



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ8 – ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2024 - 2025

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Ή ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ



$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$h(n)$: χαρακτηρίζει το σύστημα
στο πεδίο του χρόνου

$H(z)$: χαρακτηρίζει το σύστημα
στο πεδίο z

$h(n)$: απόκριση μοναδιαίου
δείγματος ή μοναδιαία
προυστική απόκριση

$H(z)$: συνάρτηση συστήματος
ή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

$H(z)$ και $h(n)$ είναι δύο ισοδύναμες περιγραφές ενός συστήματος
σε δύο διαφορετικά πεδία.

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την γραμμική σταθερών συντελεστών
εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών και αξιοποιώντας τις ιδιότητες
της γραμμικότητας και της ομότητας, στον χρόνο έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Συνοψώς ένα ΓΧΑ το οποίο περιγράφεται από μια εξίσωση
διαφορών (difference equation) με σταθερούς συντελεστές,
έχει μια ρητή (rational) συνάρτηση συστήματος.

Περίπτωση 1: $\alpha_k = 0 \rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}$

Η $H(z)$ έχει M μηδενικά (zeros) και ένα πόλο (pole) πολλαπλότητας M στην αρχή των αξόνων $z=0$.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-μηδενικά (all-zero system).

Επίσης, το σύστημα αυτό έχει πεπερασμένη χρονική απόκριση γι' αυτό και ονομάζεται FIR σύστημα.
(FIR: Finite Impulse Response)

Τέλος, ονομάζεται και σύστημα κινούμενου μέσου όρου (MA: Moving Average).

Περίπτωση 2: $b_k = 0 \rightarrow H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^N \alpha_k z^{N-k}} \quad \alpha_0 \equiv 1$

Η $H(z)$ έχει N πόλους και ένα μηδενικό πολλαπλότητας N στην αρχή των αξόνων $z=0$.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-πόλους (all-pole system).

Η ύπαρξη των πόλων οδηγεί σε μια απόκριση των συστημάτων άπειρης διάρκειας γι' αυτό και ονομάζεται IIR σύστημα (IIR: Infinite Impulse Response)

Περίπτωση 3: $\alpha_k \neq 0, b_k \neq 0 \rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}}$

Πρόκειται για τη γενική περίπτωση. Η $H(z)$ έχει N πόλους και M μηδενικά. Οι πόλοι και τα μηδενικά στο $z=0$ και $z=\infty$ δεν προσβλεπώνται.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα πόλων-μηδενικών (pole-zero system).

Λόγω της ύπαρξης των πόλων, το σύστημα αυτό είναι IIR.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Γιατί η συνάρτηση μεταφοράς να είναι εκφρασμένη ως $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{N-1} z^{-(N-1)}}$;
 Δηλαδή, γιατί θα πρέπει $\alpha_0 = 1$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όλα ξεκινάμε από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \quad (1)$

(Σημείωση: Το εύρος των αθροισμάτων είναι $M-1$ και $N-1$ και όχι M και N , δεν έχει κεντρικές συστάδες).

Προκύπτει τον παρονομαστή της (1). Τον έχω γράψει ως $1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}$.
 Το έχω αυτό για να μπορώ να υπολογίσω την εξίσωση διαφορών του συστήματος, ως εξής:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k} Y(z)$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k y(n-k)$$

Είναι φανερό ότι η φωνίδα στον παρονομαστή τέ βοήθησε για να βρω εύκολα το $Y(z)$ και εν συνεχεία το $y(n)$.

→ Εάν η συνάρτηση $H(z)$ δεν είναι εκφρασμένη έτσι, αλλά γενικά ως λόγος δύο πολυωνύμων, π.χ. $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} c_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} d_k z^{-k}}$, τότε μπορώ

να την φέρω στη μορφή της (1), διαίρωντας αριθμητή και παρονομαστή με το d_0 .

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} c_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} d_k z^{-k}} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{M-1} z^{-(M-1)}}{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N-1} z^{-(N-1)}} = \langle \text{διαίρω με } d_0 \rangle =$$

$$= \frac{\frac{c_0}{d_0} + \frac{c_1}{d_0} z^{-1} + \frac{c_2}{d_0} z^{-2} + \dots + \frac{c_{M-1}}{d_0} z^{-(M-1)}}{1 + \frac{d_1}{d_0} z^{-1} + \dots + \frac{d_{N-1}}{d_0} z^{-(N-1)}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \quad \text{όπου} \quad b_k = \frac{c_k}{d_0} \quad \text{και} \quad \alpha_k = \frac{d_k}{d_0}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ-Z

● ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞ ΗΡΕΜΙΑ (ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ)

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \quad (*)$$

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{B(z) N(z)}{A(z) Q(z)}$$

$$Y(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}}_{\text{φυσική απόκριση (natural response)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}}_{\text{εξαναγκασμένη απόκριση (forced response)}} \quad (**)$$

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}} \right\}}_{\text{απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)}} \xrightarrow{Z^{-1}} \quad (***)$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n)$$

Σημειώσεις: (*) Θεωρούμε ότι $X(z) = N(z)/Q(z)$. Πράγματι τα περισσότερα σήματα που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον, έχουν ρητούς ΜΖ.

(**) Θεωρούμε ότι οι πόλοι του συστήματος $p_1, p_2, \dots, p_N$ καθώς και οι πόλοι του σήματος εισόδου $q_1, q_2, \dots, q_L$ είναι κηλοί και διάφοροι μεταξύ τους, δηλ. $p_k \neq q_m$, όπου $k=1, 2, \dots, N$ και $m=1, 2, \dots, L$.

(***) Θεωρούμε ότι το σύστημα, πριν την εφαρμογή του σήματος εισόδου, ήταν σε ηρεμία, δηλαδή $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-N) = 0$.

(**) Επίσης θεωρούμε ότι τα μηδενικά είναι διαφορετικά από τους πόλους, ώστε να μην έχουμε κηλοποιημένους πόλους.

Στην περίπτωση ύπαρξης πόλων πολλαπλότητας l , όπου $l \neq 1$, η ανάλυση της $Y(z)$ σε μερικά κλάσματα θα περιέχει όρους της μορφής $1/(1-p_k)^l$ και συνεπώς η $y(n)$ θα περιέχει όρους της μορφής $n^{l-1} p_k^n$.

Β. ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Έστω ότι η είσοδος $x(n]$ εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n=0$ σε σύστημα το οποίο δεν βρίσκεται σε ηρεμία, δηλ. κάποιες από τις τιμές $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ είναι διάφορες του μηδενός.

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow z^+ \\ Y(z) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} \left[Y(z) + \sum_{n=1}^k y(-n) z^n \right] + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ Y(z) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}}}_{H(z)} X(z) - \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y(-n) z^n}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}}}_{\frac{N_0(z)}{A(z)}} \end{array}$$

$$Y^+(z) = H(z) \cdot X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)}$$

Zero-State
response

$$\begin{array}{c} \underbrace{Y_{zs}(z)} \\ \downarrow z^{-1} \end{array}$$

$$\underbrace{Y_{zi}^+(z)}$$

zero-input
response

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ y_{zs}(n) = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n) \qquad y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^N D_k (p_k)^n u(n) \\ \downarrow \\ \text{⊕} \\ y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^N A'_k (p_k)^n u(n)}_{\text{φυσική απόκριση}} + \underbrace{\sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n)}_{\text{εξαναγκασμένη απόκριση}} \quad \text{όπου } A'_k = A_k + D_k \end{array}$$

Συμπίεση: Η ύπαρξη αρχικών συνθηκών επιτρέπει τη φυσική απόκριση του συστήματος, δεν παράγονται νέοι πόλοι και δεν επιβάλλεται η εξαναγκασμένη απόκριση.

Μεταβατική / Μόνιμη Κατάσταση

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^N A'_k (p_k)^n u(n)}_{y_{nr}(n)} + \underbrace{\sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n)}_{y_{fr}(n)}$$

φυσική απόκριση εξαναγκασμένη απόκριση

► Φυσική απόκριση: $y_{nr}(n)$

→ $\{p_k\}$, $k=1,2,\dots,N$ είναι οι πόλοι του συστήματος

→ $\{A'_k\}$ είναι οι παράγοντες κλιμάκωσης που προκύπτουν από την ανάπτυξη σε βερνιά κλάσματα.

Εξαρτώνται τόσο από τις αρχικές συνθήκες, όσο και από τα χαρακτηριστικά της εισόδου: $A'_k = A_k + D_k$

→ Εάν $|p_k| < 1$ για όλα τα k , τότε η $y_{nr}(n)$ φθίνει προς το μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$

(μεταβατική απόκριση - transient response).

Για μικρά μεγέθη των πόλων, ο ρυθμός εξασθένισης της απόκρισης είναι μεγάλος.

► Εξαναγκασμένη απόκριση: $y_{fr}(n)$

→ $\{q_k\}$, $k=1,2,\dots,L$ είναι οι πόλοι του σήματος που εφαρμόζεται στο σύστημα.

→ $\{Q_k\}$ είναι οι παράγοντες κλιμάκωσης που προκύπτουν από την ανάπτυξη σε βερνιά κλάσματα.

Εξαρτώνται τόσο από το σήμα εισόδου, όσο και από τα χαρακτηριστικά του συστήματος.

→ Εάν όλοι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε

η $y_{fr}(n)$ θα φθίνει προς το μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$.

→ Εάν οι πόλοι βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο (γεγονός που συμβαίνει

για υφιστάμενη είσοδο), τότε η εξαναγκασμένη απόκριση θα είναι

επίσης υφιστάμενη για κάθε $n \geq 0$ (απόκριση μόνιμης κατάστασης - steady-state response).

Παράδειγμα απόκρισης φόρτης (σταθερής) καταστάσεως

Να υπολογιστεί η μεταβατική και η φόρτη απόκριση του συστήματος

$y(n) = 0.5 y(n-1) + x(n)$ το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία και στο οποίο εφαρμόζεται

η είσοδος $x(n) = 10 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u(n)$.

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad X(z) = \frac{10\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}\right)}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) X(z) = \frac{10\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}\right)}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})} = \\ &= \underbrace{\frac{-1.91}{1 - 0.5z^{-1}}}_{Y_{nr}(z)} + \underbrace{\frac{6.78 e^{-j28.7^\circ}}{1 - e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{6.78 e^{j28.7^\circ}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}}_{Y_{fr}(z)} \\ &\quad \underbrace{\left\{ z^{-1} \right\}}_{Y_{nr}(n)} \quad \underbrace{\left\{ z^{-1} \right\}}_{Y_{fr}(n)} \end{aligned}$$

$y_{nr}(n) = -1.91(0.5)^n u(n)$ $\leftarrow$ φυσική ή μεταβατική απόκριση

$$y_{fr}(n) = \left[6.78 e^{-j28.7^\circ} \left(e^{j\frac{\pi}{4}n} \right) + 6.78 e^{j28.7^\circ} \left(e^{-j\frac{\pi}{4}n} \right) \right] u(n) =$$

$$= 13.56 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^\circ\right) u(n) \quad \leftarrow \text{φόρτη (σταθερή) απόκριση}$$

Σημείωση

$$28.7^\circ \longleftrightarrow 0.16\pi \simeq 0.5 = \frac{1}{2} \text{ rad}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n)$ όταν αυτό βρίσκεται σε ηρεμία και όταν $y(-1) = y(-2) = 1$.

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} \quad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$\begin{cases} p_1 = 0.9e^{j\pi/3} \\ p_2 = 0.9e^{-j\pi/3} \end{cases}$

- Όταν το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία, τότε

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{(1 - 0.9e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j\pi/3}z^{-1})(1 - z^{-1})} =$$
$$= \frac{0.542 - j0.049}{1 - 0.9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.542 + j0.049}{1 - 0.9e^{-j\pi/3}z^{-1}} + \frac{1.099}{1 - z^{-1}}$$

$z^{-1} \rightarrow y_{zs}(n) = \left[1.099 + 1.088(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 5.2^\circ\right) \right] u(n)$

- Όταν το σύστημα δεν βρίσκεται σε ηρεμία κατά την εφαρμογή της βηματικής εισόδου, αλλά $y(-1) = y(-2) = 1$, τότε θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την απόκριση μεταβατικής εισόδου, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_o(z)}{A(z)} = \frac{0.9 - 0.81 - 0.81z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} = \frac{0.026 + j0.4936}{1 - 0.9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.026 - j0.4936}{1 - 0.9e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$

$z^{-1} \rightarrow y_{zi}(n) = 0.988(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 87^\circ\right) u(n)$

Η τελική απόκριση είναι ΜΖ

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) = \frac{1.099}{1 - z^{-1}} + \frac{0.568 + j0.445}{1 - 0.9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.568 - j0.445}{1 - 0.9e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$

$z^{-1} \rightarrow y(n) = 1.099 u(n) + 1.44(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 38^\circ\right) u(n)$

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ & ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Αιτιατό είναι το σύστημα για το οποίο ισχύει $h(n)=0$ για $n < 0$.

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ

Όπως γνωρίζουμε, η ΠΣ του ΜΖ των αιτιατών ακολουθιών είναι το εξωτερικό ενός κύκλου.

Άρα, ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό εάν και μόνον εάν η ΠΣ της συνάρτησης του συστήματος είναι το εξωτερικό ενός κύκλου ακτίνας $r < \infty$, περιλαμβανομένου του σημείου $z = \infty$. (*)

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, δηλ. φραγμένης Εξόδου φραγμένης Εξόδου, είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Η σχέση αυτή αποτελεί και την ικανή συνθήκη για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Άρα ο ΜΦ συγκλίνει (υπάρχει) και συνεπώς η ΠΣ της $H(z)$ πρέπει να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

Άρα, ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, εάν και μόνον εάν η ΠΣ της συνάρτησης του συστήματος περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο ($|z|=1$).

Συνδυάζοντας το γεγονός ότι η ΠΣ ενός αιτιατού συστήματος είναι το εξωτερικό ενός κύκλου που ορίζεται από τον πόλο εκείνον που βρίσκεται πιο μακριά από το κέντρο του κύκλου, και ότι για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η ΠΣ να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, καταλήγουμε στο εξής:

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ & ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, εάν και μόνον εάν όλοι οι πόλοι της $H(z)$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ

(*) Ένα ΓΧΑ διακριτού χρόνου σύστημα $f[n]$ εκφρασμένο ως λόγος πολυωνύμων του z , είναι αιτιατό εάν και μόνον εάν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή.

Για παράδειγμα, για το σύστημα $H(z) = (z^3 - 2z^2 + z) / (z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{9})$ μπορούμε αμέσως να αποφανθούμε ότι είναι μη αιτιατό, χωρίς να χρειαστεί να βρούμε την ΠΣ.

Παράδειγμα

Για το ΓΧΑ σύστημα $H(z) = \frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-3z^{-1}}$

να προσδιοριστεί η ΠΣ και να υπολογιστεί η $h(n)$ όταν:

α. το σύστημα είναι ευσταθές

β. το σύστημα είναι κρίσιμο.

γ. το σύστημα είναι αντιακτιικό.

Λύση

Οι πόλοι του συστήματος είναι $z = \frac{1}{2}$ και $z = 3$.

α. Αφού το σύστημα είναι ευσταθές, η ΠΣ θα πρέπει να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή $\frac{1}{2} < |z| < 3$. Συνεπώς η $h(n)$ είναι μη ακτιική.

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2(3)^n u(-n-1)$$

β. Αφού το σύστημα είναι ακτιικό, η ΠΣ θα είναι $|z| > 3$, και συνεπώς

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2(3)^n u(n)$$

Το σύστημα αυτό είναι ασταθές αφού η ΠΣ δεν περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο. Παρατηρείστε ότι η αστάθεια προέρχεται από τον πόλο $z = 3$ ο οποίος βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου και ο οποίος δημιουργεί την απόκριση $(3)^n u(n)$.

γ. Αφού το σύστημα είναι αντιακτιικό, η ΠΣ είναι $|z| < 0.5$, και συνεπώς

$$h(n) = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2(3)^n\right] u(-n-1)$$

Το σύστημα είναι ασταθές αφού η ΠΣ δεν περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το αντίστροφο (inverse) ^(*) σύστημα $\tilde{H}(z)$, ενός αλτικού συστήματος $H(z)$, το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

ΛΥΣΗ Η συνάρτηση του συστήματος το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι:

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ΠΣ: } |z| > \frac{1}{2}$$

Το σύστημα αυτό είναι αλτιστό και ευσταθές, αφού ο πόλος του $z = \frac{1}{2}$ βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

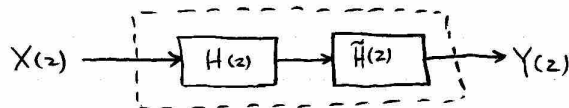
Η $H(z)$ έχει μόνο πόλους (all-pole system). Η αντίστροφη συνάρτηση θα έχει μόνο μηδενικά, θα έχουμε δηλαδή ένα σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR).

$$\tilde{H}(z) = \frac{1}{H(z)} = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

Η κρουστική απόκριση του αντίστροφου συστήματος θα είναι:

$$\tilde{h}(n) = Z^{-1}\{\tilde{H}(z)\} = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

(*) Σημείωση: Αντίστροφα λέγονται τα συστήματα των οποίων το γινόμενο είναι μονάδα. Με άλλα λόγια, τα συστήματα $H(z)$, $\tilde{H}(z)$, τα οποία είναι συνδεδεμένα σε σειρά (cascade) είναι αντίστροφα όταν $H(z) \cdot \tilde{H}(z) = 1$.



Για το σύστημα που σχήματος, εάν τα υποσυστήματα $H(z)$ και $\tilde{H}(z)$ είναι αντίστροφα, τότε η εξόδος ισούται με την είσοδο, δηλαδή $Y(z) = X(z)$.

Στο πεδίο του χρόνου για τα αντίστροφα συστήματα ισχύει ότι:

$$h(n) * \tilde{h}(n) = \delta(n)$$

Σε μια τέτοια περίπτωση $y(n) = x(n)$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του αντίστροφου (inverse) συστήματος ενός συστήματος το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2} \delta(n-1)$$

ΛΥΣΗ Η συνάρτηση του δοθέντος συστήματος είναι:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} = 1 - \frac{1}{2} z^{-1} \quad \text{for } \pi s \quad |z| > 0 \quad (\text{όλο το } z \text{ εκτός } z=0)$$

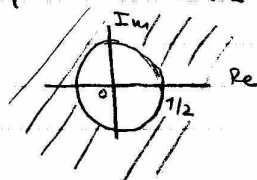
Το αντίστροφο σύστημα θα έχει συνάρτηση συστήματος:

$$\tilde{H}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

Το σύστημα αυτό έχει ένα μηδενικό στο $z=0$ και έναν πόλο στο $z=\frac{1}{2}$.

Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα εάν η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό ή το εσωτερικό του κύκλου αυτών $z=\frac{1}{2}$.

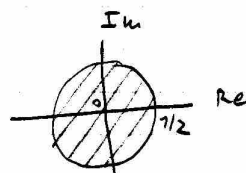
α. $\pi s: |z| > \frac{1}{2}$



Στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό και η κρουστική του απόκριση είναι:

$$\tilde{h}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

β. $\pi s: |z| < \frac{1}{2}$



Στην περίπτωση αυτή το αντίστροφο σύστημα είναι μη αιτιατό και ασταθές και η κρουστική του απόκριση είναι:

$$\tilde{h}(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

ΑΠΑΛΟΙΦΕΣ ΠΟΛΩΝ - ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ

- Όταν η θέση ενός πόλου εφίπτεται με εκείνη ενός μηδενικού, τότε ο πόλος αναιρείται από το μηδενικό.

Αναιρέσεις πόλων-μηδενικών μπορεί να υπάρξουν είτε στη συνάρτηση του συστήματος αυτή καθαυτή, είτε στο χιρόφρένό της με τον ΜΖ του είσοδος-εξόδου.

- Όταν ένα μηδενικό βρίσκεται πολύ κοντά σε έναν πόλο, αλλά δεν εφίπτεται, τότε ο όρος της απόκρισης έχει πολύ μικρό πλάτος.

Η περίπτωση αυτή μπορεί να εμφανιστεί και ως αποτέλεσμα της πεπερασμένης ακρίβειας αναπαράστασης των συντελεστών του συστήματος.

Παράδειγμα Να υπολογιστεί η απόκριση του αιτιατού συστήματος

$$y(n) = \frac{5}{6} y(n-1) - \frac{1}{6} y(n-2) + x(n)$$

$$\text{για είσοδο } x(n) = \delta(n) - \frac{1}{3} \delta(n-1).$$

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad \text{με πόλους } z = \frac{1}{2} \text{ και } z = \frac{1}{3}$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \quad \text{με μηδενικό στο εύρος } z = \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{\cancel{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})\cancel{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Συνεπώς η απόκριση του συστήματος ισούται με

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Ο όρος $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ που αρχικά υπήρχε, 'εξαφανίστηκε' λόγω της απαλοιφής του πόλου $z = \frac{1}{3}$ από το μηδενικό στην ίδια θέση $z = \frac{1}{3}$.

Άσκηση Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του αιτιατού συστήματος

$$y(n) = 2.5 y(n-1) - y(n-2) + x(n) - 5 x(n-1) + 6 x(n-2)$$

Λύση

$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad \text{FC πόλους στο } z = \frac{1}{2} \text{ και } z = 2.$$

Υπολογίζοντας τις ρίζες των αριθμητή (αριθμητικά) βρίσκουμε ότι αυτές είναι στις θέσεις $z=3$ και $z=2$. Συνεπώς η $H(z)$ γίνεται:

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 1 - \frac{\frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Ο αντίστροφος ΜΖ της $H(z)$ μας δίνει την $h(n)$:

$$h(n) = \delta(n) - \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \quad (*)$$

Η εξίσωση διαφορών του συστήματος, όπως προκύπτει εύκολα από τη σχέση

$$H(z) = (1 - 3z^{-1}) / (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \text{ ισούται με: } y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) + x(n) - 3x(n-1)$$

Σημείωση: Το σύστημα είναι ευσταθές αφού ο μοναδικός πόλος που έχει ($z = \frac{1}{2}$) βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Υπάρχει περίπτωση όμως, κατά την υλοποίηση του αρχικού 2ης τάξης συστήματος, να παρουσιαστούν προβλήματα αστάθειας λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας των συντελεστών, η οποία τελικά μπορεί να οδηγήσει στην μη πλήρη αφαίρεση του πόλου από το αντίστοιχο μηδενισό!

$$(*) \text{ Εκφράζοντας την } H(z) \text{ ως } H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 3z^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

καταλήγουμε σε μια εναλλακτική μορφή για την $h(n)$, την εξής:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$