



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

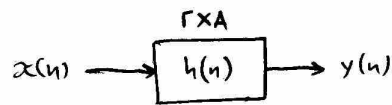
**Δ10 – ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ:
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ**

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2024 - 2025

ΣΧΕΣΗ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



Για κρουστική είσοδο $x(n) = \delta(n)$, η έξοδος του συστήματος είναι $y(n) = h(n)$, δηλαδή η κρουστική απόκριση. Η απόδειξη είναι εύκολη: $y(n) = x(n) * h(n) = \delta(n) * h(n) = h(n)$

Για βηματική είσοδο $x(n) = u(n)$, η έξοδος του συστήματος είναι $y(n) = s(n)$, δηλαδή η βηματική απόκριση, $s(n) = u(n) * h(n)$

Η σχέση που συνδέει τη κρουστική ακολουθία $\delta(n)$ με τη βηματική ακολουθία $u(n)$ είναι:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

Η εφαρμογή της κρουστικής εισόδου $\delta(n)$ στο ΓΧΑ δίνει ως έξοδο την κρουστική απόκριση $h(n)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n) * h(n) = \\ &= [u(n) - u(n-1)] * h(n) = \\ &= u(n) * h(n) - u(n-1) * h(n) = \\ &= s(n) - s(n-1) \end{aligned}$$

Άρα

$$h(n) = s(n) - s(n-1)$$

Με άλλα λόγια, η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου ισούται με την πρώτη διαφορά της βηματικής του απόκρισης.

Τέλος, η βηματική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου μπορεί να υπολογιστεί από την κρουστική απόκριση του συστήματος ως

$$s(n) = h(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^n h(m)$$

Δεδομένου ότι $u(n)$ είναι η κρουστική απόκριση του συσσωρευτή (accumulator).

ΑΣΚΗΣΗ (ΘΕΜΑ 1)

Δίνεται το διακριτού χρόνου σήμα

$$x(n) = \cos(n\pi/8).$$

Να βρεθούν δύο διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου τα οποία παράγουν το $x(n)$ όταν δειγματοληπτηθούν με συχνότητα $F_s=10\text{KHz}$.

Λύση

$$\omega = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \Omega T = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\pi F \cdot \frac{1}{F_s} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow F = \frac{1}{16} F_s = \frac{1}{16} \cdot 10000 \text{ Hz} = 625 \text{ Hz}$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε σήμα με συχνότητα $F' = F + k F_s$ θα δίνει

το ίδιο δείγμα, αφού

$$\begin{aligned} \cos(2\pi F' t) &= \cos(2\pi (F + k F_s) t) = \cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n + \frac{2\pi k F_s n}{F_s}\right) = \cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n + 2\pi k n\right) = \\ &= \cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{1}{16} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8} n\right) \end{aligned}$$

Άρα για διαφορετικά k θα έχουμε τις διαφορετικές συχνότητες που θα δίνουν τα ίδια δείγματα.

$$\text{Για } k=1 \leadsto F_1 = F + k F_s = F + F_s = 625 + 10000 = 10625 \text{ Hz}$$

$$\text{Για } k=2 \leadsto F_2 = F + k F_s = F + 2 F_s = 625 + 20000 = 20625 \text{ Hz}$$

Θυμηθείτε ότι το k μπορεί να είναι και αρνητικός ακέραιος.

$$\text{Για } k=-1 \leadsto F_{-1} = F + k F_s = F - F_s = 625 - 10000 = -9375 \text{ Hz}$$

$$\text{Για } k=-10 \leadsto F_{-10} = F + k F_s = F - 10 F_s = 625 - 100000 = -99375 \text{ Hz}$$

Τελικά, κάποια από τα σήματα που όταν δειγματοληπτηθούν με ρυθμό $F_s=10\text{KHz}$ παράγουν το σήμα $x(n)=\cos(n\pi/8)$ είναι τα εξής:

$$\rightarrow \cos(2\pi F t) = \cos(2\pi 625 t) = \cos(1250\pi t)$$

$$\rightarrow \cos(2\pi F_1 t) = \cos(2\pi 10625 t) = \cos(21250\pi t)$$

$\rightarrow \dots$

ΑΣΚΗΣΗ Δίνονται τα σήματα διακριτού χρόνου $x_1(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$, $x_2(n) = x_1^2(n)$, $x_3(n) = x_1^3(n)$, $x_4(n) = x_1^4(n)$. Να εστιάσετε εάν αυτά είναι περιθωδια και στην περίπτωση που αυτό ισχύει, να υπολογίσετε τη θεμελιώδη περίοδο. Να σχεδιάσετε τα σήματα (πρώτα 300 δείγματα).

ΛΥΣΗ • $x_1(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

$$\hookrightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\pi f_1 = \frac{\pi}{8} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{16} \xrightarrow{\text{ρυθμός}} N_1 = 16$$

• $x_2(n) = x_1^2(n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(2\frac{\pi}{8}n\right) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

$$\downarrow \omega_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi f_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{8} \text{ ρυθμός} \downarrow N_2 = 8$$

Άρα το σήμα $x_2(n)$ έχει περίοδο 8, δηλαδή τρεις φορές το σήμα του σήματος $x_1(n)$. Αυτό σημαίνει ότι η συχνότητα του σήματος $x_2(n)$ είναι διπλάσια της συχνότητας του σήματος $x_1(n)$.

• $x_3(n) = x_1^3(n) = \cos^3\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right] =$

$$= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$\uparrow N_1 = 16$$

$$\uparrow N_1 = 16 \quad \uparrow N_2 = 8$$

$$N_{12} = \text{ΕΚΠ}(N_1, N_2) = \text{ΕΚΠ}(16, 8) = 16$$

$$N_3 = \text{ΕΚΠ}(N_1, N_{12}) = \text{ΕΚΠ}(16, 16) = 16$$

Άρα το σήμα $x_3(n)$ έχει περίοδο $N_3 = 16$, δηλαδή ίση με την περίοδο του σήματος $x_1(n)$.

$$\bullet \quad x_4(n) = x_1^4(n) = \cos^4\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{4}n\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2 \frac{\pi}{4}n\right) \right] =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$\uparrow$$

 $N_0 = 1$

$$\uparrow$$

 $N_2 = 8$

$$\uparrow$$

 $\omega_s = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi f_s = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_s = \frac{1}{4} \text{ ρυθμός}$
 $N_5 = 4$

$$N_{24} = \text{ΕΚΠ}(N_2, N_4) = \text{ΕΚΠ}(8, 4) = 8$$

$$N_4 = \text{ΕΚΠ}(N_0, N_{24}) = (1, 8) = 8$$

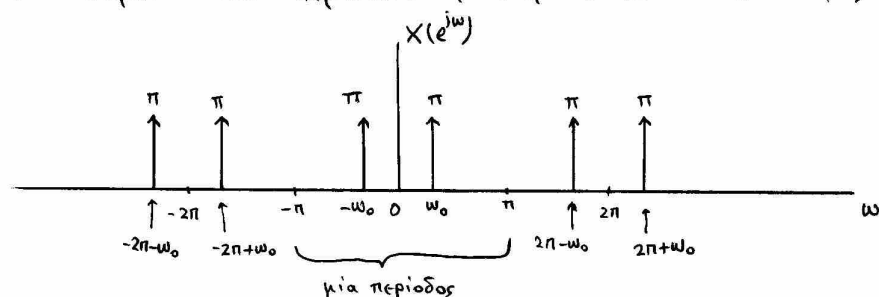
- Ένας άλλος τρόπος για τον υπολογισμό της περιόδου, δηλαδή της συχνότητας, καθενός από τα σήματα, είναι μέσω του μετασχηματισμού Fourier και της ιδιότητας της διχόμορφωσης ή πολλαπλασιασμού στον χρόνο. Συγκεκριμένα ότι

$$x(n) \cdot y(n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) \cdot Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

καθώς και ότι

$$\underbrace{\cos(\omega_0 n)}_{x(n)} \xleftrightarrow{F} \underbrace{\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) \right\}}_{X(e^{j\omega})}$$

Με άλλα λόγια ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) ενός συνεχούς σήματος συχνότητας ω_0 είναι δύο κρουστικές (στις θέσεις ω_0 και $-\omega_0$) με βάρους π , οι οποίες επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο 2π . (βλ. σχήμα).

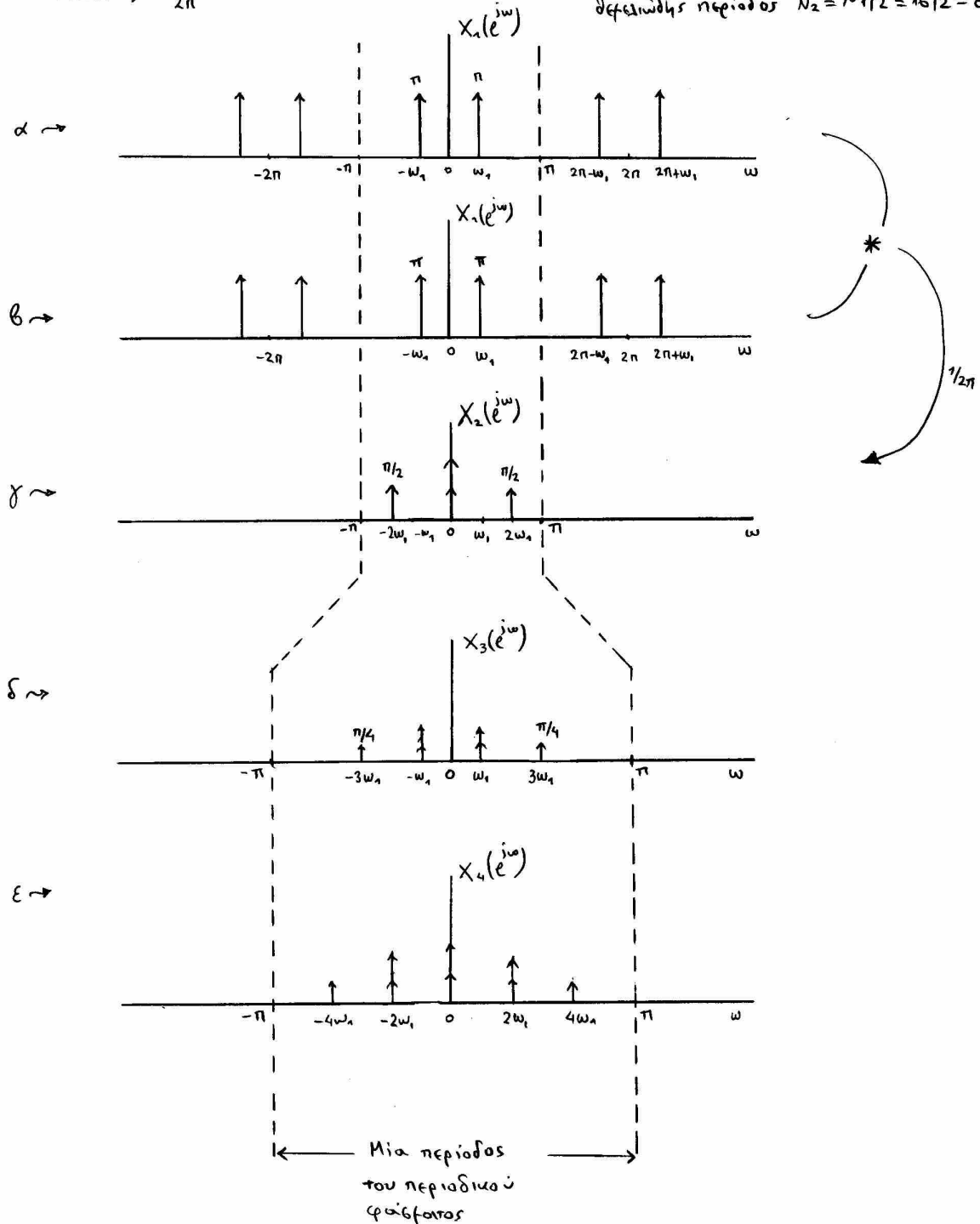


- Με βάση τα παραπάνω, το σήμα $x_1(n) = \cos(\frac{\pi}{8}n)$ έχει συχνότητα $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ και όπως δείξαμε προηγουμένως είναι περιοδικό με περίοδο $N_1 = 16$. Το φάσμα του είναι αυτό του σήματος της προηγούμενης σταδίας για $\omega_0 = \omega_1 = \frac{\pi}{8}$.

- Το σήμα $x_2(n) = \cos^2(\frac{\pi}{8}n)$ γράφεται ως γινόμενο: $x_2(n) = \cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \cos(\frac{\pi}{8}n)$.

Το φάσμα του προκύπτει από τη συνέλιξη των φασμάτων των σιγμάτων,

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_1(e^{j\omega}) \quad (\text{βλ. σχ. γ}), \quad \text{Η θεμελιώδης συχνότητα είναι } 2\omega_1 \text{ και άρα η θεμελιώδης περίοδος } N_2 = N_1/2 = 16/2 = 8.$$



Σημείωση: Τα φάσματα είναι περιοδικά με περίοδο 2π . Δείχνεται τόνος η μία περίοδος από $-\pi$ έως π για λόγους απλότητας των σιγμάτων.

- Το σήμα $x_3(n) = \cos^3\left(\frac{\pi}{8}n\right)$ γράφεται ως $x_3(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)$.

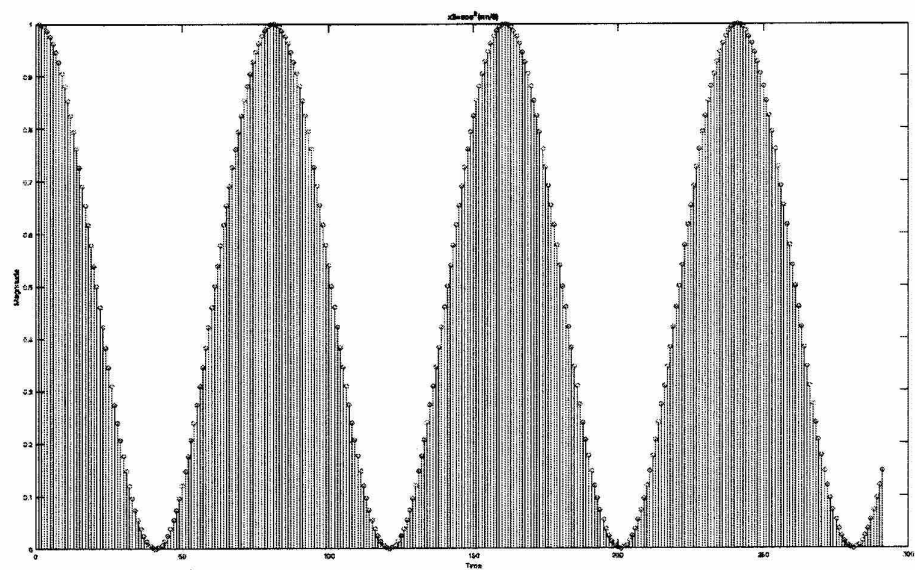
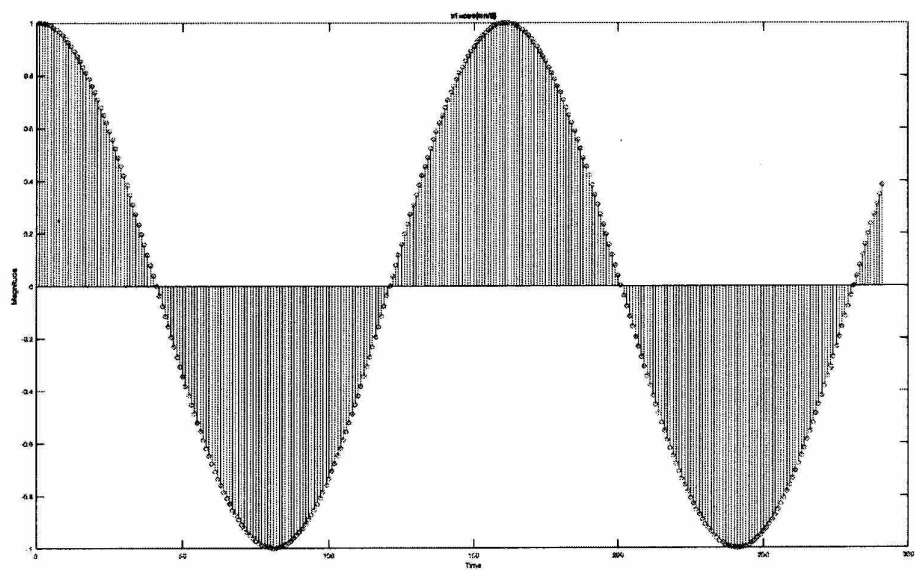
Άρα το φάσμα του $X_3(e^{j\omega})$ θα ισούται με τη συνέλιξη των φασμάτων $X_1(e^{j\omega})$ και $X_2(e^{j\omega})$, ήτοι $X_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$.

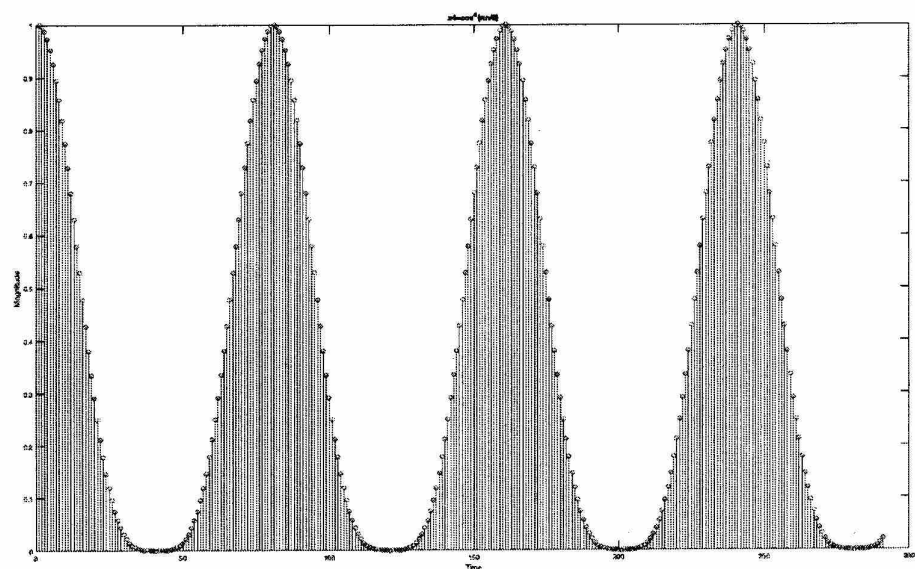
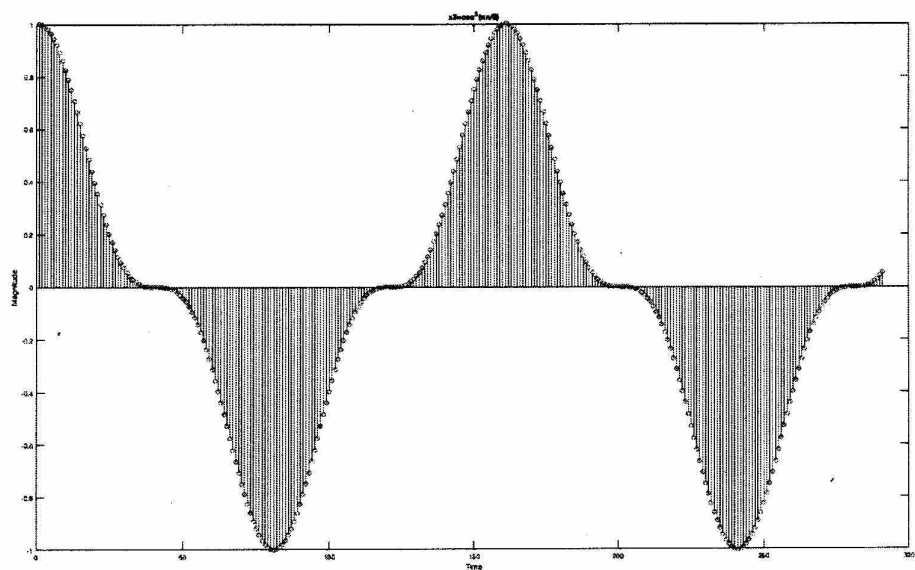
Από το σχήμα (δ) βλέπουμε ότι το σήμα $x_3(n)$ αποτελείται από τις συχνότητες ω_1 και $3\omega_1$. Άρα η βασική (θεμελιώδης) συχνότητα είναι η ω_1 και κατά συνέπεια η θεμελιώδης περίοδος ισούται με εκείνη του σήματος $x_1(n)$, δηλαδή $N_1 = 16$.

- Το σήμα $x_4(n) = \cos^4\left(\frac{\pi}{8}n\right)$ γράφεται ως $x_4(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{8}n\right)$.

Άρα το φάσμα $X_4(e^{j\omega})$ θα ισούται με τη συνέλιξη των φασμάτων $X_1(e^{j\omega})$ και $X_3(e^{j\omega})$, ήτοι $X_4(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_3(e^{j\omega})$.

Από το σχήμα (ε) βλέπουμε ότι το σήμα $x_4(n)$ αποτελείται από τις συχνότητες $2\omega_1$ και $4\omega_1$. Άρα η θεμελιώδης συχνότητα είναι $2\omega_1$ και αντίστοιχα η θεμελιώδης περίοδος θα ισούται με 8.





```

clear all;
close all;
clc;

L=30;
n = 0:0.1:L-1; % 300 samples

% Discrete Time Signal x1(n)
% -----
f2 = 1/16;
x1 = cos(2*pi*f2*n);
% Plot the magnitude of x1
figure()
stem(x1)
title('x1=cos( $\pi n/8$ )');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')

% Discrete Time Signal x2(n)
% -----
f2 = 1/16;
x2 = cos(2*pi*f2*n).^2;
% Plot the magnitude of x2
figure()
stem(x2)
title('x2=cos^2( $\pi n/8$ )');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')

% Discrete Time Signal x3(n)
% -----
f2 = 1/16;
x3 = cos(2*pi*f2*n).^3;
% Plot the magnitude of x3
figure()
stem(x3)
title('x3=cos^3( $\pi n/8$ )');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')

% Discrete Time Signal x4(n)
% -----
f2 = 1/16;
x4 = cos(2*pi*f2*n).^4;
% Plot the magnitude of x4
figure()
stem(x4)
title('x4=cos^4( $\pi n/8$ )');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')

```

ΑΣΚΗΣΗ Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει χρονική απόκριση $h(n) = \alpha^n u(n)$ όπου $|\alpha| < 1$.

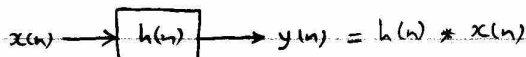
Στο σύστημα εφαρμόζεται η είσοδος $x(n] = b^n [u(n) - u(n-5)]$.

α. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος.

β. Πάρετε οι τιμές της εξόδου $y(n)$ για $n = 0, 2, 10$ όταν $\alpha = 0.6$ και $b = 0.8$;

γ. Σχεδιάστε τα σήματα $x(n)$, $h(n)$, $y(n)$ για $n \in [0, 10]$ όταν $\alpha = 0.6$ και $b = 0.8$.

ΛΥΣΗ



$$\begin{aligned} \alpha. \quad y(n) &= h(n) * x(n) = \alpha^n u(n) * b^n [u(n) - u(n-5)] = \\ &= \underbrace{\alpha^n u(n) * b^n u(n)}_{y_1(n)} - \underbrace{\alpha^n u(n) * b^n u(n-5)}_{y_2(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \alpha^n u(n) * b^n u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m) b^{n-m} u(n-m) = \\ &= \sum_{m=0}^n \alpha^m b^{n-m} u(n-m) = \\ &= b^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{\alpha}{b}\right)^m = b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} \end{aligned}$$

και τελικά

$$y_1(n) = b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n) \quad (1)$$

$$y_2(n) = \alpha^n u(n) * b^n u(n-5) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m) b^{n-m} u(n-m-5) = \\ &= b^n \sum_{m=0}^{n-5} \left(\frac{\alpha}{b}\right)^m = b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-5+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} \end{aligned}$$

και τελικά

$$y_2(n) = b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n-5) \quad (2)$$

Άρα

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) - y_2(n) = \\ &= b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n) - b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n-5) \quad (3) \end{aligned}$$

Η είσοδος του συστήματος $y(n)$ πρέπει να γραφτεί και ως εξής:

$$y(n) = \begin{cases} 0 & \text{για } n < 0 \\ b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} & \text{για } 0 \leq n \leq 4 \\ b^n \frac{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4} - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} & \text{για } n \geq 5 \end{cases}$$

Συντηρώμε ότι για $n \geq 5$ οι παραστάσεις διφασμής $u(n)$ και $u(n-5)$ είναι ίσες με 1, οπότε η εξίσωση (3) δίνει:

$$\begin{aligned} y(n) &= b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} - b^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} = \\ &= b^n \frac{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}\right] - \left[1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}\right]}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} = \\ &= b^n \frac{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4} - \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{b}\right)} \end{aligned}$$

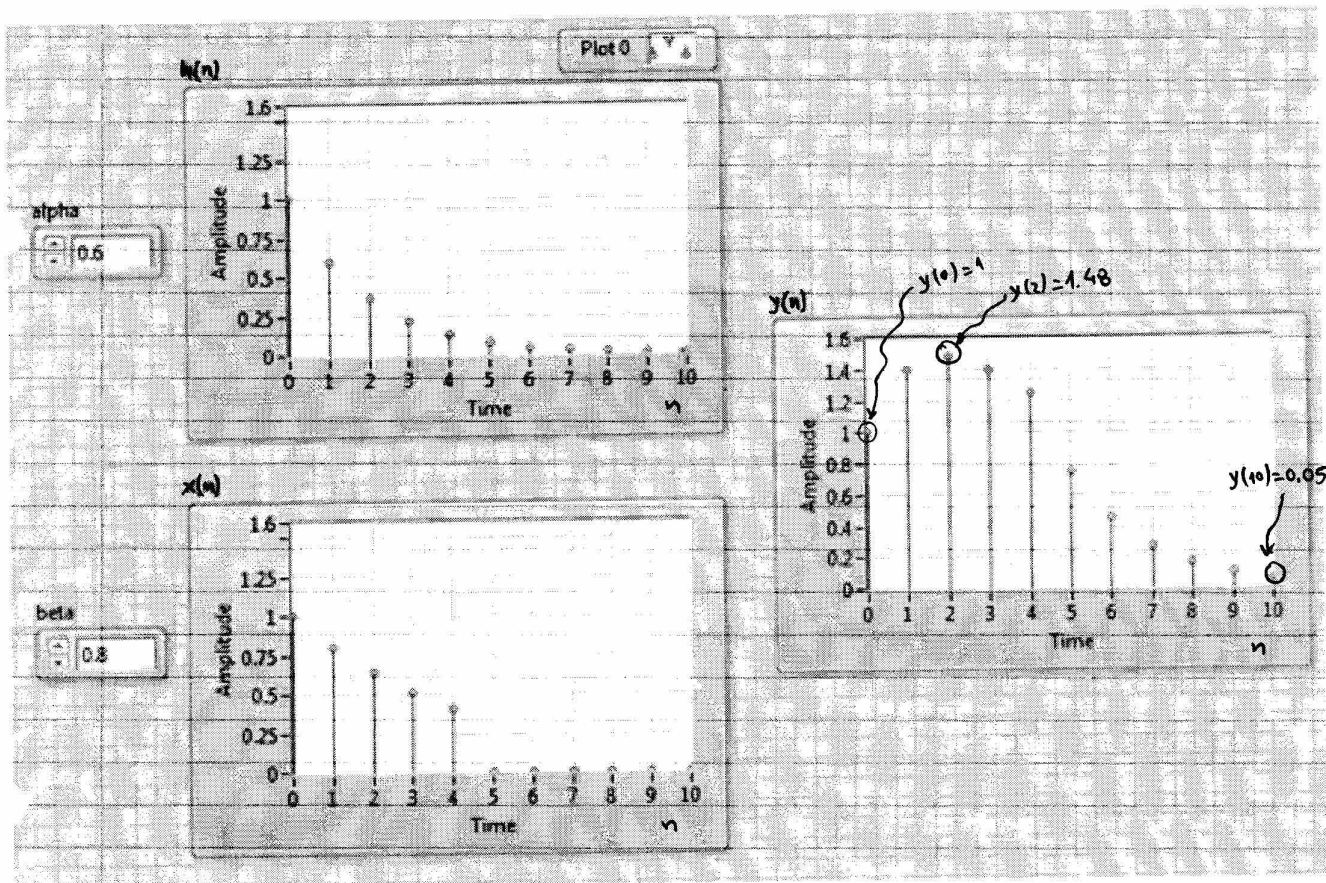
β. Για $\alpha = 0.6$, $b = 0.8$ η είσοδος $y(n)$ στις χρονικές στιγμές $n = 0, 2, 10$ ισούται με:

$$n=0 \rightarrow y(0) = 0.8^0 \frac{1 - \left(\frac{0.6}{0.8}\right)^{0+1}}{1 - \left(\frac{0.6}{0.8}\right)} = 1 \frac{1 - \left(\frac{0.6}{0.8}\right)}{1 - \left(\frac{0.6}{0.8}\right)} = 1$$

$$n=2 \rightarrow y(2) = 0.8^2 \frac{1 - \left(\frac{0.6}{0.8}\right)^{2+1}}{1 - \left(\frac{0.6}{0.8}\right)} = 0.64 \frac{1 - 0.75^3}{1 - 0.75} = 1.48$$

$$n=10 \rightarrow y(10) = 0.8^{10} \frac{\left(\frac{0.6}{0.8}\right)^{10-4} - \left(\frac{0.6}{0.8}\right)^{10+1}}{1 - \left(\frac{0.6}{0.8}\right)} = 0.0583$$

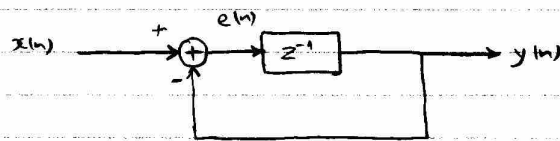
γ. Τα 11 πρώτα δείγματα των σημάτων $x(n)$, $h(n)$, $y(n)$ φαίνονται παρακάτω.



Προσοχή: Η $y_2(n)$ ΔΕΝ προκύπτει από ολίσθηση (καθυστέρηση) της $y_1(n)$ ώστε να χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη ιδιότητα της συνέλιξης. Παρατηρήστε ότι η ολίσθηση (καθυστέρηση) της $b^n u(n)$ κατά 5 δείγματα δίνει είναι η $b^{n-5} u(n-5)$ και όχι η $b^n u(n-5)$ που μας δίνεται. Θα μπορούσαμε βέβαια να εκφράσουμε την $b^n u(n-5)$ ως $b^5 \cdot b^{n-5} u(n-5)$, οπότε στη περίπτωση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί η ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο ως εξής:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \underbrace{\alpha^n u(n) * b^n u(n)}_{y_1(n)} - b^5 \underbrace{\alpha^n u(n) * b^{n-5} u(n-5)}_{y_1(n-5)} = y_1(n) - b^5 y_1(n-5) = \\
 &= b^n \frac{1 - (\frac{\alpha}{b})^{n+1}}{1 - (\frac{\alpha}{b})} u(n) - b^5 b^{n-5} \frac{1 - (\frac{\alpha}{b})^{n-5+1}}{1 - (\frac{\alpha}{b})} u(n-5)
 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Για το σύστημα που σχηματίζεται να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την έξοδο $y(n]$ για $x(n) = \delta(n]$ και για $x(n) = u(n]$. Θεωρείτε ότι $y(n) = 0$ για $n < 0$.



ΛΥΣΗ

$$\begin{cases} e[n] = x[n] - y[n] \\ y[n] = e[n-1] \end{cases} \Rightarrow y[n] = x[n-1] - y[n-1] \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας τον ΜΖ και στα δύο μέλη της (1) έχουμε

$$Y(z) = z^{-1} X(z) - z^{-1} Y(z) \Rightarrow$$

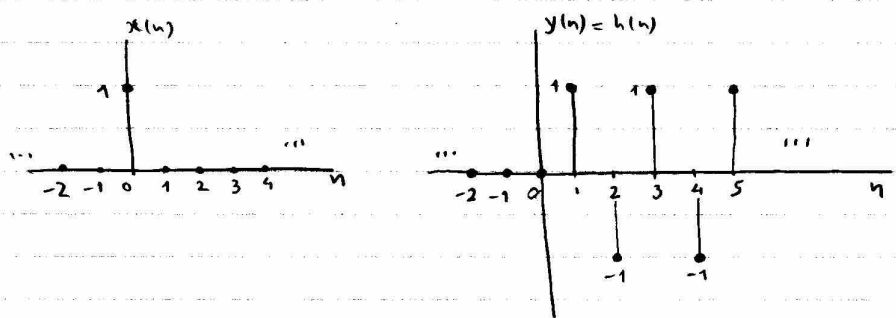
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2)$$

Άρα

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}} = z^{-1} \underbrace{\frac{1}{1 + z^{-1}}}_{(-1)^n u[n]} \quad (3)$$

$$h[n] = (-1)^{n-1} u[n-1] \quad (4)$$

Συνεπώς για είσοδο $x[n] = \delta[n]$ η έξοδος $y[n] = h[n] = (-1)^{n-1} u[n-1]$



Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης από την $H(z)$

είναι ο εξής:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{1 + z^{-1} - 1}{1 + z^{-1}} = 1 - \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

$$\Rightarrow h[n] = \delta[n] - (-1)^n u[n] = \delta[n] + (-1)^{n+1} u[n]$$

Για είσοδο $x(n) = u(n)$ η έξοδος μπορεί να υπολογιστεί είτε στο πεδίο του χρόνου (μέσω της συνέλιξης), είτε στο πεδίο z (μέσω πολλαπλασιασμού).

A. Πεδίο χρόνου

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-1} u(m-1) u(n-m) = \\ &= \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} = \langle \text{όπου } m-1 = l \Rightarrow m = l+1 \rangle = \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l = \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n] u(n) \quad (5) \end{aligned}$$

B. Πεδίο z

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{A_1}{1+z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

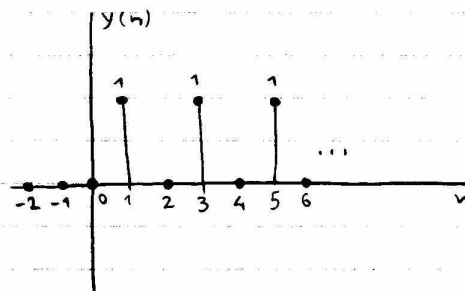
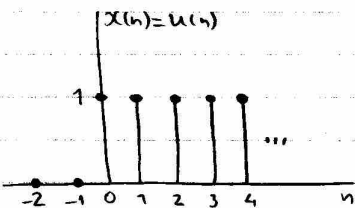
όπου

$$A_1 = Y(z) (1+z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-1} = \frac{-1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2} \quad (6)$$

$$A_2 = Y(z) (1-z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (7)$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{-\frac{1}{2}}{1+z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}} \right] \\ y(n) &= \frac{1}{2} [u(n) - (-1)^n u(n)] = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n] u(n) \quad (8) \end{aligned}$$



B: τρόπος υπολογισμού

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{z^{-1}} = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{B_1}{1+z^{-1}} + \frac{B_2}{1-z^{-1}}$$

όπου

$$B_1 = (1+z^{-1}) \frac{Y(z)}{z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-1} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$B_2 = (1-z^{-1}) \frac{Y(z)}{z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1+z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \\ \xrightarrow{z^{-1}} y(n) &= \frac{1}{2} (-1)^{n-1} u(n-1) + \frac{1}{2} (1)^{n-1} u(n-1) = \\ &= \frac{1}{2} [1 + (-1)^{n-1}] u(n-1) \end{aligned}$$

Γ. Τρόπος υπολογισμού

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})} = \langle \text{πολ. } j\omega \text{ αρ. } \theta \text{ και η-πολ. επί } z^2 \rangle =$$

$$= \frac{z}{(z+1)(z-1)} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{C_1}{z+1} + \frac{C_2}{z-1}$$

όπου

$$C_1 = (z+1) \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{z-1} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = (z-1) \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

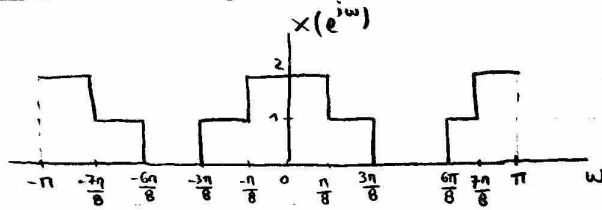
Άρα

$$Y(z) = -\frac{1}{2} \frac{z}{z+1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Z^{-1} \left\{ Y(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}} \right] \right. \\ \left. \rightarrow y(n) = \frac{1}{2} [u(n) - (-1)^n u(n)] = \right. \\ \left. = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n] u(n) \right\} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το εύρος $X(\omega)$ του οποίου ο DTFT είναι αυτό του σχήματος.



(πάρνω τα subperiods τξι)

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\frac{7\pi}{8}} 2 e^{j\omega n} d\omega + \int_{-\frac{7\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} 2 e^{j\omega n} d\omega + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{6\pi}{8}} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} e^{j\omega n} d\omega + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{8}} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} e^{j\omega n} d\omega + \int_{-\frac{\pi}{8}}^0 2 e^{j\omega n} d\omega + \int_0^{\frac{\pi}{8}} 2 e^{j\omega n} d\omega \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{jn} \left(e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^{-\frac{7\pi}{8}} + e^{j\omega n} \Big|_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi} \right) + \frac{1}{jn} \left(e^{j\omega n} \Big|_{-\frac{7\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} + e^{j\omega n} \Big|_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{jn} \left(e^{j\omega n} \Big|_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{8}} + e^{j\omega n} \Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \right) + \frac{2}{jn} \left(e^{j\omega n} \Big|_{-\frac{\pi}{8}}^0 + e^{j\omega n} \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{jn} \left(e^{-j\frac{7\pi}{8}n} - e^{-jn\pi} + e^{jn\pi} - e^{j\frac{7\pi}{8}n} \right) + \frac{1}{jn} \left(e^{-j\frac{6\pi}{8}n} - e^{-j\frac{7\pi}{8}n} + e^{j\frac{7\pi}{8}n} - e^{j\frac{6\pi}{8}n} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{jn} \left(e^{-j\frac{\pi}{8}n} - e^{-j\frac{3\pi}{8}n} + e^{j\frac{3\pi}{8}n} - e^{j\frac{\pi}{8}n} \right) + \frac{2}{jn} \left(e^{-j\frac{\pi}{8}n} - e^{-j0} + e^{j0} - e^{j\frac{\pi}{8}n} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{jn} \left(2j \sin \pi n - 2j \sin \frac{7\pi}{8} n \right) + \frac{1}{jn} \left(2j \sin \frac{7\pi}{8} n - 2j \sin \frac{6\pi}{8} n \right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{jn} \left(2j \sin \frac{3\pi}{8} n - 2j \sin \frac{\pi}{8} n \right) + \frac{2}{jn} \left(2j \sin \frac{\pi}{8} n \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{n} \left[2 \sin \pi n - 2 \sin \frac{7\pi}{8} n + \sin \frac{7\pi}{8} n - \sin \frac{6\pi}{8} n + \sin \frac{3\pi}{8} n - \sin \frac{\pi}{8} n + 2 \sin \frac{\pi}{8} n \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi n} \left[-\sin \frac{7\pi}{8} n - \sin \frac{6\pi}{8} n + \sin \frac{3\pi}{8} n + \sin \frac{\pi}{8} n \right] =
 \end{aligned}$$

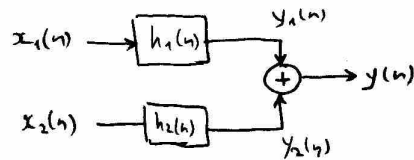
ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογίσετε του συντελεστές $Y(0)$ και $Y(2)$ του DFT του σήματος $y(n)$.

Δίνεται: $x_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + 2[u(n-2) - u(n-3)]$

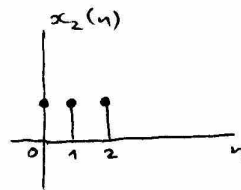
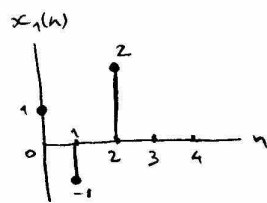
$h_1(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1)$

$x_2(n) = u(n) - u(n-3)$

$h_2(n) = -\delta(n) - \delta(n-1)$



ΛΥΣΗ



$h_1(n) = \{2, 1\}$
↑
 $n=0$

$h_2(n) = \{-1, -1\}$
↑
 $n=0$

$y_1(n) = h_1(n) * x_1(n)$

1	-1	2	← $x_1(n)$	
	2	1	← $h_1(n)$	
1	-1	2		
2	-2	4		
2	-1	3	2	← $y_1(n)$

$y_2(n) = h_2(n) * x_2(n)$

1	1	1	
	-1	-1	
-1	-1	-1	
-1	-1	-1	
-1	-2	-2	-1

$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = \{1, -3, 1, 1\}$

DFT: $Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{nk} \Rightarrow Y(k) = \sum_{n=0}^3 y(n) W_4^{nk} = \sum_{n=0}^3 y(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}, k=0,1,2,3$

$Y(0) = \sum_{n=0}^3 y(n) W_4^{n \cdot 0} = \sum_{n=0}^3 y(n) = y(0) + y(1) + y(2) + y(3) = 1 + (-3) + 1 + 1 = 0$

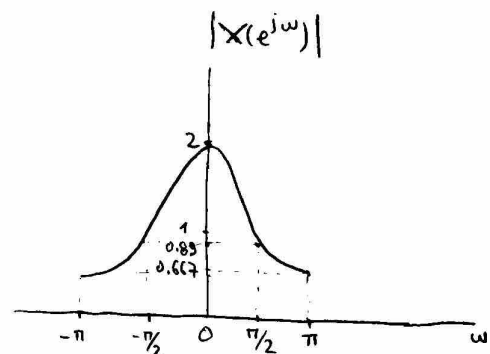
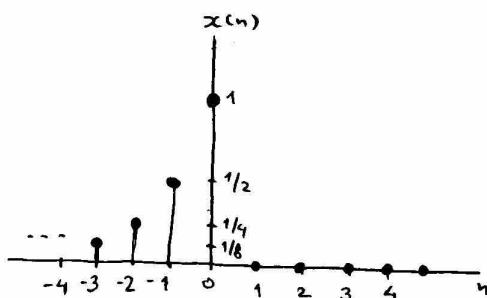
$Y(2) = \sum_{n=0}^3 y(n) W_4^{n \cdot 2} = y(0) e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 0 \cdot 2} + y(1) e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 2} + y(2) e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 2} + y(3) e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 2} =$
 $= 1 \cdot e^{-j0} + (-3) \cdot e^{-j\pi} + 1 \cdot e^{-j2\pi} + 1 \cdot e^{-j3\pi} =$
 $= 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) =$
 $= 1 + 3 + 1 - 1 = 4$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(n) = 2^n u(-n)$. Σχεδιάστε το σήμα και το φάσμα του σήματος που.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(-n) e^{-j\omega n} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^0 2^n e^{-j\omega n} = \langle \theta \text{ έρω } -n = m \Rightarrow n = -m \rangle = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} e^{j\omega m} = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} (2^{-1} e^{j\omega})^m = \\
 &= \frac{1}{1 - 2^{-1} e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{e^{j\omega}}{2}} = \frac{2}{2 - e^{j\omega}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |X(e^{j\omega})| &= \left| \frac{2}{2 - e^{j\omega}} \right| = \frac{2}{|2 - \cos \omega - j \sin \omega|} = \frac{2}{\sqrt{(2 - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{4 + \cos^2 \omega - 4 \cos \omega + \sin^2 \omega}} = \frac{2}{\sqrt{5 - 4 \cos \omega}}
 \end{aligned}$$



ΑΕΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT των συνάρτησεων:

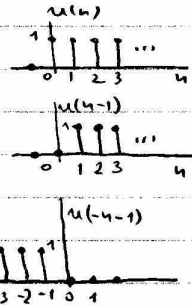
α. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$

β. $\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u(-n-2)$

ΛΥΣΗ

α.

$$\begin{aligned} F\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1) e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-j\omega n} = \langle \text{Dirac } l=-n \rangle \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l e^{j\omega l} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{j\omega}\right)^l - \left(\frac{1}{2}\right)^0 e^{j\omega 0} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\omega}} - 1 = \frac{\frac{1}{2} e^{j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{j\omega}} \end{aligned}$$



β.

$$\begin{aligned} F\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u(-n-2)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u(-n-2) e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} e^{-j\omega n} = \langle \text{Dirac } q=-n \rangle \\ &= \sum_{q=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^q = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^q - \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^0 - \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^1 = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}} - 1 - \frac{1}{3} e^{j\omega} = \\ &= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}\right) - \frac{1}{3} e^{j\omega} \left(1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}\right)}{1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}} = \\ &= \frac{1 - 1 + \frac{1}{3} e^{j\omega} - \frac{1}{3} e^{j\omega} + \frac{1}{9} e^{j2\omega}}{1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}} = \\ &= \frac{\frac{1}{9} e^{j2\omega}}{1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(n) = e^{j\omega_0 n}$, $n \in [-N, N]$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \\
 &= \sum_{n=-N}^N e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \\
 &= \sum_{n=-N}^N e^{-j(\omega - \omega_0)n} = \left\langle \text{πρόσθεση της εκφών, } \sum_{n=0}^m a^n = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} \right\rangle \\
 &= \frac{e^{-j\theta(-N)} - e^{-j\theta(N+1)}}{1 - e^{-j\theta}} = \left\langle \text{εθέρω } \theta = \omega - \omega_0 \right\rangle \\
 &= \frac{e^{j\theta N} - e^{-j\theta(N+1)}}{1 - e^{-j\theta}} = \\
 &= \frac{e^{j\theta N} - e^{-j\theta(2N+1)}}{1 - e^{-j\theta}} = \\
 &= e^{j\theta N} \frac{1 - e^{-j\theta(2N+1)/2}}{1 - e^{-j\theta/2}} = \\
 &= e^{j\theta N} \frac{e^{-j\theta(2N+1)/2} \left[e^{j\theta(2N+1)/2} - e^{-j\theta(2N+1)/2} \right]}{e^{-j\theta/2} \left[e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2} \right]} = \\
 &= \underbrace{e^{j\theta N} e^{-j\theta(2N+1)/2} e^{j\theta/2}}_1 \cdot \frac{2j \sin[\theta(2N+1)/2]}{2j \sin[\theta/2]} = \\
 &= \frac{\sin[(\omega - \omega_0)(2N+1)/2]}{\sin[(\omega - \omega_0)/2]}
 \end{aligned}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[(2N+1) \frac{\omega - \omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega - \omega_0}{2}\right]} = \frac{\sin\left[(N + \frac{1}{2})(\omega - \omega_0)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)\right]} \quad (1)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Παρατηρούμε ότι $x(n) = c(n) \cdot p(n)$, όπου $c(n) = e^{j\omega_0 n}$, $p(n) = u(n+N) - u(n-N-1)$. Τα φαράκια των $c(n)$ και $p(n)$ είναι αντίστοιχα για κρούση στη συχνότητα ω_0 και η ψηφιακή σιγή: $\sin[(N+1/2)\omega] / \sin[\omega/2]$. (2)

Το σήμα $x(n)$ ισούται με το γινόμενο των σιγών $c(n)$ και $p(n)$. Το φαράκι του $x(n)$ ισούται με τη συνέλιξη των φαράκιων των $c(n)$ και $p(n)$. Η συνέλιξη με την κρούση ισοδυναμεί με μετατόπιση του φαράκι στο σήμα που ερχόμαστε η κρούση, δηλαδή στην προκύπτει περίπτωση στο ω_0 . Άρα η σχέση (2) παίρνει χρώμα, η φέρει της σχέσης (1) για ω ίσο με $\omega - \omega_0$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(n) = \cos(\omega_0 n)$, $n \in [-N, N]$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-N}^N \cos(\omega_0 n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^N \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{-j(\omega - \omega_0)n}}_{X_1(e^{j\omega})} + \underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{-j(\omega + \omega_0)n}}_{X_2(e^{j\omega})} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Αλλά το $X_1(e^{j\omega})$ το υπολογίσατε σε προηγούμενη άσκηση:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[(2N+1) \frac{\omega - \omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega - \omega_0}{2}\right]} \quad (2)$$

Όποια μπορείτε να βρείτε ότι

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[(2N+1) \frac{\omega + \omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega + \omega_0}{2}\right]} \quad (3)$$

Με βάση τις (2), (3) η (1) γίνεται:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left[(2N+1) \frac{\omega - \omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega - \omega_0}{2}\right]} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left[(2N+1) \frac{\omega + \omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega + \omega_0}{2}\right]} \quad (4)$$

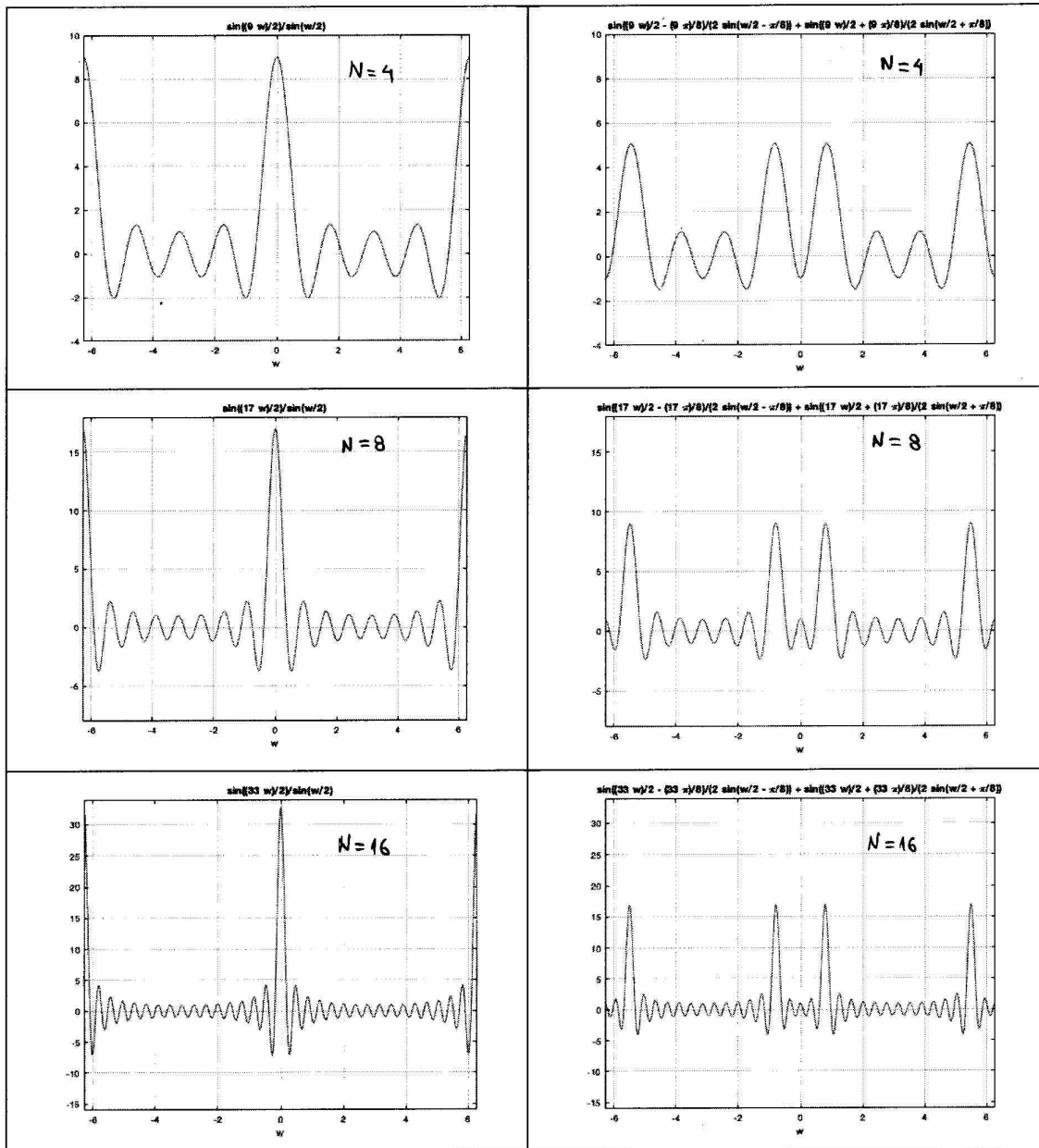
ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η σχέση (4) θα μπορούσε καλύτερα να γραφτεί ως:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})(\omega - \omega_0)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)\right]} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})(\omega + \omega_0)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega + \omega_0)\right]} \quad (5)$$

Με τον τρόπο αυτό γίνεται φανερό το γεγονός ότι το $X(e^{j\omega})$ είναι το άθροισμα της συνέλιξης των φασμάτων των σήματος $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ και $p(n) = u(n+N) - u(n-N-1)$. Υπενθυμίζεται ότι το φάσμα της (n) είναι δύο κρουστικές στις θέσεις ω_0 και $-\omega_0$, ενώ εκείνο του $p(n)$ είναι η ψηφιακή sinc: $\sin\left[(N+\frac{1}{2})\omega\right] / \sin[\omega/2]$.

Στα σχήματα που ακολουθούν δίνονται τα γραφικά του τετραγωνικού παλμού διακριτού χρόνου $2N+1$ εφθύων, δηλ. $p(n) = \begin{cases} 1 & \text{για } -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ και του γινόμενου αυτού με το σήμα $\cos(\omega_0 n)$ για $\omega_0 = \pi/4$.



$$\frac{\sin\left[(2N+1)\frac{w}{2}\right]}{\sin\left[\frac{w}{2}\right]}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{w-w_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{w-w_0}{2}\right]} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{w+w_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{w+w_0}{2}\right]}$$

```
syms w
N = 8;
w0 = pi/4;
X1(w) = 0.5 * sin((N+1/2)*(w-w0)) / sin((w-w0)/2);
X2(w) = 0.5 * sin((N+1/2)*(w+w0)) / sin((w+w0)/2);
X(w) = X1(w) + X2(w);
ezplot(X(w), [-2*pi, 2*pi]); ylim([-N, 2*N+2]); grid on
```

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της $X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$

ΛΥΣΗ Εφαρμόζοντας τη συνεχή Διαίρεση έχουμε:

$$\begin{array}{r} 1 \quad | \quad 1 - \alpha z^{-1} \\ 1 - \alpha z^{-1} \quad | \quad 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots \\ \hline \alpha z^{-1} - \alpha^2 z^{-2} \\ \alpha^2 z^{-2} - \alpha^3 z^{-3} \\ \hline \alpha^3 z^{-3} \\ \vdots \end{array}$$

Άρα

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \dots \\ \xrightarrow{z^{-1}} x(n) &= 1 + \alpha \delta(n-1) + \alpha^2 \delta(n-2) + \alpha^3 \delta(n-3) + \dots \\ &\stackrel{n}{=} x(n) = \alpha^n u(n) \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της συνάρτησης $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$

ΛΥΣΗ Α Η συνάρτηση αυτή ΔΕΝ είναι σε κατάλληλη (proper) μορφή, δηλαδή ο βαθμός του αριθμητή ΔΕΝ είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή. Για να την κάνουμε κατάλληλη, εκτελούμε τη διαίρεση των δύο πολυωνύμων (αριθμητή και παρονομαστή).

$$\Delta \rightsquigarrow \begin{array}{r} 1 - z^{-1} \\ 1 - 0.5z^{-1} \overline{) \phantom{0.5z^{-1}}} \\ \hline -0.5z^{-1} \\ \phantom{0.5z^{-1}} \uparrow \\ \phantom{0.5z^{-1}} u \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - 0.5z^{-1} \leftarrow \delta \\ 1 \leftarrow \pi \end{array} \right.$$

$$\Delta = \delta\pi + u \Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{u}{\delta} \Rightarrow \frac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = 1 + \frac{-0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

Άρα

$$X(z) = 1 - 0.5z^{-1} \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$z^{-1} \left(\right.$

$$x(n) = \delta(n) - 0.5 (0.5)^{n-1} u(n-1) = \delta(n) - (0.5)^n u(n-1)$$

$$n=0 \rightsquigarrow x(0) = 1$$

$$n=1 \rightsquigarrow x(1) = -0.5$$

$$n=2 \rightsquigarrow x(2) = -(0.5)^2 = -0.25$$

$$n=3 \rightsquigarrow x(3) = -(0.5)^3 = -0.125$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

ΛΥΣΗ Β Η συνάρτηση $X(z)$ μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} - z^{-1} \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$z^{-1} \left(\right.$

$$x(n) = (0.5)^n u(n) - (0.5)^{n-1} u(n-1)$$

$$n=0 \rightsquigarrow x(0) = (0.5)^0 \cdot 1 - (0.5)^{-1} \cdot 0 = (0.5)^0 = 1$$

$$n=1 \rightsquigarrow x(1) = (0.5)^1 \cdot 1 - (0.5)^0 \cdot 1 = 0.5 - 1 = -0.5$$

$$n=2 \rightsquigarrow x(2) = (0.5)^2 \cdot 1 - (0.5)^1 \cdot 1 = 0.25 - 0.5 = -0.25$$

$$n=3 \rightsquigarrow x(3) = (0.5)^3 \cdot 1 - (0.5)^2 \cdot 1 = 0.125 - 0.25 = -0.125$$

$\vdots$

ΛΥΣΗ Γ

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{-z^{-1}+1}{-0.5z^{-1}+1}$$

Διαίρεση πολυωνύμων.

$$\Delta \rightsquigarrow \begin{array}{r} -z^{-1} + 1 \\ -z^{-1} + 2 \\ \hline -1 \\ \uparrow \\ v \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} -0.5z^{-1} + 1 \\ 2 \leftarrow n \end{array} \right. \rightsquigarrow \delta$$

$$\Delta = \delta \pi + v \Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{v}{\delta} \Rightarrow$$

$$z^{-1} \left(\right. X(z) = 2 - \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$x(n) = 2 \delta(n) - (0.5)^n u(n)$$

$$n=0 \rightsquigarrow x(0) = 2 - 1 = 1$$

$$n=1 \rightsquigarrow x(1) = 2 \cdot 0 - (0.5)^1 \cdot 1 = -0.5$$

$$n=2 \rightsquigarrow x(2) = 2 \cdot 0 - (0.5)^2 \cdot 1 = -0.25$$

$\vdots$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 0.4z - 0.12}$$

Λύση Α Η ρητή συνάρτηση $X(z)$ είναι σε μορφή τέλως κατάλληλη για την ανάπτυξη σε τερμιά, δηλαδή ο βαθμός του αριθμητή δεν είναι μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή.

Αρκεί να πρέπει να προχωρήσουμε στη διαίρεση των δύο πολυωνύμων ώστε να εκφράσουμε την $X(z) = \frac{Q(z)}{R(z)}$

$$X(z) = P(z) + \frac{S(z)}{R(z)}$$

όπου η ρητή συνάρτηση $\frac{S(z)}{R(z)}$ είναι πλέον σε μορφή κατάλληλη (proper).

$$\Delta \rightsquigarrow \begin{array}{r|l} z^2 + 2z & z^2 + 0.4z - 0.12 \leftarrow \delta \\ \hline z^2 + 0.4z - 0.12 & 1 \leftarrow \pi \\ \hline 1.6z + 0.12 & \leftarrow \nu \end{array}$$

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \nu \Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\nu}{\delta} \Rightarrow$$

$$X(z) = \underset{P(z)}{1} + \frac{\underset{S(z)}{1.6z + 0.12}}{\underset{R(z)}{z^2 + 0.4z - 0.12}} = 1 + X_1(z)$$

Ανελύσουμε την $X_1(z)$ σε απλά κλάσματα.

$$X_1(z) = \frac{1.6z + 0.12}{z^2 + 0.4z - 0.12} = \frac{1.6z + 0.12}{(z - 0.2)(z + 0.6)} = \frac{A_1}{z - 0.2} + \frac{A_2}{z + 0.6}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A_1, A_2 .

$$A_1 = (z - 0.2) X_1(z) \Big|_{z=0.2} = \frac{1.6z + 0.12}{z + 0.6} \Big|_{z=0.2} = \frac{0.44}{0.8} = 0.55$$

$$A_2 = (z + 0.6) X_1(z) \Big|_{z=-0.6} = \frac{1.6z + 0.12}{z - 0.2} \Big|_{z=-0.6} = \frac{-0.84}{-0.8} = 1.05$$

Συνεπώς

$$X_1(z) = \frac{0,55}{z-0,2} + \frac{1,05}{z+0,6}$$

και

$$X(z) = 1 + X_1(z) = 1 + \frac{0,55}{z-0,2} + \frac{1,05}{z+0,6}$$

Διαρπώντας αριθμητική και παρανομοειδή $t \in \mathbb{Z}$, η $X(z)$ γίνεται:

$$X(z) = 1 + 0,55 z^{-1} \frac{1}{1-0,2 z^{-1}} + 1,05 z^{-1} \frac{1}{1+0,6 z^{-1}}$$

z^{-1} Υπολογίζοντας τον αντίστροφο ΜΖ και των δύο κλάδων, έχουμε:

$$x(n) = \delta(n) + 0,55 (0,2)^{n-1} u(n-1) + 1,05 (-0,6)^{n-1} u(n-1)$$

$$n=0 \leadsto x(0) = 1 + 0,55 (0,2)^{-1} \cdot 0 + 1,05 (-0,6)^{-1} \cdot 0 = 1$$

$$n=1 \leadsto x(1) = 0 + 0,55 (0,2)^0 \cdot 1 + 1,05 (-0,6)^0 \cdot 1 = 1 + 0,55 + 1,05 = 1,6$$

$$n=2 \leadsto x(2) = 0 + 0,55 (0,2)^1 \cdot 1 + 1,05 (-0,6)^1 \cdot 1 = 0,11 - 0,63 = -0,52$$

$\vdots$

Σημείωση: Η $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$x(n) = \delta(n) + \left[\underbrace{\frac{0,55}{0,2}}_{2,75} (0,2)^n + \underbrace{\frac{1,05}{-0,6}}_{-1,75} (-0,6)^n \right] u(n-1) \quad \Rightarrow$$

$$\text{Αλλά } \delta(n) = u(n) - u(n-1) \Rightarrow u(n-1) = u(n) - \delta(n)$$

$$\Rightarrow x(n) = \delta(n) + [2,75 (0,2)^n - 1,75 (-0,6)^n] [u(n) - \delta(n)] =$$

$$= \underbrace{[1 - 2,75 (0,2)^n + 1,75 (-0,6)^n]}_{g(n)} \delta(n) + [2,75 (0,2)^n - 1,75 (-0,6)^n] u(n)$$

$$= g(n) \delta(n) + [2,75 (0,2)^n - 1,75 (-0,6)^n] u(n)$$

$$\text{Όπως } g(n) \delta(n) = g(0) \delta(n) = [1 - 2,75 + 1,75] \delta(n) = 0 \cdot \delta(n) = 0$$

$$\text{Άρα τελικά } x(n) = [2,75 (0,2)^n - 1,75 (-0,6)^n] u(n)$$

ΛΥΣΗ Β Η $X(z)$ δίνεται από το παρακάτω τύπο, αλλά η $\frac{X(z)}{z}$ είναι.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{z^2+0.4z-0.12} = \frac{z+2}{(z-0.2)(z+0.6)} = \frac{B_1}{z-0.2} + \frac{B_2}{z+0.6}$$

$$B_1 = (z-0.2) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=0.2} = \frac{z+2}{z+0.6} \Big|_{z=0.2} = \frac{2.2}{0.8} = 2.75$$

$$B_2 = (z+0.6) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-0.6} = \frac{z+2}{z-0.2} \Big|_{z=-0.6} = \frac{1.4}{-0.8} = -1.75$$

Άρα

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2.75}{z-0.2} - \frac{1.75}{z+0.6} \Rightarrow$$

$$X(z) = 2.75 \frac{z}{z-0.2} - 1.75 \frac{z}{z+0.6} \Rightarrow \left\langle \text{διαίρωμεν αριθμητή και παρονομαστή} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} X(z) &= 2.75 \frac{1}{1-0.2z^{-1}} - 1.75 \frac{1}{1+0.6z^{-1}} \\ \mathcal{Z}^{-1} \left(\right. & \\ & \left. x(n) = 2.75 (0.2)^n u(n) - 1.75 (-0.6)^n u(n) \right) \end{aligned}$$

$$n=0 \rightarrow x(0) = 2.75 (0.2)^0 \cdot 1 - 1.75 (-0.6)^0 \cdot 1 = 1$$

$$n=1 \rightarrow x(1) = 2.75 (0.2)^1 \cdot 1 - 1.75 (-0.6)^1 \cdot 1 = 0.55 + 1.05 = 1.6$$

$$n=2 \rightarrow x(2) = 2.75 (0.2)^2 \cdot 1 - 1.75 (-0.6)^2 \cdot 1 = 0.11 - 0.63 = -0.52$$

Λύση Γ

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 0.4z - 0.12} = \langle \text{διαίρεται αριθμητικά και παραγοντοποιείται το } z^2 \rangle$$

$$= \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1} - 0.12z^{-2}}$$

Η συνάρτηση $X(z)$ είναι σε κατάλληλη μορφή (!), οπότε την αναλύουμε σε απλά κλάσματα.

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 + 0.6z^{-1})} = \frac{C_1}{1 - 0.2z^{-1}} + \frac{C_2}{1 + 0.6z^{-1}}$$

$$C_1 = (1 - 0.2z^{-1}) X(z) \Big|_{z^{-1} = 1/0.2} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = 1/0.2} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{1}{0.2}}{1 + 0.6 \cdot \frac{1}{0.2}} = \frac{11}{4} = 2.75$$

$$C_2 = (1 + 0.6z^{-1}) X(z) \Big|_{z^{-1} = -1/0.6} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = -1/0.6} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{0.6}}{1 + 0.2 \cdot \frac{1}{0.6}} = \frac{-2.3333}{1.3333} = -1.75$$

Άρα

$$X(z) = 2.75 \frac{1}{1 - 0.2z^{-1}} - 1.75 \frac{1}{1 + 0.6z^{-1}}$$

z^{-1} $\leftarrow$

$$x(n) = 2.75 (0.2)^n u(n) - 1.75 (-0.6)^n u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response) οιπιασδήποτε ΓΧΑ του συστήματος $h(n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n u(n)$ για είσοδο $x(n) = u(n) - u(n-7)$.

ΛΥΣΗ - Απόκριση (πεδίο-z)

$$h(n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{2}{5}$$

$$x(n) = u(n) - u(n-7) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1 - z^{-7}}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$y(n) = h(n) * x(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \\ Y(z) = H(z) \cdot X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}} \cdot \frac{1 - z^{-7}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - z^{-7} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{(1 - \frac{2}{5}z^{-1})(1 - z^{-1})} - z^{-7} \frac{1}{(1 - \frac{2}{5}z^{-1})(1 - z^{-1})} = Y_1(z) - z^{-7} Y_1(z) \end{aligned}$$

όπου

$$Y_1(z) = \frac{1}{(1 - \frac{2}{5}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{A_1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}$$

$$A_1 = \left(1 - \frac{2}{5}z^{-1}\right) Y_1(z) \Big|_{z^{-1} = \frac{5}{2}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = \frac{5}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$A_2 = (1 - z^{-1}) Y_1(z) \Big|_{z^{-1} = 1} = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = 1} = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$$

Άρα

$$Y_1(z) = \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{3}}{1 - z^{-1}} \xleftrightarrow{Z^{-1}} y_1(n) = -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n u(n) + \frac{5}{3} u(n)$$

$$\text{ή } y_1(n) = \frac{1}{3} \left[5 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] u(n)$$

Τελικά

$$\begin{aligned} Y(z) &= Y_1(z) - z^{-7} Y_1(z) \\ \xleftrightarrow{Z^{-1}} y(n) &= \frac{1}{3} \left[5 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] u(n) - \frac{1}{3} \left[5 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-7} \right] u(n-7) \end{aligned}$$

-B τρόπος (πεδίο χρόνου)

$$h(n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n u(n)$$

$$x(n) = x_1(n) - x_2(n) = u(n) - u(n-7)$$

$$\begin{aligned} y_1(n) &= h(n) * x_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x_1(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^m u(m) u(n-m) = \\ &= \sum_{m=0}^n \left(\frac{2}{5}\right)^m = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } y_1(n) = \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \right] u(n)$$

$$\text{Αλλά } x_2(n) = x_1(n-7) \Rightarrow y_2(n) = y_1(n-7) = \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-6} \right] u(n-7)$$

Τελικά

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) + y_2(n) = \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \right] u(n) - \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-6} \right] u(n-7) = \\ &= \frac{1}{3} \left[5 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] u(n) - \frac{1}{3} \left[5 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-7} \right] u(n-7) \end{aligned}$$

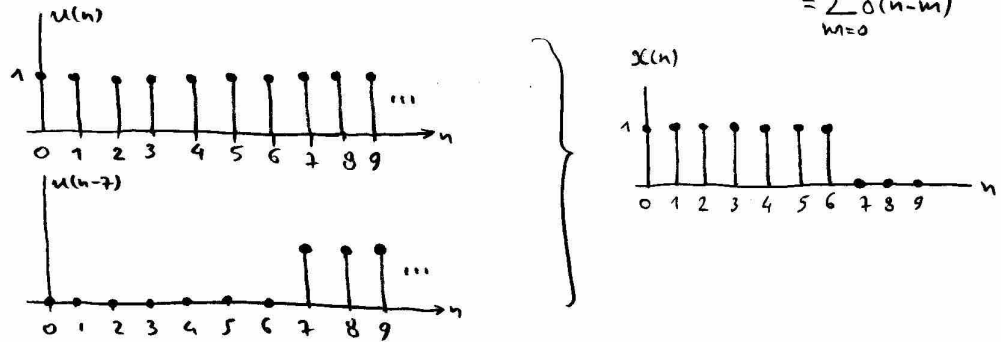
$$n=0 \leadsto y(0) = \frac{1}{3} \left[5 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$n=1 \leadsto y(1) = \frac{1}{3} \left[5 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[5 - \frac{4}{5} \right] = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

$$n=2 \leadsto y(2) = \frac{1}{3} \left[5 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \right] = \frac{1}{3} \left[5 - \frac{8}{25} \right] = \frac{117}{75} = \frac{39}{25}$$

- Γ τρένος (περίο χρόνου)

$$x(n) = u(n) - u(n-7) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) + \delta(n-5) + \delta(n-6) = \sum_{m=0}^6 \delta(n-m)$$



$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * \sum_{m=0}^6 \delta(n-m) =$$

$$= h(n) + h(n-1) + h(n-2) + h(n-3) + h(n-4) + h(n-5) + h(n-6) =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^n u(n) + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} u(n-1) + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} u(n-2) + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-6} u(n-6)$$

$$n=0 \leadsto y(0) = 1$$

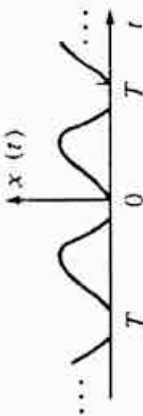
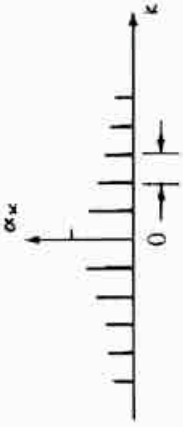
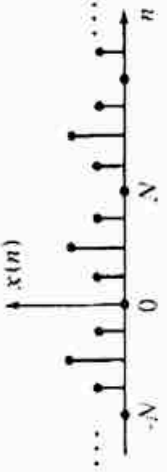
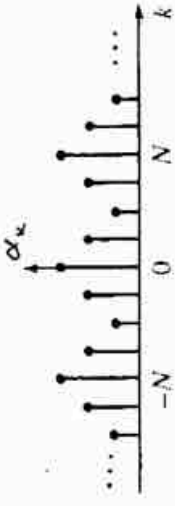
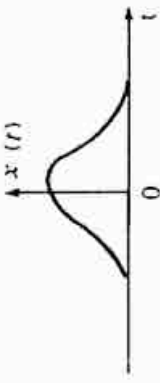
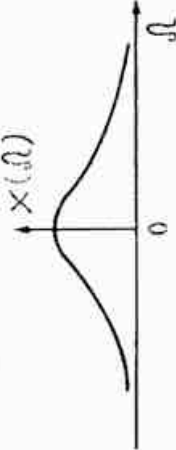
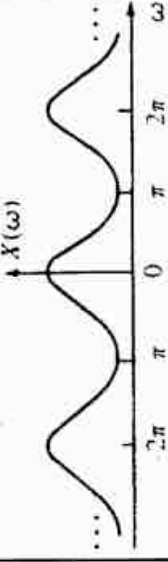
$$n=1 \leadsto y(1) = \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}$$

$$n=2 \leadsto y(2) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{4}{25} + \frac{2}{5} + 1 = \frac{39}{25}$$

$$n=3 \leadsto y(3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{8}{125} + \frac{4}{25} + \frac{2}{5} + 1 = \frac{178}{125}$$

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform <i>signals that are continuous and aperiodic</i>	
Fourier Series <i>signals that are continuous and periodic</i>	
Discrete Time Fourier Transform <i>signals that are discrete and aperiodic</i>	
Discrete Fourier Transform <i>signals that are discrete and periodic</i>	

	ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Σειρά Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t}$ $\alpha_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$	Σειρά Fourier $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$ $X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$ $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
ΜΗ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Μετασχηματισμός Fourier $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$ $X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$	Μετασχηματισμός Fourier $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

	CONTINUOUS-TIME SIGNALS		DISCRETE-TIME SIGNALS	
	TIME DOMAIN	FREQUENCY-DOMAIN	TIME-DOMAIN	FREQUENCY-DOMAIN
PERIODIC SIGNALS	 $\alpha_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j k \Omega_0 t} dt$	 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j k \Omega_0 t}$	 $\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j k \frac{2\pi}{N} n}$	 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n}$
APERIODIC SIGNALS	CONTINUOUS AND APERIODIC	DISCRETE AND APERIODIC	DISCRETE AND PERIODIC	DISCRETE AND PERIODIC
	 $X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j \Omega t} dt$	 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j \Omega t} d\Omega$	 $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j \omega n}$	 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j \omega n} d\omega$

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{T} \int_T X(\omega) e^{j \omega t} d\omega$$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ

ΧΡΟΝΟΥ

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \\ \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ 2 \cos(x) \cos(y) &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\ 2 \sin(x) \sin(y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ 2 \sin(x) \cos(y) &= \sin(x-y) + \sin(x+y) \end{aligned}$$

$$2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega) \text{ ή } \delta(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$
$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f} \text{ ή } \frac{2}{j\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) = \begin{cases} 1, & t < T_1/2 \\ 0, & t \geq T_1/2 \end{cases}$	$2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2 \sin(\omega T_1/2)}{\omega}$
$\frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega \geq W \end{cases}$
$\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \begin{cases} 1 - t /T_1, & t < T_1 \\ 0, & t \geq T_1 \end{cases}$	$T_1 \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_1}{2\pi}\right)$
$\left(\frac{W}{\pi}\right) \left(\frac{\sin(Wt)}{Wt}\right)^2$	$X(\omega) = \begin{cases} 1 - \omega /2W, & \omega < 2W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
$te^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
$\cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$e^{-at} t , \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για μη περιοδικά σήματα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\omega)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Πραγματικό μέρος	$x_c(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(-t)]$	$\Re\{X(\omega)\} = R(\omega)$
Φανταστικό μέρος	$x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x^*(-t)]$	$j\Im\{X(\omega)\} = jI(\omega)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_o)$	$e^{-j\omega t_o} X(\omega)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\omega_o t} x(t)$	$X(\omega - \omega_o)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\xi) d\xi$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega) \delta(\omega)$
Πραγματικό σήμα	$x(t) = x^*(t)$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $\Re\{X(\omega)\} = \Re\{X(-\omega)\}$ $\Im\{X(\omega)\} = -\Im\{X(-\omega)\}$ $ X(\omega) = X(-\omega) $ $\arg X(\omega) = -\arg X(-\omega)$
Συγκερασμός	$x(t) * h(t)$	$X(\omega) H(\omega)$
Διαμόρφωση	$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} [X(\omega) * Y(\omega)]$
Διαφύριση στο χρονικό πεδίο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Διαφύριση στο πεδίο συχνοτήτων	$tx(t)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Αλλαγή κλίμακας;	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Δυσμός αν $x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$	$y(t) = X(t)$	$Y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$
Θεώρημα Parseval	$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\mathcal{E}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

$$2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$$

$$2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Μετασχηματισμοί z μερικών βασικών συναρτήσεων		
	Σήμα	Μετασχηματισμός z
1	$\delta(n)$	1
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
3	$\delta(n-m), m > 0$	z^{-m}
4	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
5	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
6	$[\cos(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1 - [\cos \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \Omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$
7	$[\sin(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{[\sin \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \Omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$
8	$[r^n \cos(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1 - [r \cos \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \Omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$
9	$[r^n \sin(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{[r \sin \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \Omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$

Ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z		
Ιδιότητα	Σήμα	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a x_1(n) + b x_2(n)$	$P_1 \cap P_2$
Δεξιά ολίσθηση	$x(n-n_0), n_0 \geq 0$	$R < z $
Αριστερή ολίσθηση	$x(n+n_0), n_0 \geq 0$	$R < z $
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$P_1 \cap P_2$
Ολίσθηση Συχνότητας	$e^{j\omega} x(n)$	$ c R < z $
Περιοδικό σήμα	$x(n+N) = x(n)$	$ z > 0$
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\Re\{x(n)\}$ $-\Im\{x(n)\}$	$R < z $
Θεώρημα αρχικής τιμής	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X^+(z)$	
Θεώρημα τελικής τιμής	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X^+(z)$	

Ιδιότητες του μετασχηματισμού z		
Ιδιότητα	Σήμα	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a X_1(z) + b X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Χρονική ολίσθηση	$z^{n_0} X(z)$	P
Συνέλιξη	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Ολίσθηση Συχνότητας	$X\left(\frac{z}{c}\right)$	$ c R^+ < z < c R^-$
Παραγώγιση στο Χόρο του z	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R^+ < z < R^-$
M z περιοδικών σημείων	$X(z) = \frac{1}{1-z^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$	P
Ιδιότητα της Συζυγίας	$X^*(z)$ $\frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]$ $\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	P
Αθροίσματος	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap z \geq 1$
Κατοπτρισμός	$x(-n)$	$\frac{1}{R^-} < z < \frac{1}{R^+}$