



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ7 – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2024 - 2025

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ - Z

Ευθύς
$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Αντίστροφος
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

- Απλοποιεί τη μελέτη της απόκρισης ΓΧΑ συστημάτων σε διάφορα σήματα (αφού η συνέλιξη στο χρόνο ισοδυναφεί σε πολλαπλασιασμό στον χώρο z).
- Διευκολύνει τον χαρακτηρισμό ΓΧΑ συστημάτων, καθώς και τον υπολογισμό της απόκρισής τους σε διάφορα σήματα, μέσω των ιδιοτήτων των πόλων και μηδενικών.
- Αποτελεί, από μαθηματικής απόψεως, έναν εναλλακτικό τρόπο περιγραφής ενός σήματος διακριτού χρόνου (αφού ο εκθέτης του z παρέχει την απαιτούμενη πληροφορία για τον προσδιορισμό της θέσης κάθε δείγματος).
- Παρέχει τη δυνατότητα περιγραφής ενός ΣΔΧ (πεπερασμένη ή άπειρης διάρκειας) με έναν συμπαγή τρόπο, (αφού η πεπερασμένη ή άπειρη σειρά μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή).

Επίσης:

- Περιοχή Σύγκλισης (Region of Convergence - ROC) του $X(z)$ είναι το σύνολο όλων των τιμών του z για τις οποίες το $X(z)$ έχει πεπερασμένη τιμή.
- Κάθε φορά που γράφουμε τον μετασχηματισμό- z ενός ΣΔΧ, θα πρέπει να γράφουμε επίσης και την περιοχή σύγκλισης αυτού.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

Λύση

Το σήμα $x(n]$ αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό μη μηδενικών δειγμάτων

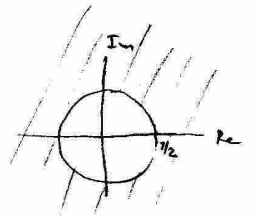
$$x(n) = \left\{ 1, \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots \right\}$$

Ο ΜΖ είναι μια δυναμοσειρά κηθρου τύπου

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad \text{για} \quad \left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

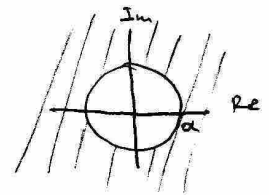


Παρατηρούμε ότι ο ΜΖ έχει τη δυνατότητα αναλλεξτικής έκφρασης του σήματος $x(n)$ (σε κλειστή μορφή).

Γενίκευση

$$x(n) = \alpha^n u(n) \xrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$\text{για} \quad |\alpha z^{-1}| < 1 \quad \text{ή} \quad |z| > |\alpha|$$



Ειδική Περίπτωση

Για $\alpha = 1$ έχουμε τον ΜΖ της βηματικής ακολουθίας $u(n)$

$$x(n) = u(n) \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{for} \quad \text{ΠΣ} \quad |z| > 1$$

Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του ΜΖ της $u(n)$

είναι μέσω της σχέσης $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$.

και με χρήση της ιδιότητας ολιγόθεσης στον χρόνο.

$$Z\{\delta(n)\} = Z\{u(n)\} - Z\{u(n-1)\} \Rightarrow$$

$$1 = U(z) - z^{-1} U(z) \Rightarrow U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} x_1(n) = 2^n u(n) \\ x_2(n) = 3^n u(n) \end{array} \right\} x(n) = 3x_1(n) - 4x_2(n) \xrightarrow{Z} X(z) = 3X_1(z) - 4X_2(z)$$

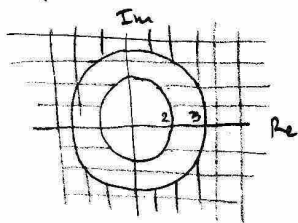
Με βάση τις σχέσεις $\alpha^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad \text{for } \pi \in \mathbb{R} \quad |z| > |\alpha|$

και θέτοντας $\alpha=2$ και $\alpha=3$ έχουμε:

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad \text{for } \pi \in \mathbb{R} \quad |z| > 2$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}} \quad \text{for } \pi \in \mathbb{R} \quad |z| > 3$$

Η τομή (κοινή περιοχή) των δύο περιοχών σύγκλισης είναι $|z| > 3$



Τελικά ο ΜΖ του $x(n)$ είναι:

$$X(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} - \frac{4}{1 - 3z^{-1}} \quad \text{for } \pi \in \mathbb{R} \quad |z| > 3$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο ΜΖ των συστάτων:

$$(α) \quad x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 5 \\ 0, & n \leq 4 \end{cases}$$

$$(β) \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$$

Λύση

$$\begin{aligned} (α) \quad X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \\ &= \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = \left\langle \text{Θέτω } m = n-5 \Rightarrow n = m+5 \right\rangle = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^{m+5} = \\ &= \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^5 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^m = \\ &= \frac{1}{2^5} z^{-5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \\ &= \left(\frac{1}{32}\right) \cdot \frac{z^{-5}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad \text{for } \pi \Sigma: |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (β) \quad X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} - \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^{m+10} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^{10} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^m = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad \text{for } \pi \Sigma \text{ όλο το } z \text{ εκτός } z=0. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Α' Τρόπος:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N & \text{εάν } z=1 \\ \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} & \text{εάν } z \neq 1 \end{cases}$$

Αφού το σήμα $x(n)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, η ΠΖ θα είναι όλο το επίπεδο- z , εκτός $z=0$.

Β' Τρόπος: $x(n) = u(n) - u(n-N) \Rightarrow$

$$Z\{x(n)\} = Z\{u(n)\} - Z\{u(n-N)\} \Rightarrow \text{〈χρήση ιδιότητας γραμμικότητας〉}$$

$$X(z) = U(z) - z^{-N} U(z) \Rightarrow \text{〈χρήση ιδιότητας ολίσθησης στο χρόνο〉}$$

$$X(z) = (1 - z^{-N}) U(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

$$\text{όπου } U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ f.e. ΠΖ: } |z| > 1$$

Παρατήρηση: Εάν ο γραμμικός συνδυασμός πολλών σήματων καταλήγει σε ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ΠΖ του ΜΖ καθορίζεται αναλυτικά από τη φύση του πεπερασμένου σήματος, και όχι από τις ΠΖ των επιμέρους ΜΖ.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο ΜΖ των δυνάμεων:

$$(α) \quad x(n) = (\cos \omega_0 n) u(n)$$

$$(β) \quad x(n) = (\sin \omega_0 n) u(n)$$

ΛΥΣΗ

$$(α) \quad x(n) = (\cos \omega_0 n) u(n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} u(n) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} u(n)$$

$$\text{Άρα} \quad X(z) = \frac{1}{2} Z\{e^{j\omega_0 n} u(n)\} + \frac{1}{2} Z\{e^{-j\omega_0 n} u(n)\}$$

$$\text{Αλλά} \quad Z\{\alpha^n u(n)\} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad \text{for } \pi \Sigma: |z| > |\alpha|$$

Επομένως για $\alpha = e^{j\omega_0}$ έχουμε

$$Z\{e^{j\omega_0 n} u(n)\} = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} \quad \text{for } \pi \Sigma: |z| > |e^{j\omega_0}| = 1$$

$$Z\{e^{-j\omega_0 n} u(n)\} = \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \quad \text{for } \pi \Sigma: |z| > |e^{-j\omega_0}| = 1$$

$$\text{Τελικά} \quad X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \quad \text{for } \pi \Sigma: |z| > 1$$

και μετά από πράξεις:

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2 z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}} \quad \text{for } \pi \Sigma: |z| > 1$$

$$(β) \quad x(n) = (\sin \omega_0 n) u(n) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}] u(n)$$

$$\text{Άρα} \quad X(z) = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] \quad \text{for } \pi \Sigma: |z| > 1$$

και τελικά

$$X(z) = \frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2 z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}} \quad \text{for } \pi \Sigma: |z| > 1$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$

Λύση

A' τρόπος:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$
$$y(n-1) = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x(m)$$

Αφαιρώ
κατά μέλη

$$y(n) - y(n-1) = x(n)$$

Παίρνω τον ΜΖ
και των δύο
μέλών

$$\mathcal{Z}\{y(n) - y(n-1)\} = \mathcal{Z}\{x(n)\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} - \mathcal{Z}\{y(n-1)\} = \mathcal{Z}\{x(n)\} \Rightarrow$$

$$Y(z) - z^{-1} Y(z) = X(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$$

Εναλλακτικά:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{n-1} x(m) + x(n) \Rightarrow$$

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

B' τρόπος:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) u(n-m) \quad \leftarrow \text{συνέλιξη}$$
$$= x(n) * u(n)$$

Άρα

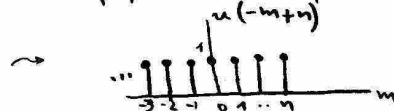
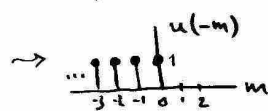
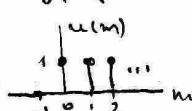
$$Y(z) = X(z) \cdot U(z) \quad \left\langle \text{όπου } U(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{for } \pi \Sigma |z| > 1 \right\rangle$$

$$= X(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{for } \pi \Sigma |z| > 1$$

Σημειώσεις:

- Το $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$ ονομάζεται και συσσωρευτής (accumulator) γιατί υπολογίζει το τρέχον άθροισμα (running sum) όλων των παρελθόντων τιμών του $x(m)$ μέχρι και την παρούσα χρονική στιγμή n .

- Στον B' τρόπο χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι κάθε δείκτη $x(m)$ μπορεί να γραφτεί ως $x(m) \cdot 1$, όπου το 1 το "πάρει" από τη μοναδιαία βηματική.



ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ-Z

Εάν $x(n) \xrightarrow{Z} X(z)$ f.t. ΠΣ: $r_1 < |z| < r_2$

τότε $\alpha^n x(n) \xrightarrow{Z} X(\alpha^{-1}z)$ f.t. ΠΣ: $|\alpha|r_1 < |z| < |\alpha|r_2$

✓ σταθερά α , πραγματική ή μιγαδική

Απόδειξη: $Z\{\alpha^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (\alpha^{-1}z)^{-n} = X(\alpha^{-1}z)$

Αφού η ΠΣ του $X(z)$ είναι $r_1 < |z| < r_2$,

η ΠΣ του $X(\alpha^{-1}z)$ θα είναι $r_1 < |\alpha^{-1}z| < r_2 \Rightarrow |\alpha|r_1 < |z| < |\alpha|r_2$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΖ των ευφώνων:

(α) $x(n) = \alpha^n \underbrace{(\cos \omega_0 n)}_{g(n)} u(n)$ (β) $x(n) = \alpha^n \underbrace{(\sin \omega_0 n)}_{f(n)} u(n)$

ΛΥΣΗ

Σε προηγούμενη άσκηση είχατε υπολογίσει τους ΜΖ των ευφώνων $g(n)$ και $f(n)$.

$g(n) \xrightarrow{Z} \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$ f.t. ΠΣ: $|z| > 1$

$f(n) \xrightarrow{Z} \frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$ f.t. ΠΣ: $|z| > 1$

Με βάση αυτά και f.t. χρήση της ιδιότητας κλιμακώσεως στον χώρο-z έχουμε:

(α) $x(n) = \alpha^n g(n) \xrightarrow{Z} \frac{1 - (\alpha^{-1}z)^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2(\alpha^{-1}z)^{-1} \cos \omega_0 + (\alpha^{-1}z)^{-2}} = \frac{1 - \alpha z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2\alpha z^{-1} \cos \omega_0 + \alpha^2 z^{-2}}$

(β) $x(n) = \alpha^n f(n) \xrightarrow{Z} \frac{(\alpha^{-1}z)^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2(\alpha^{-1}z)^{-1} \cos \omega_0 + (\alpha^{-1}z)^{-2}} = \frac{\alpha z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2\alpha z^{-1} \cos \omega_0 + \alpha^2 z^{-2}}$

Οι ΠΣ και των δύο ΜΖ είναι: $|\alpha^{-1}z| > 1 \Rightarrow |z| > |\alpha|$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗΣ ΧΡΟΝΟΥ (time reversal)

$$\text{Εάν } x(n) \xrightarrow{Z} X(z) \quad \text{f.c. } \text{ΠΣ: } r_1 < |z| < r_2$$

$$\text{τότε } x(-n) \xrightarrow{Z} X(z^{-1}) \quad \text{f.c. } \text{ΠΣ: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

$$\text{Απόδειξη: } Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) z^{-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) (z^{-1})^{-l} = X(z^{-1})$$

$$\text{f.c. } \text{ΠΣ: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = u(-n)$

ΛΥΣΗ Γνωρίζουμε ότι $u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{f.c. } \text{ΠΣ: } |z| > 1$

Με χρήση της ιδιότητας αναστροφής χρόνου έχουμε:

$$u(-n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-(z^{-1})^{-1}} = \frac{1}{1-z} \quad \text{f.c. } \text{ΠΣ: } |z^{-1}| > 1 \Rightarrow |z| < 1$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ-Z

Εάν $x(n) \xrightarrow{Z} X(z)$

τότε $n x(n) \xrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$

Απόδειξη: $\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (-n) z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [n x(n)] z^{-n} = -z^{-1} Z\{n x(n)\}$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = n \underbrace{\alpha^n}_{x_1(n)} u(n)$

Λύση Γνωρίζουμε ότι

$$x_1(n) = \alpha^n u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad \text{f.t. } \pi\epsilon: |z| > |\alpha|$$

Με χρήση της ιδιότητας διαφώρισης στον χώρο-z έχουμε:

$$x(n) = n x_1(n) \longleftrightarrow -z \frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2} \quad \text{f.t. } \pi\epsilon: |z| > |\alpha|$$

Ειδική περίπτωση:

Για $\alpha=1$ έχουμε τον ΜΖ του σήματος μοναδιαίας ράμπας (unit ramp):

$$n u(n) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad \text{f.t. } \pi\epsilon: |z| > 1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

Εάν $x(n)$ αιτιατό, δηλ. $x(n)=0$ για $n < 0$,

$$\text{τότε } x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Απόδειξη: Αφού $x(n)$ αιτιατό έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots$$

Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι για $z \rightarrow \infty \Rightarrow z^{-n} \rightarrow 0$
αφού $n > 0$ και άρα $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

ΑΣΚΗΣΗ

$$\text{Δίνεται } x(n) = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} = X(z)$$

Να υπολογιστεί η τιμή του $x(0)$ μέσω των εκφράσεων του χρόνου και του ΜΖ.

ΛΥΣΗ

$$\text{Για } n=0 \text{ έχουμε: } x(0) = 7 - 6 = 1$$

$$\text{Ο ΜΖ γράφεται: } X(z) = \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} = \left\langle \begin{array}{l} \text{Διαρίνουμε} \\ \text{αριθμητή και} \\ \text{παρανομαστή} \\ \text{πρ το } z^2 \end{array} \right\rangle = \frac{(1-\frac{3}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Από το θεώρημα αρχικής τιμής βρίσκουμε:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \frac{(1-0)}{(1-0)(1-0)} = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x_1(n) = \{1, -2, 1\}$ και $x_2(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{άλλω} \end{cases}$.

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό του ΜΖ έχουμε:

$$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις $X_1(z)$ και $X_2(z)$ βρίσκουμε την $X(z)$:

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

Ο αντίστροφος ΜΖ της δίνει την $x(n)$:

$$x(n) = \{ \underset{\uparrow}{1}, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1 \}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλάβουμε παρατηρώντας ότι:

$$X_1(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$X_2(z) = \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}}$$

οπότε

$$X(z) = (1 - z^{-1})(1 - z^{-6}) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

Άσκηση

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών: $x(n) - \frac{3}{2}x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2) = u(n-2)$

Λύση

Παίρνουμε τον ΜΖ

$$X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-2}X(z) = z^{-2} \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+\alpha z^{-1}+\beta z^{-2})} = \langle \text{εθέρω } \alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2} \rangle$$

$$= \frac{z}{(z-1)(z^2+\alpha z+\beta)} = \frac{z}{(z-1)(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{z}{(z-1)^2(z-\frac{1}{2})} \quad (*)$$

Αντίστροφο, σε φέρνει ως αόριστο:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)^2(z-0.5)} = \frac{A_1}{(z-1)^2} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{z-0.5} \quad (**)$$

$$A_1 = (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{z-0.5} \Big|_{z=1} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$A_3 = (z-0.5) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=0.5} = \frac{1}{(z-1)^2} \Big|_{z=0.5} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Σημείωση: Θα προτιμούσα να μην κάναμε αυτούς τους υπολογισμούς, αφού προχωρούσα στην επίλυση του συστήματος των εξισώσεων.

Πολλοκλάσμα για την $(**)$ με τον παρονομαστή $(z-1)^2(z-0.5)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 1 &= A_1(z-0.5) + A_2(z-1)(z-0.5) + A_3(z-1)^2 = \\ &= A_1z - A_1\frac{1}{2} + A_2(z^2 - \frac{1}{2}z - z + \frac{1}{2}) + A_3(z^2 - 2z + 1) = \\ &= \underline{A_1z} - \frac{1}{2}A_1 + \underline{A_2z^2} - \frac{3}{2}A_2z + \frac{1}{2}A_2 + \underline{A_3z^2} - 2A_3z + A_3 \Rightarrow \\ 1 &= \underbrace{(A_2+A_3)}_0 z^2 + \underbrace{(A_1 - \frac{3}{2}A_2 - 2A_3)}_0 z + \underbrace{(-\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + A_3)}_1 \end{aligned}$$

⊙ Εύρω πιόνων:

$$z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{4} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$$

$$z_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

$$\text{Άρα } z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} = (z-1)(z-\frac{1}{2})$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του z του ίδιου βαθμού έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$A_2 + A_3 = 0 \quad (1) \quad \leadsto \quad A_2 = -A_3$$

$$A_1 - \frac{3}{2}A_2 - 2A_3 = 0 \quad (2) \quad \stackrel{(1)}{\leadsto} \quad A_1 + \frac{3}{2}A_3 - 2A_3 = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}A_3 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + A_3 = 1 \quad (3) \quad \stackrel{(4)}{\leadsto} \quad -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}A_3 + \frac{1}{2}(-A_3) + A_3 = 1 \Rightarrow -\frac{A_3}{4} - \frac{A_3}{2} + A_3 = 1 \Rightarrow A_3 = 4 \quad (5)$$

Τελικά η επίλυση του συστήματος δίνει: $A_1 = 2, A_2 = -4, A_3 = 4$

Αρα η σχέση $\frac{X(z)}{z}$ από την οποία ξεκινάμε, γίνεται:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1} + \frac{4}{z-0.5} \Rightarrow X(z) = 2 \cdot \frac{z}{(z-1)^2} - 4 \cdot \frac{z}{z-1} + 4 \cdot \frac{z}{z-0.5}$$

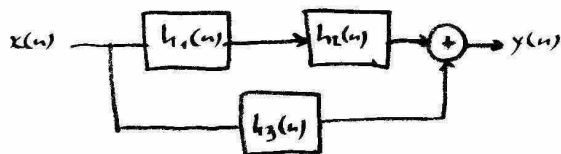
Ο αντίστροφος ΜΖ (ας δίνει την $x(n)$):

$$x(n) = 2 \cdot (n \cdot 1^n u(n)) - 4 \cdot u(n) + 4 \cdot (0.5^n u(n)) \Rightarrow$$

$$x(n) = [2n - 4 + 4 \cdot 0.5^n] u(n)$$

Άσκηση

Ποια η προκύπτουσα απόκριση του συστήματος;



για $h_1(n) = \delta(n-1) + 3\delta(n)$

$$h_2(n) = \delta(n-2) + 2\delta(n)$$

$$h_3(n) = 6\delta(n-6) + 7\delta(n-4) - 3\delta(n-1) + \delta(n)$$

Λύση

Αίτημα:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) + h_3(n)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{6\delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \delta(n-3)}$$

$$h(n) = 7\delta(n) - \delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \delta(n-3) + 7\delta(n-4) + 6\delta(n-6)$$

Βίτημα:

Με ημερήσιες στο μέσο-2

$$H_1(z) = z^{-1} + 3$$

$$H_2(z) = z^{-2} + 2$$

$$H_3(z) = 6z^{-6} + 7z^{-4} - 3z^{-1} + 1$$

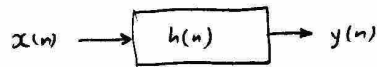
$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z) \cdot H_2(z) + H_3(z) = \\ &= (z^{-1} + 3)(z^{-2} + 2) + (6z^{-6} + 7z^{-4} - 3z^{-1} + 1) = \\ &= z^{-3} + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 6 + 6z^{-6} + 7z^{-4} - 3z^{-1} + 1 = \\ &= 7 - z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3} + 7z^{-4} + 6z^{-6} \end{aligned}$$

Απαιτείται

$$h(n) = 7\delta(n) - \delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \delta(n-3) + 7\delta(n-4) + 6\delta(n-6)$$

Δεσμεύση

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος (LTI) για $x(n) = A u(n)$ και $h(n) = \alpha^n u(n)$.



Λύση

Πεδίο χρόνου

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m) A u(n-m) = \\ &= \sum_{m=0}^n \alpha^m A = A \sum_{m=0}^n \alpha^m = \\ &= A \cdot \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = \\ &= \frac{A}{1-\alpha} + \frac{A\alpha}{\alpha-1} \alpha^n = \\ &= C_0 + C_1 \alpha^n \end{aligned}$$

όπου $n \geq 0$

Πεδίο z

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \cdot \frac{A}{1-z^{-1}} = \\ &\quad \left(\text{π.ε. } |z| > |\alpha| \rightarrow \text{π.ε. } |z| > 1 \right) \\ &= \frac{A z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = \frac{k_1}{z-\alpha} + \frac{k_2}{z-1} \Rightarrow \\ \frac{Y(z)}{z} &= \frac{A z}{(z-\alpha)(z-1)} = \frac{k_1}{z-\alpha} + \frac{k_2}{z-1} \\ \text{Υπολογισμός των } k_1, k_2: \\ k_1 &= \left. \frac{(z-\alpha) Y(z)}{z} \right|_{z=\alpha} = \left. \frac{A z}{z-1} \right|_{z=\alpha} = \frac{A\alpha}{\alpha-1} \\ k_2 &= \left. \frac{(z-1) Y(z)}{z} \right|_{z=1} = \left. \frac{A z}{z-\alpha} \right|_{z=1} = \frac{A}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Άρα:

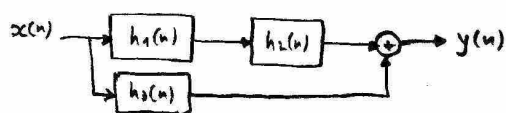
$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{\frac{A\alpha}{\alpha-1}}{z-\alpha} + \frac{\frac{A}{1-\alpha}}{z-1} = \\ &= \frac{A}{1-\alpha} \left(\frac{-\alpha}{z-\alpha} + \frac{1}{z-1} \right) \Rightarrow \\ Y(z) &= \frac{A}{1-\alpha} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{\alpha z}{z-\alpha} \right) = \\ &= \frac{A}{1-\alpha} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{A}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{A\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά: } y(n) = Z^{-1} \{ Y(z) \} \Rightarrow$$

$$y(n) = \frac{A}{1-\alpha} \cdot u(n) + \frac{A\alpha}{\alpha-1} \alpha^n u(n)$$

ή

$$y(n) = C_0 + C_1 \alpha^n \quad \text{για } n \geq 0$$

ΘΕΜΑ Α1

- ΔΕΔΟΜΕΝΑ 1 -

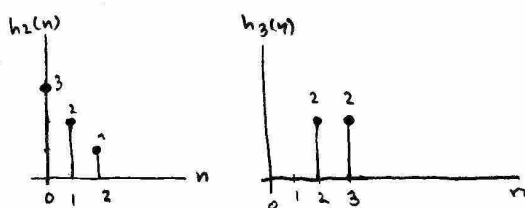
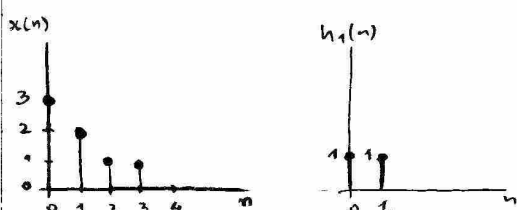
$$h_1(n) = \delta(n) + \delta(n-1) \rightarrow H_1(z) = 1 + z^{-1}$$

$$H_2(z) = 3 + 2z^{-1} + z^{-2} \rightarrow h_2(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$h_3(n) = 2[u(n-2) - u(n-4)] = 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3)$$

$$\rightarrow H_3(z) = 2z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$\begin{aligned} x(n) &= 2\delta(n) + \delta(n-1) + u(n) - u(n-4) = \\ &= 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \\ &= 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) \\ &\rightarrow X(z) = 3 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \end{aligned}$$

Α. Τρόπος: Υπολογισμός στο χρόνο

Η συνολική χρονική απόκριση του συστήματος είναι:

$$h(n) = (h_1(n) * h_2(n)) + h_3(n)$$

$$\begin{array}{r} h_2 \rightsquigarrow 3 \ 2 \ 1 \\ h_1 \rightsquigarrow \quad 1 \ 1 \\ \hline 3 \ 2 \ 1 \\ 3 \ 2 \ 1 \\ \hline 3 \ 5 \ 3 \ 1 \\ + \\ h_3 \rightsquigarrow \quad \quad 2 \ 2 \\ \hline h \rightsquigarrow 3 \ 5 \ 5 \ 3 \end{array}$$

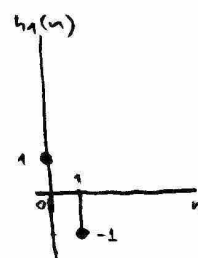
- ΔΕΔΟΜΕΝΑ 2 -

$$h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1) \rightarrow H_1(z) = 1 - z^{-1}$$

$$H_2(z) = \dots \rightarrow h_2(n) = \dots$$

$$h_3(n) = \dots$$

$$x(n) = \dots$$

Α! Τρόπος: Υπολογισμός στο χρόνο

$$h(n) = (h_1(n) * h_2(n)) + h_3(n)$$

$$\begin{array}{r} h_2 \rightsquigarrow 3 \ 2 \ 1 \\ h_1 \rightsquigarrow \quad 1 \ -1 \\ \hline -3 \ -2 \ -1 \\ 3 \ 2 \ 1 \\ \hline 3 \ -1 \ -1 \ -1 \\ + \\ h_3 \rightsquigarrow \quad \quad 2 \ 2 \\ \hline h \rightsquigarrow 3 \ -1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Η είσοδος $y(n)$ του συστήματος υπολογίζεται από τη συνέλιξη της συνολικής κρουστικής του συστήματος με την είσοδο $x(n)$, δηλ.

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\begin{array}{r} h \rightsquigarrow \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \\ x \rightsquigarrow \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \quad \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \\ \quad \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \\ \quad 6 \quad 10 \quad 10 \quad 6 \\ 9 \quad 15 \quad 15 \quad 9 \\ \hline y \rightsquigarrow 9 \quad 21 \quad 28 \quad 27 \quad 16 \quad 8 \quad 3 \end{array}$$

Η είσοδος $y(n)$ εκφράζεται ως άθροισμα μοναδιαίων κρουστικών ισωίων με:

$$y(n) = 9 \delta(n) + 21 \delta(n-1) + 28 \delta(n-2) + 27 \delta(n-3) + 16 \delta(n-4) + 8 \delta(n-5) + 3 \delta(n-6)$$

B' τρόπος: Υπολογισμός στο χώρο Z

$$\begin{aligned} H(z) &= (H_1(z) \cdot H_2(z)) + H_3(z) = \\ &= (1+z^{-1})(3+2z^{-1}+z^{-2}) + H_3(z) = \\ &= (3+2z^{-1}+z^{-2}+3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-3}) + H_3(z) = \\ &= (3+5z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}) + (2z^{-2}+2z^{-3}) = \\ &= 3+5z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z) = \\ &= (3+5z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3})(3+2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}) = \\ &= 9+15z^{-1}+15z^{-2}+9z^{-3} + \\ &\quad 6z^{-1}+10z^{-2}+10z^{-3}+6z^{-4} + \\ &\quad + 3z^{-2}+5z^{-3}+5z^{-4}+3z^{-5} + \\ &\quad 3z^{-3}+5z^{-4}+5z^{-5}+3z^{-6} = \\ &= 9+21z^{-1}+28z^{-2}+27z^{-3}+16z^{-4}+8z^{-5}+3z^{-6} \end{aligned}$$

Τελικά, $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \Rightarrow$

$$y(n) = 9 \delta(n) + 21 \delta(n-1) + 28 \delta(n-2) + 27 \delta(n-3) + 16 \delta(n-4) + 8 \delta(n-5) + 3 \delta(n-6)$$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\begin{array}{r} h \rightsquigarrow \quad 3 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ x \rightsquigarrow \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \quad \quad 3 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ \quad \quad 3 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ \quad 6 \quad -2 \quad 2 \quad 2 \\ 9 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \\ \hline 9 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \rightsquigarrow y \end{array}$$

$$\text{Άρα } y(n) = 9 \delta(n) + 3 \delta(n-1) + 4 \delta(n-2) + 7 \delta(n-3) + 2 \delta(n-4) + 2 \delta(n-5) + \delta(n-6)$$

B' τρόπος, Υπολογισμός στο χώρο Z

$$\begin{aligned} H(z) &= (H_1(z) \cdot H_2(z)) + H_3(z) = \\ &= (1-z^{-1})(3+2z^{-1}+z^{-2}) + H_3(z) = \\ &= (3+2z^{-1}+z^{-2}-3z^{-2}-2z^{-3}-z^{-3}) + H_3(z) = \\ &= (3-z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}) + (2z^{-2}+2z^{-3}) = \\ &= 3-z^{-1}+z^{-2}+z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z) = \\ &= (3-z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})(3+2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}) = \\ &= 9+6z^{-1}+3z^{-2}+3z^{-3}-3z^{-2}-2z^{-3}-z^{-3}-z^{-4} + \\ &\quad + 3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4}+z^{-5}+3z^{-3}+2z^{-4}+2z^{-5}+z^{-6} = \\ &= 9+3z^{-1}+4z^{-2}+7z^{-3}+2z^{-4}+2z^{-5}+z^{-6} \end{aligned}$$

Τελικά, $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \Rightarrow$

$$y(n) = 9 \delta(n) + 3 \delta(n-1) + 4 \delta(n-2) + 7 \delta(n-3) + 2 \delta(n-4) + 2 \delta(n-5) + \delta(n-6)$$

Υπολογισμός των Αντιστροφών ΜΖ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να υπολογιστεί το σήμα $x(n)$ του οποίου ο ΜΖ είναι :

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \quad |z| > 2 \quad (*)$$

Α' Τρόπος - μέσω ολοκληρωτικών υπολοίπων :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^N \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_i} = \sum_{i=1}^N (z-z_i) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=z_i}$$

όπου z_i οι πόλοι της $X(z)$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε δύο πόλους : $z_1 = 1, z_2 = 2$

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_1} = (z-1) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=1} = \frac{z^n}{z-2} \Big|_{z=1} = \frac{1^n}{1-2} = -1$$

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_2} = (z-2) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=2} = \frac{z^n}{z-1} \Big|_{z=2} = \frac{2^n}{2-1} = 2^n$$

$$\text{Άρα } x(n) = (-1 + 2^n) u(n)$$

Β' Τρόπος - μέσω ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

$$A = \frac{X(z)}{z} (z-1) \Big|_{z=1} = \frac{1}{z-2} \Big|_{z=1} = -1$$

$$B = \frac{X(z)}{z} (z-2) \Big|_{z=2} = \frac{1}{z-1} \Big|_{z=2} = 1$$

Άρα

$$X(z) = \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2} = \frac{-1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$z^{-1} \rightarrow x(n) = -u(n) + 2^n u(n) = (-1 + 2^n) u(n)$

(*) Σημείωση: Παρατηρούμε ότι η ROC είναι το εξωτερικό του κύκλου $|z| > 2$.
Άρα πρόκειται για αμείωτο σήμα.

Γ' Τρόπος - φέρω της αριθμ. της συνεχούς διαίρεσης (long division)

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

Διαίρετος →
(κρίθμους)

$$\begin{array}{r|l} z & z^2 - 3z + 2 \quad \leftarrow \text{διαίρετης (παρονομαστής)} \\ z - 3 + 2z^{-1} & z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + \dots \quad \leftarrow \text{πηλίκο} \\ \hline -3 - 2z^{-1} & \\ 3 - 9z^{-1} + 6z^{-2} & \\ \hline 7z^{-1} - 6z^{-2} & \\ 7z^{-1} - 21z^{-2} + 14z^{-3} & \\ \hline 15z^{-2} - 14z^{-3} & \quad \leftarrow \text{υπόλοιπο} \\ \dots & \end{array}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εάν εκφράσουμε την $X(z)$ σε αρνητικές δυνάμεις του z , δηλαδή

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

και εκτελέσουμε τη συνεχή διαίρεση.

$$\begin{array}{r|l} z^{-1} & 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} \\ z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3} & z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + \dots \\ \hline -3z^{-2} - 2z^{-3} & \\ 3z^{-2} - 9z^{-3} + 6z^{-4} & \\ \hline 7z^{-3} - 6z^{-4} & \\ 7z^{-3} - 21z^{-4} + 14z^{-5} & \\ \hline 15z^{-4} - 14z^{-5} & \end{array}$$

$$\text{Τελικά: } X(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + \dots$$

και λαμβάνοντας τον αντίστροφο ΜΖ υπολογίζουμε το βήμα $x(n)$:

$$x(n) = \delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 7\delta(n-3) + \dots$$

ή

$$x(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 7, \dots \right\}$$

Οι τιμές αυτές συζητούντε σε βήματα που προκύπτουν από την $x(n) = (-1 + 2^n)u(n)$ για $n=0, 1, 2, 3, \dots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \quad \text{όπου } |z| > 1$$

Α' Τρόπος - βίω ολοκληρωτικών υπολοίπων

Εφόσον η συνάρτηση $X(z)$ έχει πόλους πολλαπλότητας 1 (απλούς πόλους), η $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^N \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_i} = \sum_{i=1}^N (z-z_i) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=z_i}$$

όπου z_i οι πόλοι

Για $z_1 = 1$ έχουμε:

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_1} = (z-1) \frac{z^2 z^{n-1}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \Big|_{z=1} = \frac{z^{n+1}}{z-\frac{1}{2}} \Big|_{z=1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Για $z_2 = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_2} = (z-\frac{1}{2}) \frac{z^2 z^{n-1}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{z^{n+1}}{z-1} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{-\frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Άρα

$$x(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

αφού πρόκειται για αυτιστό σήμα, δεδομένου ότι η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό του κύκλου ακτίνας 1, δηλαδή $|z| > 1$.

B' Tponos - f'ow xva nujus ee f'pua f'la f'ota

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \Rightarrow$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = \left. \frac{X(z)}{z} (z-1) \right|_{z=1} = \left. \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \right|_{z=1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$A_2 = \left. \frac{X(z)}{z} (z-\frac{1}{2}) \right|_{z=\frac{1}{2}} = \left. \frac{z}{z-1} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

Ap'x

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \Rightarrow X(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$X(z) = 2 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

z^{-1} $\rightarrow$

$$x(n) = 2 \cdot u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Rightarrow$$

$$x(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

Γ' τρόπος - διααιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με z^2 .

Η συνάρτηση που προκύπτει είναι πλέον σε μορφή κατάλληλη για την ανίσχυξη σε φερικύ κλάσματα.

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{z^2}{z^2}}{\frac{(z-1)}{z} \cdot \frac{(z-\frac{1}{2})}{z}} = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Υπολογίζουμε τα A, B κατά τα γνωστά:

$$A = (1-z^{-1}) X(z) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$B = (1-\frac{1}{2}z^{-1}) X(z) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1-z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Άρα

$$X(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

z^{-1} (από το πρώτο μέρος)

$$x(n) = 2 \cdot u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) =$$
$$= \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

Δ' τρόπος - μέσω της πράξης της συνεχούς διαίρεσης (long division)

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$$

Εκτελούμε τη συνεχή διαίρεση των πολυωνύμων, αφού πρώτα τα διατάξουμε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του z , δεδομένου ότι πρόκειται για αιτιατό σήμα, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό ενός κύκλου ακτίνας 1 ($|z| > 1$).

Διαίρεση $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} z^2 & z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{διαρετέας} \\ z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} & 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \dots \quad \leftarrow \text{πηλίκο} \\ \hline \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} & \\ \frac{3}{2}z - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}z^{-1} & \\ \hline \frac{7}{4} - \frac{3}{4}z^{-1} & \\ \frac{7}{4} - \frac{21}{8}z^{-1} + \frac{7}{8}z^{-2} & \\ \hline \frac{15}{8}z^{-1} - \frac{7}{8}z^{-2} & \leftarrow \text{υπόλοιπο} \\ \dots & \end{array}$$

$$\text{Άρα } X(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$\text{Δηλαδή } x(n) = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots \right\} \quad \text{ή} \quad x(n) = \delta(n) + \frac{3}{2}\delta(n-1) + \frac{7}{4}\delta(n-2) + \dots$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι οι τιμές του σήματος $x(n)$

είναι αυτές που προκύπτουν από τη σχέση

$$x(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n) \quad \text{για } n=0, 1, 2, \dots$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το δείγμα $x(3)$ κτιτικού σήματος του οποίου ο ΜΖ είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

ΛΥΣΗ Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί z^2 έχουμε

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

Βρίσκουμε τους πόλους, οι οποίοι είναι 1 και 0.5 και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5}$$

Υπολογίζουμε τα A_1, A_2 .

$$A_1 = (z-1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{z}{z-0.5} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

$$A_2 = (z-0.5) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=0.5} = \frac{z}{z-1} \Big|_{z=0.5} = \frac{0.5}{0.5-1} = -1$$

Τελικά

$$X(z) = 2 \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} = 2 \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο ΜΖ και των δύο μελών έχουμε:

$$x(n) = [2 - (0.5)^n] u(n)$$

Το ζητούμενο δείγμα $x(3)$ προκύπτει για $n=3$, δηλ. $x(3) = 2 - 0.5^3 = 1.875$

Σημείωση 1. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τιμή του $x(3)$ εκτελώντας τη συνεχή διαίρεση (long division). Η ζητούμενη τιμή θα ήταν ο συντελεστής του z^{-3} .

Σημείωση 2. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα A_1, A_2 κάνοντας πράξεις και εξισώνοντας τους συντελεστές του z που είναι του ίδιου βαθμού.

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} &= \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5} \Rightarrow z = A_1(z-0.5) + A_2(z-1) \Rightarrow \\ z &= (A_1+A_2)z - (A_1 \cdot 0.5 + A_2) \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 1 & (1) \\ A_1 \cdot 0.5 + A_2 = 0 & (2) \end{cases} \\ (2) &\Rightarrow A_2 = -0.5 A_1 & (3) \\ (1) &\xrightarrow{(3)} A_1 - 0.5 A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow A_2 = -1 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, ο υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει μέσω της εξίσωσης $z = A_1(z-0.5) + A_2(z-1)$ θέτοντας $z=1$, οπότε υπολογίζεται το A_1 και στη συνέχεια θέτοντας $z=0.5$, οπότε υπολογίζεται το A_2 .

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η ακολουθία $x(n)$ της οποίας ο ΜΖ ισούται με:

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

ΛΥΣΗ

Η ρητή συνάρτηση $X(z)$ είναι σε μορφή μη κατάλληλη, αφού η δύναμη του αριθμητή είναι μεγαλύτερη αυτής του παρονομαστή. Για να απαλοιφούμε τους όρους z^{-2} και z^{-3} από τον αριθμητή, θα εκτελέσουμε τη διαίρεση, διατάσσοντας τα πολυώνυμα κατά ανόστροφη τάξη (reverse order), Στην προκειμένη περίπτωση, διακρίνουμε τη συνεκί διαίρεση όταν η τάξη του υπολοίπου γίνεται z^{-1} .

$$\begin{array}{r} \text{Διαφρέτος } \rightarrow \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{11}{6}z^{-2} + 3z^{-1} + 1 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 \quad \leftarrow \text{Διαφρέτος } (\delta) \\ 2z^{-1} + 1 \quad \leftarrow \text{Πηλίκο } (\pi) \end{array} \right. \\ \hline \frac{2}{6}z^{-3} + \frac{10}{6}z^{-2} + 2z^{-1} \\ \hline 0 + \frac{1}{6}z^{-2} + z^{-1} + 1 \\ \hline \frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 \\ \hline 0 + \frac{1}{6}z^{-1} + 0 \quad \leftarrow \text{Υπόλοιπο } (\nu) \end{array}$$

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \nu \Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\nu}{\delta}$$

$$\text{Άρα } X(z) = \underbrace{1 + 2z^{-1}}_{X_1(z)} + \underbrace{\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}}_{X_2(z)} = X_1(z) + X_2(z)$$

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον ανόστροφο ΜΖ της $X_1(z)$. Για την $X_2(z)$ όμως θα πρέπει να προχωρήσουμε στην ανάλυση σε μερικά κλάσματα.

$$X_2(z) = \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \langle \text{πολ/ντες αριθμητή και παρονομαστή επί } z^2 \rangle = \frac{\frac{1}{6}z}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή, δηλαδή οι πόλοι της συνάρτησης, είναι $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$. Συνεπώς έχουμε:

$$X_2(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}z}{(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})} \Rightarrow$$

$$\frac{X_2(z)}{z} = \frac{\frac{1}{6}}{(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})} = \frac{A_1}{z + \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{z + \frac{1}{3}}$$

- (*) Μια ρητή συνάρτηση με αριθμητή βαθμού M και παρονομαστή βαθμού N είναι σε μορφή κατάλληλη (proper) όταν $M \leq N$, σε μορφή αυστηρά κατάλληλη (strictly proper) όταν $M < N$ και σε μορφή μη κατάλληλη (improper) όταν $M > N$. Η ανίσχυξη σε μερικά κλάσματα απαιτεί αυστηρά κατάλληλη μορφή.

$$A_1 = \left(z + \frac{1}{2} \right) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{z + \frac{1}{3}} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -1$$

$$A_2 = \left(z + \frac{1}{3} \right) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{z + \frac{1}{2}} \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = 1$$

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\frac{X_2(z)}{z} = \frac{-1}{z + \frac{1}{2}} + \frac{1}{z + \frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$X_2(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}} - \frac{z}{z + \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Τελικά η $X(z)$ προκύπτει ίση με

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) \Rightarrow$$

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

και ο αντίστροφος ΜΖ και των δύο μελών μας δίνει τη ζητούμενη ακολουθία $x(n)$

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

Σημείωση 1. Υπολογίσαμε τα A_1, A_2 για τη συνάρτηση $\frac{X_2(z)}{z}$ και όχι για τη συνάρτηση $X_2(z)$, ώστε να διευκολυνθούμε στο τέλος και να έχουμε την $X_2(z)$ σε μορφή που να είναι αντιστρίψιμη με βάση τα γνωστά ζεύγη ΜΖ, δηλαδή

$$X_2(z) = A_1 \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + A_2 \frac{z}{z + \frac{1}{3}} = A_1 \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Σημείωση 2. Ένας άλλος τρόπος για τον υπολογισμό των $X_1(z)$ και $X_2(z)$ αντί για την επιτέλεση της συνεχούς διαίρεσης, είναι να εκφράσουμε το $X(z)$ ως εξής:

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$\Gammaνωρίζουμε όμως ότι $X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{2}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$$

(Εξισώνοντας) αυτά υπολογίζουμε τους άγνωστους συντελεστές c_0, c_1, b_0, b_1 μέσω της επίλυσης ενός συστήματος 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους.

Σημείωση 3. Η $X_2(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$ είναι σε μορφή κατάλληλη, οπότε

δηλαδή μπορούμε να την αναλύσουμε σε άδικα κλάσματα, χωρίς πρώτα να διαμερίσουμε με z και να τη φέρουμε στη μορφή $\frac{X_2(z)}{z}$.

$$X_2(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}z}{(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})} = \frac{A}{z + \frac{1}{2}} + \frac{B}{z + \frac{1}{3}}$$

όπου

$$A = \left(z + \frac{1}{2} \right) X_2(z) \Big|_{z = -\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}z}{z + \frac{1}{3}} \Big|_{z = -\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$B = \left(z + \frac{1}{3} \right) X_2(z) \Big|_{z = -\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}z}{z + \frac{1}{2}} \Big|_{z = -\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}(-\frac{1}{3})}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Άρα

$$X_2(z) = \frac{1/2}{z + \frac{1}{2}} - \frac{1/3}{z + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \frac{1}{z + \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{z + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} z^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{3} z^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \xrightarrow{z^{-1}} X(z) &= X_1(z) + X_2(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{3}z^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \\ \rightarrow x(n) &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) \end{aligned}$$

Οι τιμές των 4 πρώτων δείκτη των του σήματος $x(n)$ είναι:

$$n=0 \Rightarrow x(0) = 1$$

$$n=1 \Rightarrow x(1) = 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^0 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

$$n=2 \Rightarrow x(2) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^1 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = -\frac{5}{36}$$

$$n=3 \Rightarrow x(3) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{27} = \frac{19}{216}$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές είναι ίδιες με τις αντίστοιχες που προκύπτουν από τη σχέση που είχαμε υπολογίσει πριν του $\frac{X_2(z)}{z}$,

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

Σημείωση 4.

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{z^3 + 3z^2 + \frac{11}{6}z + \frac{1}{3}}{z^3 + \frac{5}{6}z^2 + \frac{1}{6}z}$$

Προχωρούμε στη διαίρεση των πολυωνύμων ώστε η ρητή συνάρτηση που απομένει να είναι σε μορφή κατάλληλη για ανάπτυξη σε κλάσματα.

$$\Delta \rightarrow \begin{array}{r} z^3 + 3z^2 + \frac{11}{6}z + \frac{1}{3} \\ z^3 + \frac{5}{6}z^2 + \frac{1}{6}z \\ \hline \frac{13}{6}z^2 + \frac{10}{6}z + \frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \delta \\ \leftarrow \pi \\ \leftarrow \nu \end{array}$$

$\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$
ή $\frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\nu}{\delta}$

Άρα

$$X(z) = 1 + \frac{\frac{13}{6}z^2 + \frac{10}{6}z + \frac{1}{3}}{z^3 + \frac{5}{6}z^2 + \frac{1}{6}z} = 1 + X_1(z)$$

$X_1(z)$

Η ρητή συνάρτηση $X_1(z)$ είναι σε άμεση κατάλληλη μορφή και μπορεί να αναπτυχθεί σε κλάσματα.

$$X_1(z) = \frac{\frac{13}{6}z^2 + \frac{10}{6}z + \frac{1}{3}}{z(z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6})} = \frac{\frac{13}{6}z^2 + \frac{10}{6}z + \frac{1}{3}}{z(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z + \frac{1}{2}} + \frac{A_3}{z + \frac{1}{3}}$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των A_1, A_2, A_3 .

$$A_1 = z X_1(z) \Big|_{z=0} = \frac{\frac{13}{6}z^2 + \frac{10}{6}z + \frac{1}{3}}{(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 2$$

$$A_2 = (z + \frac{1}{2}) X_1(z) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{13}{6}z^2 + \frac{10}{6}z + \frac{1}{3}}{z(z + \frac{1}{3})} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = (z + \frac{1}{3}) X_1(z) \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{13}{6}z^2 + \frac{10}{6}z + \frac{1}{3}}{z(z + \frac{1}{2})} \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$$

Τελικά η $X(z)$ γίνεται:

$$X(z) = 1 + X_1(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{1/2}{z + \frac{1}{2}} - \frac{1/3}{z + \frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\text{και πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με } z^{-1} \text{ και παραγοντίζουμε σε } z^{-1} \right)$$

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + 2 \cdot z^{-1} + \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{3} \cdot z^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \\ x(n) &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1) - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} u(n-1) \end{aligned}$$

Οι πρώτες 4 τιμές της ακολουθίας $x(n)$ είναι:

$$n=0 \rightarrow x(0)=1 \quad [\text{υπάρχει μόνο ο } \delta(n), \text{ ενώ όλοι οι άλλοι όροι είναι } f_n \delta(n)]$$

$$n=1 \rightarrow x(1) = 2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^0 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

$$n=2 \rightarrow x(2) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^1 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = -\frac{5}{36}$$

$$n=3 \rightarrow x(3) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{27} = \frac{19}{216}$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές είναι ίδιες με εκείνες που υπολογίσαμε στα προηγούμενα. Άλλωστε, εάν προεξέδουμε το σήμα $x(n)$ φτάνει να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} x(n) &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) = \\ &= \delta(n) + 2\delta(n-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) = \\ &= \delta(n) + 2\delta(n-1) - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n-1) = \\ &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n-1) = \\ &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + \underbrace{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]}_{\text{Σημειώνεται ότι}} u(n) \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι

$$[a^n - b^n] u(n) = [a^n - b^n] u(n-1)$$

αφού για $n=0$ η τιμή της

παράστασης $[a^n - b^n] u(n)$ ισούται με 0 (φυσικά),

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το αντίστροφο ζυγα $x(n)$ του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

ΛΥΣΗ Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί z^2 έχουμε

$$X(z) = \frac{z^2+z}{z^2-z+0.5} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z^2-z+0.5}$$

Υπολογίζουμε τους πόλους, οι οποίοι προκύπτουν συζυγείς μιγαδικοί.

$$p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+j) = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Οι πόλοι είναι διάφοροι μεταξύ τους, δηλ. $p_1 \neq p_2$, οπότε η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα γίνεται κατά τα γνωστά.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} \quad (1)$$

Υπολογίζουμε τα A_1, A_2 .

$$A_1 = (z-p_1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_1} = \frac{z+1}{z-p_2} \Big|_{z=p_1} = \frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j1.25}$$

$$A_2 = (z-p_2) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_2} = \frac{z+1}{z-p_1} \Big|_{z=p_2} = \frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}e^{j1.25}$$

Παρατήρηση: Βρίσκουμε ότι $A_2 = A_1^*$. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι και οι πόλοι είναι συζυγείς μιγαδικοί, δηλ. $p_2 = p_1^*$.

Με άλλα λόγια, συζυγείς μιγαδικοί πόλοι οδηγούν σε συζυγείς μιγαδικούς συντελεστές κατά την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα.

Ο αντίστροφος ΜΖ και των δύο κλάσων της (1) μας δίνει:

$$\begin{aligned} x(n) &= [A_1(p_1)^n + A_2(p_2)^n]u(n) = \left[\frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j1.25} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + \frac{\sqrt{10}}{2}e^{j1.25} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \right] u(n) = \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left[e^{j(\frac{\pi}{4}n-1.25)} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n-1.25)} \right] u(n) = \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}n-1.25\right) u(n) \end{aligned}$$

Σημείωση: Για τη μετατροπή των μιγαδικών από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιήσαμε τη

σχίστη: $a+jb = r \cdot e^{j\varphi}$, όπου $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. Για παράδειγμα:

$$p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+j) = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \quad \text{αφού } r = \sqrt{1^2+1^2} \text{ και } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το αλτιατό σήμα $x(n)$ που έχει $X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$

ΛΥΣΗ Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί z^3 έχουμε:

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

Η $X(z)$ έχει έναν απλό πόλο $p_1 = -1$ και ένα διπλό πόλο $p_2 = p_3 = 1$.

Άρα γράφεται ως:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{(z-1)^2} \quad (1)$$

Οι συντελεστές A_1 και A_3 υπολογίζονται κατά τα χτωστά:

$$A_1 = (z+1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$A_3 = (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{z^2}{z+1} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

Ο συντελεστής A_2 μπορεί να υπολογιστεί βρίσκοντας την παράγωγο και των δύο μελών ως προς z και υπολογίζοντας το αποτέλεσμα στο $z=1$:

$$A_2 = \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \right] \Big|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να κάνουμε τις πράξεις στη (1) και να εξισώσουμε τους συντελεστές του z που έχουν την ίδια δύναμη.

$$z^2 = (z-1)^2 A_1 + (z+1)(z-1) A_2 + (z+1) A_3 \Rightarrow$$

$$z^2 = (z^2 - 2z + 1) A_1 + (z^2 - 1) A_2 + (z+1) A_3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z^2 &= A_1 z^2 - 2A_1 z + A_1 + A_2 z^2 - A_2 + A_3 z + A_3 \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = 1 - A_1 = \frac{3}{4} \\ A_3 - 2A_1 = 0 \\ A_1 - A_2 + A_3 = 0 \end{cases} \\ z^2 &= (A_1 + A_2) z^2 + (A_3 - 2A_1) z + (A_1 - A_2 + A_3) \Rightarrow \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και τους τρεις συντελεστές A_1, A_2, A_3 επιλύοντας το σύστημα των τριών εξισώσεων που προέκυψε.

Τελικά,

$$X(z) = \frac{1}{4} \frac{z}{z+1} + \frac{3}{4} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{4} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Ο αντίστροφος ΜΖ και των δύο μελών μας δίνει το ζητούμενο αλτιατό σήμα:

$$x(n) = \frac{1}{4} (-1)^n u(n) + \frac{3}{4} u(n) + \frac{1}{2} n u(n) = \left[\frac{1}{4} (-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{n}{2} \right] u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ Αιτιώ Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών (difference equation)

$$y(n) = 2x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

να υπολογιστούν η συνάρτηση του συστήματος (system function), καθώς και η απόκριση μοναδιαίου δείκτητος (unit sample response), δηλαδή η κρουστική απόκριση.

ΛΥΣΗ Α' τρόπος Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών της εξίσωσης έχουμε:

$$Z\{y(n)\} = Z\left\{2x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)\right\} \Rightarrow$$

$$Y(z) = 2X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}X(z) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Το σύστημα έχει έναν πόλο στο $z = \frac{1}{2}$ και ένα μηδενικό στην αρχή των αξόνων ($z=0$).

[Διευκρινίζεται ότι για να υπολογίσουμε τους πόλους και τα μηδενικά, εκφράζω τη σχέση συναρτήσεως του z και όχι του z^{-1} που είναι τώρα. Στην προετήρη περίπτωση πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή επί z .]

Ο αντίστροφος ΜΖ μας δίνει την $h(n)$, δηλαδή

$$y(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Β' τρόπος Κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι η έξοδος αυτού για είσοδο τη μοναδιαία κρούση, δηλαδή για $x(n) = \delta(n)$ έχουμε $y(n) = h(n)$. Συνεπώς η εξίσωση διαφορών γίνεται:

$$h(n) = 2\delta(n) + \frac{1}{2}h(n-1) \Rightarrow h(n) - \frac{1}{2}h(n-1) = 2\delta(n)$$

Εφαρμόζοντας τον ΜΖ και στα δύο μέλη έχουμε:

$$H(z) - \frac{1}{2}z^{-1}H(z) = 2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{Z^{-1}} h(n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

ΑΙΚΗΣΗ Ποια η βηματική απόκριση του αιτιατού συστήματος
 $y(n) = \alpha y(n-1) + x(n) \quad |\alpha| < 1$

ΛΥΣΗ Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών τις εξισώσεις διαφορών έχουμε:

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} = \alpha \mathcal{Z}\{y(n-1)\} + \mathcal{Z}\{x(n)\} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \alpha z^{-1} Y(z) + X(z) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Για είσοδο $x(n) = u(n)$, δηλαδή για $X(z) = U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ έχουμε:

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{A_1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}$$

Υπολογίζουμε τα A_1, A_2 :

$$A_1 = (1 - \alpha z^{-1}) Y(z) \Big|_{z^{-1} = \frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = \frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$A_2 = (1 - z^{-1}) Y(z) \Big|_{z^{-1} = 1} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = 1} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Άρα

$$Y(z) = \frac{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{\frac{1}{1 - \alpha}}{1 - z^{-1}} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Συνεπώς

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} \alpha^n u(n) + \frac{1}{1 - \alpha} u(n) =$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha} (1 - \alpha^{n+1}) u(n)$$

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ - Z

$$X^+(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- Χρησιμοποιείται για ενσιφάτα τα οποία περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.
- Το κατώτερο όριο του αθροίσματος είναι πάντοτε μηδέν, ανεξάρτητα από το αν το σήμα $x(n)$ είναι μηδέν για $n < 0$, δηλαδή αιτιατό.

Λόγω του ότι το κάτω όριο είναι μηδέν, ο μονόπλευρος ΜΖ έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- ▶ Δεν περιέχει πληροφορία για το σήμα $x(n)$ για $n < 0$.
- ▶ Είναι μοναδικός (unique) για αιτιατά σήματα και μόνο, αφού μόνο αυτά είναι μηδέν για $n < 0$.
- ▶ Ο μονόπλευρος ΜΖ $X^+(z)$ του σήματος $x(n)$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο ΜΖ του σήματος $x(n)u(n)$. Αφού το $x(n)u(n)$ είναι αιτιατό, η ΠΣ του αμφίπλευρου ΜΖ είναι το εξωτερικό ενός κύκλου, όπως και η ΠΣ του $X^+(z)$. Συνεπώς, όταν έχουμε μονόπλευρους ΜΖ, δεν είναι απαραίτητο να αναφερόμαστε στην περιοχή σύγκλισής τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ φονόλεπων ΜΖ διαφόρων συζήτητων.

$$x_1(n) = \{ \underline{1}, 2, 5, 7, 0, 1 \}$$

$$\xleftrightarrow{z^+} X_1^+(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$x_2(n) = \{ 1, 2, \underline{5}, 7, 0, 1 \}$$

$$\xleftrightarrow{z^+} X_2^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_3(n) = \{ \underline{0}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1 \}$$

$$\xleftrightarrow{z^+} X_3^+(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

$$x_4(n) = \{ 2, 4, \underline{5}, 7, 0, 1 \}$$

$$\xleftrightarrow{z^+} X_4^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_5(n) = \delta(n)$$

$$\xleftrightarrow{z^+} X_5^+(z) = 1$$

$$x_6(n) = \delta(n-m), \quad m > 0$$

$$\xleftrightarrow{z^+} X_6^+(z) = z^{-m}$$

$$x_7(n) = \delta(n+m), \quad m > 0$$

$$\xleftrightarrow{z^+} X_7^+(z) = 0$$

Παρατηρήσεις: 1. Για αντι-διτιτά συστήματα, ο φονόλεπος ΜΖ είναι πάντοτε 0. Π.χ. $X_7^+(z) = 0$

2. Για μη-αυτιά συστήματα, ο φονόλεπος ΜΖ δεν είναι μοναδικός (unique). Π.χ. $X_2^+(z) = X_4^+(z)$ αλλά $x_2(n) \neq x_4(n)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΟΛΙΣΘΙΣΗΣ (shifting)

A. ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ (Time Delay)

$$\begin{aligned} \text{Εάν} \quad & x(n) \xleftrightarrow{Z^+} X^+(z) \\ \text{τότε} \quad & x(n-m) \xleftrightarrow{Z^+} Z^{-m} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^m x(-n) z^n \right] \quad m > 0 \end{aligned}$$

Για αυτιά γύφου η ιδιότητα αυτή γίνεται

$$x(n-m) \xleftrightarrow{Z^+} Z^{-m} X^+(z)$$

$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη: } Z^+ \{x(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-n} = \langle \text{θέτω } n-m=l \rightarrow n=l+m \rangle = \\ &= Z^{-m} \left[\underbrace{\sum_{l=-m}^{-1} x(l) z^{-l}}_{\text{θέτω } l=-n} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} x(l) z^{-l}}_{X^+(z)} \right] = \\ &= Z^{-m} \left[\sum_{n=1}^m x(-n) z^n + X^+(z) \right] \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα αυτή μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή εάν σκεφτούμε ότι η ολίσθηση προς τα δεξιά (καθυστέρηση) εισάγει στον θετικό άξονα των χρόνων νέα δείγματα τα οποία βρίσκονταν στον αρνητικό ημιάξονα. Άρα ο συνολικός μετασχηματισμός θα αποτελείται από τα δείγματα που υπήρχαν ήδη και που ολίσθησαν κατά m θέτες δεξιά $[Z^{-m} X^+(z)]$, και από τα νέα δείγματα που προέκυψαν μετά την δεξιά ολίσθηση $[Z^{-m} \sum_{n=1}^m x(-n) z^n]$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο τόνος MZ των γυφάτων

$$x_1(n) = a^n \quad x_2(n) = x_1(n-2)$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} X_1^+(z) &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} \\ X_2^+(z) &= Z^{-2} [X_1^+(z) + x(-1)z + x(-2)z^2] \\ &= Z^{-2} [X_1^+(z) + a^{-1}z + a^{-2}z^2] \\ &= Z^{-2} \frac{1}{1 - a z^{-1}} + a^{-1} z^{-1} + a^{-2} \end{aligned}$$

Β. ΠΡΟΗΓΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ (Time Advance)

$$\text{Εάν} \quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

$$\text{τότε} \quad x(n+m) \xleftrightarrow{z^+} z^m \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n} \right] \quad m > 0$$

$$\text{Απόδειξη:} \quad Z^+ \{x(n+m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m) z^{-n} = \langle \text{θέτω } n+m=l \rangle = z^m \underbrace{\sum_{l=m}^{\infty} x(l) z^{-l}}$$

Αλλά

$$X^+(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l) z^{-l} = \sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l} + \underbrace{\sum_{l=m}^{\infty} x(l) z^{-l}}$$

Άρα

$$Z^+ \{x(n+m)\} = z^m \left[X^+(z) - \sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l} \right]$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα αυτή μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητή αν θυμητούμε ότι με την ολισθήση προς τα αριστερά (προήγηση στο χρόνο) κατά m δείξεις τα δείγματα $x(0), x(1), \dots, x(m-1)$ "χάνονται" και άρα πρέπει να αφαιρεθούν από τον $X^+(z)$, στον υπολογισμό του οποίου ήδη συλλεχτήσαν.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μονόδρομος ΜΖ των σημάτων

$$x_1(n) = a^n u(n)$$

$$x_3(n) = x_1(n+2)$$

ΛΥΣΗ

$$X_1^+(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

$$X_3^+(z) = z^2 \left[X_1^+(z) - x(0) z^0 - x(1) z^{-1} \right] =$$

$$= z^2 X_1^+(z) - x(0) z^2 - x(1) z$$

$$\text{Αλλά } x(0) = 1, \quad x(1) = a, \quad \text{οπότε}$$

$$X_3^+(z) = \frac{z^2}{1 - a z^{-1}} - z^2 - a z$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ (Final Value Theorem)

$$\text{Εάν} \quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

$$\text{Τότε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X^+(z)$$

Σημειώνεται ότι το όριο υπάρχει εάν η ΠΣ του $(z-1)X^+(z)$ περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

Το θεώρημα αυτό είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ενός σήματος $x(n)$ για το οποίο γνωρίζουμε τον ΜΖ, αλλά όχι το ίδιο το σήμα.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η τιμή της βηματικής ασύμπτους για $n \rightarrow \infty$, ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση, σε ηρεμία, είναι $h(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$.

ΛΥΣΗ Έχουμε ότι $x(n) = u(n)$ και $y(n) = h(n) * x(n)$

Σημειώνεται ότι η διεύθυνση ενός αιτιατού συστήματος f_t είναι αιτιατό σήμα, παράγει μια αιτιατή έξοδο.

Αφού τα $x(n)$, $h(n)$, $y(n)$ είναι αιτιατά, ο μονόπλευρος και ο αμφίπλευρος ΜΖ συστήνουν. Άρα η συνέλιξη των σήματων ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό των ΜΖ.

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \quad f \in \Pi\mathbb{C}: |z| > 1$$

Επομένως

$$(z-1)Y(z) = \frac{z^2}{z-a} \quad f \in \Pi\mathbb{C}: |z| > |a|$$

Αφού $|a| < 1$, η ΠΣ του $(z-1)Y(z)$ υπερπεριλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

Άρα η ζητούμενη τιμή θα είναι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z-a} = \frac{1}{1-a}$$

ΑΣΚΗΣΗ Ποια η βιβατική απόκριση του συστήματος

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n) \quad |\alpha| < 1$$

όταν η αρχική συνθήκη είναι $y(-1) = 1$.

ΛΥΣΗ Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό ΜΖ και των δύο μελών της εξίσωσης διαφορών έχουμε:

$$Y^+(z) = \alpha [z^{-1} Y^+(z) + y(-1)] + X^+(z)$$

Όπως $y(-1) = 1$ και $X^+(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ οπότε επιλύοντας ως προς $Y^+(z)$ παίρνουμε:

$$Y^+(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-z^{-1})}$$

Ανελύοντας σε φρακτά κλάσματα και λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε την ζητούμενη έξοδο του συστήματος:

$$y(n) = \alpha \cdot \alpha^n u(n) + \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u(n) \Rightarrow$$

$$y(n) = \frac{1}{1-\alpha} (1-\alpha^{n+1}) u(n)$$

Σημείωση: Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση του αφεινήλερου ΜΖ, όπου δεν είχαμε αρχικές συνθήκες, είχαμε υπολογίσει

$$y(n) = \frac{1}{1-\alpha} (1-\alpha^{n+1}) u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Η σειρά Fibonacci ακεραίων αριθμών προκύπτει υπολογίζοντας κάθε όρο ως το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Ορίζεται από τους όρους της σειράς είναι: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Να βρεθεί ο n -οστός όρος της σειράς Fibonacci σε κλειστή μορφή.

ΛΥΣΗ

Εάν $y(n)$ είναι ο n -οστός όρος της σειράς, τότε αυτός θα υπολογίζεται ως

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) \quad (1)$$

Λαμβάνοντας τον φορνηλτομο ΜΖ και των δύο μελών έχουμε:

$$Y^+(z) = [z^{-1}Y^+(z) + y(-1)] + [z^{-2}Y^+(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}] \quad (2)$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των $y(-1)$ και $y(-2)$ από την εξίσωση (1).

$$\begin{aligned} y(0) &= y(-1) + y(-2) = 1 \\ y(1) &= y(0) + y(-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + y(-1) \Rightarrow y(-1) = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y(0) &= y(-1) + y(-2) = 1 \\ y(1) &= y(0) + y(-1) = 1 \end{aligned}} \right\} y(-2) = 1$$

Με βάση αυτά από την εξίσωση (2) υπολογίζουμε τον φορνηλτομο ΜΖ

$$Y^+(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{z^2}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Υπολογίζουμε τους πόλους $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και αναπτύσσουμε σε τερμακά κλάσματα.

$$\frac{Y^+(z)}{z} = \frac{z}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2}$$

Προκύπτει ότι $A_1 = p_1/\sqrt{5}$ και $A_2 = -p_2/\sqrt{5}$.

Ο αντίστροφος ΜΖ και των δύο μελών μας δίνει τον ζητούμενο n -οστό όρο $y(n)$:

$$y(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u(n)$$

ή ισοδύναμα,

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} \right] u(n)$$

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α

• Έκφραση συναρτησών κλήρων όρων σε κλειστή μορφή

$$x(n) = \alpha^n u(n) \rightsquigarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \dots ? \dots$$

Τρόπος Α

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \\ &= \alpha^0 z^0 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots \\ &= 1 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους:

$$\begin{aligned} (\alpha^1 z^{-1}) X(z) &= (\alpha^1 z^{-1}) + (\alpha^1 z^{-1})(\alpha^1 z^{-1}) + (\alpha^1 z^{-1})(\alpha^2 z^{-2}) + \dots \\ &= \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \dots \end{aligned}$$

Ανελιδή έχουμε:

$$X(z) = 1 + \cancel{\alpha^1 z^{-1}} + \cancel{\alpha^2 z^{-2}} + \cancel{\alpha^3 z^{-3}} + \dots$$

$$(\alpha^1 z^{-1}) X(z) = \cancel{\alpha^1 z^{-1}} + \cancel{\alpha^2 z^{-2}} + \cancel{\alpha^3 z^{-3}} + \dots$$

οπότε αφαιρώντας κατά μέλη, όλοι οι όροι (ηλίκ ενός) του δεξιού μέλους αναγράφονται:

$$X(z) - \alpha^1 z^{-1} X(z) = 1 \Rightarrow$$

$$X(z) (1 - \alpha z^{-1}) = 1 \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Τρόπος Β

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \\ &= \alpha^0 z^0 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots \\ &= 1 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots \\ &= 1 + \alpha^1 z^{-1} \underbrace{[1 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots]}_{X(z)} \end{aligned}$$

$$= 1 + \alpha^1 z^{-1} X(z) \Rightarrow$$

$$X(z) = 1 + \alpha^1 z^{-1} X(z) \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ II

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μ z	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a x_1(n) + b x_2(n)$	$a \cdot X_1^+(z) + b \cdot X_2^+(z)$	$P_1 \cap P_2$
Δεξιά ολίσθηση	$x(n - n_0), n_0 \geq 0$	$z^{-n_0} [X^+(z) + \sum_{i=0}^{n_0-1} x(-i) z^i]$	$R < z $
Αριστερή ολίσθηση	$x(n + n_0), n_0 \geq 0$	$z^{+n_0} [X^+(z) - \sum_{i=0}^{n_0-1} x(+i) z^{-i}]$	$R < z $
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1^+(z) \cdot X_2^+(z)$	$P_1 \cap P_2$
Ολίσθησης Συχνότητας	$e^{j\omega} x(n)$	$X^+\left(\frac{z}{C}\right)$	$ C R < z $
Περιοδικό σήμα	$x(n + N) = x(n)$	$X^+(z) = \frac{1}{1 - z^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$	$ z > 0$
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\Re\{x(n)\}$ $-\Im\{x(n)\}$	$X^*(z^*)$ $\frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]$ $\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	$R < z $
Θεώρημα αρχικής τιμής		$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X^+(z)$	
Θεώρημα τελικής τιμής		$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X^+(z)$	

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \\ \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ 2 \cos(x) \cos(y) &= \cos(x - y) + \cos(x + y) \\ 2 \sin(x) \sin(y) &= \cos(x - y) - \cos(x + y) \\ 2 \sin(x) \cos(y) &= \sin(x - y) + \sin(x + y) \\ 2 \cos^2(x) &= 1 + \cos(2x) \\ 2 \sin^2(x) &= 1 - \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = \phi_{xx}(0) - |w_x|^2$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2$$

$$P_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 P_x(\omega)$$

$$\hat{\Phi}_{yx}^{(e)}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \underbrace{\hat{\Phi}_{xx}(e^{j\omega})}_{P_{xx}(\omega)}$$

Μετασχηματισμοί z μερικών βασικών συναρτήσεων			
	Σήμα	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγκλισης
1	$\delta(n)$	1	για κάθε $z \neq 0$
2	$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$\delta(n - m), m > 0$	z^{-m}	$ z \neq 0$
4	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
5	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
6	$[\cos(\Omega_0 n)] u(n)$	$\frac{1 - [\cos \Omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \Omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
7	$[\sin(\Omega_0 n)] u(n)$	$\frac{[\sin \Omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \Omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
8	$[r^n \cos(\Omega_0 n)] u(n)$	$\frac{1 - [r \cos \Omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \Omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
9	$[r^n \sin(\Omega_0 n)] u(n)$	$\frac{[r \sin \Omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \Omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μ z	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a x_1(n) + b x_2(n)$	$a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Χρονική ολίσθηση	$x(n + n_0)$	$z^{n_0} X(z)$	P
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Ολίσθησης Συχνότητας	$e^{j\omega} x(n)$	$X\left(\frac{z}{C}\right)$	$ C R^+ < z < C R^-$
Παραγώγιση στο Χόρπο του z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R^+ < z < R^-$
Μ z περιοδικών σημάτων	$x(n + N) = x(n)$	$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$	P
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\Re\{x(n)\}$ $-\Im\{x(n)\}$	$X^*(z^*)$ $\frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]$ $\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	P
Αθροίσματος	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap z > 1$
Κατοστρεφισμός	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R^+} < z < \frac{1}{R^+}$