Διάλεξη 1: Εισαγωγή στα Σήματα
Σημειώσεις

Κωνσταντίνος Χατζηλυγερούδης
costashatz@upatras.gr

19 Φεβρουαρίου 2026

Contents

1 Σήματα και Κατηγορίες Σημάτων

1.1 Τι Είναι ένα Σήμα;

Στη μηχανική και τις θετικές επιστήμες, ένα *σήμα* είναι το βασικό μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει πληροφορία σχετικά με τον κόσμο. Άτυπα, ένα σήμα είναι οτιδήποτε *μεταβάλλεται* και μεταφέρει πληροφορία για ένα φυσικό φαινόμενο, ένα σύστημα ή μια διεργασία.

Ένα **σήμα** είναι μια *συνάρτηση* που αναπαριστά πληροφορία.

Αυτός ο ορισμός είναι σκόπιμα ευρύς. Αυτό που έχει σημασία δεν είναι η φυσική προέλευση του σήματος, αλλά το γεγονός ότι μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση.

Μαθηματικά, συμβολίζουμε ένα σήμα ως

$$x(\cdot),$$

τονίζοντας ότι πρόκειται για μια απεικόνιση από κάποια μεταβλητή (ή μεταβλητές) εισόδου σε μια τιμή. Στις περισσότερες εφαρμογές, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος, οδηγώντας στις γνωστές σημειογραφίες

$$x(t) \quad (\text{σήμα συνεχούς χρόνου}), \qquad x[n] \quad (\text{σήμα διακριτού χρόνου}).$$

Παραδείγματα.

- Η τάση στα άκρα μιας αντίστασης ως συνάρτηση του χρόνου
- Μια ηχητική κυματομορφή που αναπαριστά μεταβολές της πίεσης του αέρα
- Μετρήσεις θερμοκρασίας από έναν αισθητήρα καταγεγραμμένες κάθε δευτερόλεπτο
- Τιμές των pixel κατά μήκος μιας γραμμής μιας εικόνας

Παρόλο που αυτά τα παραδείγματα προέρχονται από πολύ διαφορετικούς τομείς (ηλεκτρονική, ακουστική, αισθητήρες, υπολογιστική όραση), όλα αντιμετωπίζονται μαθηματικά ως σήματα.

1.2 Τα Σήματα ως Μαθηματικές Απεικονίσεις

Για να γίνει η έννοια ακριβής, ένα σήμα μπορεί να οριστεί ως μια απεικόνιση μεταξύ δύο συνόλων:

$$\boldsymbol{x} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}.$$

Όπου:

- $\mathcal{I}$ είναι το **πεδίο εισόδου**, που περιγράφει το είδος των εισόδων του σήματος
- $\mathcal{O}$ είναι ο **χώρος εξόδου**, που περιγράφει το είδος των τιμών που λαμβάνει το σήμα

Αυτή η οπτική είναι θεμελιώδης, διότι πολλές ταξινομήσεις σημάτων προκύπτουν φυσικά από διαφορετικές επιλογές των $\mathcal{I}$ και $\mathcal{O}$.

Πεδίο Εισόδου

Το πεδίο εισόδου καθορίζει τις μεταβλητές ως προς τις οποίες ορίζεται το σήμα:

- $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}^N$: συνεχείς μεταβλητές (π.χ. χρόνος, χώρος, χώρος–χρόνος)
- $\mathbb{Z}$ ή $\mathbb{Z}^N$: διακριτές μεταβλητές (π.χ. δείκτης δειγματοληψίας, θέσεις των pixels)
- Μεικτά πεδία (π.χ. διακριτός χρόνος, συνεχής χώρος)

Αν $N > 1$, τότε το σήμα ονομάζεται *πολυδιάστατο*. Τυπικά παραδείγματα περιλαμβάνουν:

- Εικόνες: $x[m, n]$ με $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$
- Βίντεο: $x[m, n, t]$ που συνδυάζει χώρο και χρόνο
- Χωρικά πεδία αισθητήρων (π.χ. θερμοκρασία σε μια περιοχή)

Χώρος Εξόδου

Ο χώρος εξόδου καθορίζει τη φύση των τιμών του σήματος:

- $\mathbb{R}$: σήματα πραγματικών τιμών (οι περισσότερες φυσικές μετρήσεις)
- $\mathbb{C}$: σήματα μιγαδικών τιμών (π.χ. αναπαραστάσεις στο πεδίο Fourier)
- $\mathbb{R}^M$ ή $\mathbb{C}^M$: διανυσματικά ή πολυκαναλικά σήματα
- Πεπερασμένα σύνολα: κατηγορικά ή συμβολικά σήματα (π.χ. ψηφιακά σύμβολα, λογικές τιμές)

Παραδείγματα.

- Εικόνα αποχρώσεων του γκρι: $M = 1$
- RGB Εικόνα: $M = 3$
- IMU Μετρήσεις (επιταχυνσιόμετρο + γυροσκόπιο): $M = 6$

1.3 Πεδίο Ορισμού vs Σύνολο Τιμών: Κατηγορίες Σημάτων

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τα σήματα με βάση δύο θεμελιώδεις πτυχές:

- **σε ποιες τιμές ορίζεται το σήμα** (πεδίο ορισμού)
- **ποιες τιμές λαμβάνει** (σύνολο τιμών)

Παραδείγματα πεδίου ορισμού. Χρόνος, χώρος, συντεταγμένες pixel, συχνότητα, δείκτης δειγματοληψίας, αριθμός καρέ.

Παραδείγματα συνόλου τιμών. Πραγματικοί αριθμοί, μιγαδικοί αριθμοί, διανύσματα, σύμβολα, λογικές τιμές.

Σημαντική παρατήρηση. Πολλές διακρίσεις σημάτων σε πρακτικές εφαρμογές που φαίνονται περίπλοκες είναι μαθηματικά απλές, μόλις το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών καθοριστούν με σαφήνεια.

Συνεχής vs Διακριτός Χρόνος και Πλάτος

Μια θεμελιώδης ταξινόμηση των σημάτων αφορά το αν το πεδίο ορισμού (είσοδος/χρόνος) και το σύνολο τιμών (έξοδος/πλάτος) είναι συνεχές ή διακριτό.

Χρόνος (είσοδος).

- **Σήμα συνεχούς χρόνου**: ορίζεται για όλα τα $t \in \mathbb{R}$
- **Σήμα διακριτού χρόνου**: ορίζεται μόνο σε ακέραιους δείκτες $n \in \mathbb{Z}$

Πλάτος (έξοδος).

- **Συνεχές πλάτος**: τιμές στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$
- **Διακριτό πλάτος**: τιμές από ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο

Ο συνδυασμός αυτών οδηγεί σε τέσσερις σημαντικές περιπτώσεις:

- **Αναλογικά σήματα**: συνεχής χρόνος, συνεχές πλάτος
- **Σήματα διακριτού χρόνου**: διακριτός χρόνος, συνεχές πλάτος
- **Κβαντισμένα σήματα**: συνεχής χρόνος, διακριτό πλάτος
- **Ψηφιακά σήματα**: διακριτός χρόνος, διακριτό πλάτος

Η δειγματοληψία διακριτοποιεί τον χρόνο, ενώ η κβάντιση διακριτοποιεί το πλάτος. Η ψηφιακή επεξεργασία σήματος συνήθως υποθέτει ότι και τα δύο αυτά βήματα έχουν ήδη πραγματοποιηθεί.

1.4 Περιοδικά και Μη Περιοδικά Σήματα

Ένα σήμα ονομάζεται *περιοδικό* αν επαναλαμβάνεται ακριβώς μετά από ένα σταθερό χρονικό διάστημα.

Περιοδικότητα συνεχούς χρόνου. Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ είναι περιοδικό αν υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε

$$x(t) = x(t+T) \quad \forall t.$$

Περιοδικότητα διακριτού χρόνου. Ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ είναι περιοδικό αν υπάρχει ακέραιος $N > 0$ τέτοιος ώστε

$$x[n] = x[n+N] \quad \forall n.$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιο T ή N, τότε το σήμα ονομάζεται *μη περιοδικό.*

Παράδειγμα. Το ημίτονο

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

είναι περιοδικό με περίοδο $T = 1/f_0$, ενώ ένας παλμός πεπερασμένης διάρκειας είναι μη περιοδικός.

1.4.1 Άθροισμα Περιοδικών Σημάτων

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει την περιοδικότητα για ένα μεμονωμένο σήμα. Ένα πολύ σημαντικό πρακτικό ερώτημα είναι:

> Αν προσθέσουμε δύο περιοδικά σήματα, παραμένει το αποτέλεσμα περιοδικό;

Η απάντηση είναι: μερικές φορές ναι, μερικές φορές όχι, ανάλογα με το πώς σχετίζονται οι περίοδοι (ή οι συχνότητες).

Περίπτωση Συνεχούς Χρόνου

Έστω ότι

$$x_1(t) \text{ είναι περιοδικό με περίοδο } T_1, \qquad x_2(t) \text{ είναι περιοδικό με περίοδο } T_2.$$

Αυτό σημαίνει:

$$x_1(t+T_1) = x_1(t), \qquad x_2(t+T_2) = x_2(t), \qquad \forall t.$$

Τώρα ορίζουμε το άθροισμά τους:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Πότε είναι το άθροισμα περιοδικό;

Το άθροισμα $x(t)$ είναι περιοδικό αν υπάρχει κάποιο $T > 0$ τέτοιο ώστε

$$x(t+T) = x(t) \quad \forall t.$$

Υπολογίζουμε:

$$x(t+T) = x_1(t+T) + x_2(t+T).$$

Για να ισούται αυτό με το $x(t)$, απαιτείται:

$$x_1(t+T) = x_1(t) \quad \text{και} \quad x_2(t+T) = x_2(t).$$

Άρα το T πρέπει να είναι κοινή περίοδος και των δύο σημάτων:

$$T = k_1 T_1 = k_2 T_2$$

για κάποιους ακέραιους $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Αυτό είναι δυνατό αν και μόνο αν ο λόγος των περιόδων είναι ρητός:

$$\boxed{x_1(t) + x_2(t) \text{ είναι περιοδικό} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}.}$$

Θεμελιώδης περίοδος. Όταν ο λόγος είναι ρητός, η περίοδος του αθροίσματος είναι το μικρότερο θετικό κοινό πολλαπλάσιο:

$$T = \operatorname{lcm}(T_1, T_2).$$

Παράδειγμα: Μη περιοδικό άθροισμα

Θεωρούμε:

$$x(t) = \cos(2\pi t) + \cos\Big(2\pi\sqrt{2}\,t\Big).$$

Το πρώτο συνημίτονο έχει συχνότητα $f_1 = 1$, άρα

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 1.$$

Το δεύτερο συνημίτονο έχει συχνότητα $f_2 = \sqrt{2}$, άρα

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Τότε ο λόγος είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Εφόσον

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q},$$

δεν υπάρχει κοινή περίοδος. Επομένως:

$$\boxed{x(t) \text{ δεν είναι περιοδικό.}}$$

Ερμηνεία. Οι δύο ταλαντώσεις δεν "ευθυγραμμίζονται" ποτέ ακριβώς, οπότε η κυματομορφή δεν επαναλαμβάνεται τέλεια.

Περίπτωση Διακριτού Χρόνου

Η κατάσταση στον διακριτό χρόνο είναι διαφορετική, διότι η περιοδικότητα εξαρτάται από ακέραιες μετατοπίσεις του δείκτη.

Περιοδικότητα ενός ημιτόνου. Θεωρούμε:

$$x[n] = \cos(\Omega n).$$

Αυτό το σήμα είναι περιοδικό αν υπάρχει ακέραιος $N > 0$ τέτοιος ώστε:

$$x[n+N] = x[n].$$

Χρησιμοποιώντας την περιοδικότητα του συνημιτόνου:

$$\cos(\Omega(n+N)) = \cos(\Omega n) \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega N = 2\pi k$$

για κάποιον ακέραιο k.

Άρα:

$$\boxed{x[n] \text{ είναι περιοδικό} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}.}$$

Άθροισμα διακριτών ημιτόνων

Έστω:

$$x_1[n] = \cos(\Omega_1 n), \qquad x_2[n] = \cos(\Omega_2 n).$$

Κάθε σήμα είναι περιοδικό αν:

$$\frac{\Omega_1}{2\pi} \in \mathbb{Q}, \qquad \frac{\Omega_2}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Τώρα θεωρούμε το άθροισμα:

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n].$$

Συνθήκη περιοδικότητας. Το άθροισμα είναι περιοδικό αν και τα δύο σήματα είναι περιοδικά και οι περίοδοι τους έχουν κοινό πολλαπλάσιο:

$$\boxed{x_1[n] + x_2[n] \text{ είναι περιοδικό αν και τα δύο είναι περιοδικά και έχουν κοινή περίοδο.}}$$

Ισοδύναμα, πρέπει να υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε:

$$\Omega_1 N = 2\pi k_1, \qquad \Omega_2 N = 2\pi k_2$$

για ακέραιους k_1, k_2.

Βασική διαφορά από τον συνεχή χρόνο

Ένα ενδιαφέρον γεγονός είναι ότι:

> Τα διακριτά ημίτονα είναι περιοδικά για πολύ περισσότερες συχνότητες από ό,τι τα συνεχούς χρόνου ημίτονα.

Διότι στον διακριτό χρόνο, η περιοδικότητα εξαρτάται από το αν το $\Omega/2\pi$ είναι ρητός αριθμός, όχι από την απόλυτη τιμή του Ω.

Σύνοψη

- Στον συνεχή χρόνο, το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων είναι περιοδικό μόνο αν οι περίοδοι είναι σύμμετρες:
$$\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}.$$
- Στον διακριτό χρόνο, ένα ημίτονο είναι περιοδικό αν:
$$\frac{\Omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$
- Ένα άθροισμα περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου είναι περιοδικό αν έχουν κοινή περίοδο.

Αυτό το θέμα γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό στην ανάλυση Fourier, όπου τα σήματα συχνά αποσυντίθενται σε αθροίσματα ημιτόνων.

1.5 Φορέας Σήματος: Αιτιατότητα

Ο *φορέας* ενός σήματος περιγράφει σε ποιες χρονικές στιγμές είναι μη μηδενικό.

- **Αιτιατά σήματα**: μηδενικά για κάθε αρνητικό χρόνο
- **Αντιαιτιατά σήματα**: μηδενικά για κάθε θετικό χρόνο
- **Αμφίπλευρα σήματα (μη-αιτιατά)**: μη μηδενικά και στις δύο πλευρές της χρονικής αρχής

Η αιτιατότητα είναι ιδιαίτερα σημαντική σε συστήματα πραγματικού χρόνου, όπου οι μελλοντικές τιμές ενός σήματος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Παραδείγματα.

$$e^{-t}u(t) \quad (\text{αιτιατό}), \qquad e^{t}u(-t) \quad (\text{αντιαιτιατό}).$$

όπου $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

1.6 Άρτια και Περιττά Σήματα

Τα σήματα μπορούν να εμφανίζουν συμμετρία ως προς την αντιστροφή του χρόνου.

- **Άρτια σήματα**: συμμετρικά, $x(t) = x(-t)$
- **Περιττά σήματα**: αντισυμμετρικά, $x(t) = -x(-t)$

Κάθε σήμα μπορεί να αποσυντεθεί μοναδικά σε άρτιο και περιττό μέρος:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big), \\ x_o(t) &= \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big), \\ x(t) &= x_e(t) + x_o(t). \end{aligned}$$

Αυτή η αποσύνθεση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην ανάλυση Fourier και στον χαρακτηρισμό συστημάτων.

1.7 Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά Σήματα

Τέλος, τα σήματα μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τον τρόπο που περιγράφονται.

Ντετερμινιστικά σήματα. Ένα ντετερμινιστικό σήμα καθορίζεται πλήρως από έναν γνωστό κανόνα ή τύπο. Για την ίδια είσοδο, το σήμα παίρνει πάντα την ίδια τιμή.

Στοχαστικά σήματα. Ένα στοχαστικό (τυχαίο) σήμα δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς και πρέπει να περιγραφεί πιθανοκρατικά, χρησιμοποιώντας μεγέθη όπως η μέση τιμή, η διασπορά, η αυτοσυσχέτιση και η φασματική πυκνότητα.

Παράδειγμα. Ένα συνηθισμένο μοντέλο μέτρησης είναι

$$y[n] = x[n] + w[n],$$

όπου $x[n]$ είναι ένα ντετερμινιστικό σήμα και το $w[n]$ αναπαριστά τυχαίο θόρυβο.

1.8 Σήματα Ενέργειας και Ισχύος

Σε πολλά προβλήματα επεξεργασίας σημάτων, μας ενδιαφέρει το "μέγεθος" ενός σήματος. Δύο στενά συνδεδεμένες έννοιες είναι η **ενέργεια** και η **μέση ισχύς**. Αυτές οδηγούν σε έναν σημαντικό διαχωρισμό: *σήματα ενέργειας* έναντι *σημάτων ισχύος*.

Ενέργεια

Για ένα σήμα **συνεχούς χρόνου** $x(t)$, η ενέργεια ορίζεται ως

$$E \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt.$$

Για ένα σήμα **διακριτού χρόνου** $x[n]$, η ενέργεια είναι

$$E \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2.$$

Ερμηνεία. Η ενέργεια μετρά τη συνολική συσσωρευμένη "ισχύ" του σήματος σε όλο τον χρόνο. Σήματα που υπάρχουν μόνο για πεπερασμένο χρονικό διάστημα (ή φθίνουν αρκετά γρήγορα) συχνά έχουν πεπερασμένη ενέργεια.

Παράδειγμα (παλμός πεπερασμένης διάρκειας). Θεωρούμε τον παλμό

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le T_0, \\ 0, & \text{διαφορετικά}. \end{cases}$$

Τότε

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{T_0} A^2 dt = A^2 T_0 < \infty.$$

Άρα αυτό είναι ένα σήμα *ενέργειας*.

Μέση Ισχύς

Για ένα σήμα **συνεχούς χρόνου** $x(t)$, η μέση ισχύς ορίζεται ως

$$P \;=\; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt,$$

και για ένα σήμα **διακριτού χρόνου** $x[n]$,

$$P \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Ερμηνεία. Η ισχύς μετρά τη *χρονικά μέση* ένταση του σήματος. Αυτό είναι κατάλληλο για σήματα που διαρκούν επ' άπειρον (π.χ. περιοδικά σήματα). Τέτοια σήματα έχουν συνήθως άπειρη ενέργεια (διότι το ολοκλήρωμα/άθροισμα σε άπειρο χρόνο δεν συγκλίνει), αλλά μπορούν να έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ.

Παράδειγμα (ημίτονο). Έστω

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t).$$

Η ενέργειά του είναι άπειρη (δεν "σβήνει" ποτέ), αλλά η μέση ισχύς του είναι πεπερασμένη:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\cos^2(2\pi f_0 t)\,dt = A^2 \cdot \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos^2(2\pi f_0 t)\,dt}_{=1/2} = \frac{A^2}{2}.$$

Μέτρο ενός Σήματος

Ο τελεστής μέτρου $|\cdot|$ χρησιμοποιείται στους ορισμούς της ενέργειας και της ισχύος ώστε αυτά τα μεγέθη να είναι πάντα μη αρνητικά και φυσικά ερμηνεύσιμα.

Σήματα πραγματικών τιμών. Αν το σήμα $x(t)$ (ή $x[n]$) είναι πραγματικό, τότε το μέτρο είναι απλώς η απόλυτη τιμή:

$$|x(t)| = \begin{cases} x(t), & x(t) \geq 0, \\ -x(t), & x(t) < 0, \end{cases} \qquad |x(t)|^2 = x^2(t).$$

Σήματα μιγαδικών τιμών. Αν το σήμα $x(t)$ είναι μιγαδικό, τότε μπορεί να γραφτεί ως

$$x(t) = a(t) + jb(t),$$

όπου $a(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\}$ είναι το πραγματικό μέρος και $b(t) = \mathrm{Im}\{x(t)\}$ είναι το φανταστικό μέρος (j είναι ο φανταστικός αριθμός). Το μέτρο ορίζεται ως

$$|x(t)| = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} = \sqrt{x(t)\,x^*(t)},$$

όπου $x^*(t) = a(t) - jb(t)$ δηλώνει το μιγαδικό συζυγές του $x(t)$. Συνεπώς,

$$|x(t)|^2 = x(t)\,x^*(t).$$

Γεωμετρική ερμηνεία. Για σήματα μιγαδικών τιμών, το $x(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως σημείο στο μιγαδικό επίπεδο. Το μέτρο $|x(t)|$ αντιστοιχεί στην Ευκλείδεια απόσταση αυτού του σημείου από την αρχή.

Γιατί χρησιμοποιούμε το τετράγωνο του μέτρου; Η χρήση του $|x(t)|^2$ στους υπολογισμούς ενέργειας και ισχύος:

- εξασφαλίζει μη αρνητικές τιμές,
- αντιμετωπίζει συμμετρικά τις θετικές και αρνητικές τιμές του σήματος,
- επεκτείνεται φυσικά από πραγματικά σε μιγαδικά σήματα,
- αντιστοιχεί στη φυσική ισχύ σε πολλά συστήματα (π.χ. ηλεκτρικά σήματα).

Σήματα Ενέργειας vs Σήματα Ισχύος

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, ταξινομούμε τα σήματα ως εξής:

- **Σήμα ενέργειας:** $0 < E < \infty, \quad \text{και} \quad P = 0.$
- **Σήμα ισχύος:** $0 < P < \infty, \quad \text{και} \quad E = \infty.$

Εμπειρικός κανόνας.

- Σήματα που είναι *πεπερασμένης διάρκειας* (ή φθίνουν αρκετά γρήγορα) είναι συνήθως **σήματα ενέργειας**.
- Σήματα που είναι *περιοδικά* (ή διαρκούν επ' άπειρον με φραγμένο πλάτος) είναι συνήθως **σήματα ισχύος**.

Σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας ούτε ισχύος. Δεν ανήκουν όλα τα σήματα στις κατηγορίες ενέργειας ή ισχύος. Κάποια σήματα έχουν:

- άπειρη ενέργεια, και
- άπειρη ή μη ορισμένη μέση ισχύ.

Τέτοια σήματα ταξινομούνται ως **ούτε σήματα ενέργειας ούτε σήματα ισχύος**.

Παράδειγμα 1: Γραμμικό σήμα. Θεωρούμε το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = t.$$

Η ενέργειά του είναι

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, dt = \infty,$$

και η μέση ισχύς του είναι

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} t^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{2T^3}{3} = \infty.$$

Άρα, αυτό το γραμμικό σήμα δεν είναι ούτε σήμα ενέργειας ούτε σήμα ισχύος.

Παράδειγμα 2: Εκθετικά αυξανόμενο σήμα. Θεωρούμε

$$x(t) = e^t.$$

Τόσο η ενέργεια όσο και η μέση ισχύς αποκλίνουν, επομένως και αυτό το σήμα δεν είναι ούτε σήμα ενέργειας ούτε σήμα ισχύος.

Σύνοψη.

- Σήματα ενέργειας: $0 < E < \infty$, $P = 0$
- Σήματα ισχύος: $0 < P < \infty$, $E = \infty$
- Ούτε το ένα ούτε το άλλο: $E = \infty$ και $P = \infty$ (ή μη ορισμένη)

Σημαντική παρατήρηση. Η ταξινόμηση ενέργειας/ισχύος είναι χρήσιμη αλλά όχι εξαντλητική. Πολλά σήματα πρακτικού ενδιαφέροντος βρίσκονται εκτός αυτών των κατηγοριών, γεγονός που οδηγεί σε εναλλακτικούς χαρακτηρισμούς (π.χ. τιμές RMS, ενέργεια σε χρονικά παράθυρα ή στατιστικές περιγραφές).

2 Συνήθη Σήματα και οι Ιδιότητές τους

Η ενότητα αυτή συγκεντρώνει ένα σύνολο *τυπικών σημάτων* που εμφανίζονται επανειλημμένα στην επεξεργασία σημάτων και στη θεωρία συστημάτων. Λειτουργούν ως δομικά στοιχεία: πιο σύνθετα σήματα συχνά εκφράζονται ως συνδυασμοί (αθροίσματα, χρονικές μετατοπίσεις, κλιμακώσεις) αυτών των στοιχειωδών μορφών. Παρουσιάζουμε τόσο τις εκδοχές συνεχούς χρόνου όσο και διακριτού χρόνου, και δίνουμε έμφαση στις ιδιότητες που είναι πιο χρήσιμες αργότερα (π.χ. για συνέλιξη, δειγματοληψία και αποκρίσεις συστημάτων).

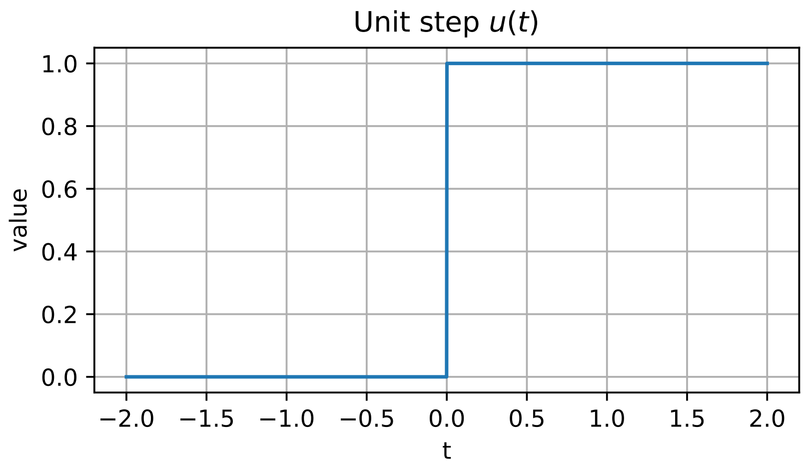
2.1 Συνήθη Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Συνάρτηση Μοναδιαίου Βήματος $u(t)$

Η συνάρτηση **μοναδιαίου βήματος** μοντελοποιεί έναν "διακόπτη" που "ανάβει" τη χρονική στιγμή $t = 0$ (Σχ. 2.1):

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Χρησιμοποιείται για να περιγράψει *σήματα που ξεκινούν σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή*. Για παράδειγμα, ένα σήμα που ισούται με $x(t)$ μόνο μετά τη χρονική στιγμή t_0 μπορεί να γραφτεί ως $x(t)\, u(t - t_0)$.



Σχήμα 2.1: Μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$.

Παραδείγματα.

- Ενεργοποίηση μιας πηγής DC τάσης στη στιγμή $t = 0$: $v(t) = V_0\, u(t)$.
- Ένας αισθητήρας που ξεκινά καταγραφή στη στιγμή $t = 3$: $y(t) = s(t)\, u(t - 3)$.

Χρονική μετατόπιση.

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

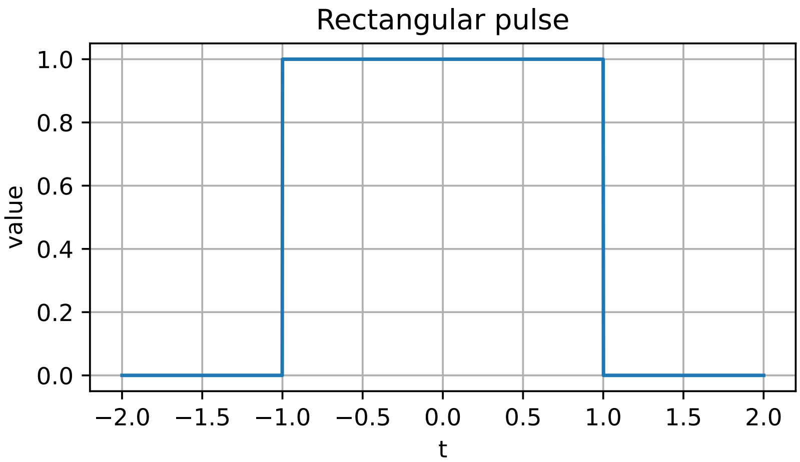
Αυτό αναπαριστά ένα βήμα που συμβαίνει στη στιγμή $t = t_0$.

Ορθογώνιος Παλμός

Ένα βασικό σήμα πεπερασμένης διάρκειας είναι ο **ορθογώνιος παλμός** (Σχ. 2.2):

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Μοντελοποιεί "μια σταθερή τιμή για ένα σύντομο χρονικό διάστημα".



Σχήμα 2.2: Ορθογώνιος παλμός.

Σχέση με την συνάρτηση μοναδιαίου βήματος. Ο ίδιος παλμός μπορεί να γραφτεί συνοπτικά με χρήση μετατοπισμένων μοναδιαίων βημάτων:

$$x(t) = u\big(t + \tfrac{T}{2}\big) - u\big(t - \tfrac{T}{2}\big) \, .$$

Η μορφή αυτή είναι εξαιρετικά χρήσιμη για αλγεβρικούς χειρισμούς σημάτων και για υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Παραδείγματα.

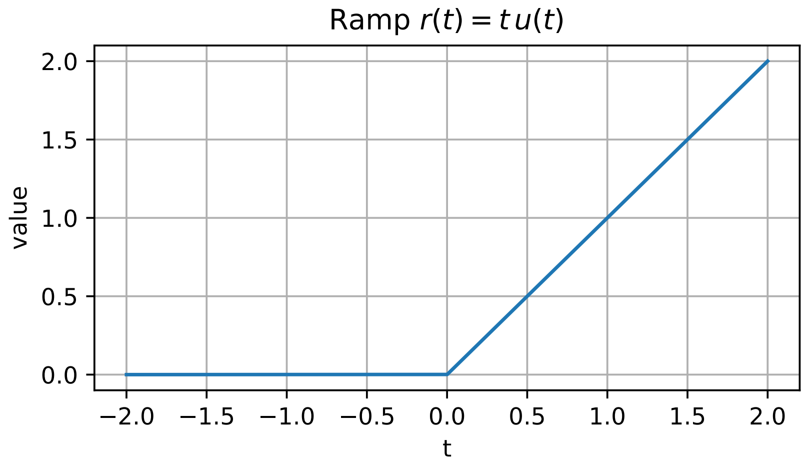
- Κλείστρο κάμερας που παραμένει ανοιχτό μόνο για T δευτερόλεπτα.
- Σύμβολο ψηφιακής επικοινωνίας που διατηρεί σταθερή τιμή για μία περίοδο συμβόλου.

Συνάρτηση Ράμπας/Κλίσης $r(t)$

Η συνάρτηση **ράμπας** ορίζεται ως (Σχ. 2.3):

$$r(t) = t\, u(t).$$

Άρα $r(t) = 0$ για $t < 0$ και $r(t) = t$ για $t \ge 0$. Μοντελοποιεί μεγέθη που ξεκινούν από το μηδέν και στη συνέχεια αυξάνονται γραμμικά μετά από μια χρονική στιγμή.



Σχήμα 2.3: Συνάρτηση ράμπας $r(t)$.

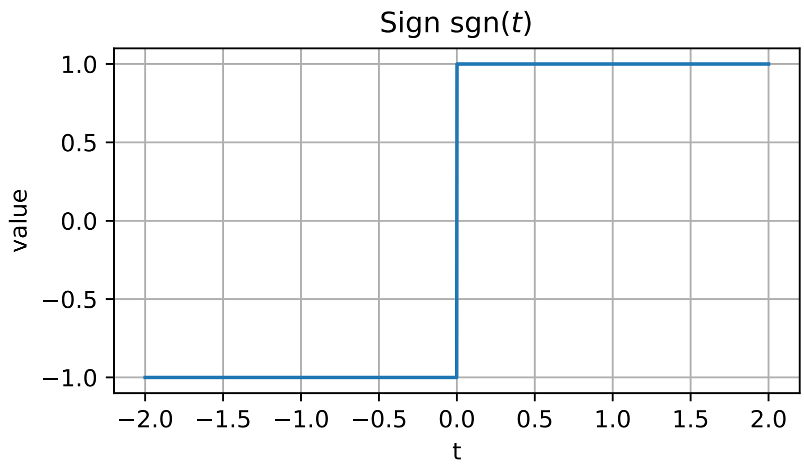
Παραδείγματα.

- Θέση υπό σταθερή ταχύτητα που ξεκινά στη στιγμή $t = 0$.
- Εντολή αναφοράς που αυξάνεται σταδιακά αντί να μεταβάλλεται απότομα.

Συνάρτηση Προσήμου $\operatorname{sgn}(t)$

Η **συνάρτηση προσήμου** υποδεικνύει το πρόσημο μιας πραγματικής ποσότητας (Σχ. 2.4):

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$



Σχήμα 2.4: Συνάρτηση προσήμου $\operatorname{sgn}(t)$.

Παραδείγματα.

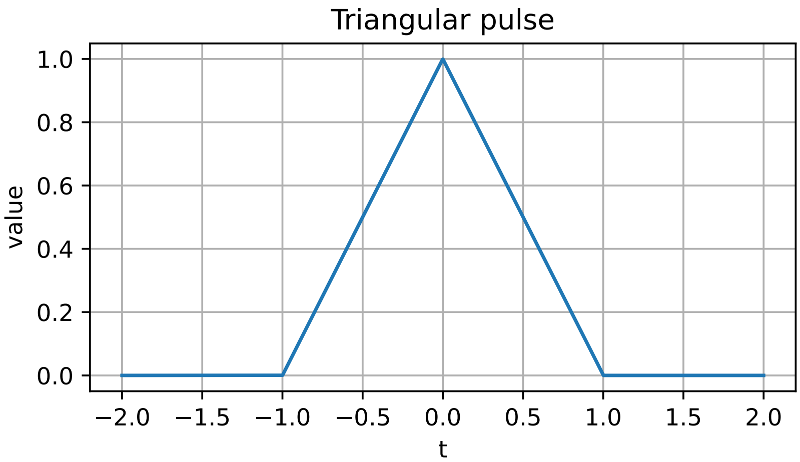
- Μοντελοποίηση ελεγκτή που εφαρμόζει $+F$ για θετικό σφάλμα και $-F$ για αρνητικό σφάλμα (έλεγχος bang-bang).
- Αναπαράσταση μη γραμμικότητας όπως $y(t) = \operatorname{sgn}(x(t))$.

Τριγωνικός Παλμός

Ο **τριγωνικός παλμός** είναι ένα τμηματικά γραμμικό σήμα που παρουσιάζει μέγιστο στη στιγμή $t = 0$ (Σχ. 2.5):

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2|t|}{T}, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Μπορεί να θεωρηθεί ως μια "εξομαλυμένη" εκδοχή του ορθογώνιου παλμού.



Σχήμα 2.5: Τριγωνικός παλμός.

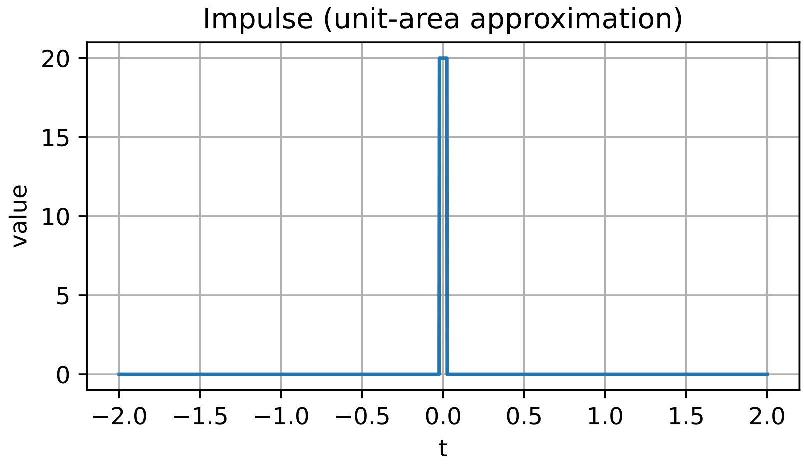
Κρουστική Συνάρτηση Δέλτα Dirac $\delta(t)$

Η **κρουστική συνάρτηση δέλτα (Dirac)** δεν είναι κανονική συνάρτηση με τη συνήθη έννοια: είναι ένα ιδεατό μαθηματικό αντικείμενο (κατανομή) που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση στιγμιαίων γεγονότων. Χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της **μοναδιαίας επιφάνειας** (Σχ. 2.6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1,$$

και από την ιδέα ότι είναι "συγκεντρωμένη" στη στιγμή $t = 0$.

Φυσική ερμηνεία. Η κρουστική συνάρτηση μοντελοποιεί μια δράση με πολύ μεγάλο πλάτος αλλά εξαιρετικά μικρή διάρκεια, έτσι ώστε το *συνολικό εμβαδό* να παραμένει ίσο με 1. Στη φυσική και στη μηχανική, οι κρουστικές συναρτήσεις αναπαριστούν ιδεατά χτυπήματα, κρούσεις ή εξαιρετικά σύντομες διεγέρσεις εισόδου.



Σχήμα 2.6: Κρουστική συνάρτηση Dirac $\delta(t)$.

Σχέση Κρουστικής Συνάρτησης και Μοναδιαίου Βήματος

Το μοναδιαίο βήμα και η κρουστική συνάρτηση συνδέονται θεμελιωδώς:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t), \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau.$$

Ερμηνεία.

- Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος είναι η *συσσώρευση* μιας στιγμιαίας μεταβολής.
- Η κρουστική συνάρτηση αναπαριστά ένα *στιγμιαίο άλμα* σε ένα συσσωρευμένο μέγεθος.

Μετατόπιση και Κλιμάκωση της Κρουστικής Συνάρτησης

Χρονική μετατόπιση.

$$\delta(t - t_0)$$

αναπαριστά μια κρουστική συνάρτηση που εμφανίζεται στη χρονική στιγμή $t = t_0$.

Χρονική κλιμάκωση. Για κάθε μη μηδενικό πραγματικό a,

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t),$$

και γενικότερα

$$\delta(a(t - t_0)) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t - t_0).$$

Βασική ιδέα: η χρονική κλιμάκωση μεταβάλλει το "ύψος" (με ιδεατή έννοια) αλλά διατηρεί τη *μοναδιαία επιφάνεια*.

Προαιρετική ανάγνωση – Γιατί $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

Δικαιολογούμε την ιδιότητα κλιμάκωσης της κρουστικής συνάρτησης εξετάζοντας τη συμπεριφορά της μέσα σε ολοκλήρωμα.

Βήμα 1: Ξεκινάμε από το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,dt.$$

Βήμα 2: Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $\tau = at$. Οπότε $t = \tau/a$ και

$$dt = \frac{1}{|a|}\,d\tau$$

(η απόλυτη τιμή εμφανίζεται επειδή η αντικατάσταση αντιστρέφει τα όρια ολοκλήρωσης όταν $a < 0$).

Βήμα 3: Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,\frac{1}{|a|}\,d\tau = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{|a|}.$$

Βήμα 4: Επιβολή μοναδιαίας επιφάνειας. Η οριστική ιδιότητα "μοναδιαίας επιφάνειας" της κρουστικής συνάρτησης είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

Από το Βήμα 3 βρήκαμε ότι η *μη κλιμακωμένη* $\delta(at)$ έχει επιφάνεια

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,dt = \frac{1}{|a|} \neq 1.$$

Αναζητούμε λοιπόν μια σταθερά ενίσχυσης K ώστε το $K\,\delta(at)$ να έχει μοναδιαία επιφάνεια:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\,\delta(at)\,dt = 1.$$

Επειδή το K είναι σταθερά, μπορεί να εξαχθεί από το ολοκλήρωμα:

$$K\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,dt = 1.$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα του Βήματος 3:

$$K \cdot \frac{1}{|a|} = 1.$$

Λύνοντας ως προς K:

$$K = |a|.$$

Επομένως, η κρουστική συνάρτηση με μοναδιαία επιφάνεια υπό χρονική κλιμάκωση είναι

$$|a|\,\delta(at).$$

Συμπέρασμα (ιδιότητα κλιμάκωσης). Το μοναδικό αντικείμενο τύπου κρουστικής συνάρτησης που διατηρεί μοναδιαία επιφάνεια μετά από χρονική κλιμάκωση είναι

$$\boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t).}$$

Βασικές Ιδιότητες της Κρουστικής Συνάρτησης

Μοναδιαία επιφάνεια.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

Ιδιότητα δειγματοληψίας (ή μετατόπισης). Για ένα επαρκώς "καλό" σήμα $x(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0).$$

Πολλαπλασιασμός με συνάρτηση.

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0).$$

Αυτό εκφράζει το γεγονός ότι η κρουστική συνάρτηση "επιλέγει" την τιμή στο t_0.

Προαιρετική ανάγνωση – Ιδιότητα Δειγματοληψίας και Πολλαπλασιασμού της Κρουστικής Συνάρτησης

Οι δύο παρακάτω ιδιότητες της κρουστικής συνάρτησης Dirac συνδέονται στενά και μπορούν να κατανοηθούν μέσω της ίδιας βασικής ιδέας: η κρουστική συνάρτηση "επιλέγει" την τιμή ενός σήματος σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

1. Ιδιότητα δειγματοληψίας (ή μετατόπισης).
Ξεκινάμε από το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt.$$

Η κρουστική συνάρτηση $\delta(t-t_0)$ είναι μηδενική παντού εκτός από το $t=t_0$, οπότε μόνο η τιμή του $x(t)$ στη στιγμή t_0 συμβάλλει στο ολοκλήρωμα. Διαισθητικά, το ολοκλήρωμα "δειγματοληπτεί" το σήμα στη στιγμή $t=t_0$.
Τυπικά, επειδή το $x(t)$ μεταβάλλεται αργά σε σύγκριση με την κρουστική συνάρτηση, μπορεί να θεωρηθεί σταθερό μέσα στον απειροστό φορέα της $\delta(t-t_0)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt.$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μοναδιαίας επιφάνειας,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1,$$

παίρνουμε

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0).}$$

2. Πολλαπλασιασμός με συνάρτηση.
Θεωρούμε το γινόμενο $x(t)\,\delta(t - t_0)$. Εφόσον η κρουστική συνάρτηση είναι μη μηδενική μόνο στο $t = t_0$, η συνάρτηση $x(t)$ μπορεί να αντικατασταθεί από την τιμή της στο t_0:

$$x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)\,\delta(t - t_0).$$

Σύνδεση μεταξύ των δύο ιδιοτήτων.
Η ιδιότητα πολλαπλασιασμού είναι ουσιαστικά μια "σημειακή" εκδοχή της ιδιότητας δειγματοληψίας. Πράγματι, ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της

$$x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)\,\delta(t - t_0)$$

ως προς τον χρόνο, παίρνουμε άμεσα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0).$$

2.2 Συνήθη Σήματα Διακριτού Χρόνου

Τα σήματα διακριτού χρόνου ορίζονται μόνο σε ακέραιους δείκτες $n \in \mathbb{Z}$. Πολλά σήματα συνεχούς χρόνου έχουν άμεσα ανάλογα στον διακριτό χρόνο, όμως ορισμένες πράξεις μεταβάλλονται: για παράδειγμα, οι παράγωγοι αντικαθίστανται από διαφορές και τα ολοκληρώματα από αθροίσματα.

Συνάρτηση Μοναδιαίου Βήματος $u[n]$

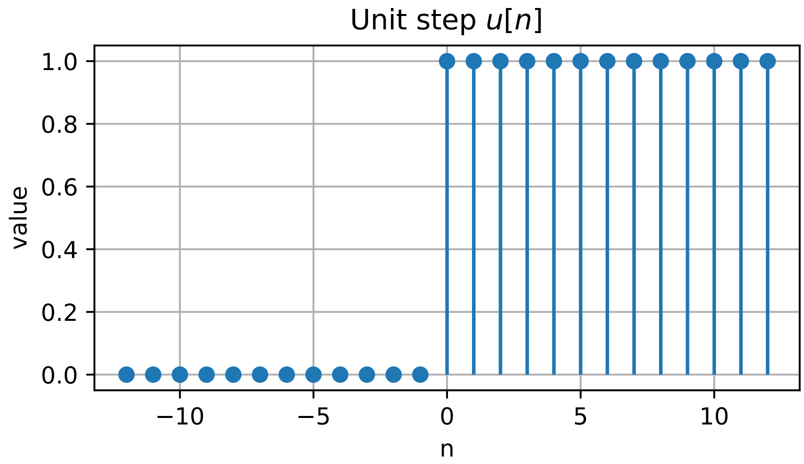
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Μοντελοποιεί μια ακολουθία που "ενεργοποιείται" στον δείκτη $n = 0$ (Σχ. 2.7). Μια καθυστερημένη ενεργοποίηση γράφεται ως $u[n - n_0]$.

Παράδειγμα. Μια ακολουθία που ξεκινά στο $n = 10$ γράφεται ως $x[n]u[n - 10]$.

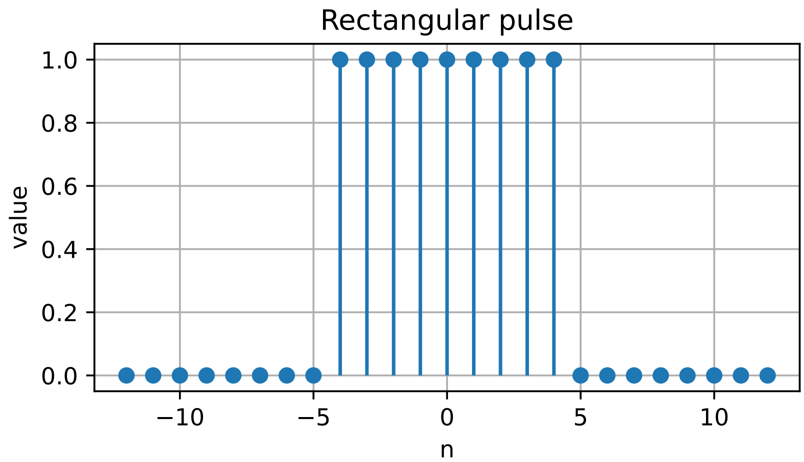
Ορθογώνιος Παλμός

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n_1 \leq n \leq n_2, \\ 0, & \text{διαφορετικά}. \end{cases}$$



Σχήμα 2.7: Μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u[n]$.

Αυτό το σήμα μοντελοποιεί ένα πεπερασμένο μπλοκ σταθερών δειγμάτων. Χρησιμοποιείται συχνά για την περιγραφή ακολουθιών πεπερασμένου μήκους (π.χ. πεπερασμένα χρονικά παράθυρα παρατήρησης, βλ. Σχ. 2.8).



Σχήμα 2.8: Ορθογώνιος παλμός $x[n]$.

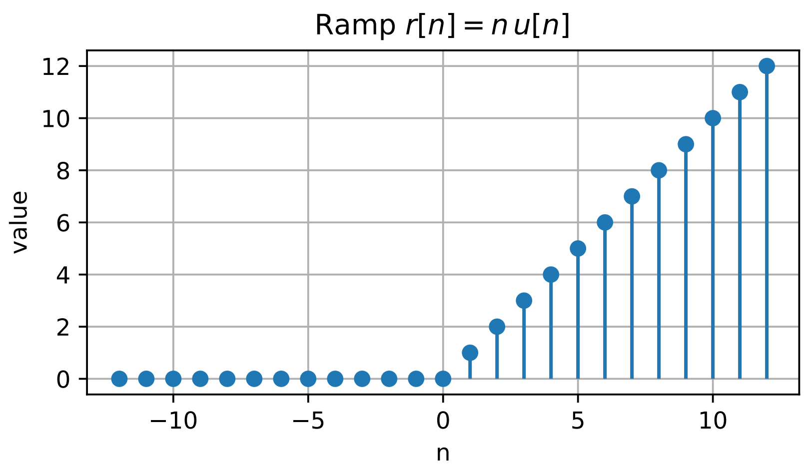
Συνάρτηση Ράμπας/Κλίσης $r[n]$

$$r[n] = n\,u[n].$$

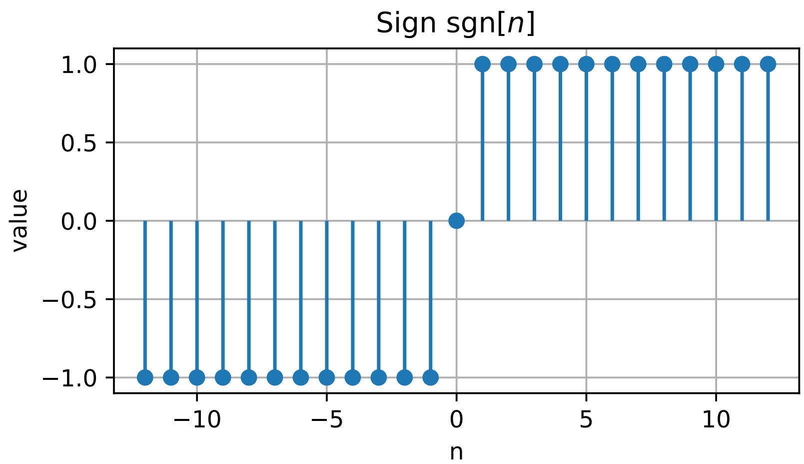
Αυτή είναι η ράμπα διακριτού χρόνου: $r[n] = 0$ για $n < 0$ και $r[n] = n$ για $n \geq 0$ (Σχ. 2.9).

Συνάρτηση Προσήμου $\operatorname{sgn}[n]$

$$\operatorname{sgn}[n] = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -1, & n < 0. \end{cases}$$



Σχήμα 2.9: Συνάρτηση ράμπας $r[n]$.



Σχήμα 2.10: Συνάρτηση προσήμου $\mathrm{sgn}[n]$.

Τριγωνικός Παλμός

$$x[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{|n|}{N}, & |n| \leq N, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

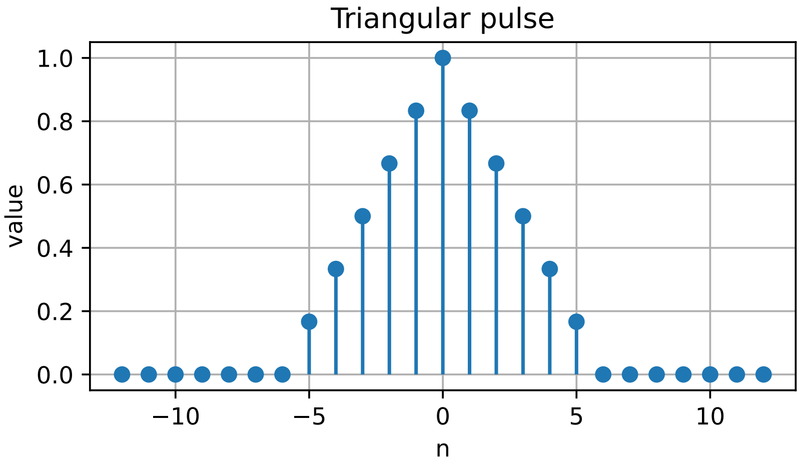
Πρόκειται για ακολουθία πεπερασμένου μήκους που αυξάνεται γραμμικά μέχρι μια κορυφή και στη συνέχεια μειώνεται γραμμικά (Σχ. 2.11).

Κρουστική Ακολουθία Kronecker $\delta[n]$

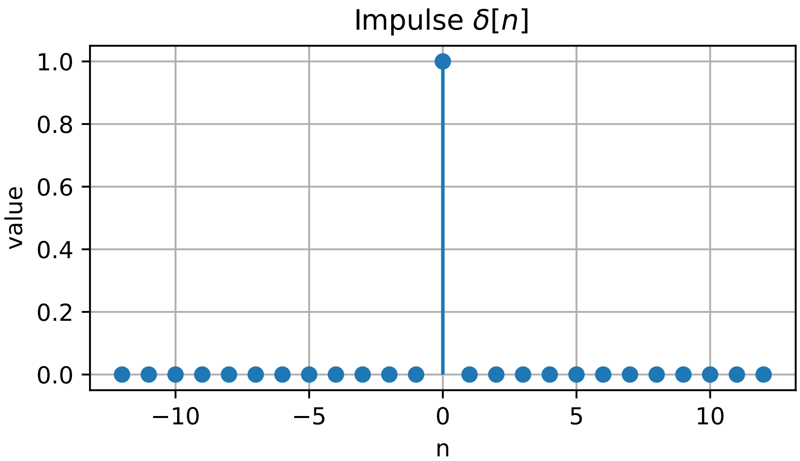
Η κρουστική συνάρτηση διακριτού χρόνου είναι μια *συνήθης* ακολουθία (Σχ. 2.12):

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην αναπαράσταση ακολουθιών ως αθροίσματα μετατοπισμένων κρουστικών ακολουθιών.



Σχήμα 2.11: Τριγωνικός παλμός $x[n]$.



Σχήμα 2.12: Κρουστική ακολουθία Kronecker $\delta[n]$.

Σχέση Κρουστικής Ακολουθίας και Μοναδιαίου Βήματος στον Διακριτό Χρόνο

Στον διακριτό χρόνο, η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος είναι το άθροισμα των κρουστικών ακολουθιών:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k].$$

Η ιδιότητα μετατόπισης (δειγματοληψίας) γράφεται:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0].$$

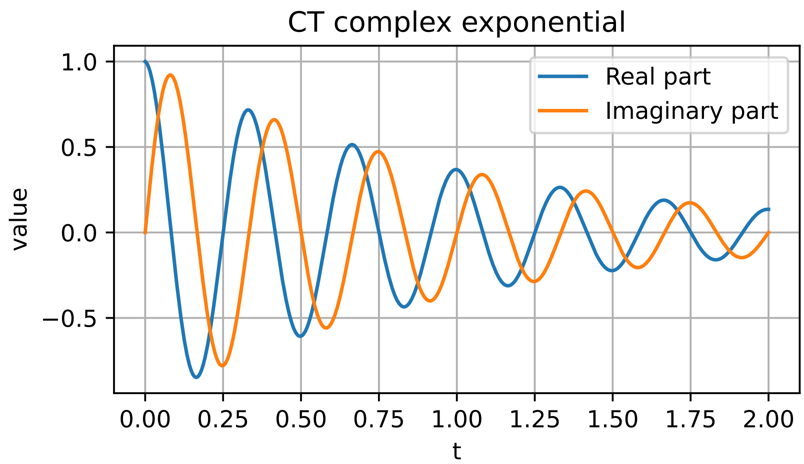
2.3 Μιγαδικά Εκθετικά

Τα μιγαδικά εκθετικά είναι από τα σημαντικότερα σήματα σε όλη την επεξεργασία σημάτων, διότι αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων (Linear Time-Invariant - LTI) συστημάτων και συνιστούν τα δομικά στοιχεία της ανάλυσης Fourier.

Μιγαδικό Εκθετικό Συνεχούς Χρόνου

$$x(t) = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}e^{j\omega t} \overset{\text{Τύπος του Euler}}{=} e^{\sigma t}\big(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\big),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του Euler.



Σχήμα 2.13: Μιγαδικό εκθετικό συνεχούς χρόνου $x(t)$.

Τύπος του Euler

Ο τύπος του Euler συνδέει τα εκθετικά με τα ημιτονοειδή:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x).$$

Συνεπάγεται, για παράδειγμα,

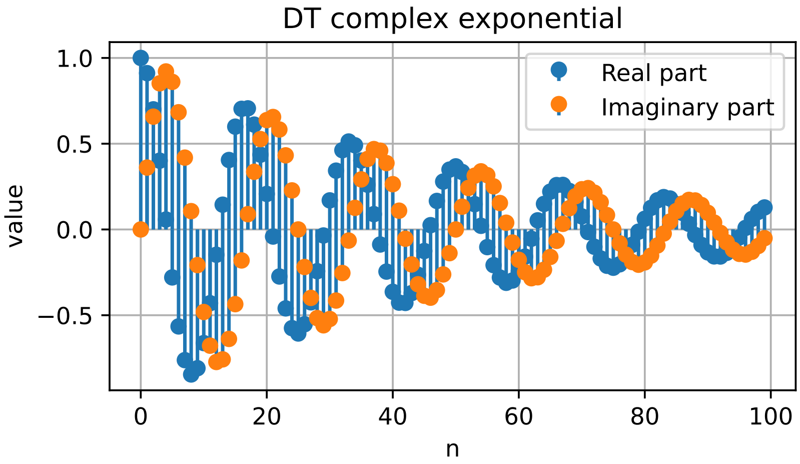
$$\cos(x) = \mathrm{Re}\{e^{jx}\}, \qquad \sin(x) = \mathrm{Im}\{e^{jx}\}, \qquad \cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}.$$

Ερμηνεία.

- Η παράμετρος σ ελέγχει την εκθετική αύξηση ή φθορά:
  - $\sigma < 0$: φθίνουσα ταλάντωση
  - $\sigma = 0$: καθαρή ταλάντωση (σταθερό μέτρο)
  - $\sigma > 0$: αυξανόμενη ταλάντωση
- Η ω είναι η γωνιακή συχνότητα (rad/s) και καθορίζει πόσο γρήγορα ταλαντώνεται το σήμα.

Παραδείγματα.

- Το $e^{-t}\cos(10t)$ είναι φθίνουσα ταλάντωση (π.χ. ευσταθής μηχανική δόνηση).
- Το $\cos(2\pi f_0 t)$ προκύπτει ως το πραγματικό μέρος του $e^{j2\pi f_0 t}$.



Σχήμα 2.14: Μιγαδικό εκθετικό διακριτού χρόνου $x[n]$.

Μιγαδικό Εκθετικό Διακριτού Χρόνου

$$x[n] = e^{(\sigma+j\Omega)n} = e^{\sigma n}e^{j\Omega n} \overset{\text{Τύπος του Euler}}{=} e^{\sigma n}\big(\cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)\big).$$

Ερμηνεία.

- Η σ ελέγχει την εκθετική αύξηση ή φθορά ανά δείγμα.
- Η Ω είναι η γωνιακή συχνότητα διακριτού χρόνου (rad/δείγμα).

Περιοδικότητα στον διακριτό χρόνο. Μια βασική διαφορά από τον συνεχή χρόνο είναι ότι τα μιγαδικά εκθετικά διακριτού χρόνου μπορούν να είναι περιοδικά μόνο για συγκεκριμένες συχνότητες. Συγκεκριμένα, το $e^{j\Omega n}$ είναι περιοδικό αν και μόνο αν υπάρχει ακέραιος $N > 0$ τέτοιος ώστε

$$e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n} \quad\Longleftrightarrow\quad e^{j\Omega N} = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \Omega N = 2\pi k$$

για κάποιον ακέραιο k. Ισοδύναμα, το $\Omega/(2\pi)$ πρέπει να είναι ρητός αριθμός.

Γιατί αυτό είναι σημαντικό. Πολλοί υπολογισμοί απλοποιούνται σημαντικά με χρήση μιγαδικών εκθετικών, ακόμη και όταν το τελικό σήμα ενδιαφέροντος είναι πραγματικό. Αυτός είναι βασικός λόγος για τον οποίο η ανάλυση Fourier και η θεωρία LTI συστημάτων θεμελιώνονται στα $e^{j\omega t}$ και $e^{j\Omega n}$.

3 Μετασχηματισμοί Σημάτων

Στην πράξη σπάνια δουλεύουμε με "ακατέργαστα" σήματα ακριβώς όπως ορίζονται αρχικά. Αντίθετα, παράγουμε συνεχώς νέα σήματα από υπάρχοντα μέσω *μετασχηματισμών*. Οι μετασχηματισμοί αυτοί δεν είναι απλώς "καλλωπιστικοί": αποτελούν τη γλώσσα της ανάλυσης συστημάτων (ιδιαίτερα για *γραμμικά χρονικά αμετάβλητα* συστήματα), και επίσης εξηγούν πώς συμπεριφέρονται τα σήματα υπό μετασχηματισμούς Fourier (π.χ. χρονική μετατόπιση ↔ μετατόπιση φάσης, χρονική κλιμάκωση ↔ κλιμάκωση συχνότητας).

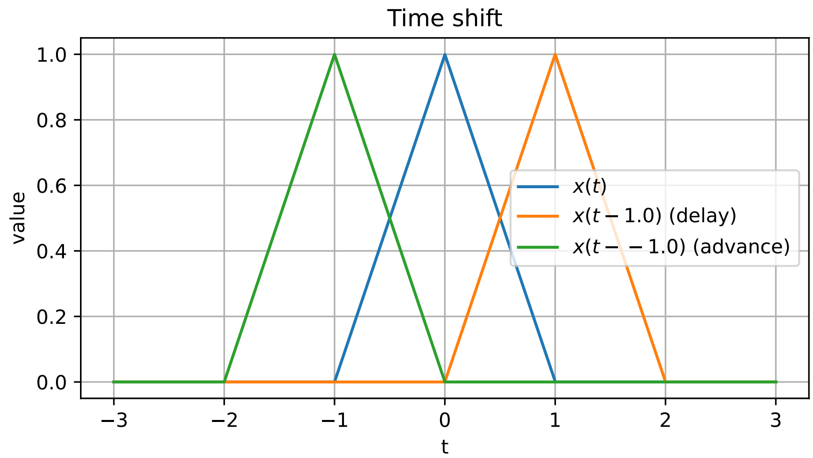
Σε όλη αυτή την ενότητα θεωρούμε ότι δίνεται ένα σήμα $x(\cdot)$ και κατασκευάζουμε ένα νέο σήμα $y(\cdot)$ εφαρμόζοντας έναν μετασχηματισμό. Αντιμετωπίζουμε τις περιπτώσεις συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου παράλληλα, διότι η *ιδέα* είναι η ίδια, αλλά ορισμένες πράξεις (ιδίως η κλιμάκωση) συμπεριφέρονται διαφορετικά.

3.1 Χρονική Μετατόπιση (Καθυστέρηση και Προήγηση)

Ορισμός

Συνεχής χρόνος. Μια χρονική μετατόπιση κατά t_0 ορίζεται ως

$$y(t) = x(t - t_0).$$



Σχήμα 3.1: Χρονική μετατόπιση (καθυστέρηση/προήγηση) στον συνεχή χρόνο.

Διακριτός χρόνος. Μια μετατόπιση κατά ακέραιο n_0 ορίζεται ως

$$y[n] = x[n - n_0].$$

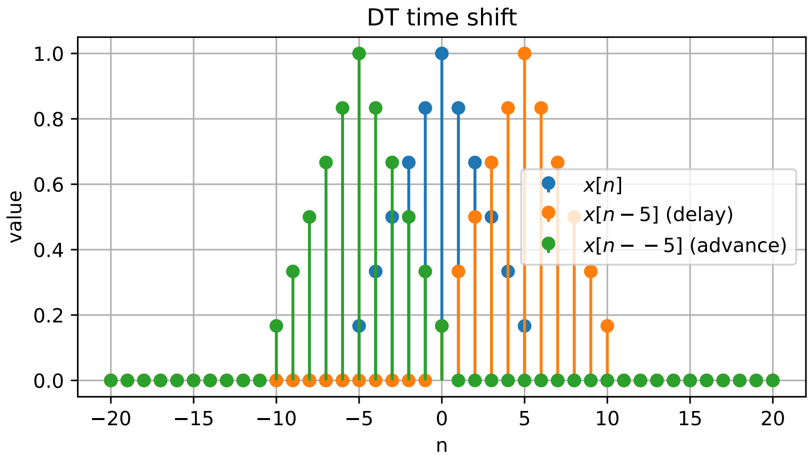
Ερμηνεία

Το κλειδί για να αποφύγουμε τη σύγχυση είναι να διαβάζουμε το επιχείρημα *κυριολεκτικά*: η έξοδος στη χρονική στιγμή t είναι η είσοδος αξιολογημένη στο $t - t_0$.

- Αν $t_0 > 0$, τότε το $y(t)$ αναπαράγει τιμές του $x(\cdot)$ από *προγενέστερες* χρονικές στιγμές. Αυτό σημαίνει ότι όλη η κυματομορφή εμφανίζεται **αργότερα** στον χρόνο: **καθυστέρηση** (delay).
- Αν $t_0 < 0$, η κυματομορφή εμφανίζεται **νωρίτερα** στον χρόνο: **προήγηση** (advance).

Παραδείγματα.

- Αν το $x(t)$ είναι παλμός με κέντρο στο $t = 0$, τότε το $x(t - 3)$ είναι ο ίδιος παλμός με κέντρο στο $t = 3$.
- Αν το $x[n]$ είναι ακολουθία που "ξεκινά" στο $n = 0$, τότε το $x[n - 5]$ είναι η ίδια ακολουθία που ξεκινά στο $n = 5$.



Σχήμα 3.2: Χρονική μετατόπιση (καθυστέρηση/προήγηση) στον διακριτό χρόνο.

Ένα συχνό σφάλμα

Πολλοί αρχικά σκέφτονται "$t - t_0$ σημαίνει μετατόπιση αριστερά". Ένας ασφαλής κανόνας είναι:

$$x(t - t_0) \text{ μετατοπίζει το σήμα προς τα δεξιά κατά } t_0.$$

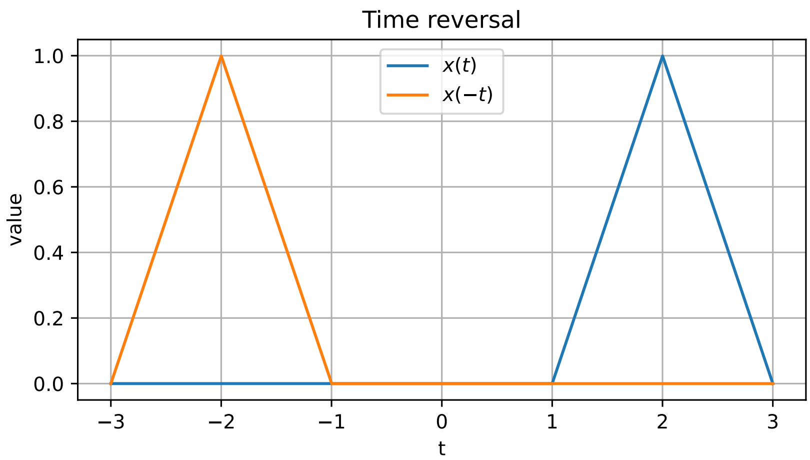
Ένας γρήγορος έλεγχος: πού μετακινείται το γεγονός που ήταν στο $t = 0$; Λύνουμε $t - t_0 = 0 \Rightarrow t = t_0$. Άρα μετακινείται στο t_0.

3.2 Αντιστροφή Χρόνου

Ορισμός

Συνεχής χρόνος.

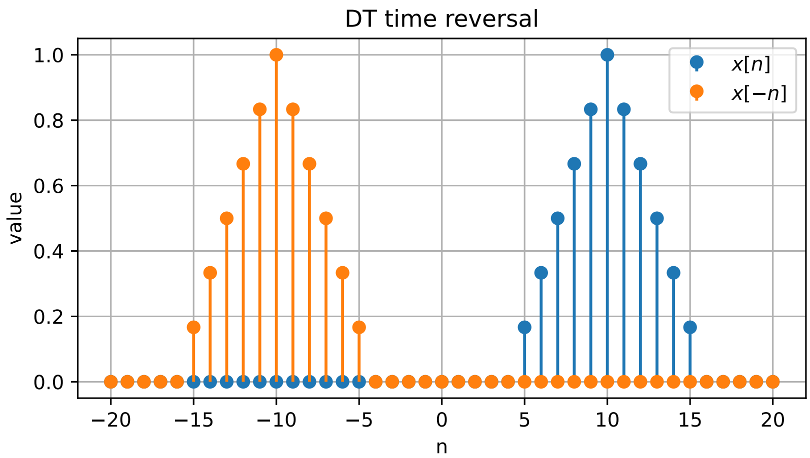
$$y(t) = x(-t).$$



Σχήμα 3.3: Αντιστροφή χρόνου στον συνεχή χρόνο.

Διακριτός χρόνος.

$$y[n] = x[-n].$$



Σχήμα 3.4: Αντιστροφή χρόνου στον διακριτό χρόνο.

Ερμηνεία

Η αντιστροφή χρόνου κατοπτρίζει το σήμα ως προς την αρχή:

- ό,τι ήταν στο $t = +1$ μετακινείται στο $t = -1$,
- ό,τι ήταν στο $t = +2$ μετακινείται στο $t = -2$, κ.ο.κ.

Γραφικά, "αναποδογυρίζετε" το σήμα γύρω από τον κατακόρυφο άξονα στη στιγμή $t = 0$ (ή $n = 0$).

Παραδείγματα.

- Αν το $x(t)$ είναι αιτιατό (μηδενικό για $t < 0$), τότε το $x(-t)$ είναι αντιαιτιατό (μηδενικό για $t > 0$).
- Αν το $x(t)$ είναι άρτιο, τότε $x(-t) = x(t)$ (δεν αλλάζει τίποτα).
- Αν το $x(t)$ είναι περιττό, τότε $x(-t) = -x(t)$ (αντιστροφή προσήμου).

Συνδυασμός μετατόπισης και αντιστροφής

Ένα πολύ συχνό μοτίβο είναι

$$y(t) = x(-(t - t_0)) = x(t_0 - t).$$

Αυτό αντιστοιχεί σε αντιστροφή ως προς $t = 0$ και έπειτα μετατόπιση (ή ισοδύναμα, αντιστροφή ως προς το σημείο $t = t_0/2$). Όταν σχεδιάζουμε τέτοια σήματα, συνήθως είναι ευκολότερο να το κάνουμε σε δύο βήματα: πρώτα αντιστροφή, μετά μετατόπιση.

3.3 Χρονική Κλιμάκωση

Ορισμός (Συνεχής Χρόνος)

Για σήματα συνεχούς χρόνου, η χρονική κλιμάκωση ορίζεται ως

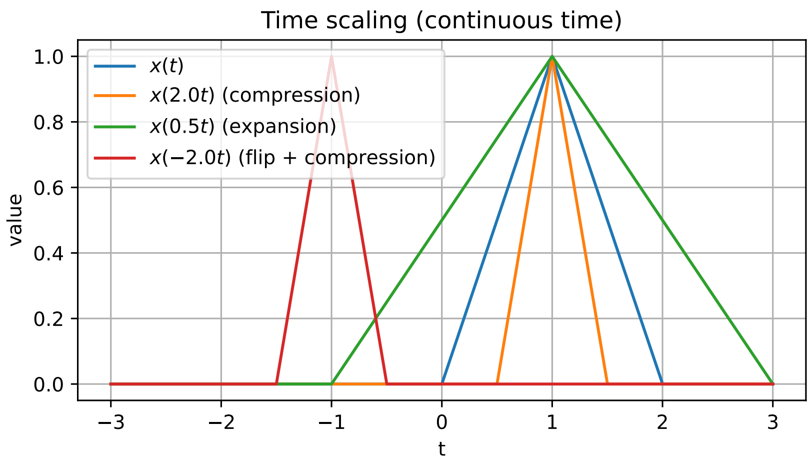
$$y(t) = x(at),$$

όπου $a \neq 0$.

Ερμηνεία

Η χρονική κλιμάκωση αλλάζει το *πόσο γρήγορα* εξελίσσεται το σήμα:

- $|a| > 1$: **χρονική συμπίεση**. Το σήμα μεταβάλλεται γρηγορότερα και φαίνεται "συμπιεσμένο" προς το $t = 0$.
- $0 < |a| < 1$: **χρονική διαστολή**. Το σήμα μεταβάλλεται πιο αργά και φαίνεται "τεντωμένο".
- $a < 0$: κλιμάκωση *συν* αντιστροφή (επειδή ο μετασχηματισμός $t \mapsto at$ αντιστρέφει τον χρονικό άξονα όταν $a < 0$).



Σχήμα 3.5: Χρονική κλιμάκωση στον συνεχή χρόνο.

Παραδείγματα.

- Αν $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, τότε $x(2t) = \cos(2\pi(2f_0)t)$: η συχνότητα διπλασιάζεται (πιο γρήγορες ταλαντώσεις).
- Αν το $x(t)$ είναι παλμός πλάτους T, τότε το $x(2t)$ έχει πλάτος $T/2$ (συμπίεση), ενώ το $x(0.5t)$ έχει πλάτος $2T$ (διαστολή).

Γιατί η κλιμάκωση συμπιέζει ή διαστέλλει

Έστω ότι ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα του $x(t)$ εμφανίζεται στη χρονική στιγμή $t = t_1$ (π.χ. μια κορυφή). Στο κλιμακωμένο σήμα $y(t) = x(at)$, το ίδιο γνώρισμα εμφανίζεται όταν

$$at = t_1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t_1}{a}.$$

Άρα οι χρονικές θέσεις των χαρακτηριστικών διαιρούνται με a:

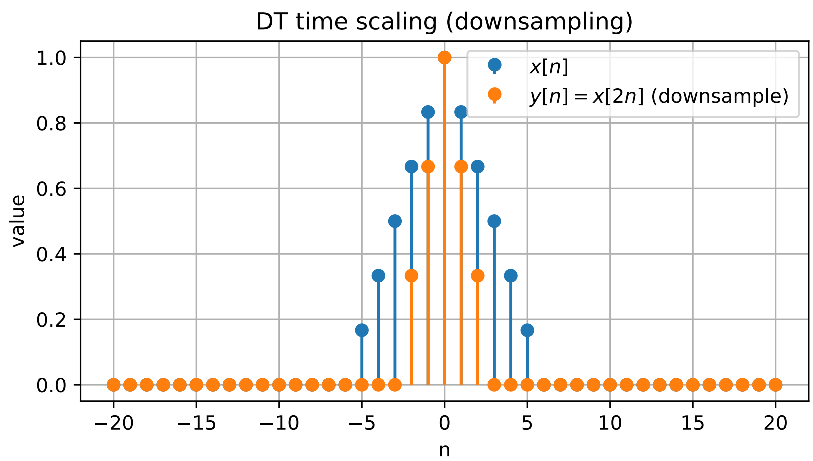
- αν $a = 2$, τα χαρακτηριστικά μετακινούνται στη μισή χρονική στιγμή (πιο κοντά στο μηδέν) $\Rightarrow$ συμπίεση,
- αν $a = 0.5$, τα χαρακτηριστικά μετακινούνται στη διπλάσια χρονική στιγμή $\Rightarrow$ διαστολή.

Κλιμάκωση στον διακριτό χρόνο

Στον διακριτό χρόνο, ο δείκτης n πρέπει να παραμένει ακέραιος. Η έκφραση $x[an]$ έχει νόημα μόνο όταν το an είναι ακέραιος δείκτης:

- Αν το a είναι ακέραιο (π.χ. $a = 2$), τότε το $x[2n]$ ορίζεται αλλά *επιλέγει* κάθε δεύτερο δείγμα (υποδειγματοληψία).
- Αν $0 < a < 1$ (π.χ. $a = 1/2$), τότε το $x[n/2]$ δεν ορίζεται για περιττά n εκτός αν εισάγουμε παρεμβολή, που είναι ξεχωριστό θέμα.

Γι' αυτό, η "χρονική κλιμάκωση" στον διακριτό χρόνο συνήθως συζητείται με όρους *υποδειγματοληψίας* και *υπερδειγματοληψίας* (και παρεμβολής), αντί για τον απλό τύπο $x(at)$.

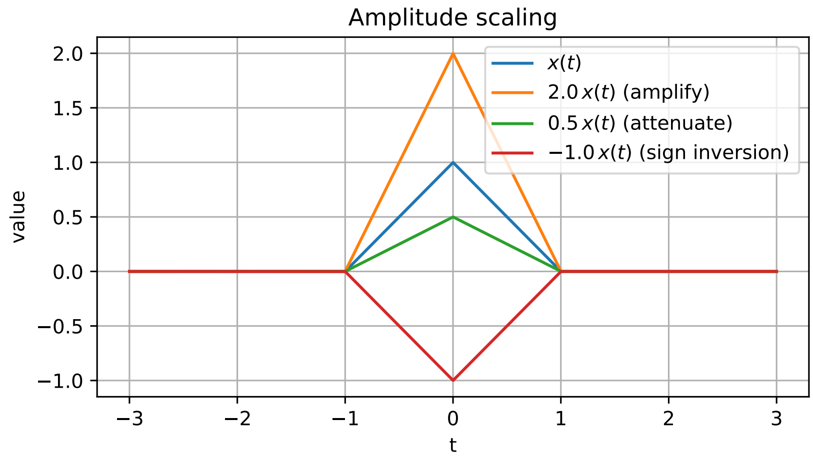


Σχήμα 3.6: Χρονική κλιμάκωση στον διακριτό χρόνο (υποδειγματοληψία).

3.4 Κλιμάκωση Πλάτους (Κατακόρυφη Κλιμάκωση)

Ορισμός

Η κλιμάκωση πλάτους πολλαπλασιάζει τις τιμές του σήματος με μια σταθερά α.



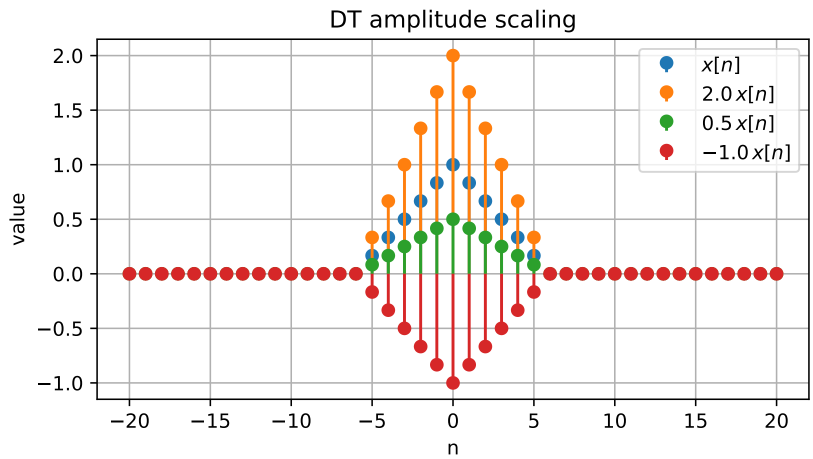
Σχήμα 3.7: Κλιμάκωση πλάτους στον συνεχή χρόνο.

Συνεχής χρόνος.

$$y(t) = \alpha\, x(t).$$

Διακριτός χρόνος.

$$y[n] = \alpha\, x[n].$$



Σχήμα 3.8: Κλιμάκωση πλάτους στον διακριτό χρόνο.

Ερμηνεία

Η κλιμάκωση πλάτους δεν αλλάζει το *πότε* συμβαίνουν τα γεγονότα, αλλά μόνο το *πόσο μεγάλα* είναι.

- $|\alpha| > 1$: ενίσχυση
- $0 < |\alpha| < 1$: εξασθένηση
- $\alpha < 0$: αντιστροφή προσήμου (κατακόρυφη αναστροφή)

Παραδείγματα.

- Ρυθμιστής έντασης ήχου: περίπου $y(t) = \alpha x(t)$.
- Βαθμονόμηση αισθητήρα: αν ένας αισθητήρας αναφέρει $y(t) = 2x(t)$, μπορούμε να διορθώσουμε κλιμακώνοντας με $\alpha = \frac{1}{2}$.

Επίδραση στην ενέργεια και στη μέση ισχύ

Επειδή η ενέργεια και η ισχύς χρησιμοποιούν $|x(\cdot)|^2$, η κλιμάκωση ενός σήματος κατά α κλιμακώνει αυτά τα μεγέθη κατά $|\alpha|^2$:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x(t)|^2 dt = |\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = |\alpha|^2 E_x,$$

και ανάλογα (όταν ορίζεται) $P_y = |\alpha|^2 P_x$.

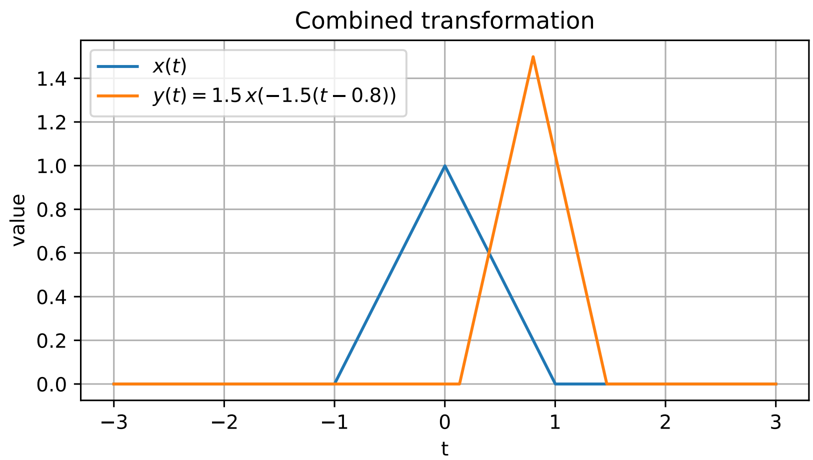
3.5 Σύνθεση Μετασχηματισμών

Σε πραγματικά προβλήματα, συχνά συνδυάζουμε μετασχηματισμούς. Μια γενική και εξαιρετικά συνηθισμένη μορφή είναι

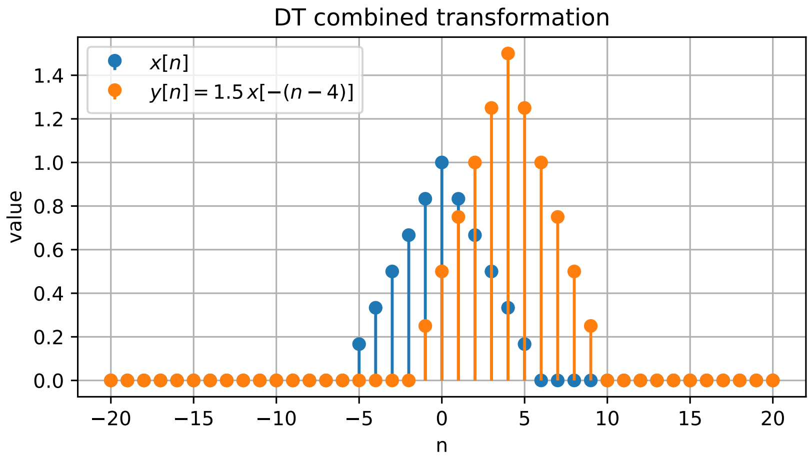
$$y(t) = \alpha\, x\big(a(t - t_0)\big),$$

η οποία εφαρμόζει (με τη σειρά):

- μετατόπιση κατά t_0,
- κλιμάκωση κατά a (και πιθανή αντιστροφή αν $a < 0$),
- κλιμάκωση πλάτους κατά α.



Σχήμα 3.9: Συνδυασμένος μετασχηματισμός στον συνεχή χρόνο.



Σχήμα 3.10: Συνδυασμένος μετασχηματισμός στον διακριτό χρόνο.

Προτεινόμενη διαδικασία σχεδίασης. Όταν ζητείται να σχεδιάσουμε $y(t) = \alpha\, x(a(t-t_0))$, αποφύγετε να τα κάνετε όλα ταυτόχρονα. Κάντε το βήμα-βήμα:

1. Ξεκινήστε από το γράφημα του $x(t)$.
2. Εφαρμόστε τη μετατόπιση για να πάρετε $x(t - t_0)$.
3. Εφαρμόστε χρονική κλιμάκωση για να πάρετε $x(a(t - t_0))$.
4. Εφαρμόστε κλιμάκωση πλάτους για να πάρετε $\alpha x(a(t - t_0))$.

Αυτή η συστηματική προσέγγιση αποτρέπει σφάλματα προσήμου και σύγχυση σχετικά με μετατοπίσεις αριστερά/δεξιά.

4 Ενέργεια και Ισχύς

Η ενέργεια και η ισχύς ποσοτικοποιούν το "μέγεθος" ενός σήματος, αλλά με διαφορετικούς τρόπους.

- **Η ενέργεια** μετρά τη *συνολική συσσωρευμένη* τετραγωνική τιμή του μέτρου του σήματος σε όλο τον χρόνο.
- **Η μέση ισχύς** μετρά τη *χρονικά μέση* τετραγωνική τιμή του μέτρου.

Οι ορισμοί αυτοί είναι θεμελιώδεις, διότι πολλά πρακτικά ερωτήματα ανάγονται στο "πόσο μεγάλο είναι το σήμα;" και επειδή συνδέονται άμεσα με τη φυσική ισχύ σε ηλεκτρικά/μηχανικά συστήματα και με τις τιμές RMS.

4.1 Ορισμοί

Συνεχής χρόνος

Για ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$, ορίζουμε την ενέργεια (E_x) και τη μέση ισχύ (P_x) ως:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) \, dt,$$
$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x^*(t) \, dt,$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει το όριο για το P_x. Με x^* συμβολίζουμε το μιγαδικό συζυγές του x.

Ερμηνεία.

- Το E_x είναι ένα (ενδεχομένως άπειρο) *συνολικό* μέγεθος.
- Το P_x είναι *μέση τιμή ανά μονάδα χρόνου* (μακροχρόνιος μέσος όρος).

Διακριτός χρόνος

Για ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$, ορίζουμε την ενέργεια (E_x) και τη μέση ισχύ (P_x) ως:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n],$$
$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]x^*[n],$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει το όριο.

4.2 Σήματα Ενέργειας vs Σήματα Ισχύος

Η κλασική ταξινόμηση είναι:

- **Σήμα ενέργειας:** $0 < E_x < \infty$, και $P_x = 0$.
- **Σήμα ισχύος:** $0 < P_x < \infty$, και $E_x = \infty$.
- **Ούτε το ένα ούτε το άλλο:** η ενέργεια αποκλίνει και η ισχύς είναι άπειρη ή μη ορισμένη.

Παραδείγματα.

- Παλμός πεπερασμένης διάρκειας ⇒ σήμα ενέργειας.
- Ημίτονο ⇒ σήμα ισχύος.
- Ράμπα $x(t) = t$ ⇒ ούτε το ένα ούτε το άλλο (και τα δύο αποκλίνουν).

4.3 Πώς Συμπεριφέρονται η Ενέργεια και η Ισχύς υπό Μετασχηματισμούς

Ένας βασικός λόγος που μελετάμε μετασχηματισμούς είναι ότι συχνά γνωρίζουμε το E_x ή το P_x για ένα βασικό σήμα και θέλουμε να συμπεράνουμε το E_y ή το P_y για το μετασχηματισμένο σήμα.

4.3.1 Χρονική Μετατόπιση: Η Ενέργεια και η Ισχύς Δεν Αλλάζουν

Συνεχής χρόνος. Έστω

$$y(t) = x(t - t_0).$$

Ενέργεια.

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t - t_0)|^2 \, dt.$$

Θέτουμε $\tau = t - t_0$, οπότε $dt = d\tau$. Τα όρια ολοκλήρωσης παραμένουν $-\infty$ έως ∞, άρα

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 \, d\tau = E_x.$$

Μέση ισχύς.

$$P_y = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t - t_0)|^2 \, dt.$$

Με την ίδια αντικατάσταση $\tau = t - t_0$ παίρνουμε

$$P_y = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-t_0}^{T-t_0} |x(\tau)|^2 \, d\tau.$$

Για μεγάλα T, η μετατόπιση του παραθύρου ολοκλήρωσης κατά σταθερό t_0 δεν επηρεάζει τον μακροχρόνιο μέσο όρο (αν το όριο υπάρχει), επομένως

$$P_y = P_x.$$

Διακριτός χρόνος. Έστω

$$y[n] = x[n - n_0].$$

Ενέργεια.

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n - n_0]|^2.$$

Θέτουμε $k = n - n_0$. Καθώς το n διατρέχει όλους τους ακεραίους, το ίδιο κάνει και το k. Άρα

$$E_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = E_x.$$

Μέση ισχύς.

$$P_y = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n - n_0]|^2.$$

Και εδώ, η μετατόπιση του παραθύρου μέσου όρου κατά σταθερό n_0 δεν αλλάζει τον χρονικό μέσο όρο (αν το όριο υπάρχει), άρα

$$P_y = P_x.$$

Βασικό συμπέρασμα: η χρονική μετατόπιση αλλάζει το *πότε* συμβαίνει το σήμα, όχι τις τιμές του: επομένως δεν αλλάζει την ενέργεια ούτε τη μέση ισχύ.

4.3.2 Χρονική Κλιμάκωση: Η Ενέργεια Αλλάζει, η Ισχύς Παραμένει Ίδια

Έστω
$$y(t) = x(at), \qquad a \neq 0.$$

Ενέργεια.
$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |x(at)|^2 \, dt.$$
Θέτουμε $\tau = at$, άρα $dt = \frac{1}{|a|} d\tau$ (η απόλυτη τιμή εξασφαλίζει ορθότητα όταν $a < 0$). Τότε
$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 \frac{d\tau}{|a|} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 \, d\tau = \frac{1}{|a|} E_x.$$

Γιατί; Αν $|a| > 1$, το σήμα συμπιέζεται στον χρόνο ("συμβαίνει γρηγορότερα"), άρα η συνολική συσσωρευμένη ενέργεια μειώνεται. Αν $0 < |a| < 1$, το σήμα διαστέλλεται στον χρόνο, άρα διαρκεί περισσότερο και η ενέργεια αυξάνεται.

Μέση ισχύς.
$$P_y = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(at)|^2 \, dt.$$
Θέτουμε $\tau = at$:
$$P_y = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{|a|} \int_{-|a|T}^{|a|T} |x(\tau)|^2 \, d\tau.$$
Ξαναγράφουμε τον προπολλαπλασιαστή:
$$\frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{|a|} = \frac{1}{2(|a|T)}.$$
Άρα
$$P_y = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2(|a|T)} \int_{-|a|T}^{|a|T} |x(\tau)|^2 \, d\tau.$$
Καθώς $T \to \infty$, το μήκος παραθύρου $|a|T \to \infty$, οπότε αυτό είναι ακριβώς ο ορισμός του P_x (αν υπάρχει). Επομένως
$$P_y = P_x.$$
Βασικό συμπέρασμα: η χρονική κλιμάκωση αναδιατάσσει τις ίδιες τιμές στον χρόνο, αλλάζει τη συνολική ενέργεια, όχι όμως τη μακροχρόνια μέση ισχύ.

4.3.3 Υποδειγματοληψία στον Διακριτό Χρόνο (Decimation)

Έστω
$$y[n] = x[Mn], \qquad M \in \mathbb{Z}, \ M > 1.$$

Ενέργεια.

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[Mn]|^2.$$

Το άθροισμα αυτό περιλαμβάνει μόνο ένα υποσύνολο των όρων του

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2,$$

δηλαδή εκείνους τους δείκτες k που είναι πολλαπλάσια του M:

$$E_y = \sum_{k\in\{\dots,-2M,-M,0,M,2M,\dots\}} |x[k]|^2 \;\le\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = E_x.$$

Άρα η υποδειγματοληψία δεν μπορεί να αυξήσει την ενέργεια: συνήθως τη μειώνει "απορρίπτοντας" δείγματα.

Ισχύς (διαισθητικά). Για τη μέση ισχύ, κάνουμε μέσο όρο ως προς τους χρονικούς δείκτες. Η υποδειγματοληψία αλλάζει το τι σημαίνει "μία μονάδα χρόνου" στη νέα ακολουθία και αλλάζει επίσης ποια δείγματα υπάρχουν. Γενικά, η ισχύς μπορεί να αλλάξει.

Σημαντική ειδική περίπτωση (περιοδικά / σήματα ισχύος). Αν το $x[n]$ είναι περιοδικό και το M διατηρεί την περιοδικότητα με συμβατό τρόπο, η μέση ισχύς μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη.

4.3.4 Κλιμάκωση Πλάτους: Ενέργεια και Ισχύς Κλιμακώνονται κατά $|\alpha|^2$

Συνεχής χρόνος. Έστω

$$y(t) = \alpha x(t).$$

Ενέργεια.

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x(t)|^2\,dt = |\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = |\alpha|^2 E_x.$$

Μέση ισχύς.

$$P_y = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\alpha x(t)|^2\,dt = |\alpha|^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt = |\alpha|^2 P_x.$$

Διακριτός χρόνος. Έστω

$$y[n] = \alpha x[n].$$

Ενέργεια.

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha x[n]|^2 = |\alpha|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = |\alpha|^2 E_x.$$

Μέση ισχύς.

$$P_y = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |y[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\alpha x[n]|^2.$$

Εξάγουμε τη σταθερά:

$$P_y = |\alpha|^2 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = |\alpha|^2 P_x,$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει το όριο του χρονικού μέσου όρου.

4.4 Ενεργός Τιμή (Root Mean Square Value - RMS)

Εκτός από την ενέργεια και τη μέση ισχύ, ένα εξαιρετικά σημαντικό μέγεθος στην επεξεργασία σημάτων είναι η **ενεργός τιμή** (root mean square value, RMS ή effective value). Η RMS παρέχει ένα πρακτικό μέτρο του "αποτελεσματικού πλάτους" ενός σήματος και χρησιμοποιείται ευρέως σε εφαρμογές μηχανικής όπως η επεξεργασία ήχου, η ανάλυση δονήσεων και τα ηλεκτρικά συστήματα ισχύος.

Κίνητρο: Γιατί RMS;

Η ενέργεια και η ισχύς απαντούν σε διαφορετικά ερωτήματα:

- Η ενέργεια μας λέει τη συνολική συσσωρευμένη ισχύ του σήματος σε όλο τον χρόνο.
- Η μέση ισχύς μας λέει τη μακροχρόνια μέση ισχύ του σήματος.

Ωστόσο, σε πολλές εφαρμογές θέλουμε ένα μέγεθος που να έχει τις *ίδιες μονάδες με το ίδιο το σήμα* (βολτ, μέτρα/δευτερόλεπτο, κ.λπ.), και όχι τετραγωνικές μονάδες.
Αυτό οδηγεί φυσικά στην RMS.

Ορισμός (Συνεχής Χρόνος)

Για ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$, η ενεργός τιμή σε ένα πεπερασμένο διάστημα $[-T, T]$ ορίζεται ως

$$x_{\mathrm{RMS}}(T) = \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt}.$$

Η ενεργός τιμή σε άπειρο χρόνο (όταν υπάρχει) είναι

$$x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt}.$$

Ορισμός (Διακριτός Χρόνος)

Για ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$, η ενεργός τιμή στο παράθυρο $[-N, N]$ είναι

$$x_{\mathrm{RMS}}(N) = \sqrt{\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2}.$$

Σε άπειρο χρόνο (όταν υπάρχει το όριο),

$$x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2}.$$

Σύνδεση RMS και Μέσης Ισχύος

Παρατηρούμε ότι η μέση ισχύς ορίζεται ως

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt.$$

Επομένως, όποτε υπάρχει το P_x,

$$\boxed{x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{P_x}.}$$

Ερμηνεία. Η RMS είναι απλώς η τετραγωνική ρίζα της μέσης ισχύος, εκφρασμένη στις ίδιες μονάδες με το σήμα.

Φυσική Σημασία: Αποτελεσματικό Πλάτος

Για ηλεκτρικά σήματα, η ενεργός τιμή τάσης (RMS voltage) συνδέεται άμεσα με την αποδιδόμενη ισχύ. Για παράδειγμα, μια ημιτονοειδής τάση

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

έχει ενεργό τιμή

$$v_{\mathrm{RMS}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}.$$

Μια οικιακή πρίζα 230 V δίνεται σε RMS, που σημαίνει ότι η μέγιστη τάση είναι περίπου

$$V_{\max} = 230\sqrt{2} \approx 325 \text{ V}.$$

Κύριο συμπέρασμα. Ένα ημίτονο με μέγιστο πλάτος A έχει αποτελεσματικό (RMS) πλάτος $A/\sqrt{2}$.

Λυμένο Παράδειγμα: RMS Παλμού Πεπερασμένης Διάρκειας

Θεωρούμε τον ορθογώνιο παλμό

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le T_0, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η ενεργός τιμή του στο διάστημα $[0, T_0]$ είναι

$$x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \cdot A^2 T_0} = A.$$

Άρα ένας παλμός σταθερού πλάτους έχει RMS ίση με το πλάτος του.

Γιατί η RMS Είναι Σημαντική στην Επεξεργασία Σημάτων

Η RMS χρησιμοποιείται ευρέως διότι:

- μετρά την "ισχύ" του σήματος στις ίδιες μονάδες με το σήμα,
- συνδέεται άμεσα με την ισχύ,
- παρέχει ένα ουσιαστικό "μέσο πλάτος",
- συνδέεται φυσικά με την κλίμακα decibel:

$$20\log_{10}\left(\frac{x_{\mathrm{RMS},2}}{x_{\mathrm{RMS},1}}\right).$$

Σύνοψη.

$$\boxed{x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\text{μέσος όρος του } |x|^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{P_x}.}$$

4.5 Λυμένα Παραδείγματα

Στόχος αυτών των παραδειγμάτων είναι να δείξουν τον υπολογισμό της ενέργειας και της ισχύος για συγκεκριμένα σήματα, καθώς και να καταδείξουν πώς οι μετασχηματισμοί επηρεάζουν αυτά τα μεγέθη. Βασικά βήματα περιλαμβάνουν:

- τον σωστό καθορισμό των ορίων/ορίων ολοκλήρωσης,
- τη χρήση τυπικών ολοκληρωτικών ταυτοτήτων,
- την ερμηνεία του αποτελέσματος (σήμα ενέργειας vs σήμα ισχύος),
- τον έλεγχο συνέπειας με τους κανόνες μετασχηματισμών.

Παράδειγμα 1 (Συνεχής Χρόνος): Ενέργεια υπό Χρονική Κλιμάκωση

Έστω

$$x(t) = e^{-t}u(t),$$

όπου $u(t)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος. Λόγω του $u(t)$, το σήμα είναι μηδενικό για $t < 0$, άρα όλα τα ολοκληρώματα ανάγονται στο διάστημα $[0, \infty)$.

Βήμα 1: Υπολογισμός του $|x(t)|^2$. Εδώ το $x(t)$ είναι πραγματικό και μη αρνητικό για $t \geq 0$, οπότε

$$|x(t)|^2 = x^2(t) = e^{-2t}u(t).$$

Βήμα 2: Γράφουμε το ολοκλήρωμα ενέργειας.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\, dt.$$

Βήμα 3: Υπολογισμός του ολοκληρώματος. Υπολογίζουμε μια παράγουσα:

$$\int e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C.$$

Εφαρμόζουμε τα όρια:

$$E_x = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\infty} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{0}\right).$$

Καθώς $e^{-2b} \to 0$ όταν $b \to \infty$, προκύπτει

$$E_x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Βήμα 4: Χρονική κλιμάκωση του σήματος. Ορίζουμε

$$y(t) = x(2t) = e^{-2t}u(2t).$$

Εφόσον $u(2t) = u(t)$ (αφού $2 > 0$), έχουμε

$$y(t) = e^{-2t}u(t).$$

Βήμα 5: Υπολογισμός του $|y(t)|^2$ και της ενέργειάς του.

$$|y(t)|^2 = e^{-4t}u(t), \qquad E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt = \int_0^{\infty} e^{-4t}\,dt.$$

Υπολογίζουμε:

$$\int e^{-4t}\,dt = -\frac{1}{4}e^{-4t} + C,$$

άρα

$$E_y = \left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{\infty} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{4}e^{-4b}\right) - \left(-\frac{1}{4}e^{0}\right) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Βήμα 6: Έλεγχος με τον γενικό κανόνα. Για χρονική κλιμάκωση $y(t) = x(at)$, η ενέργεια κλιμακώνεται ως $E_y = \frac{1}{|a|}E_x$. Εδώ $a = 2$, άρα

$$\frac{1}{|2|}E_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

που συμφωνεί με τον άμεσο υπολογισμό.

Ερμηνεία. Το $y(t) = x(2t)$ είναι μια *συμπιεσμένη* εκδοχή του $x(t)$: το σήμα "συμβαίνει δύο φορές πιο γρήγορα", άρα η συνολική συσσωρευμένη ενέργεια υποδιπλασιάζεται.

Παράδειγμα 2 (Συνεχής Χρόνος): Μέση Ισχύς Ημιτόνου

Έστω

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t),$$

με $A \in \mathbb{R}$. Το σήμα αυτό διαρκεί επ' άπειρον, οπότε αναμένουμε η ενέργειά του να αποκλίνει, αλλά η μέση ισχύς του να είναι πεπερασμένη.

Βήμα 1: Η ενέργεια αποκλίνει.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2(\omega_0 t) \, dt.$$

Εφόσον $\cos^2(\cdot) \geq 0$ και η μέση τιμή του δεν είναι μηδέν, το ολοκλήρωμα αυξάνεται χωρίς φραγμό. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $T > 0$,

$$E_x \geq \int_{-T}^{T} A^2 \cos^2(\omega_0 t) \, dt.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι το δεξί μέλος αυξάνεται ανάλογα με το T (άρα αποκλίνει όταν $T \to \infty$).

Βήμα 2: Θέτουμε τη μέση ισχύ.

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A^2 \cos^2(\omega_0 t) \, dt.$$

Εξάγουμε τη σταθερά A^2:

$$P_x = A^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2(\omega_0 t) \, dt.$$

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε τριγωνομετρική ταυτότητα. Χρησιμοποιούμε

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

Με $\theta = \omega_0 t$:

$$\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}.$$

Βήμα 4: Ακριβής ολοκλήρωση στο $[-T, T]$.

$$\int_{-T}^{T} \cos^2(\omega_0 t) \, dt = \int_{-T}^{T} \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} \, dt = \frac{1}{2} \int_{-T}^{T} 1 \, dt + \frac{1}{2} \int_{-T}^{T} \cos(2\omega_0 t) \, dt.$$

Υπολογίζουμε κάθε όρο:

$$\frac{1}{2} \int_{-T}^{T} 1 \, dt = \frac{1}{2}(2T) = T.$$

Για τον όρο συνημιτόνου,

$$\int \cos(2\omega_0 t) \, dt = \frac{1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 t),$$

άρα

$$\frac{1}{2} \int_{-T}^{T} \cos(2\omega_0 t) \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right]_{-T}^{T} = \frac{1}{4\omega_0} \Big(\sin(2\omega_0 T) - \sin(-2\omega_0 T) \Big).$$

Χρησιμοποιώντας $\sin(-x) = -\sin(x)$:

$$\sin(2\omega_0 T) - \sin(-2\omega_0 T) = 2\sin(2\omega_0 T),$$

οπότε

$$\frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \cos(2\omega_0 t)\, dt = \frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 T).$$

Άρα,

$$\int_{-T}^{T} \cos^2(\omega_0 t)\, dt = T + \frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 T).$$

Βήμα 5: Διαιρούμε με $2T$ και παίρνουμε το όριο.

$$P_x = A^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(T + \frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 T)\right) = A^2 \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega_0 T}\sin(2\omega_0 T)\right).$$

Εφόσον $|\sin(2\omega_0 T)| \le 1$,

$$\left|\frac{1}{4\omega_0 T}\sin(2\omega_0 T)\right| \le \frac{1}{4|\omega_0| T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0,$$

άρα

$$\boxed{P_x = \frac{A^2}{2}.}$$

Ερμηνεία. Ένα ημίτονο είναι **σήμα ισχύος**: έχει άπειρη ενέργεια (δεν "τελειώνει" ποτέ), αλλά πεπερασμένη μέση ισχύ. Σημειώστε και τη φυσική σύνδεση: για μια ημιτονοειδή τάση σε αντίσταση $1\,\Omega$, η μέση ηλεκτρική ισχύς είναι ακριβώς ο μέσος όρος του $v^2(t)$, δηλαδή $\frac{A^2}{2}$.

Παράδειγμα 3 (Διακριτός Χρόνος): Σήμα Ενέργειας vs Σήμα Ισχύος

Μέρος Α: Ακολουθία πεπερασμένου μήκους (σήμα ενέργειας). Ορίζουμε

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Βήμα 1: Υπολογισμός ενέργειας. Σύμφωνα με τον ορισμό,

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2.$$

Επειδή $x[n] = 0$ εκτός του $0 \le n \le 4$, το άπειρο άθροισμα ανάγεται σε πεπερασμένο:

$$E_x = \sum_{n=0}^{4} |1|^2 = \sum_{n=0}^{4} 1 = 5.$$

Άρα $0 < E_x < \infty$, και το $x[n]$ είναι **σήμα ενέργειας**.

Βήμα 2: Υπολογισμός μέσης ισχύος.

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Για μεγάλα N, το άθροισμα περιέχει ακριβώς πέντε μονάδες (για $n = 0, 1, 2, 3, 4$) και μηδενικά αλλού:

$$\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = 5 \quad \text{για κάθε } N \geq 4.$$

Επομένως,

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{5}{2N+1} = 0.$$

Άρα τα σήματα ενέργειας έχουν μηδενική μέση ισχύ.

Μέρος Β: Περιοδική ακολουθία άπειρου μήκους (σήμα ισχύος). Έστω

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n).$$

Βήμα 1: Η ενέργεια αποκλίνει. Η ενέργεια είναι

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos^2(\Omega_0 n).$$

Εφόσον $\cos^2(\cdot) \geq 0$ και δεν τείνει στο μηδέν όταν $|n| \to \infty$, το άθροισμα δεν συγκλίνει: στην πραγματικότητα αυξάνεται χωρίς φραγμό καθώς επεκτείνουμε τα όρια αθροίσματος. Άρα $E_x = \infty$.

Βήμα 2: Υπολογισμός μέσης ισχύος.

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \cos^2(\Omega_0 n).$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2},$$

ώστε

$$\cos^2(\Omega_0 n) = \frac{1+\cos(2\Omega_0 n)}{2}.$$

Άρα,

$$\sum_{n=-N}^{N} \cos^2(\Omega_0 n) = \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} \cos(2\Omega_0 n).$$

Το πρώτο άθροισμα είναι:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} 1 = \frac{1}{2}(2N+1).$$

Επομένως

$$\sum_{n=-N}^{N} \cos^2(\Omega_0 n) = \frac{1}{2}(2N+1) + \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} \cos(2\Omega_0 n).$$

Διαιρούμε με $2N+1$:

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} \cos^2(\Omega_0 n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} \cos(2\Omega_0 n).$$

Βήμα 3: Το μέσο του συνημιτόνου τείνει στο μηδέν (τυπική περίπτωση). Για τις περισσότερες τιμές του Ω_0 (δηλ. όταν το $2\Omega_0$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 2π), τα δείγματα του $\cos(2\Omega_0 n)$ ταλαντώνονται και ο μέσος όρος τους τείνει στο μηδέν:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} \cos(2\Omega_0 n) = 0.$$

Υποθέτοντας αυτή την τυπική περίπτωση, προκύπτει

$$\boxed{P_x = \frac{1}{2}.}$$

Ειδικές περιπτώσεις. Αν $\Omega_0 = 0$ (ή $\Omega_0 = \pi$), τότε το $\cos(\Omega_0 n)$ γίνεται σταθερό (ή εναλλασσόμενο σταθερό ως προς το πρόσημο), και το ίδιο συμπέρασμα για το $\cos^2(\Omega_0 n)$ ισχύει: είναι ταυτοτικά 1 όταν $\Omega_0 = 0$ και επίσης ταυτοτικά 1 όταν $\Omega_0 = \pi$ μετά την ύψωση στο τετράγωνο. Το βασικό σημείο παραμένει: οι περιοδικές ακολουθίες είναι τυπικά **σήματα ισχύος**.

Ερμηνεία. Ένα περιοδικό ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου είναι **σήμα ισχύος**: έχει άπειρη ενέργεια (άπειρη διάρκεια) αλλά πεπερασμένη, μη μηδενική μέση ισχύ.

5 Η Κλίμακα Decibel (dB)

Πολλά μεγέθη στην επεξεργασία σημάτων καλύπτουν ένα *τεράστιο* εύρος τιμών. Για παράδειγμα, ένα ηχητικό σήμα μπορεί να περιέχει συνιστώσες των οποίων τα πλάτη διαφέρουν κατά παράγοντες της τάξης του 10^3 ή και περισσότερο, ενώ οι φασματικές πυκνότητες ισχύος μπορεί να διαφέρουν κατά παράγοντες 10^6 ή 10^{12}. Η απεικόνιση τέτοιων αριθμών σε γραμμική κλίμακα συχνά "κρύβει" μικρές (αλλά σημαντικές) συνιστώσες.

Η **κλίμακα decibel (dB)** είναι μια λογαριθμική κλίμακα σχεδιασμένη ώστε να αναπαριστά **λόγους** με συμπαγή τρόπο και να ταιριάζει με το πώς πολλά φυσικά συστήματα (και η ανθρώπινη αντίληψη, π.χ. η ακοή) ανταποκρίνονται σε σχετικές μεταβολές.

5.1 Τα dB Εκφράζουν Λόγους, Όχι Απόλυτες Τιμές

Μια συχνή παρανόηση είναι ότι "τα dB είναι μονάδα". Στην πραγματικότητα, τα dB είναι κυρίως ένας τρόπος να εκφράζουμε έναν **λόγο** δύο μεγεθών σε λογαριθμική κλίμακα.

Λόγος ισχύος (ορισμός)

Αν P_1 και P_2 είναι ισχείς (ή μεγέθη τύπου ισχύος), τότε ο λόγος σε decibel είναι

$$\mathrm{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$

Βασικές ιδιότητες.

- Αν $P_2 = P_1$, τότε $\mathrm{dB} = 0$.
- Αν $P_2 > P_1$, τότε $\mathrm{dB} > 0$ (κέρδος).
- Αν $P_2 < P_1$, τότε $\mathrm{dB} < 0$ (απώλεια).

Λόγος πλάτους (μέτρου)

Συχνά συγκρίνουμε *πλάτη* (π.χ. τάσεις, ρεύματα, μέτρα μετασχηματισμών Fourier). Αν ένα μέγεθος τύπου πλάτους είναι A και η ισχύς είναι ανάλογη του A^2, τότε:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2.$$

Αντικαθιστώντας στον ορισμό για την ισχύ:

$$\begin{aligned}\mathrm{dB} &= 10 \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10 \log_{10}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) \\ &= 10 \cdot 2 \log_{10}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \boxed{20 \log_{10}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}.\end{aligned}$$

Γιατί 20 και όχι 10; Επειδή η ισχύς κλιμακώνεται με το *τετράγωνο* του πλάτους: $P \propto A^2$. Ο παράγοντας 20 εμφανίζεται όταν μετατρέπουμε έναν λόγο πλατών σε ισοδύναμο λόγο ισχύων.

Σημαντική προϋπόθεση (πότε ισχύει το dB πλάτους). Ο τύπος $20 \log_{10}(A_2/A_1)$ υποθέτει ότι τα A_1 και A_2 μετρώνται υπό τις *ίδιες συνθήκες αναφοράς* ώστε η αναλογία μεταξύ P και A^2 να είναι συνεπής (π.χ. ίδια εμπέδηση/φορτίο σε ηλεκτρικά κυκλώματα). Όταν η αναφορά διαφέρει, πρέπει να υπολογίζουμε την ισχύ ρητά.

5.2 Διαισθητικοί Κανόνες

Επειδή οι λογάριθμοι δεν είναι πάντα εύκολη στην κατανόηση/διαχείριση, είναι χρήσιμο να θυμόμαστε μερικά βασικά σημεία αναφοράς.

Λόγοι ισχύος

+3 dB είναι περίπου ×2 στην ισχύ.

$$10 \log_{10}(2) \approx 3.0103 \text{ dB}.$$

Άρα ο διπλασιασμός της ισχύος αντιστοιχεί περίπου σε +3 dB.

+10 dB είναι ακριβώς ×10 στην ισχύ.

$$10\log_{10}(10) = 10 \text{ dB}.$$

Λόγοι πλάτους

+20 dB είναι ακριβώς ×10 στο πλάτος.

$$20\log_{10}(10) = 20 \text{ dB}.$$

+6 dB είναι περίπου ×2 στο πλάτος. Επειδή $20\log_{10}(2) \approx 6.0206$ dB, ο διπλασιασμός του πλάτους αντιστοιχεί περίπου σε +6 dB.

Αρνητικές τιμές dB

Μια αρνητική τιμή dB απλώς σημαίνει ότι ο λόγος είναι μικρότερος της μονάδας. Για παράδειγμα, αν $P_2 = 0.1P_1$, τότε

$$10\log_{10}(0.1) = -10 \text{ dB}.$$

Άρα −10 dB σημαίνει "δέκα φορές μικρότερο στην ισχύ".

5.3 Δυναμικό Εύρος

Το **δυναμικό εύρος** (dynamic range) περιγράφει πόσο μεγάλη είναι η απόσταση μεταξύ των ισχυρότερων και ασθενέστερων σχετικών συνιστωσών.

Δυναμικό εύρος πλάτους

Αν τα πλάτη κυμαίνονται από $A_{\min}$ έως $A_{\max}$, τότε το δυναμικό εύρος πλάτους σε dB είναι

$$\Delta_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left(\frac{A_{\max}}{A_{\min}}\right).$$

Δυναμικό εύρος ισχύος

Αν οι ισχείς κυμαίνονται από $P_{\min}$ έως $P_{\max}$, τότε

$$\Delta_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{P_{\max}}{P_{\min}}\right).$$

Συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω ότι ο λόγος πλατών είναι $A_{\max}/A_{\min} = 10^4$. Σε γραμμική κλίμακα αυτό είναι τεράστιο εύρος. Σε dB,

$$\Delta_{\text{dB}} = 20\log_{10}(10^4) = 20 \cdot 4 = 80 \text{ dB}.$$

Άρα "παράγοντας 10^4" γίνεται "80 dB".

5.4 Πώς να Σχεδιάζουμε σε dB

Στην επεξεργασία σημάτων συχνά σχεδιάζουμε μέτρα όπως $|X(\omega)|$, φασματικούς φακέλους ή αποκρίσεις συχνότητας φίλτρων. Τα μέτρα μπορεί να πάρουν εξαιρετικά μικρές τιμές, ακόμη και μηδενικές, και το $\log(0)$ δεν ορίζεται. Για αριθμητική ευρωστία χρησιμοποιούμε μια μικρή μετατόπιση ε.

Πλάτος/μέτρο σε dB

Δοθέντος ενός μέτρου $m \geq 0$, ορίζουμε

$$m_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10}(m + \varepsilon),$$

όπου ε είναι μια πολύ μικρή σταθερά (τυπική επιλογή: $\varepsilon = 10^{-12}$).

Πότε χρησιμοποιούμε 20. Χρησιμοποιούμε $20 \log_{10}(\cdot)$ για ποσότητες πλάτους ή μέτρου, π.χ.:

- $|X(\omega)|$ (φάσμα μέτρου),
- $|H(\omega)|$ (απόκριση μέτρου φίλτρου),
- $|x(t)|$ ή RMS πλάτος.

Ισχύς σε dB

Για ένα μέγεθος τύπου ισχύος $p \geq 0$ (π.χ. φάσμα ισχύος, PSD), ορίζουμε

$$p_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10}(p + \varepsilon).$$

Χρησιμοποιούμε $10 \log_{10}(\cdot)$ όταν η ποσότητα είναι ήδη ανάλογη του $|\cdot|^2$.

Σχετικά διαγράμματα dB

Συχνά μας ενδιαφέρουν στάθμες ως προς ένα μέγιστο (ή ως προς μια στάθμη αναφοράς). Για μέτρα, μια πολύ συνηθισμένη επιλογή είναι

$$m_{\mathrm{dB,rel}} = 20 \log_{10}\left(\frac{m}{m_{\max}} + \varepsilon\right), \qquad m_{\max} = \max_{\omega} m(\omega).$$

Αυτό κάνει την κορυφή ίση με 0 dB, και όλα τα υπόλοιπα αρνητικά. Τέτοια διαγράμματα είναι εξαιρετικά χρήσιμα για την ανάδειξη ασθενών συνιστωσών που θα ήταν αόρατες σε γραμμική κλίμακα.

5.5 Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Λόγος ισχύος σε dB και αντίστροφα

Έστω ότι $P_2 = 5P_1$. Τότε

$$\mathrm{dB} = 10 \log_{10}(5) \approx 10 \cdot 0.6990 \approx 6.99 \text{ dB}.$$

Αντίστροφα, αν ένα σύστημα έχει κέρδος 6.99 dB ως προς την ισχύ, τότε

$$\frac{P_2}{P_1} = 10^{\mathrm{dB}/10} = 10^{0.699} \approx 5.$$

Παράδειγμα 2: Λόγος πλάτους σε dB

Έστω ότι $A_2 = 0.1A_1$. Τότε

$$\mathrm{dB} = 20 \log_{10}(0.1) = 20(-1) = -20 \text{ dB}.$$

Άρα τα -20 dB αντιστοιχούν σε δεκαπλάσια μείωση του πλάτους.

Παράδειγμα 3: Δύο τόνοι με πολύ διαφορετικά πλάτη (γιατί τα dB αναδεικνύουν ασθενείς συνιστώσες)

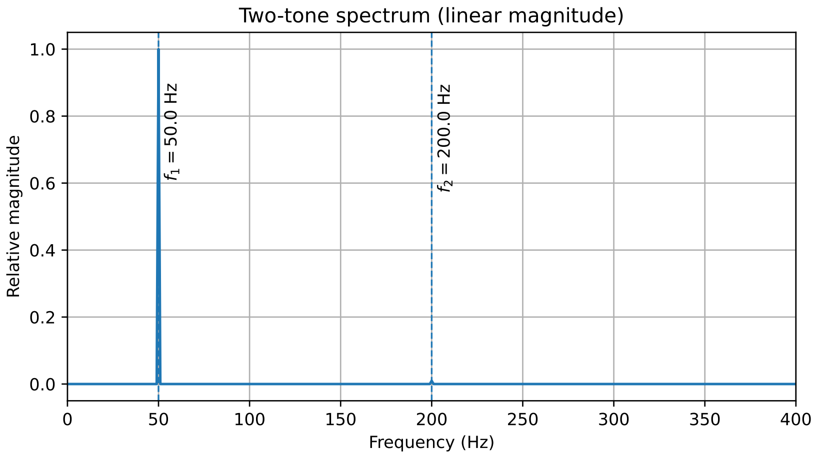
Θεωρούμε ένα σήμα με δύο ημιτονοειδείς συνιστώσες, όπου ο ασθενέστερος τόνος έχει πλάτος 100 φορές μικρότερο:

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 0.01\cos(2\pi f_2 t).$$

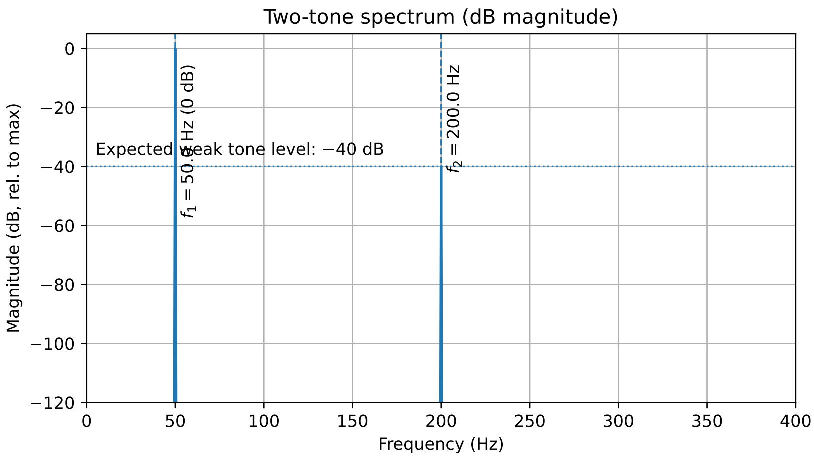
Ο λόγος πλατών είναι 0.01, άρα η ασθενέστερη συνιστώσα βρίσκεται

$$20\log_{10}(0.01) = 20(-2) = -40 \text{ dB}$$

κάτω από την ισχυρότερη. Σε ένα διάγραμμα μέτρου σε γραμμική κλίμακα, ο ασθενέστερος τόνος μπορεί να είναι μετά βίας ορατός (Σχ. 5.1)· σε διάγραμμα dB, εμφανίζεται καθαρά στα -40 dB σε σχέση με την κορυφή (Σχ. 5.2).



Σχήμα 5.1: Φάσμα μέτρου σε γραμμική κλίμακα: ο ασθενέστερος τόνος είναι δύσκολο να φανεί.



Σχήμα 5.2: Φάσμα μέτρου σε κλίμακα dB: ο ασθενέστερος τόνος είναι καθαρά ορατός.

6 Σχεδίαση Σημάτων με matplotlib

Σε όλο το μάθημα θα οπτικοποιούμε συχνά σήματα, ώστε να κατανοούμε τη δομή τους, τους μετασχηματισμούς τους και το φασματικό τους περιεχόμενο. Στην πράξη, το βασικό εργαλείο σχεδίασης σημάτων στην Python είναι η βιβλιοθήκη `matplotlib`.

Η ενότητα αυτή παρέχει έναν πρακτικό οδηγό για καθαρές και σωστές γραφικές παραστάσεις σημάτων, τόσο σε συνεχή χρόνο όσο και σε διακριτό χρόνο.

6.1 Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου αναπαρίσταται αριθμητικά με δειγματοληψία σε ένα πυκνό πλέγμα χρόνου:

$$t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, \qquad x(t_i).$$

Στη `matplotlib`, τα σήματα συνεχούς χρόνου σχεδιάζονται συνήθως με γραμμικά διαγράμματα (line plots):

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

t = np.linspace(-2, 2, 2000)      # time axis
x = np.cos(2*np.pi*3*t)          # example signal

plt.plot(t, x)
plt.grid(True)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("x(t)")
plt.title("Continuous-time signal")
plt.show()
```

Παρατήρηση. *Όσο περισσότερα σημεία χρησιμοποιούνται στο* `linspace`*, τόσο πιο ομαλή εμφανίζεται η καμπύλη.*

6.2 Σήματα Διακριτού Χρόνου: Stem Plots

Τα σήματα διακριτού χρόνου ορίζονται μόνο σε ακέραιους δείκτες:

$$x[n], \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Δεν πρέπει να σχεδιάζονται ως συνεχείς καμπύλες. Αντίθετα, χρησιμοποιούμε **διαγράμματα στελεχών/μίσχων (stem plots)**, που απεικονίζει μεμονωμένα δείγματα:

```python
n = np.arange(-10, 11)           # index axis
x = (n >= 0).astype(float)       # unit step sequence

plt.stem(n, x, basefmt=" ")
plt.grid(True)
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("x[n]")
plt.title("Discrete-time signal")
plt.show()
```

Γιατί stem plots; Διότι τα σήματα διακριτού χρόνου δεν υπάρχουν "ανάμεσα" σε ακέραιους δείκτες: η ένωση των σημείων με γραμμή μπορεί να είναι παραπλανητική.

6.3 Σχεδίαση Πολλαπλών Σημάτων

Συχνά θέλουμε να συγκρίνουμε ένα αρχικό σήμα και μια μετασχηματισμένη εκδοχή του, π.χ.:

$$y(t) = x(t - t_0).$$

Στη `matplotlib`, μπορούμε να σχεδιάσουμε πολλαπλά σήματα στο ίδιο σχήμα/διάγραμμα:

```
t0 = 1.0
y = np.cos(2*np.pi*3*(t - t0))

plt.plot(t, x, label="x(t)")
plt.plot(t, y, label="y(t)=x(t-t0)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Καλή πρακτική. Να χρησιμοποιείτε πάντα υπόμνημα (`legend`) όταν σχεδιάζετε περισσότερα από ένα σήματα.

Χρήση Χρωμάτων στη `matplotlib`

Όταν σχεδιάζονται πολλαπλά σήματα (π.χ. αρχικό και μετασχηματισμένο), η συνεπής χρήση χρωμάτων βελτιώνει σημαντικά την αναγνωσιμότητα.

Προεπιλεγμένος κύκλος χρωμάτων. Η `matplotlib` παρέχει έναν προεπιλεγμένο κύκλο χρωμάτων:

`C0, C1, C2, C3, ...`

Τα χρώματα αυτά είναι οπτικά διακριτά και κατάλληλα για επιστημονικές απεικονίσεις. Παράδειγμα:

```
plt.plot(t, x, color="C0", label="x(t)")
plt.plot(t, y, color="C1", label="y(t)")
```

Σύσταση. Μια συνηθισμένη σύμβαση είναι:

- `C0` για το αρχικό σήμα,
- `C1, C2, ...` για μετασχηματισμένες εκδοχές.

Χρώματα σε Stem Plots

Για σήματα διακριτού χρόνου χρησιμοποιούμε `stem`. Σε αντίθεση με το `plot`, η `stem` απαιτεί ξεχωριστό ορισμό μορφοποίησης γραμμής και δείκτη. Παράδειγμα:

```
plt.stem(n, x,
         linefmt="C0",
         markerfmt="C0o",
         basefmt=" ")
```

Όπου:

- `linefmt="C0"` ορίζει το χρώμα των στελεχών,
- `markerfmt="C0o"` ορίζει χρώμα και σχήμα δείκτη,
- `basefmt=" "` αφαιρεί τη βασική οριζόντια γραμμή.

Πολλαπλά σήματα σε stem plot.

```
plt.stem(n, x,
         linefmt="C0",
         markerfmt="C0o",
         label="x[n]")

plt.stem(n, y,
         linefmt="C1",
         markerfmt="C1s",
         label="y[n]")

plt.legend()
```

6.4 Ετικέτες Αξόνων, Τίτλοι και Πλέγμα

Ένα καλό διάγραμμα πρέπει να περιλαμβάνει:

- ετικέτες αξόνων (`xlabel`, `ylabel`) (υπόμνηνα/legend),
- περιγραφικό τίτλο (`title`),
- πλέγμα (`grid(True)`) όταν είναι χρήσιμο.

Αυτά καθιστούν τα σχήματα κατανοητά και κατάλληλα για αναφορές.

6.5 Αποθήκευση Σχημάτων για Αναφορές

Αντί για διαδραστική εμφάνιση, συχνά θέλουμε να αποθηκεύσουμε τα σχήματα ως αρχεία PDF:

```
plt.savefig("my_signal_plot.pdf")
```

Τυπική ροή εργασίας:

```
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.grid(True)
plt.savefig("signal.pdf")
plt.close()
```

Η μορφή PDF προτείνεται για αναφορές, διότι διατηρεί τα σχήματα σε διανυσματική μορφή (vectorized form).

6.6 Οδηγίες Μορφοποίησης

Για επιστημονικές απεικονίσεις:

- Χρησιμοποιείτε επαρκές μέγεθος σχήματος (π.χ. `figsize=(6,3)`).
- Διατηρείτε συνεπή όρια αξόνων όταν συγκρίνετε σήματα.
- Επιλέγετε κατάλληλο πάχος γραμμών και καθαρούς δείκτες.
- Αποφεύγετε την υπερφόρτωση ενός σχήματος με πάρα πολλά σήματα.

Τελική παρατήρηση. Η οπτικοποίηση δεν είναι μόνο εργαλείο παρουσίασης: είναι βασικό μέσο κατανόησης, ανάπτυξης διαίσθησης, εντοπισμού σφαλμάτων και επαλήθευσης θεωρητικών αποτελεσμάτων. Για πιο προχωρημένες τεχνικές, δείτε: https://github.com/jbmouret/matplotlib_for_papers και το επίσημο documentation της `matplotlib`: https://matplotlib.org/.