



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Δυναμική και Έλεγχος E-L

Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων

Ενότητα 3: Παραδείγματα Περιγραφής Δυναμικών
Συστημάτων I

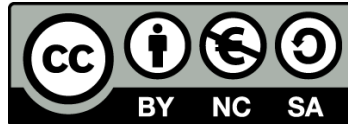
Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

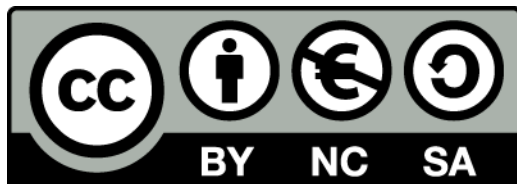
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.



Μεθοδολογία

- Επιλογή ανεξάρτητων μεταβλητών, ανάλογα με τον τύπο του ηλεκτρομηχανικού συστήματος.
 - Μάζα m σε μεταφορική κίνηση (της ασκείται δύναμη F) $\rightarrow x$
 - Μάζα m σε περιστροφική κίνηση (της ασκείται ροπή T) $\rightarrow \vartheta$
 - Ηλεκτρικό κύκλωμα με πηγή τάσης $\rightarrow q$
 - Ηλεκτρικό κύκλωμα με πηγή ρεύματος $\rightarrow w = \int U dt$
- Σχέσεις γενικευμένων ενεργειών, ανάλογα με τα επιμέρους στοιχεία των υποσυστημάτων, μηχανικό και ηλεκτρικό, δηλαδή ελατήρια, πυκνωτές, πηνία.



Μεθοδολογία

- Εφαρμογή της Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}_i} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial g_i} E_T + \frac{\partial}{\partial g_i} E_V + \frac{\partial}{\partial \dot{g}_i} D_Q = G_i$$

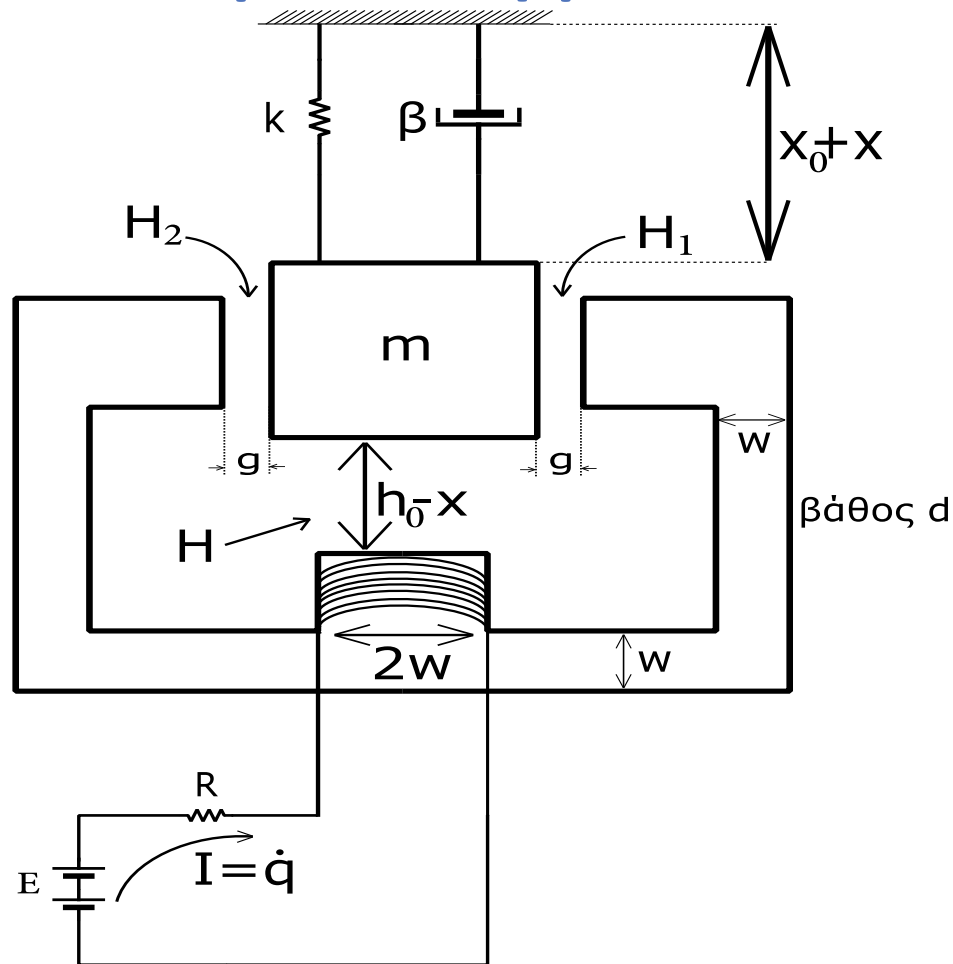


Παράδειγμα 1

- Το σύστημα το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1 αποτελείται από πηγή τάσης συνεχούς ρεύματος, πηνίο N σπειρών, μια αντίσταση R , πυρήνα από σιδηρομαγνητικό υλικό και μια πλάκα από σιδηρομαγνητικό υλικό επίσης, η οποία είναι ανηρτημένη από ελατήριο σταθεράς k και απόσβεσης β .
- Στην κατάσταση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x_0 και η πλάκα απέχει από το πηνίο κατά h_0 . Όταν το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα τότε έχουμε κίνηση της πλάκας κατά x και η απόσταση της πλάκας και του πηνίου γίνεται $h_0 - x$.



Παράδειγμα 1



Σχήμα 3.1



Παράδειγμα 1

- Ανεξάρτητες μεταβλητές g : q και x
- Γεν. κινητική ενέργεια: $E_T = E_{T_m} + E_{T_{\pi\eta\nu\iota\omicron\nu}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Phi\dot{q}$
- Γεν. δυναμική ενέργεια: $E_V = \cancel{E_{V_{\pi\upsilon\kappa\nu\omega\tau\eta}}} + E_{V_m} = \frac{1}{2}k(x_0 + x)^2$
- Απώλειες: $E_Q = E_{Q_{\alpha\pi\omicron\sigma\beta}} + E_{Q_R} = \int_0^t \beta\dot{x}^2 d\tau + \int_0^t R\dot{q}^2 d\tau$
 $D_Q = \frac{1}{2}R\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\beta\dot{x}^2$
- Ενέργεια εισόδου: $E_i = \cancel{E_{i_{\mu\eta\chi\alpha\nu\iota\kappa\eta}}} + E_{i_{\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\iota\kappa\eta}} = \int_0^t E\dot{q}d\tau$



Παράδειγμα 1

- Για τον υπολογισμό της ροής Φ :

Αν η ροή κάθε σπείρας του πηνίου είναι Φ_z , τότε η ολική ροή του πηνίου είναι $\Phi = N \Phi_z$.

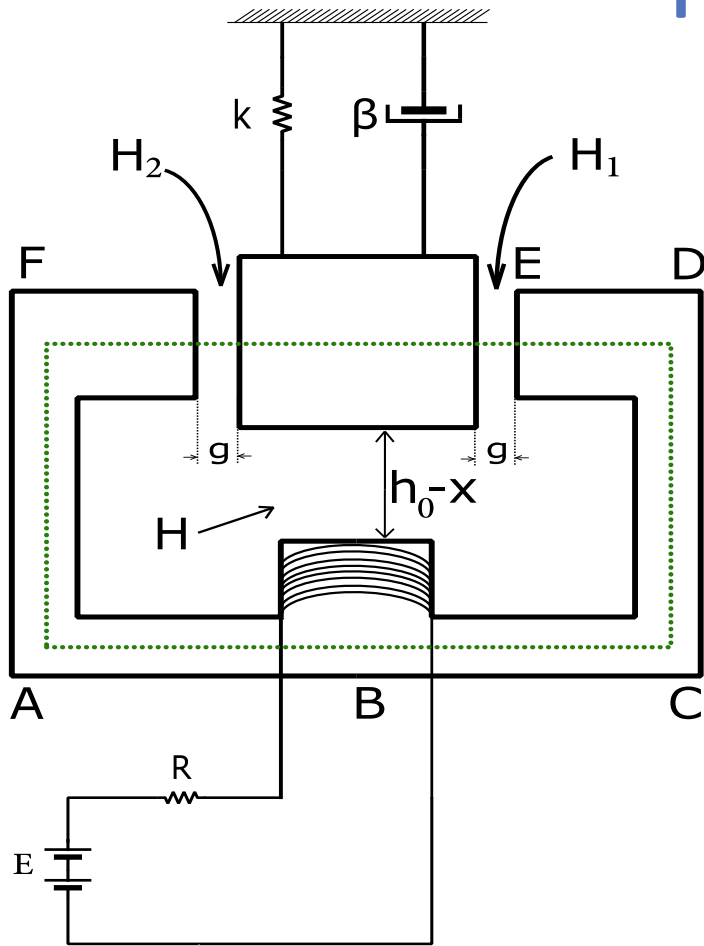
Επίσης, $\Phi_z = \int \bar{B} d\bar{s} = B 2w d$, όπου $2w$ και d είναι το μήκος και το πλάτος κάθε σπείρας αντίστοιχα.

Εφαρμογή νόμου Ampere $\oint H dl = \oint J_m ds$

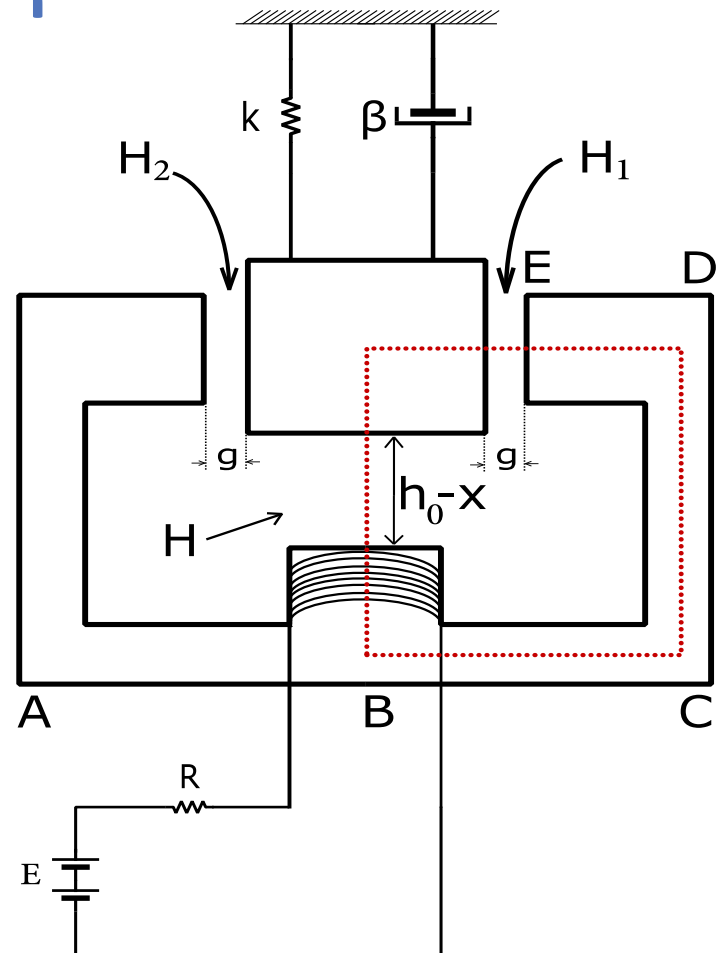
για δύο διαδρομές, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Παράδειγμα 1



Σχήμα 3.1α



Σχήμα 3.1β



Παράδειγμα 1

- Διαδρομή ABCDEFA (Σχήμα 3.1α)

$$\left. \begin{array}{l} H_1 g + H_2 g = 0 \\ B = \mu_0 H \end{array} \right\} \Rightarrow B_1 = B_2$$

- Διαδρομή BCDEB (Σχήμα 3.1β):

$$H_1 g + H(h_0 - x) = N\dot{q}$$

Από την εξίσωση του Maxwell $\oint_s \bar{B} d\bar{s} = 0 \Rightarrow$

$$B \cdot 2 \cdot w \cdot w - B_1 \cdot w \cdot w - B_2 \cdot w \cdot w = 0 \Rightarrow B = B_1 = B_2$$



Παράδειγμα 1

- Οπότε στη διαδρομή BCDEB ισχύει

$$\left. \begin{aligned} H_1 g + H (h_0 - x) &= N\dot{q} \\ B &= \mu_0 H \\ B &= B_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N\dot{q}}{g + h_0 - x}$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \mu_0 \frac{N\dot{q}}{g + h_0 - x} \\ \Phi &= N \int B ds \end{aligned} \right\} \Phi = \mu_0 \frac{N^2 2wd}{g + h_0 - x} \dot{q}$$



Παράδειγμα 1

- Ισχύει λοιπόν για την γενικευμένη κινητική ενέργεια:

$$\left. \begin{aligned} E_T &= E_{T_m} + E_{T_{\pi\eta\nu\iota\omicron\upsilon}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \Phi \dot{q} \\ \Phi &= \mu_0 \frac{N^2 2wd}{g + h_0 - x} \dot{q} \end{aligned} \right\} E_T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 2wd}{g + h_0 - x} \dot{q}^2$$



Παράδειγμα 1

- Γενικευμένες ενέργειες του συστήματος :

$$E_T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 2wd}{g + h_0 - x} \dot{q}^2$$

$$E_V = \frac{1}{2} k (x_0 + x)^2$$

$$E_Q = \int_0^t \beta \dot{x}^2 d\tau + \int_0^t R \dot{q}^2 d\tau$$

$$D_Q = \frac{1}{2} \beta \dot{x}^2 + \frac{1}{2} R \dot{q}^2$$

$$E_i = \int_0^t E \dot{q} d\tau$$



Παράδειγμα 1

- Εφαρμογή των γενικευμένων ενεργειών στην εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}_i} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial g_i} E_T + \frac{\partial}{\partial g_i} E_V + \frac{\partial}{\partial \dot{g}_i} D_Q = G_i$$

- Στο σύστημα αυτό την εφαρμόζουμε μια φορά για κάθε υποσύστημα, δηλαδή για $g_1 = q$ και $g_2 = x$



Παράδειγμα 1

$$\alpha) g_1 = q$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} E_T \right) = \mu_0 \frac{N^2 2wd}{g + h_0 - x} \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} E_T \right) = \mu_0 \frac{N^2 2wd}{g + h_0 - x} \ddot{q} + \mu_0 \frac{N^2 2wd}{(g + h_0 - x)^2} \dot{q} \dot{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial q} E_T = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q} E_V = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} D_\varrho = R\dot{q}$$

$$G_i = E$$



Παράδειγμα 1

- Άρα η πρώτη εξίσωση Euler-Lagrange, για $g_1=q$ γίνεται:

$$\ddot{q} + \mu_0 \frac{N^2 2wd}{(g + h_0 - x)^2} \dot{q}\dot{x} - 0 + 0 + R\dot{q} = E$$

$$\mu_0 \frac{N^2 2wd}{(g + h_0 - x)^2} \ddot{q} + \mu_0 \frac{N^2 2wd}{(g + h_0 - x)^2} \dot{q}\dot{x} + R\dot{q} = E$$



Παράδειγμα 1

$$\beta) g_2 = x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} E_T \right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_T = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 2wd}{(g + h_0 - x)^2} \dot{q}^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_V = k(x + x_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} D_\varrho = \beta \dot{x}$$

$$G_i = 0$$



Παράδειγμα 1

- Άρα η δεύτερη εξίσωση Euler-Lagrange, για $g_2=x$ γίνεται:

$$m\ddot{x} - \frac{\mu_0 N^2 w d}{(g + h_0 - x)^2} \dot{q}^2 + \beta \dot{x} + k(x + x_0) = 0$$

- Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος στο Παράδειγμα 1 λοιπόν είναι:

$$\mu_0 \frac{N^2 2wd}{(g + h_0 - x)} \ddot{q} + \mu_0 \frac{N^2 2wd}{(g + h_0 - x)^2} \dot{q}\dot{x} + R\dot{q} = E$$
$$m\ddot{x} - \frac{\mu_0 N^2 w d}{(g + h_0 - x)^2} \dot{q}^2 + \beta \dot{x} + k(x + x_0) = 0$$



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015.
Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων. Παραδείγματα Περιγραφής Δυναμικών Συστημάτων Ι». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/EE886/>.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

