j+1|\,j\right)=FP_e\left(j\right)F^T+D\hat{Q}D^T \qquad (11.48)$$

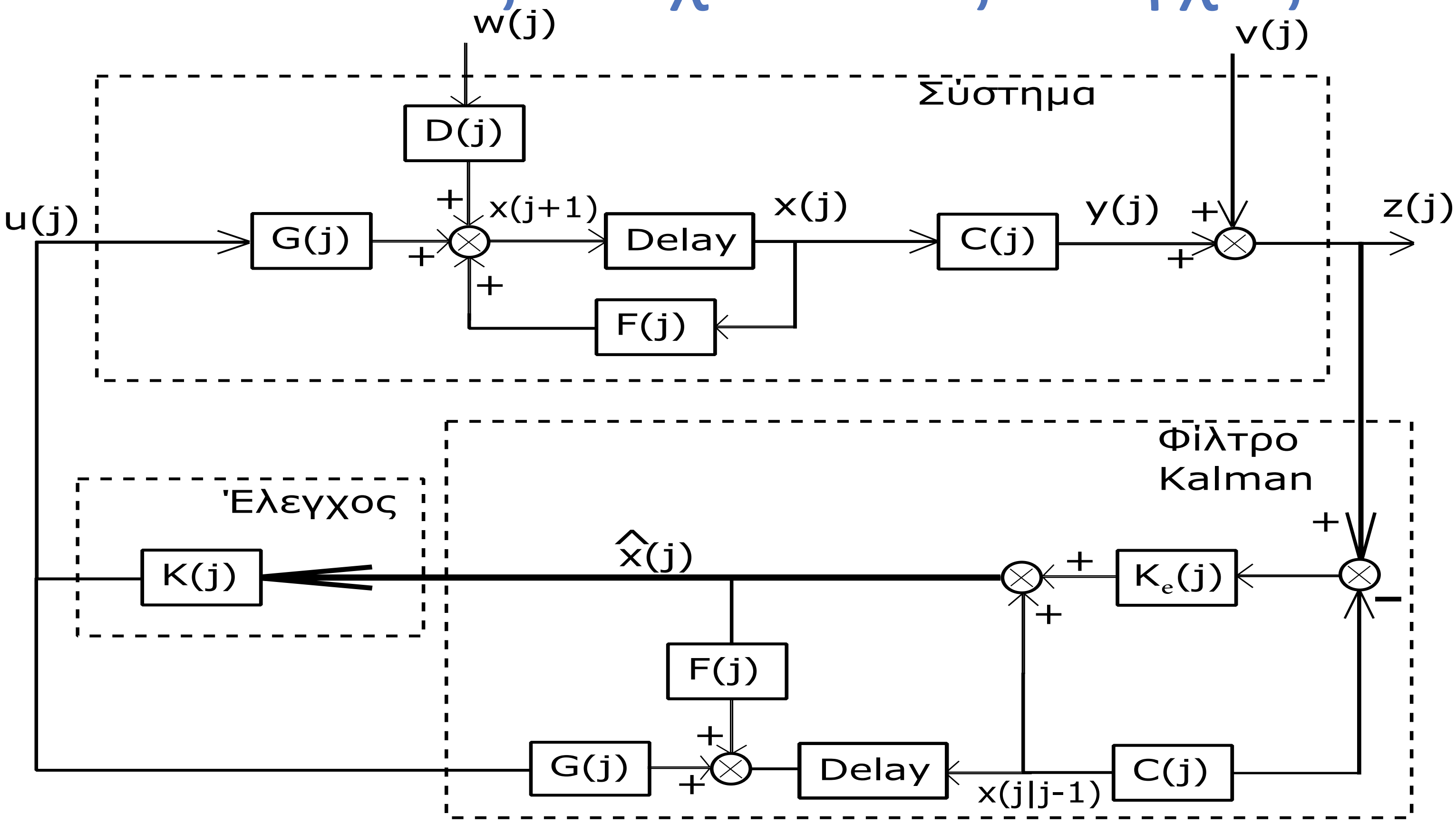
με αρχική συνθήκη:

$$P_e\left(0\right)=P_{e0} \qquad (11.49)$$

όπου:

$$P_e\left(j\right)=\left[I-K_e\left(j\right)C\right]P_e\left(j\,|\,j-1\right) \qquad (11.50)$$

Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος



Σχήμα 11.3: Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχοςγραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων. Στοχαστικός βέλτιστος έλεγχος γραμμικών συστημάτων με χρήση τετραγωνικών κριτηρίων (LQG Problem)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.