



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ4 – ΣΕΙΡΑ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2024 - 2025

ΣΕΙΡΑ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (DTFS - DISCRETE-TIME FOURIER SERIES)

ΟΡΙΣΜΟΙ

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{εξίσωση ανάλυσης}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{εξίσωση σύνθεσης}$$

- Το διακριτού χρόνου σήμα $x(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N , δηλ. $x(n+N) = x(n) \quad \forall n$ (βλ. Σημείωση)
- Υπενθυμίζεται ότι οι συντελεστές Fourier $\{\alpha_k\}$, $k=0,1,\dots,N-1$ περιγράφουν το $x(n)$ στο χώρο των συχνοτήτων, δηλαδή τα α_k αντιπροσωπεύουν το μέτρο και τη φάση που αντιστοιχεί σε κάθε συνιστώσα συχνότητας $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$.
- Τα $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ είναι περιοδικά με περίοδο N , δηλαδή $e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$. Άρα και οι συντελεστές Fourier α_k είναι περιοδικοί με περίοδο N .

$$\text{Απόδειξη: } \alpha_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \alpha_k$$

Συνεπώς, το φάσμα ενός περιοδικού ΣΔΧ $x(n)$ με περίοδο N είναι επίσης, περιοδικό με περίοδο N .

Με άλλα λόγια, N διαδοχικά δείγματα του σήματος ή του φάσματος παρέχουν μια πλήρη περιγραφή του σήματος στον χρόνο ή στη συχνότητα.

- Για ένα περιοδικό ΣΔΧ, η περιοχή συχνοτήτων $(-\pi, \pi)$ ή $(0, 2\pi)$ είναι μοναδική. Ένα ΣΔΧ με θεμελιώδη περίοδο N αποτελείται από συνιστώσες συχνότητας που απέχουν κατά $\frac{2\pi}{N}$ ακτίνια ή $f = \frac{1}{N}$ κύκλους. Συνεπώς, η σειρά Fourier ενός περιοδικού ΣΔΧ θα αποτελείται από N συνιστώσες συχνότητας το πολύ. Αυτή είναι και η κύρια διαφορά μεταξύ των σειρών Fourier για σήματα συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου.

Σημείωση: Η θεμελιώδης περίοδος N είναι ο μικρότερος θετικός κέραιος για τον οποίο ισχύει η σχέση $x(n+N) = x(n)$.

Η θεμελιώδης (κυκλική) συχνότητα ισούται με $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

Απόδειξη DTFS

Έστω η περιοδική ακολουθία $x(n)$ με περίοδο N , δηλ. $x(n+N)=x(n) \forall n$.

Η σειρά Fourier της $x(n)$ αποτελείται από N αρμονικά σχετιζόμενα μιγαδικά εκθετικά της μορφής $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ όπου $k=0,1,\dots,N-1$ (θυμηθείτε ότι $\omega_0=\frac{2\pi}{N}$ η θεμελιώδης συχνότητα και εκφράζεται ως: και $k\omega_0=k\frac{2\pi}{N}$ οι αρμονικές)

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

όπου $\{\alpha_k\}$ οι συντελεστές της σειράς.

Οι συντελεστές της σειράς Fourier α_k μπορούν να υπολογιστούν από την παραπάνω σχέση πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της επί $e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}$ και αθροίζοντας τα γινόμενα από $n=0$ μέχρι $n=N-1$.

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-l)} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-l)}}_{\begin{cases} N & \text{για } k=l \\ 0 & \text{για } k \neq l \end{cases}} = N\alpha_l$$

Στο δεξιά μέλος, ο υπολογισμός του αθροίσματος πρώτα για n μας δίνει (βλ. Σημείωση):

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-l)} = \begin{cases} N & \text{για } k-l=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Όλα αυτά ισχύουν σε μία περίοδο, δηλ. για $k \in [0, N-1]$.

Συνεπώς το δεξιά μέλος τελικά ισούται με $N\alpha_l$, οπότε έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} = N\alpha_l \Rightarrow$$

$$\alpha_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} \quad l=0,1,\dots,N-1$$

α.β.

Σημείωση:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \text{για } \alpha=1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{για } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Για $\alpha = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ προκύπτει:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} N & \text{για } k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}kN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1 - e^{j2\pi k}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = 0$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των τιμών ενός περιοδικού μιγαδικού εκθετικού σε μία περίοδο, ισούται με μηδέν, εκτός εάν το μιγαδικό εκθετικό είναι μία σταθερά.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί το φάσμα του σήματος $x(n) = \cos \omega_0 n$ όταν (α) $\omega_0 = \sqrt{2}\pi$ και (β) $\omega_0 = \pi/3$.

ΛΥΣΗ

- (α) Για $\omega_0 = \sqrt{2}\pi \Rightarrow f_0 = 1/\sqrt{2}$. Αφού η συχνότητα f_0 είναι άρρητη, το σήμα δεν είναι περιοδικό και κατά συνέπεια δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier.

Φυσικά το σήμα έχει κάποιο φάσμα. Αυτό αποτελείται από μια και μοναδική συνιστώσα συχνότητας στο $\omega = \omega_0 = \sqrt{2}\pi$.

- (β) Για $\omega_0 = \pi/3 \Rightarrow f_0 = 1/6$ και συνεπώς το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $N=6$. Από τον ορισμό της σειράς Fourier ΔΧ έχουμε:

$$\alpha_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x(n) e^{-j \frac{2\pi}{6} nk} \quad k=0,1,2,3,4,5$$

Πριν όμως προχωρήσουμε στον υπολογισμό των συντελεστών με βάση τη δέσση αυτή, παρατηρούμε ότι το σήμα $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x(n) = \cos \frac{2\pi}{6} n = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{6} n} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi}{6} n}$$

Η δέσση αυτή δεν είναι άλλη από την εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier ΔΧ, οπότε $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και $\alpha_{-1} = \frac{1}{2}$.

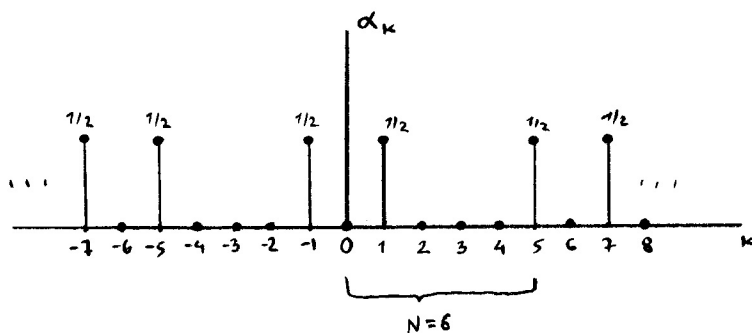
Παρατηρούμε ότι για $k=-1$ έχουμε:

$$e^{-j \frac{2\pi}{6} n} = e^{j \frac{2\pi}{6} (5-6)n} = e^{j \frac{2\pi}{6} 5n}$$

γεγονός που σημαίνει ότι $\alpha_{-1} = \alpha_5$. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού οι συντελεστές της σειράς Fourier αποτελούν μια περιοδική ακολουθία με περίοδο N .

Τελικά οι συντελεστές είναι:

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha_1 = \alpha_5 = \frac{1}{2}$$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του σήματος $x(n) = \sin \omega_0 n$.

ΛΥΣΗ Το σήμα αυτό είναι περιοδικό εάν η συχνότητα f είναι ρητός αριθμός.
Έστω $f = \frac{1}{N}$, όπου N η περίοδος του σήματος. Άρα $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$.

Αναπτύσσοντας το σήμα ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών, έχουμε:

$$x(n) = \sin \omega_0 n = \sin \frac{2\pi}{N} n = \frac{1}{2j} e^{j \frac{2\pi}{N} n} - \frac{1}{2j} e^{-j \frac{2\pi}{N} n}$$

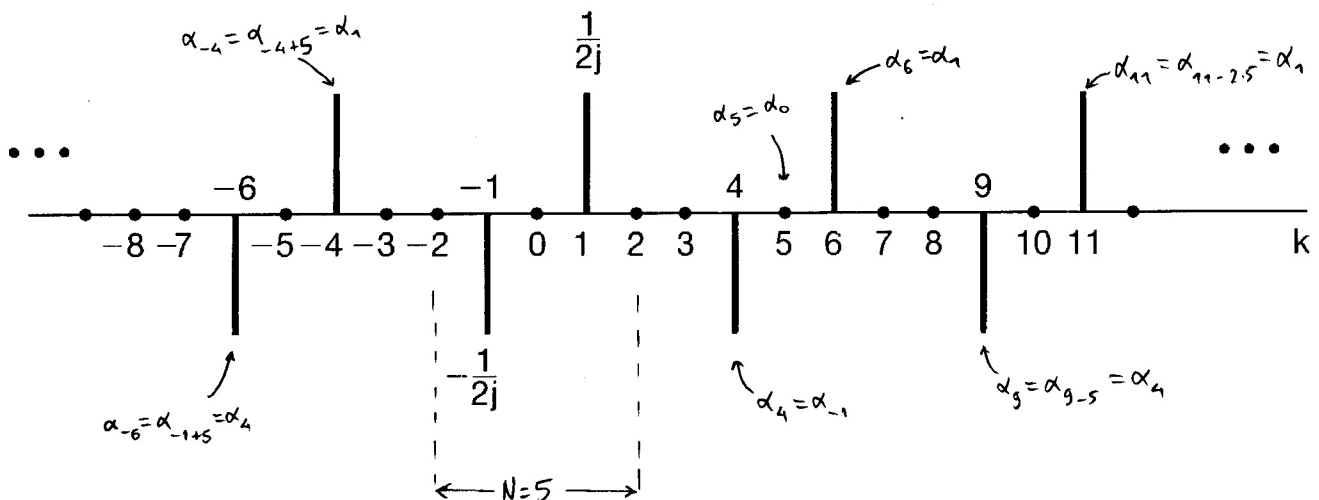
Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με εκείνη της αντίστροφης σειράς Fourier διακριτού χρόνου

$$x(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n}$$

καταλήγουμε εύκολα στη διαπίστωση ότι $a_1 = \frac{1}{2j}$ και $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί.

Οι συντελεστές αυτοί επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N . Για παράδειγμα ο συντελεστής $a_{N+1} = a_1 = \frac{1}{2j}$ και ο συντελεστής $a_{N-1} = a_{-1} = -\frac{1}{2j}$.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι φασματικοί συντελεστές του $x(n) = \sin \frac{2\pi}{5} n$.



Παρατηρείστε ότι φάνηκε δύο φασματικοί συντελεστές είναι μηδενικοί μέσα σε κάθε περίοδο του σήματος και συνεπώς η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier αποτελείται πλέον από δύο όρους,

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν οι φασματικοί συντελεστές του σήματος $x(n) = \sin \frac{6\pi}{5} n$.

ΛΥΣΗ Για το σήμα αυτό έχουμε $\omega_0 = \frac{6\pi}{5} \Rightarrow 2\pi f = \frac{6\pi}{5} \Rightarrow f = \frac{3}{5}$.

Άρα πρόκειται για περιοδικό σήμα με περίοδο $N=5$.

Αντιπρόσμενα, αυτό ως αθροίσμα μιγαδικών εκθετικών, βάσει της ιδιότητας του Euler, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους φασματικούς συντελεστές, δηλαδή τους συντελεστές της σειράς Fourier διακριτού χρόνου.

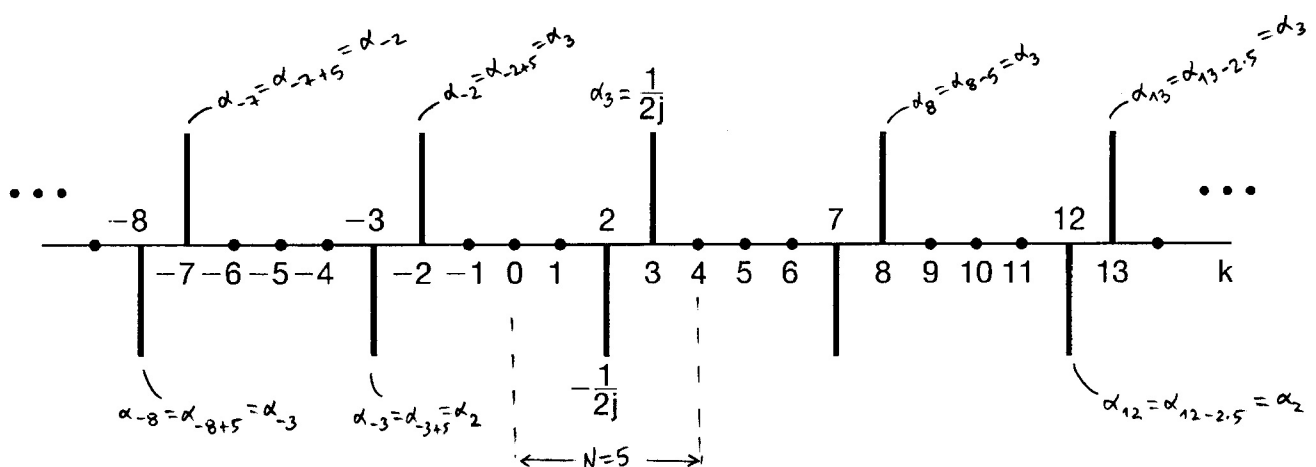
$$x(n) = \sin \frac{6\pi}{5} n = \sin 3 \frac{2\pi}{5} n = \frac{1}{2j} e^{j 3 \frac{2\pi}{5} n} - \frac{1}{2j} e^{-j 3 \frac{2\pi}{5} n}$$

$\uparrow \alpha_3$
 $\uparrow \alpha_{-3}$

Οι δύο μιγαδονικοί συντελεστές είναι ο $\alpha_3 = \frac{1}{2j}$ και ο $\alpha_{-3} = -\frac{1}{2j}$.

Παρατηρούμε ότι $\alpha_{-3} = \alpha_{-3+5} = \alpha_2$.

Είναι φανερό ότι σε κάθε περίοδο μόνο δύο συντελεστές είναι μιγαδονικοί και κατά συνέπεια η εξίσωση συνόρευσης της σειράς Fourier αποτελείται από δύο όρους.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του σήματος

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3 \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

ΛΥΣΗ Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο N . Αναπτύσσοντας αυτό ως άθροισμα τριγωνικών εκθετικών, έχουμε:

$$\begin{aligned} x(n) &= 1 + \frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \right) + 3 \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \right) + \frac{1}{2} \left[e^{j\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)} \right] = \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + \left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \right) e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-j2\frac{2\pi}{N}n} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \alpha_0 \quad \quad \alpha_1 \quad \quad \quad \alpha_{-1} \quad \quad \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_{-2} \end{aligned}$$

Εν συνεχεία οι συντελεστές είναι:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}j$$

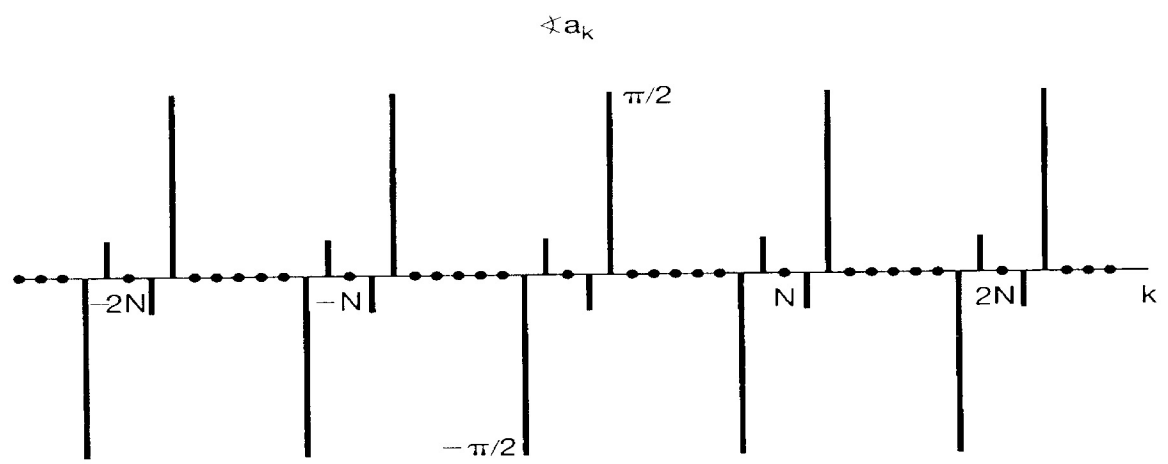
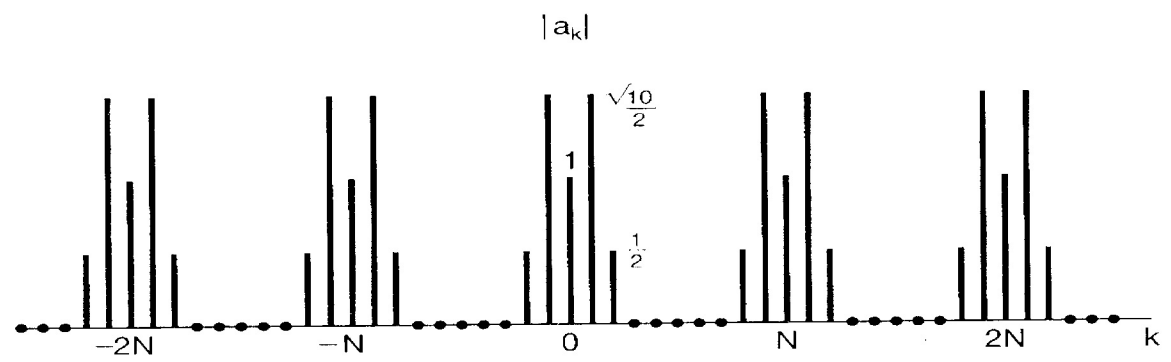
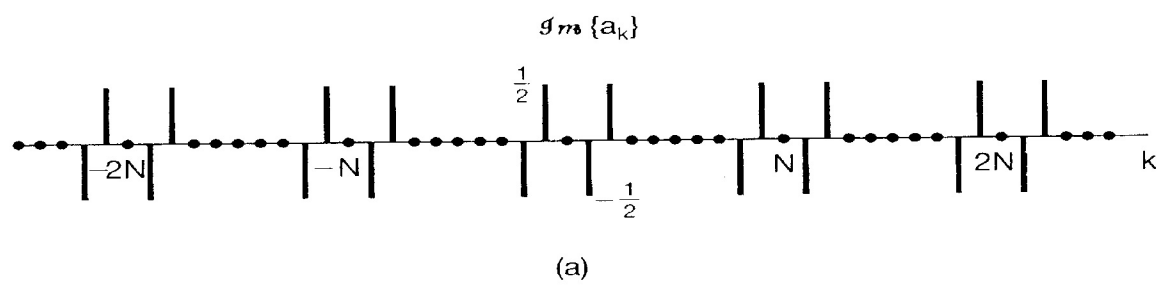
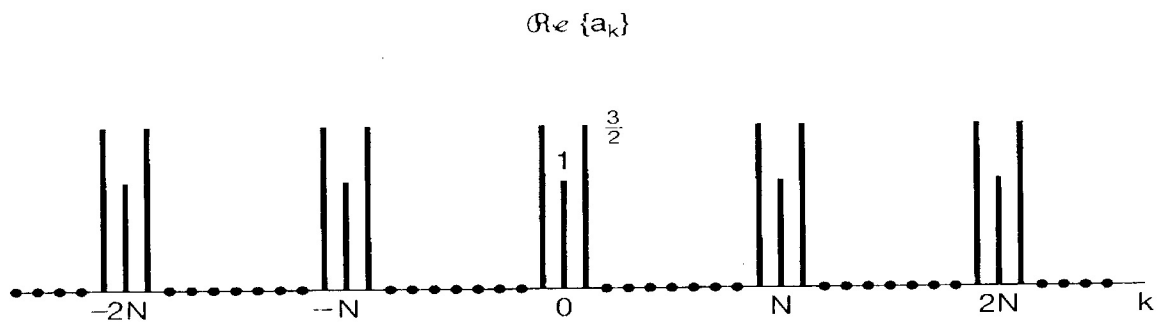
$$\alpha_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$\alpha_{-2} = -\frac{1}{2}j$$

Το σήμα που ακολουθεί δίνονται οι φασματικοί συντελεστές

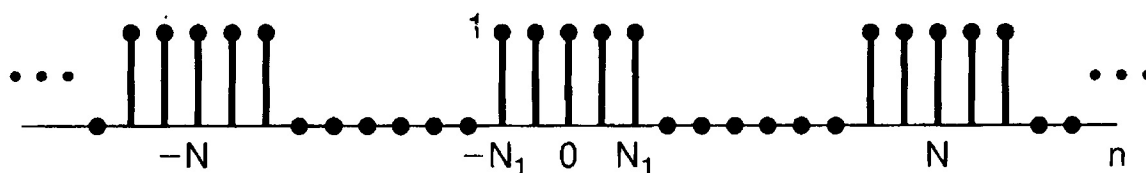
(πραγματικά & φανταστικά τέρη στο α και φίτρο α φαίνεται στο β)

για την περίπτωση $N=10$.



(b)

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του περιοδικού σήματος του σχήματος.



ΛΥΣΗ Πρόκειται για ένα περιοδική τετραγωνική κυματομορφή εύρους $2N_1+1$ και περιόδου N .

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} 1 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

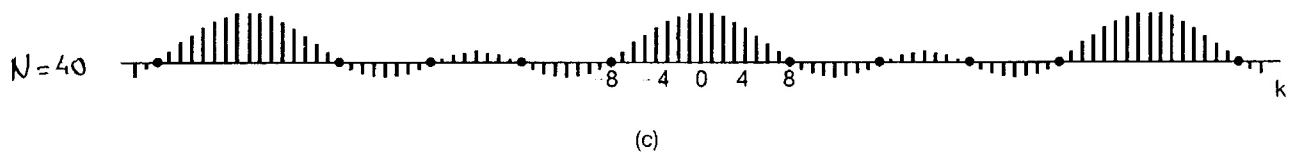
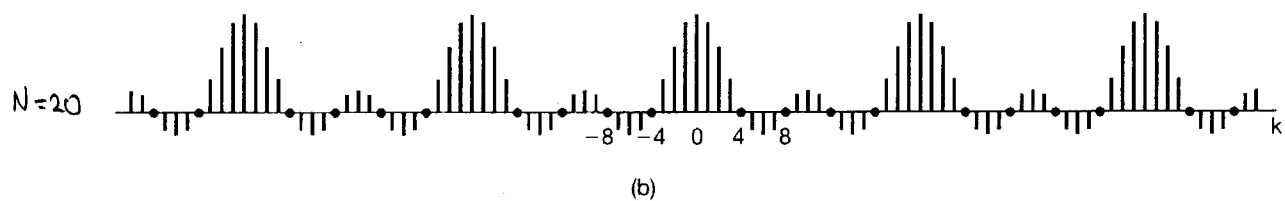
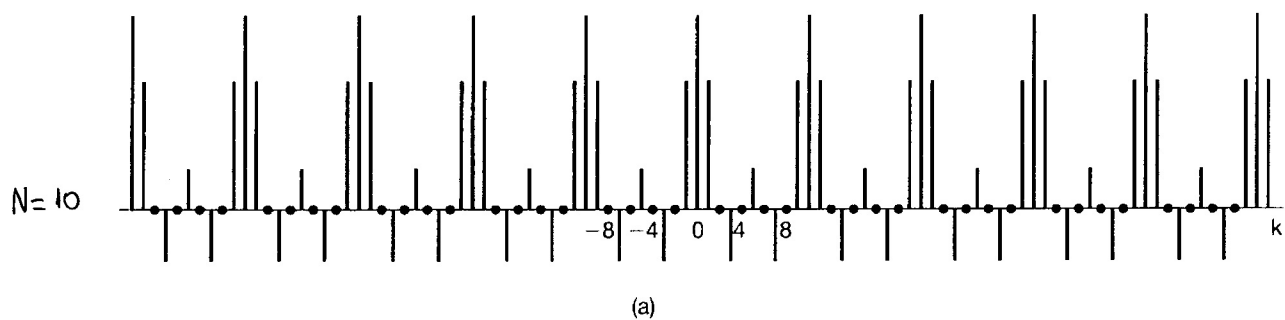
Θέτοντας $m=n+N_1$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk \frac{2\pi}{N} (m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk \frac{2\pi}{N} N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk \frac{2\pi}{N} m} = \\ &= \frac{1}{N} e^{jk \frac{2\pi}{N} N_1} \frac{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (2N_1+1)}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} = \\ &= \frac{1}{N} e^{jk \frac{2\pi}{N} N_1} \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2})} \left[e^{jk \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2})} \right]}{e^{-jk \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1}{2}} \left[e^{jk \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1}{2}} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1}{2}} \right]} = \\ &\quad \underbrace{1}_{1} \underbrace{\frac{\sin \left[k \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2}) \right]}{\sin \left[k \frac{\pi}{N} \right]}}_{\sin \left[k \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2}) \right]} = \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin \left[k \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2}) \right]}{\sin \left(k \frac{\pi}{N} \right)} \quad \text{για } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{aligned}$$

και

$$\alpha_k = \frac{2N_1+1}{N} \quad \text{για } k=0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

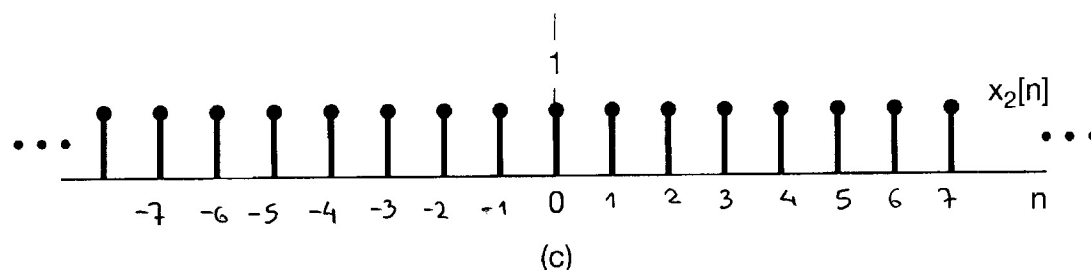
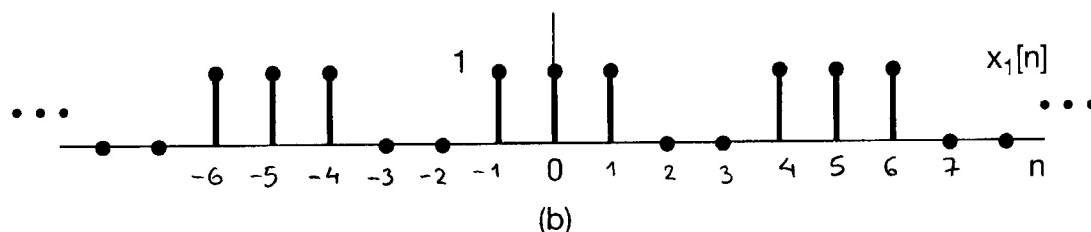
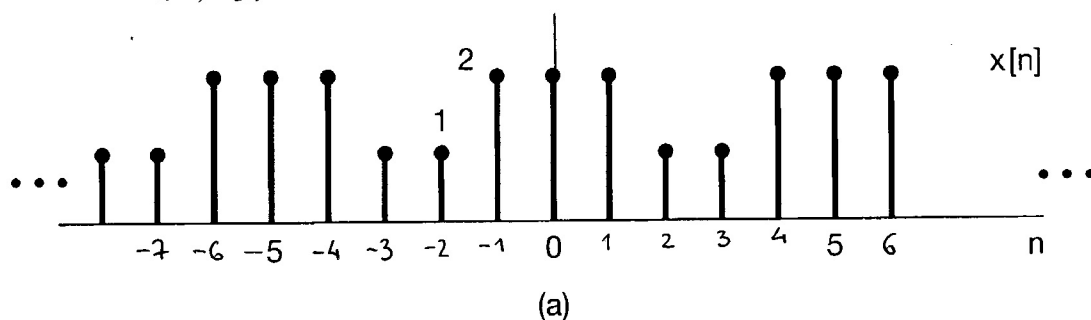
Οι συντελεστές της σειράς Fourier της περιοδικής τριγωνικής κυματομορφής για $N_1=2$ και για (α) $N=10$, (β) $N=20$, (γ) $N=40$, δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σημείωση: N είναι η περίοδος και $2N_1+1$ το εύρος του παλτού.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(n)$ του σχήματος (α).

ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα περιοδικό σήμα με περίοδο $N=5$, το οποίο μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο άλλων σημάτων, του $x_1(n)$, επίσης περιοδικού με ίδια περίοδο $N=5$ και του $x_2(n)$, δηλαδή της σταθερής τιμής ακολουθίας (dc sequence) πλάτους 1, $x_2(n)=1$.



Λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας θα ισχύει:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \xleftrightarrow{F} \alpha_k = b_k + c_k$$

όπου α_k , b_k , c_k οι συντελεστές Fourier των σημάτων $x(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$ αντίστοιχα.

Οι συντελεστές Fourier της περιοδικής τετραγωνικής κυματοεμφάνισης $x_1(n)$ με $N_1=1$ και $N=5$ ισούνται με:

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3k\pi/5)}{\sin(k\pi/5)} & \text{για } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{3}{5} & \text{για } k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

Η σταθερή ακολουθία θα έχει έναν μόνο συντελεστή, αυτόν για συχνότητα ίση με τη δειν:

$$C_0 = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 x_2(n) = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 1 = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

Λέγοντας ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N , στην προκειμένη περίπτωση οι συντελεστές C_k θα ισούνται με 1 για k πολλαπλάσια του $N=5$. Όλοι οι υπόλοιποι θα είναι μηδενικοί.

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{για } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 1 & \text{για } k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

Τελικά, οι γινόμενοι συντελεστές α_k θα είναι:

$$\alpha_k = b_k + C_k = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3k\pi/5)}{\sin(k\pi/5)} = b_k & \text{για } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{8}{5} & \text{για } k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier και το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας του περιοδικού σήματος $x(n)$ του παρακάτω σχήματος.

ΛΥΣΗ Από την εξίσωση ανάλυσης της σειράς Fourier διακριτού χρόνου έχουμε:

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\alpha_k = \frac{A}{N} \sum_{n=0}^{L-1} \left(e^{-j \frac{2\pi k}{N}} \right)^n = \begin{cases} \frac{AL}{N} & \text{για } k=0 \\ \frac{A}{N} \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi k}{N} L}}{1 - e^{-j \frac{2\pi k}{N}}} & \text{για } k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

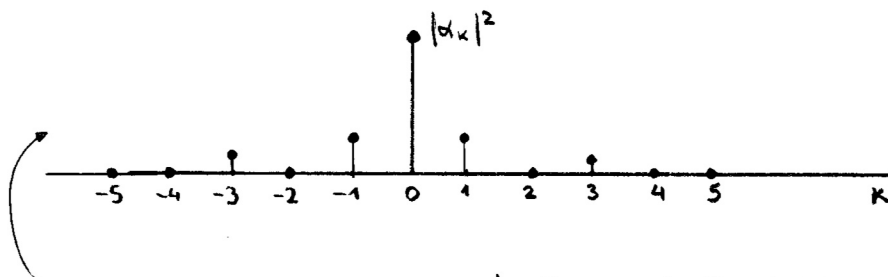
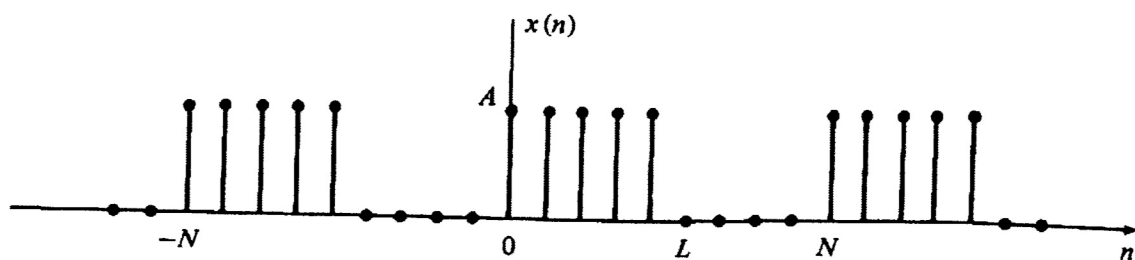
Η τελευταία έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής:

$$\frac{1 - e^{-j \frac{2\pi k L}{N}}}{1 - e^{-j \frac{2\pi k}{N}}} = \frac{e^{-j \pi k L / N}}{e^{-j \pi k / N}} \cdot \frac{e^{j \pi k L / N} - e^{-j \pi k L / N}}{e^{j \pi k / N} - e^{-j \pi k / N}} = e^{-j \pi k (L-1) / N} \cdot \frac{\sin(\pi k L / N)}{\sin(\pi k / N)}$$

$$\text{Συνεπώς, } \alpha_k = \begin{cases} \frac{AL}{N} & \text{για } k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{A}{N} e^{-j \pi k (L-1) / N} \frac{\sin(\pi k L / N)}{\sin(\pi k / N)} & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας ισούται με

$$|\alpha_k|^2 = \begin{cases} \left(\frac{AL}{N} \right)^2 & \text{για } k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \left(\frac{A}{N} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi k L / N)}{\sin(\pi k / N)} \right)^2 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Φάσμα ενεργειακής πυκνότητας $|\alpha_k|^2$ για $L=5$, $N=10$, $A=1$

Σημ. $L=2N_1+1$ (βλ. προηγ. ερώτηση για N_1)

PROPERTIES OF DISCRETE-TIME FOURIER SERIES

Property	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
	$\left. \begin{array}{l} x[n] \\ y[n] \end{array} \right\} \text{ Periodic with period } N \text{ and} \\ \text{fundamental frequency } \omega_0 = 2\pi/N$	$\left. \begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array} \right\} \text{ Periodic with} \\ \text{period } N$
Linearity	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frequency Shifting	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugation	$x^*[n]$	a_{-k}^*
Time Reversal	$x[-n]$	a_{-k}
Time Scaling	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\frac{1}{m} a_k \left(\begin{array}{l} \text{viewed as periodic} \\ \text{with period } mN \end{array} \right)$
Periodic Convolution	$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$
First Difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
Running Sum	$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \left(\begin{array}{l} \text{finite valued and periodic only} \\ \text{if } a_0 = 0 \end{array} \right)$	$\left(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})} \right) a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	$x[n]$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	$x[n]$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \\ x_o[n] = \mathcal{O}\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \end{cases}$	$\begin{cases} \Re\{a_k\} \\ j\Im\{a_k\} \end{cases}$
Parseval's Relation for Periodic Signals		
$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] ^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k ^2$		

DTFT ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Τα περιοδικά σήματα διακριτού-χρόνου μπορούν να ενταχθούν στο πλαίσιο του DTFT θεωρώντας τον μετασχηματισμό ενός περιοδικού σήματος ως ένα τρέινο κρουστικών (impulse train) στον χώρο της συχνότητας.

Ας θεωρήσουμε το σήμα $x(n) = e^{j\omega_0 n}$.

Όπως και στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου, ο μετασχηματισμός Fourier αντιπροσωπεύεται ως μία κρουστική στη συχνότητα $\omega = \omega_0$.

Στην περίπτωση του διακριτού χρόνου γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι περιοδικός με περίοδο 2π . Συνεπώς θα έχουμε κρουστικές, εκτός της συχνότητας, ω_0 και στις συχνότητες $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$, ...

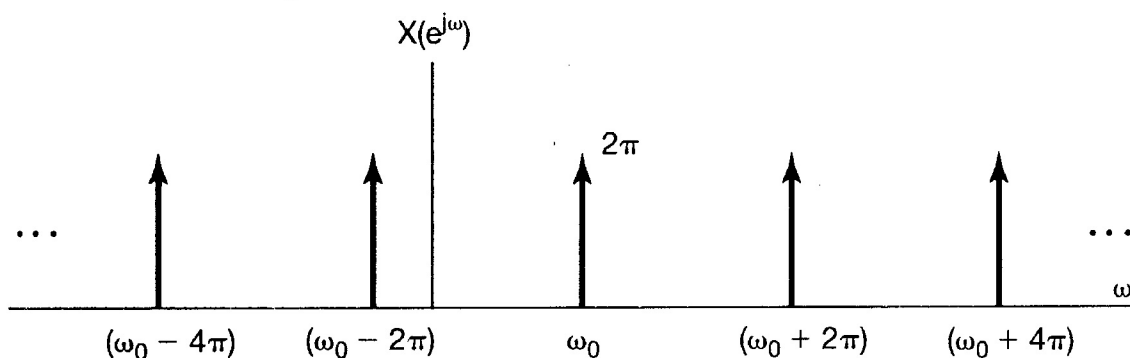
Θα έχουμε δηλαδή ένα τρέινο (συντό) κρουστικών και ο μετασχηματισμός Fourier του $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

Το φάσμα του σήματος $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.

Παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π περιλαμβάνει ακριβώς μία κρουστική. Συνεπώς, ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού σε ένα από αυτά τα διαστήματα, έστω το διάστημα που περιλαμβάνει την κρουστική στη συχνότητα $\omega_0 + 2\pi m$, δίνει:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi m)n} = e^{j\omega_0 n}$$



Γενίκευση: Στη γενική περίπτωση ενός περιοδικού σήματος $x(n)$ με περίοδο N και συντελεστές Fourier α_k ισχύει:

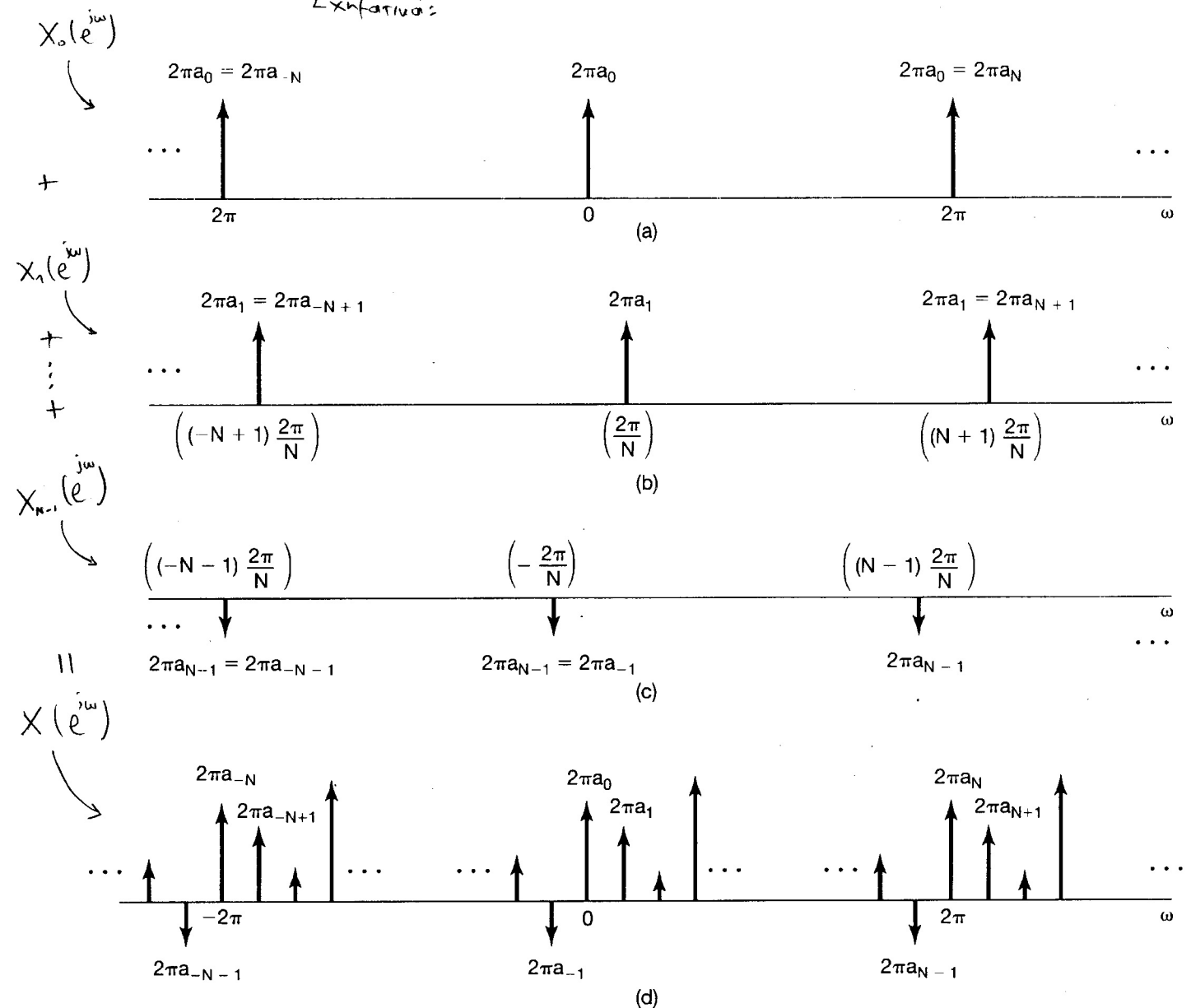
$$x(n) = \sum_{k \in \langle N \rangle} \alpha_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Γίνεται φανερό ότι ο μετασχηματισμός Fourier θα δίνεται από τη σχέση:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \alpha_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right)$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου προκύπτει απ' αυτόν από τους συντελεστές Fourier του σήματος.

Σχηματικά:



$$F \left\{ \begin{aligned} x(n) &= \alpha_0 + \alpha_1 e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \alpha_2 e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \dots + \alpha_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \\ X(e^{j\omega}) &= X_0(e^{j\omega}) + X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) + \dots + X_{N-1}(e^{j\omega}) \end{aligned} \right.$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο DTFT της $x(n) = \cos \omega_0 n$ για $\omega_0 = \frac{2\pi}{5}$

ΛΥΣΗ

$$x(n) = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

Γυνεπώς

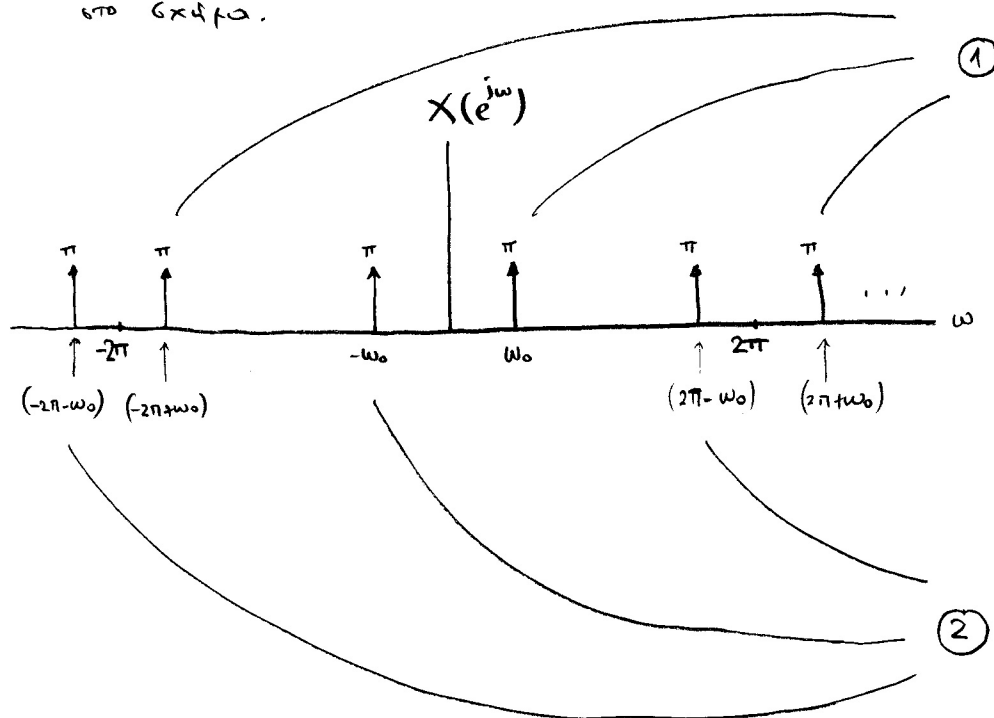
$$X(e^{j\omega}) = \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)}_{(2)}$$

$$\text{αφού } e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

Για $\omega_0 = \frac{2\pi}{5}$ και για $-\pi \leq \omega < \pi$ έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right)$$

και το $X(e^{j\omega})$ επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο 2π , όπως στο σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του περιοδικού τρένου (δυσκού) κρουστικών με περίοδο N :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n - kN)$$

ΛΥΣΗ Οι συντελεστές της σειράς Fourier διακριτού χρόνου (DTFS) του σήματος αυτού είναι:

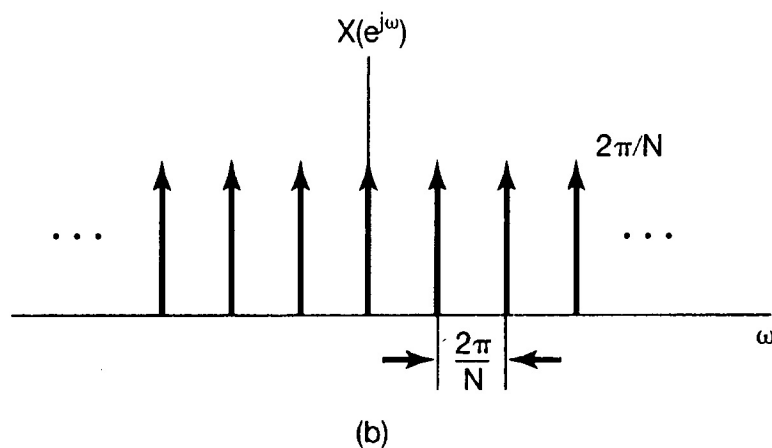
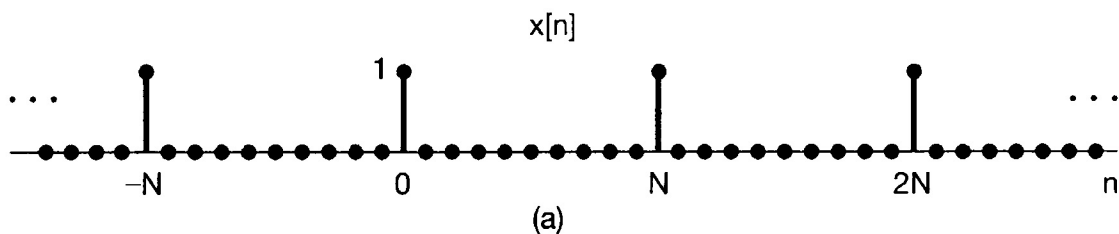
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Επιλέγοντας την περίοδο N μεταξύ 0 και $N-1$, δηλαδή $0 \leq n \leq N-1$, βρίσκουμε $a_k = \frac{1}{N}$.

Άρα ο DTFT του σήματος θα είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

Δηλαδή και πάλι ένας ωρεός κρουστικών με απόσταση $\frac{2\pi}{N}$ μεταξύ καθενός.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT της ζυγατικής ακολουθίας $u(n)$.

ΛΥΣΗ Εκφράζουμε την $u(n)$ συνάρτηση της άρτιας και περιττής συνιστώσας της:

$$u(n) = u_e(n) + u_o(n) \quad (1)$$

όπου

$$u_e(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta(n) \quad (2)$$

$$u_o(n) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(n) \quad (3) \quad [\operatorname{sgn}(n) \text{ είναι η ακολουθία προσήτου}]$$

Υπολογίζουμε τον DTFT

$$\begin{aligned} F\{u(n)\} &= F\{u_e(n)\} + F\{u_o(n)\} \Rightarrow \\ U(e^{j\omega}) &= U_e(e^{j\omega}) + U_o(e^{j\omega}) \quad (4) \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} U_e(e^{j\omega}) &= F\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta(n)\right\} = \langle \text{λόγω γραμμικότητας} \rangle = \\ &= F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2} \delta(n)\right\} = \\ &= \frac{1}{2} F\{1\} + \frac{1}{2} F\{\delta(n)\} \end{aligned}$$

$$\text{Όπως} \quad F\{\delta(n)\} = 1 \quad (5)$$

$$\text{και} \quad F\{1\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - 2\pi k) \quad (6)$$

όπως προκύπτει από τον DTFT του ριζωδμού εκθετικού $e^{j\omega_0 n}$

$$F\{e^{j\omega_0 n}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

για $\omega_0 = 0$.

Άρα με βάση τις (5), (6) βρίσκουμε ότι ο DTFT της άρτιας συνιστώσας ισούται με

$$\begin{aligned} U_e(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - 2\pi k) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) \quad (7) \end{aligned}$$

Ο DTFT της περίπτωσης συνιστώσας υπολογίζεται ως εξής:

$$(1) \rightarrow u(n) = u_e(n) + u_o(n) \Rightarrow$$

$$u_o(n) = u(n) - u_e(n) = u(n) - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta(n) \right] \Rightarrow$$

$$u_o(n) = u(n) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \delta(n) \quad (8)$$

$$\text{και} \quad u_o(n-1) = u(n-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \delta(n-1) \quad (9)$$

Αφαιρώντας
κατά μέλη $(8)-(9) \rightarrow u_o(n) - u_o(n-1) = \left[u(n) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \delta(n) \right] - \left[u(n-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \delta(n-1) \right] \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u_o(n) - u_o(n-1) &= \underbrace{u(n) - u(n-1)}_{\delta(n)} - \frac{1}{2} \delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1) = \\ &= \delta(n) - \frac{1}{2} \delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1) = \\ &= \frac{1}{2} \delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (10) \xrightarrow{\text{DTFT}} U_o(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} U_o(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} \Rightarrow \\ U_o(e^{j\omega}) &= \frac{\frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} \end{aligned} \quad (11)$$

Τέλος, με βάση τα αποτελέσματα των εξισώσεων (7), (11) ο DTFT της (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} (1) \xrightarrow{\text{DTFT}} U(e^{j\omega}) &= U_e(e^{j\omega}) + U_o(e^{j\omega}) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \right] + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \end{aligned} \quad (12)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο υπολογισμός του φάσματος (DTFT) της μοναδιαίας βηματικής ακολουθίας $u(n)$ μπορεί εύκολα να επιτευχθεί μέσω του ορίσμου της

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m)$$

και της ιδιότητας της συσσώρευσης (accumulation), η οποία είναι η αντίστοιχη της ολοκλήρωσης για τα συνεχούς χρόνου σήματα:

$$\sum_{m=-\infty}^n x(m) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

Για $x(n) = \delta(n)$, οπότε $X(e^{j\omega}) = 1$, έχουμε

$$\sum_{m=-\infty}^n \delta(m) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \cdot 1 + \pi \cdot 1 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

ή

$$u(n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Τέλος, όταν $\omega \in [-\pi, \pi]$ έχουμε $\delta(\omega - 2\pi k) = \delta(\omega)$

οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$u(n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \delta(\omega)$$

BASIC DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM PAIRS

Signal	Fourier Transform	Fourier Series Coefficients (if periodic)
$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq N/2 \end{cases}$ and $x[n + N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n + 1)a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n + r - 1)!}{n!(r - 1)!} a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—