ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

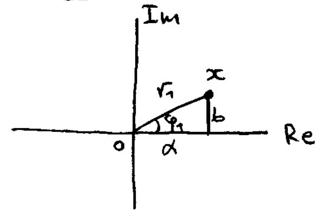
$x = \alpha + jb = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ όπου $r_1 = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$ (μέτρο) , $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{b}{\alpha}\right)$

$y = c + jd = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ όπου $r_2 = \sqrt{c^2 + d^2}$, $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$

$$x \cdot y = (\alpha + jb)(c + jd) = r_1 \cdot r_2 \, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha + jb}{c + jd} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Μιγαδικό Επίπεδο



Συζυγείς: $x^* = \alpha - jb = r_1 e^{-j\varphi_1}$

$y^* = c - jd = r_2 e^{-j\varphi_2}$

Ειδικές περιπτώσεις:

1. Έστω x πραγματικός, δηλαδή $x = \alpha$ (και άρα $b = 0$)

   Τότε $r_1 = \alpha$, $\varphi_1 = 0^\circ$ για $\alpha > 0$ και $\varphi_1 = 180^\circ$ ή -180° για $\alpha < 0$

2. Έστω x φανταστικός, δηλαδή $x = jb$ (και άρα $\alpha = 0$)

   Τότε $r_1 = b$, $\varphi_1 = \pm 90^\circ$ ($+90^\circ$ για b θετικό ή -90° για b αρνητικό)

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή	
Ιδιότητα	**Μαθηματική περιγραφή**
	$z_1 = x + jy$
	$z_2 = u + jv$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$ $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$
$z \in \Re$	$z = z^*$
$z \in \Im$	$z = -z^*$

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή	
Ιδιότητα	**Μαθηματική περιγραφή**
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1},\ \rho_1 > 0$
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2},\ \rho_2 > 0$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} + \rho_2 e^{j\phi_2}$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} - \rho_2 e^{j\phi_2}$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho\cos(\phi_1)$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho\sin(\phi_1)$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = \lvert z_1 \rvert^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$ $(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$ $(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1 + \phi_2)}$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1 - \phi_2)}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\lvert\rho_1\rvert = \lvert\rho_2\rvert$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Πηγή: Βιβλίο Γ. Π. Καφεντζή "Επεξεργασία Σήματος Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου: Μια πρώτη εισαγωγή", Εκδόσεις Gutenberg, 2019

- **Μέτρο** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται το μήκος του διανύσματος που τον αναπαριστά στο μιγαδικό επίπεδο
  - Αλλιώς, μέτρο ονομάζεται η ευκλείδεια απόσταση του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Φάση** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται η γωνία φ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των πραγματικών αριθμών) κατά την ορθή μαθηματική φορά
  - Συμβολίζεται και ως $\arg(z)$ ή $\angle z$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \text{απροσδιόριστο}, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Συνήθεις πολικές μορφές

Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$

Πηγή: Βιβλίο Γ. Π. Καφεντζή “Επεξεργασία Σήματος Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου: Μια πρώτη εισαγωγή”, Εκδόσεις Gutenberg, 2019