



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

8 – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2024 - 2025

ΓΕΝΙΚΑ

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού ή μη περιοδικού σήματος στη συχνότητα φαίνεται πώς η ισχύς ή η ενέργεια αυτού κατανέμεται στις διαφορετικές συχνότητες. Η κατανομή αυτή στις συχνότητες ονομάζεται $\varphi(\omega)$ του σήματος.
- Για περιοδικά σήματα το φάσμα είναι διακριτό (discrete), καθώς η ισχύς συγκεντρώνεται σε συχνότητες οι οποίες είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας, η οποία σχετίζεται με την θεμελιώδη περίοδο των σήματων.
- Η απόκριση συχνότητας (frequency response) ενός συστήματος φαίνεται πώς ένα ΓΧΑ σύστημα αποκρίνεται σε ημιτονοειδή διαφορετικών συχνοτήτων.

Η απόκριση συχνότητας χαρακτηρίζει το σύστημα, επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό της τόνισης κατάστασης (steady state) του συστήματος και διευκολύνει τον σχεδιασμό ή την ανάλυση συστημάτων.

Η ανάλυση Fourier αφορά στη τόνιση κατάσταση ενός συστήματος, ενώ η ανάλυση Laplace αφορά και στη τόνιση και στη μεταβατική κατάσταση αυτού.

- Η πλέον εμφαντική ιδιότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι, όταν στην είσοδό τους εφαρμόζεται ένα μιγαδικό εκθετικό (ή ο συνδυασμός ενός συνημιτόνου και ενός ημιτόνου) ορισμένης συχνότητας, τότε στην έξοδο εμφανίζεται ^{ή ίδια} η είσοδος πολλαπλασιασμένη με μία μιγαδική σταθερά η οποία δείχνει πώς το σύστημα αποκρίνεται στη συγκεκριμένη συχνότητα της εισόδου.

Με άλλα λόγια, όταν $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $-\infty < t < \infty$, τότε $y(t) = H(j\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t}$ όπου $H(j\omega_0)$ η απόκριση του συστήματος στη συχνότητα ω_0 .

Το σήμα $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ αποτελεί για ιδιοσυνάρτηση (eigenfunction) του ΓΧΑ συστήματος, καθώς αυτό εμφανίζεται και στην είσοδο και στην έξοδο αυτού.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστούν οι εκφράσεις:

α. $(t^3 + 2) \delta(t)$

β. $A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} \delta(t) dt$

β. $e^{-4t} \delta(t)$

γ. $\frac{\Omega^2 + 1}{\Omega^2 + 9} \delta(\Omega - 1)$

ε. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-t)} \delta(2-t) dt$

ΛΥΣΗ

Με βάση τις σχέσεις $f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$

και $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$ έχουμε:

α. $(t^3 + 2) \delta(t) = (0 + 2) \delta(t) = 2 \delta(t)$

β. $e^{-4t} \delta(t) = e^{-4 \cdot 0} \delta(t) = \delta(t)$

γ. $\frac{\Omega^2 + 1}{\Omega^2 + 9} \delta(\Omega - 1) = \frac{1 + 1}{1 + 9} \delta(\Omega - 1) = \frac{2}{10} \delta(\Omega - 1) = \frac{1}{5} \delta(\Omega - 1)$

δ. $A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} \delta(t) dt = A e^{-j\Omega 0} = A$

ε. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-t)} \delta(2-t) dt = e^{-2(x-2)}$

ΑΣΚΗΣΗ

Να εφεραστεί νοίες και τις συζαρημένες είνον άρτιες, άρτιες ή τίνονα και τα ναπαράδω.

α. $x(t) = 5t$

δ. $x(t) = \sin(3t - \frac{\pi}{2})$

β. $x(t) = e^{-|t|}$

ε. $x(t) = 2u(t)$

γ. $x(t) = 5 \cos 3t$

ΛΥΣΗ

α. $x(t) = 5t$

$x(-t) = 5(-t) = -5t = -x(t) \rightarrow$ άρτιη

β. $x(t) = e^{-|t|}$

$x(-t) = e^{-|-t|} = e^{-|t|} = x(t) \rightarrow$ άρτια

γ. $x(t) = 5 \cos 3t$

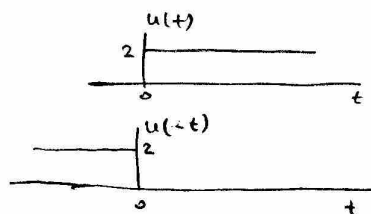
$x(-t) = 5 \cos [3(-t)] = 5 \cos (-3t) = 5 \cos (3t) = x(t) \rightarrow$ άρτια

δ. $x(t) = \sin(3t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(3t)$

$x(-t) = \sin(-3t - \frac{\pi}{2}) = -\sin(3t + \frac{\pi}{2}) = -\cos(3t) = x(t) \rightarrow$ άρτια

ε. $x(t) = 2u(t)$

$x(-t) = 2u(-t)$



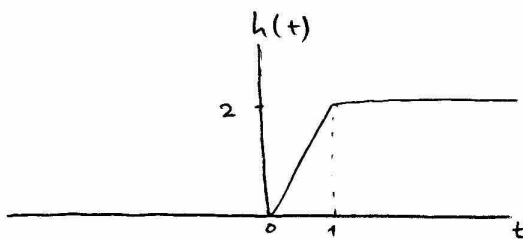
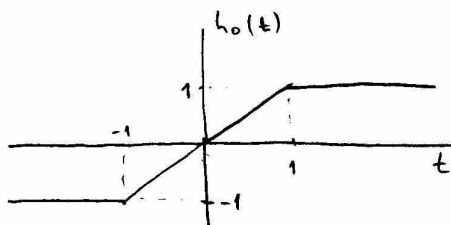
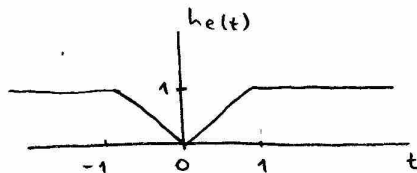
Ούτε άρτια, ούτε άρτιη

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $h(t)$ η χρονική απόκριση ενός συστήματος. Θεωρούμε ότι η $h(t)$ για ένα αιτιατό σύστημα έχει το άρτιο μέρος $h_e(t)$ για $t > 0$, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$h_e(t) = t [u(t) - u(t-1)] + u(t-1), \quad t > 0$$

Να υπολογιστεί η $h(t)$.

ΛΥΣΗ



Σχεδιάζουμε την $h_e(t)$.

Από το σύστημα είναι αιτιατό, οπότε $h(t) = 0$ για $t < 0$.

Αλλά,

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t) \Rightarrow$$

$$h_o(t) = -h_e(t) \quad \text{για } t < 0$$

Γνωρίζοντας την $h_o(t)$ για $t < 0$ μπορούμε να βρούμε αυτήν και για $t > 0$, αφού $h_o(t) = -h_o(-t)$

Τελικά, η $h(t)$ προκύπτει ως άθροισμα των δύο παραπάνω εκφρασεων (συναρτήσεων):

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} h(t) &= 2t [u(t) - u(t-1)] + 2u(t-1) = \\ &= 2t u(t) - 2(t-1)u(t-1) \end{aligned}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ 2t & \text{για } 0 < t < 1 \\ 2t - 2t + 2 = 2 & \text{για } t > 1 \end{cases}$$

ΑΙΤΗΣΗ

Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά.

Για καθεμία από αυτά να βρεθεί η βασική περίοδος T_0 και η βασική συχνότητα f_0 .

α. $x(t) = 3 \sin(3t)$

δ. $x(t) = \cos(t) + \sin(2t)$

β. $x(t) = \sin(8t + 30^\circ)$

ε. $x(t) = e^{j(5t+\pi)}$

γ. $x(t) = e^{j2t}$

στ. $x(t) = e^{-j10t} + e^{j5t}$

ΛΥΣΗ

α. $x(t) = 3 \sin(3t) \rightarrow \omega_0 = 3 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 3 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{3}$

$x(t+T_0) = 3 \sin\left[3\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 3 \sin(3t + 2\pi) = 3 \sin(3t) = x(t)$

β. $x(t) = \sin(8t + 30^\circ) \rightarrow \omega_0 = 8 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 8 \Rightarrow T_0 = \frac{\pi}{4}$

$x(t+T_0) = \sin\left[8\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 30^\circ\right] = \sin(8t + 2\pi + 30^\circ) = \sin(8t + 30^\circ) = x(t)$

γ. $x(t) = e^{j2t} \rightarrow \omega_0 = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 2 \Rightarrow T_0 = \pi$

$x(t+T_0) = e^{j2(t+T_0)} = e^{j2(t+\pi)} = e^{j2t + j2\pi} = e^{j2t} e^{j2\pi} = e^{j2t} = x(t)$

δ. $x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \rightarrow \omega_0 = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 1 \Rightarrow T_0 = 2\pi$

$x(t+T_0) = \cos(t+2\pi) + \sin(2t+2\pi) = \cos(t) + \sin(2t) = x(t)$

ε. $x(t) = e^{j(5t+\pi)} \rightarrow \omega_0 = 5 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 5 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{5}$

$x(t+T_0) = e^{j\left[5\left(t + \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\right]} = e^{j(5t + 2\pi + \pi)} = e^{j(5t + \pi)} = e^{j5t} e^{j\pi} = e^{j5t} = x(t)$

στ. $x(t) = e^{-j10t} + e^{j5t} \rightarrow \omega_0 = 5 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{5}$

$x(t+T_0) = e^{-j10\left(t + \frac{2\pi}{5}\right)} + e^{j5\left(t + \frac{2\pi}{5}\right)} = e^{-j10t - j4\pi} + e^{j5t + j2\pi} = e^{-j10t} e^{-j4\pi} + e^{j5t} e^{j2\pi} = e^{-j10t} + e^{j5t} = x(t)$

ΑΣΚΗΣΗ

Να εξεταστούν ως προς την περιοδικότητα τα σήματα και να υπολογιστεί η περίοδος.

α. $x(t) = \cos(5\pi t) + \sin(12\pi t)$

β. $z(t) = \cos(4\pi t) \sin(3\pi t)$

ΛΥΣΗ

$$\alpha. \left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{5} \text{ ρητός και άρα περιοδικός.}$$

Για να είναι η $x(t) = \cos(5\pi t) + \sin(12\pi t)$ περιοδική, πρέπει να ισχύει

$x(t+T) = x(t) \quad \forall t$. (χάρη στην ιδιότητα:

$x(t+T) = \cos[5\pi(t+T)] + \sin[12\pi(t+T)] = \cos(5\pi t + 5\pi T) + \sin(12\pi t + 12\pi T)$

Για να ισχύει η τελευταία f $x(t)$ πρέπει:

$5\pi T = 2k\pi \quad \text{και} \quad 12\pi T = 2\lambda\pi$

Με άλλα λόγια:

$T = \frac{2}{5}k = \frac{2}{12}\lambda \Rightarrow \frac{k}{\lambda} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{k}{\lambda} = \frac{5}{12}$

Επιλέγουμε $k=5$ και $\lambda=12$ (αφού οι αριθμοί αυτοί είναι πρώτοι μεταξύ τους)

και βρίσκουμε ότι $T=2$, όπου T η βασική περίοδος του σήματος $x(t)$.

β. $x(t) = \cos(4\pi t) \sin(3\pi t) = \frac{1}{2} [\sin(-\pi t) + \sin(7\pi t)] = \frac{1}{2} [\sin(7\pi t) - \sin(\pi t)]$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{7\pi} = \frac{2}{7} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \end{aligned} \right\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2}{7}}{2} = \frac{1}{7} \text{ ρητός και άρα περιοδικός}$$

$x(t+T) = \frac{1}{2} [\sin(7\pi t + 7\pi T) - \sin(\pi t + \pi T)]$

Για να ισχύει η σχέση αυτή f $x(t)$ πρέπει

$7\pi T = 2k\pi \quad \text{και} \quad \pi T = 2\lambda\pi \Rightarrow$

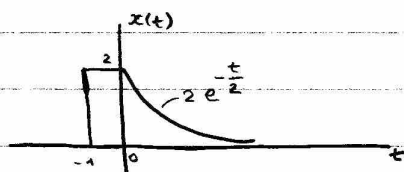
$T = \frac{2}{7}k = \frac{2}{1}\lambda \Rightarrow \frac{k}{\lambda} = \frac{7}{1}$

Επιλέγοντας $k=7$ και $\lambda=1$ βρίσκουμε ότι $T=2$.

(εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την περίοδο T ως εξής:

$T = \text{EKΠ}(T_1, T_2) = \text{EKΠ}\left(\frac{2}{7}, 2\right) = \frac{\text{EKΠ}(2, 2)}{\text{MKD}(7, 1)} = \frac{2}{1} = 2$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η ενέργεια του σήματος



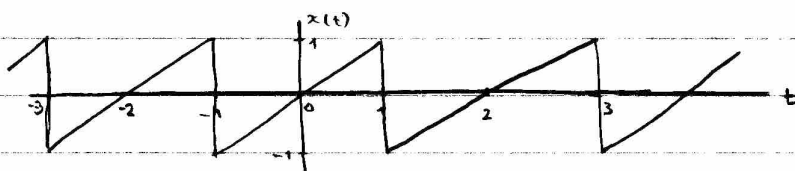
ΛΥΣΗ $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \langle \text{αφού το σήμα είναι πραγματικό } |x(t)|^2 = x(t)^2 \rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-1}^0 2^2 dt + \int_0^{\infty} (2e^{-\frac{t}{2}})^2 dt =$$

$$= 4 \int_{-1}^0 dt + 4 \int_0^{\infty} e^{-t} dt =$$

$$= 4 \left. t \right|_{-1}^0 - 4 \left. e^{-t} \right|_0^{\infty} = 4(0 - (-1)) - 4(e^{-\infty} - e^0) = 4 + 4 = 8$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος



ΛΥΣΗ

Πρόκειται για περιοδικό σήμα. Κατά συνέπεια υπάρχει η ισχύς του.

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{2} \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{6} (1^3 - (-1)^3) = \frac{1}{6} 2 = \frac{1}{3}$$

Σημείωση: Η RMS τιμή του σήματος είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης ισχύος, δηλαδή $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t) = D e^{j\omega t}$

ΛΥΣΗ

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} D e^{j\omega t} D e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} D^2 e^{j0} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D^2}{T} t \Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D^2}{T} \left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right) = D^2$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σταθερού σήματος $x(t) = A$

ΛΥΣΗ

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} A^2 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \cdot T = A^2$$

ΑΣΚΗΣΗ (ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΜΕ ΕΡΩΤΗΤΙΚΗ)

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των $h(t)$ και $x(t)$ του σχήματος.

ΛΥΣΗ

Η $h(t)$ γράφεται ως

$$h(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$

Άρα

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

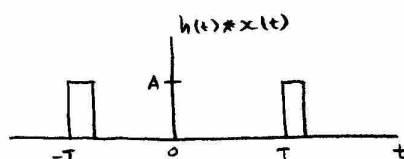
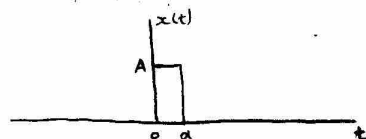
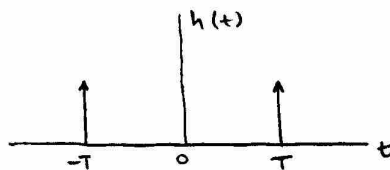
$$= [\delta(t+T) + \delta(t-T)] * x(t)$$

$$= \delta(t+T) * x(t)$$

$$+ \delta(t-T) * x(t)$$

$$= \langle \text{τα δύο η σχέση (4) προηγουμένως} \rangle$$

$$= x(t+T) + x(t-T)$$



Συμπέρασμα: Η συνέλιξη οποιασδήποτε συνάρτησης με την κρουστική
δίνει την ίδια τη συνάρτηση σε θέση που καθορίζεται
από την μετατόπιση της κρουστικής.

Η ανωτέρω ιδιότητα της είναι ιδιαίτερα χρήσιμη
για την κατανόηση της εμφάνισης επαναλήψεων στο
φάσμα ενός διηλεκτρομαγνητικού σήματος και
κατά συνέπεια το ίδιο το θεώρημα διηλεκτρομαγνητικής
του Shannon.

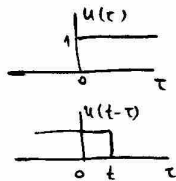
ΑΣΚΗΣΗ Σε ΓΧΑ σύστημα με προεπιλεγμένη απόκριση $h(t)$ εφαρμόζεται η είσοδος $x(t)$. Να υπολογιστεί η έξοδος για τις εξής περιπτώσεις:

α. $x(t) = u(t)$, $h(t) = u(t)$

β. $x_1(t) = u(t-a)$, $h_1(t) = u(t)$ όπου $a > 0$

γ. $x_2(t) = u(t-a)$, $h_2(t) = u(t-b)$ όπου $b > a > 0$

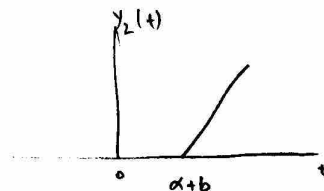
ΛΥΣΗ $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

α.  $y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_0^t = t$ ή $y(t) = t u(t)$

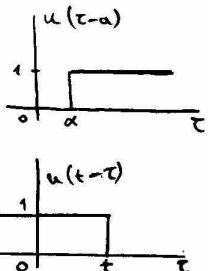
β. Η είσοδος είναι όπως $x_1(t) = x(t-a)$. Αποτέλεσμα είναι ΓΧΑ η έξοδος θα είναι $y_1(t) = y(t-a) = (t-a) u(t-a)$

γ. Στην περίπτωση αυτή η έξοδος $y_2(t)$ θα είναι η χρονική μετατόπιση κατά b της $y_1(t)$, δηλαδή

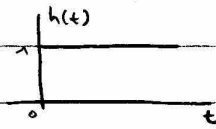
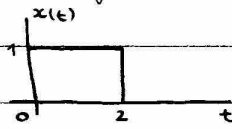
$$y_2(t) = y_1(t-b) = (t-b-a) u(t-b-a)$$



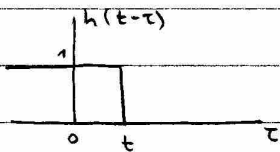
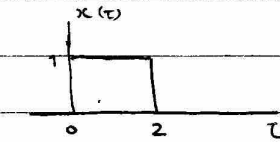
Σημείωση: Τα ερωτήματα β, γ θα μπορούσαν να έχουν υπολογιστεί με βάση τον ορισμό της συνέλιξης, ως εξής:

 Τέλος $y_1(t) = (t-a) u(t-a)$	$y_1(t) = x_1(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) h_1(t-\tau) d\tau =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-a) u(t-\tau) d\tau =$ $= \int_a^t 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big _a^t =$ $= t-a$	$y_2(t) = x_2(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) h_2(t-\tau) d\tau =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-a) u(t-b-\tau) d\tau =$ $= \int_a^{t-b} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big _a^{t-b} = t-b-a$ Τέλος $y_2(t) = (t-b-a) u(t-b-a)$
---	--	--

ΑΙΚΗΖΗ Να υπολογιστεί η συνάρτηση των συστάσεων (χαραφίνα)

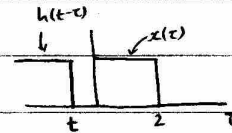


ΛΥΣΗ



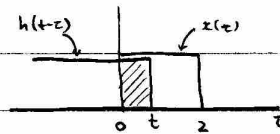
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

① $t < 0$



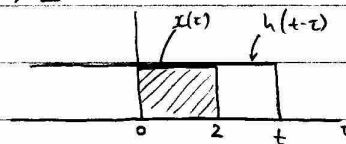
Το $x(\tau)$ και το $h(t-\tau)$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και επομένως το γινόμενο τους είναι μηδέν. Άρα $y(t) = 0$ για $t < 0$

② $0 \leq t \leq 2$

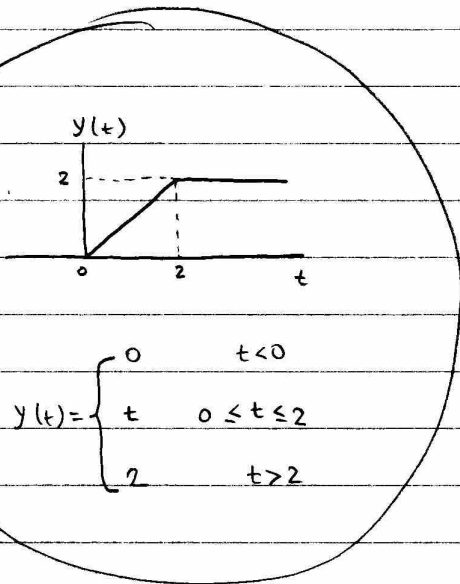


Το $x(\tau)$ και το $h(t-\tau)$ έχουν κοινό σημείο για $0 \leq \tau \leq t$. Το γινόμενο $x(\tau) h(t-\tau) = 1$
 Άρα $y(t) = \int_0^t 1 d\tau = \tau \Big|_0^t = t$ για $0 \leq t \leq 2$

③ $t > 2$

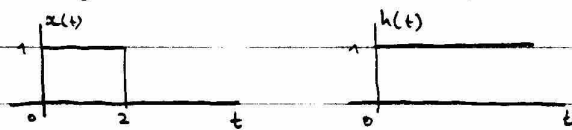


Τα κοινά σημεία των $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ είναι όλο το $x(\tau)$, δηλαδή $x(\tau) h(t-\tau) = 1$. Άρα
 $y(t) = \int_0^2 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_0^2 = 2$



$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & t > 2 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνελίξη των σημάτων (f.e. graphs)



ΛΥΣΗ

$$x(t) = u(t) - u(t-2) \quad h(t) = u(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) =$$

$$= [u(t) - u(t-2)] * u(t) =$$

$$= \underbrace{u(t) * u(t)}_{y_1(t)} - \underbrace{u(t-2) * u(t)}_{y_2(t) = y_1(t-2)} = y_1(t) - y_2(t)$$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t 1 d\tau = \tau \Big|_0^t = t \quad \text{για } t > 0$$

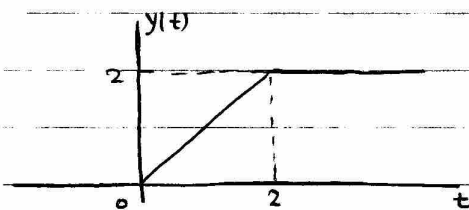
$$\text{Άρα } y_1(t) = t u(t)$$

$$\text{Συνεπώς } y_2(t) = y_1(t-2) = (t-2) u(t-2)$$

$$\text{Τελικά } y(t) = y_1(t) - y_2(t) = t u(t) - (t-2) u(t-2) =$$

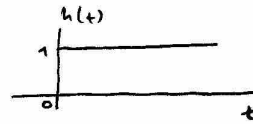
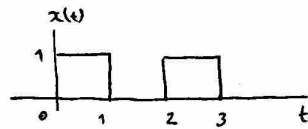
$$= t u(t) - t u(t-2) + 2 u(t-2) =$$

$$= t [u(t) - u(t-2)] + 2 u(t-2)$$



ΑΙΚΜΗ

Ν2 υπολογιστεί η συνελξη των σημάτων



ΛΥΣΗ

$$h(t) = u(t)$$

$$x(t) = [u(t) - u(t-1)] + [u(t-2) - u(t-3)]$$

$$y(t) = h(t) * x(t) =$$

$$= u(t) * [u(t) - u(t-1)] + [u(t-2) - u(t-3)] =$$

$$= u(t) * u(t) - u(t) * u(t-1) + u(t) * u(t-2) - u(t) * u(t-3) =$$

$$= t u(t) - (t-1) u(t-1) + \underbrace{(t-2) u(t-2)} - \underbrace{(t-3) u(t-3)} =$$

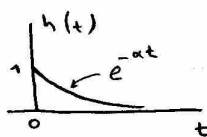
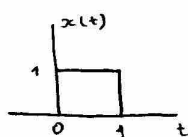
$$= t u(t) - t u(t-1) + u(t-1) + \underbrace{(t-1) u(t-2) - u(t-2)} - \underbrace{(t-1) u(t-3) + 2 u(t-3)} =$$

$$= t [u(t) - u(t-1)] + [u(t-1) - u(t-2)] + (t-1) [u(t-2) - u(t-3)] + 2 u(t-3)$$

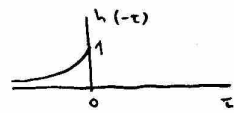
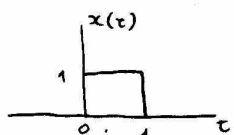
ή

$$y(t) = t u(t) + (1-t) u(t-1) + (t-2) u(t-2) + (3-t) u(t-3)$$

ΑΣΚΗΣΗ Συνέλιξη τετραγωνικού παλμού και εκθετικού.

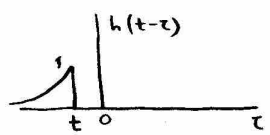


ΛΥΣΗ Α



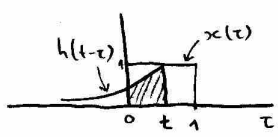
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Περιοχή 1: $t < 0$



→ Αφού $x(\tau)$ στην περιοχή αυτή είναι μηδέν, το γινόμενο θα είναι μηδέν και κατά συνέπεια και το ολοκλήρωμα.
 Άρα για $t < 0 \rightarrow y(t) = 0$

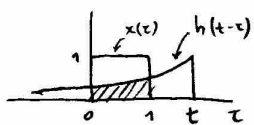
Περιοχή 2: $0 \leq t \leq 1$



→ Μεταξύ $[0, 1]$ υπάρχει κοινό τμήμα το οποίο ισούται με το γινόμενο

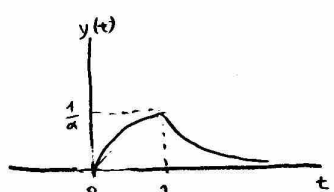
$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} d\tau = e^{-at} \cdot \frac{1}{a} e^{a\tau} \Big|_0^t = \frac{e^{-at}}{a} (e^{at} - 1) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

Περιοχή 3: $t > 1$



→ Το κοινό τμήμα περιλαμβάνεται στην περιοχή μεταξύ 0 και 1. Εκτός αυτής της περιοχής το $x(\tau)$ είναι μηδέν, οπότε και το ολοκλήρωμα (συνέλιξη). Συνεπώς:

$$y(t) = \int_0^1 x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^1 e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \int_0^1 e^{a\tau} d\tau = e^{-at} \cdot \frac{1}{a} e^{a\tau} \Big|_0^1 = \frac{1}{a} e^{-at} (e^a - 1) = \frac{1}{a} [e^{-a(t-1)} - e^{-at}]$$



Τέλιος, η κατασκευή της συνέλιξης θα είναι αυτή που διδανώ σχήμα της.

ΛΥΣΗ Β

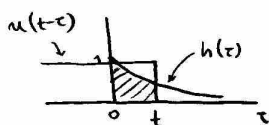
$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) [u(t-\tau) - u(t-\tau-1)] d\tau = y_1(t) - y_2(t)$$

όπου

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau, \quad y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau-1) d\tau$$

Υπολογισμός $y_1(t)$:



$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \left. -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \right|_0^t = -\frac{1}{a} (e^{-at} - 1) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

$$\text{Συμπερασματικά: } y_1(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

Υπολογισμός $y_2(t)$:

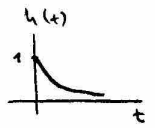
$$\begin{aligned} y_2(t) &= x(t) * u(t-1) = x(t) * [u(t) * \delta(t-1)] = \\ &= [x(t) * u(t)] * \delta(t-1) = \\ &= y_1(t) * \delta(t-1) = \\ &= y_1(t-1) = \\ &= \frac{1}{a} [1 - e^{-a(t-1)}] u(t-1) \end{aligned}$$

Τελικά:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) - y_2(t) = \\ &= \frac{1}{a} [1 - e^{-at}] u(t) - \frac{1}{a} [1 - e^{-a(t-1)}] u(t-1) \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ (ΣΥΝΕΛΙΞΗ)

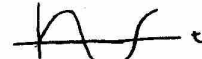
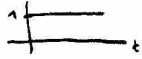
Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $h(t) = e^{-t} u(t)$.



Να υπολογιστεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος για είσοδο $x(t)$,

όπου (α) $x(t) = u(t)$, (β) $x(t) = e^{-2t} u(t)$, (γ) $x(t) = \sin 3t u(t)$.

Λύση



Για καθένα από τις εισόδους υπολογίσαμε τη συνελίξη $x(t) * h(t) = y(t)$.

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^t = -e^{-t} + e^0 = 1 - e^{-t} \quad \text{για } t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } y(t) = (1 - e^{-t}) u(t)$$

(β) Είδαμε σε προηγούμενη άσκηση ότι η συνελίξη $e^{-at} u(t) * e^{-bt} u(t)$ ισούται με $\left(\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} \right) u(t)$. Στην προεπιλεγμένη περίπτωση έχουμε $a=2$, $b=1$.

$$\text{Άρα } y(t) = -\left(e^{-2t} - e^{-t} \right) u(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t} \right) u(t)$$

$$\begin{aligned} \text{(γ)} \quad y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin 3\tau u(\tau) e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin 3\tau e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t \sin 3\tau e^{\tau} d\tau = \\ &= e^{-t} \int_0^t \frac{e^{j3\tau} - e^{-j3\tau}}{2j} e^{\tau} d\tau = \frac{e^{-t}}{2j} \left[\int_0^t e^{(1+j3)\tau} d\tau - \int_0^t e^{(1-j3)\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{e^{-t}}{2j} \left[\frac{1}{1+j3} e^{(1+j3)\tau} \Big|_0^t - \frac{1}{1-j3} e^{(1-j3)\tau} \Big|_0^t \right] = \\ &= \frac{e^{-t}}{2j} \left[\frac{1}{1+j3} (e^{(1+j3)t} - 1) - \frac{1}{1-j3} (e^{(1-j3)t} - 1) \right] = \\ &= \frac{e^{-t}}{2j} \frac{1}{1+j3} e^{(1+j3)t} - \frac{e^{-t}}{2j} \frac{1}{1+j3} - \frac{e^{-t}}{2j} \frac{1}{1-j3} e^{(1-j3)t} + \frac{e^{-t}}{2j} \frac{1}{1-j3} = \\ &= \frac{1}{2j-6} e^{3jt} - \frac{1}{2j-6} e^{-t} - \frac{1}{2j+6} e^{-3jt} + \frac{1}{2j+6} e^{-t} = \\ &= \frac{1}{2j-6} e^{3jt} - \frac{1}{2j+6} e^{-3jt} + \left(\frac{1}{2j+6} - \frac{1}{2j-6} \right) e^{-t} = \\ &= \frac{1}{2j-6} e^{3jt} - \frac{1}{2j+6} e^{-3jt} + \frac{3}{10} e^{-t} \end{aligned}$$

Άσκηση Να υπολογιστεί η έξοδος ΓΧΑ με $h(t) = u(t) - u(t-2)$, στο οποίο εφαρμόζεται η είσοδος $x(t) = \delta(t+3) + 3e^{-t/2} [u(t) - u(t-4)]$

Λύση

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \\ &= [u(t) - u(t-2)] * \left[\delta(t+3) + 3 \underbrace{e^{-t/2} [u(t) - u(t-4)]}_{g(t)} \right] = \\ &= \underbrace{[u(t) - u(t-2)] * \delta(t+3)}_A + 3 \underbrace{[u(t) - u(t-2)] * g(t)}_B \end{aligned} \quad (1)$$

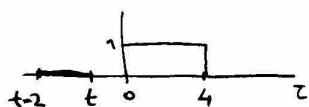
Υπολογισμός A: Λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης με την $\delta(t)$ έχουμε

$$A = u(t+3) - u(t+1) \quad (\text{βλ. 2ο τμήκος συζητήσεων}) \quad (2)$$

Υπολογισμός B: Σε προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος $g(t)$ με έναν παλμό πλάτους 1 και διάρκειας T ισodυναζει με ολοκλήρωση πεπερασμένου μήκους, δηλαδή από $t-T$ μέχρι t . Στην προκειμένη περίπτωση $T=2$. Άρα,

$$B = \int_{t-2}^t g(\tau) d\tau = \int_{t-2}^t e^{-\tau/2} [u(\tau) - u(\tau-4)] d\tau \quad (3)$$

Τώρα αναγκάζουμε να διακρίνουμε περίπτωσης ανάλογα με την επιμέλυση που υπάρχει μεταξύ της περιοχής ολοκλήρωσης $t-2$ έως t και του μοναδιαίου παλμού $u(\tau) - u(\tau-4)$.



Περίπτωση 1η: $t < 0 \Rightarrow \nexists$ επιμέλυση $\Rightarrow B=0$

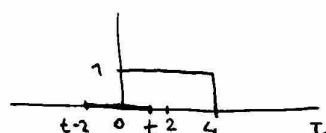
Περίπτωση 2η: $0 \leq t \leq 2$

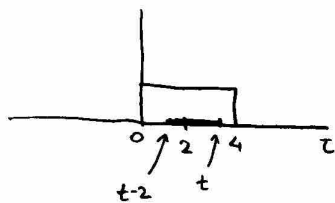


$\exists$ επιμέλυση από 0 έως t ,

$$\text{οπότε} \quad B = \int_0^t e^{-\tau/2} \cdot 1 \cdot d\tau = \frac{1}{-\frac{1}{2}} e^{-\tau/2} \Big|_0^t =$$

$$= -2 \left(e^{-t/2} - e^0 \right) = -2 \left(e^{-t/2} - 1 \right) = 2 \left(1 - e^{-t/2} \right)$$



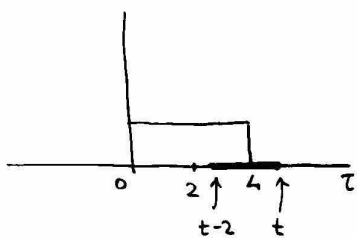


Περίπτωση 3η: $2 < t \leq 4$

∃ επικάλυψη από $t-2$ έως t , οπότε

$$B = \int_{t-2}^t e^{-\tau/2} \cdot 1 \cdot d\tau = -2 e^{-\tau/2} \Big|_{t-2}^t = -2 \left(e^{-t/2} - e^{-\frac{t-2}{2}} \right) =$$

$$= 2 \left(e^{-\frac{t-2}{2}} - e^{-t/2} \right) = 2 \left(e^{-\frac{t}{2}} e^1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) = 2 e^{-t/2} (e-1)$$

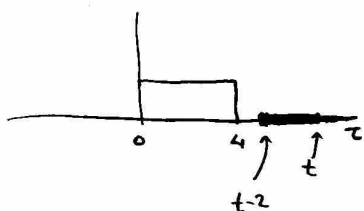


Περίπτωση 4η: $2 < t-2 \leq 4 \Rightarrow 4 < t \leq 6$

∃ επικάλυψη από $t-2$ μέχρι 4, οπότε

$$B = \int_{t-2}^4 e^{-\tau/2} 1 d\tau = -2 e^{-\tau/2} \Big|_{t-2}^4 = -2 \left(e^{-2} - e^{-\frac{t-2}{2}} \right) =$$

$$= 2 \left(e^{-\frac{t-2}{2}} - e^{-2} \right)$$



Περίπτωση 5η: $t-2 > 4 \Rightarrow t > 6$

∄ επικάλυψη $\leadsto B=0$

Τελικά έχουμε από την (1) ότι:

$$y(t) = A + 3B =$$

$$= [u(t+3) - u(t+1)] + 3 \cdot \begin{cases} 2(1 - e^{-t/2}) & \text{για } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 e^{-t/2} (e-1) & \text{για } 2 < t \leq 4 \\ 2(e^{-t/2} e - e^{-2}) & \text{για } 4 < t \leq 6 \\ 0 & \text{για } t < 0 \wedge t > 6 \end{cases}$$

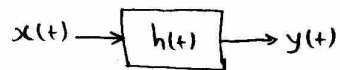
ή

$$y(t) = [u(t+3) - u(t+1)] + 6 \left\{ (1 - e^{-t/2}) [u(t) - u(t-2)] + \right.$$

$$(e-1) e^{-t/2} [u(t-2) - u(t-4)] +$$

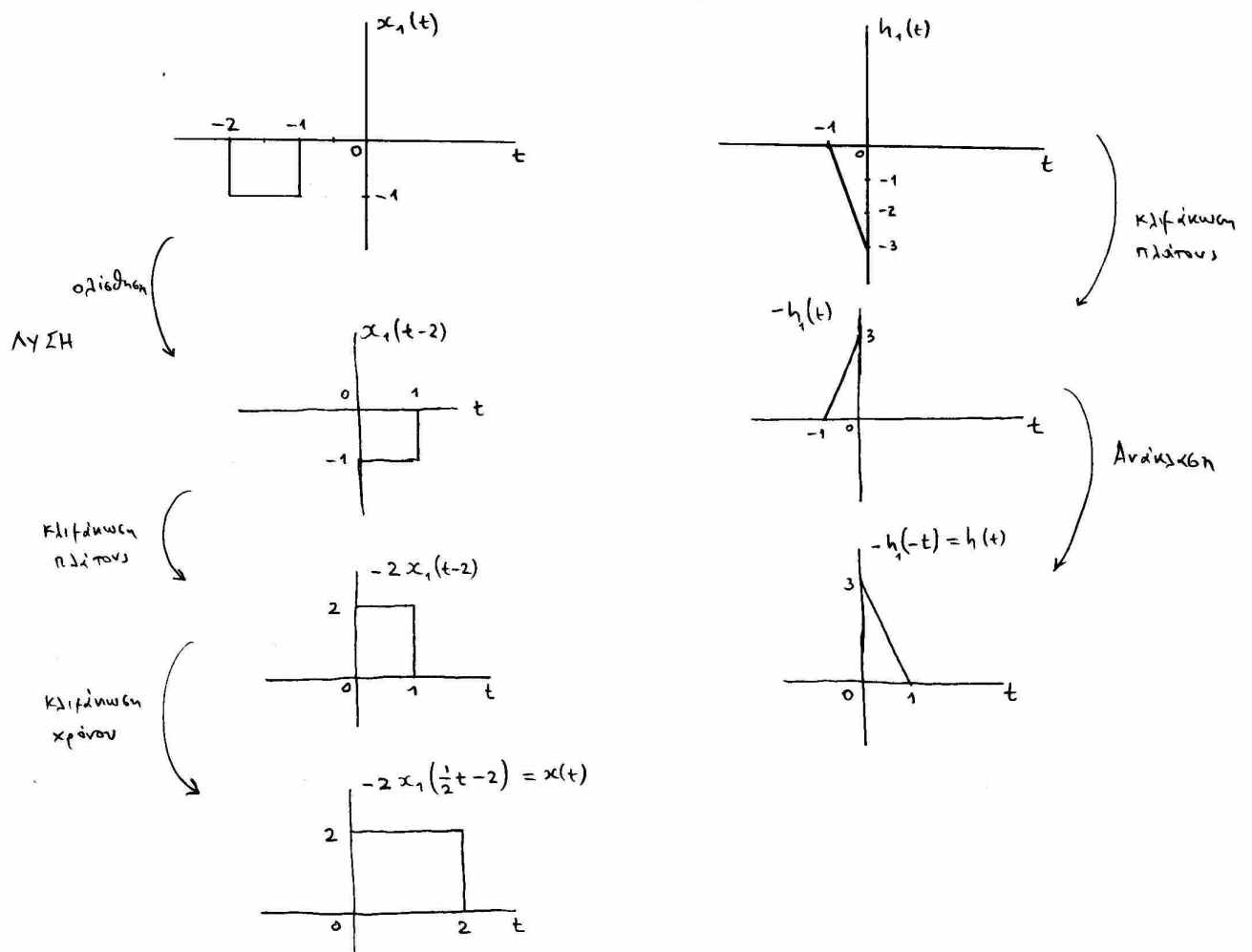
$$\left. (e e^{-t/2} - e^{-2}) [u(t-4) - u(t-6)] \right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιάσετε τα σήματα $x(t)$, $h(t)$ και να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την έξοδο $y(t)$ του ΓΧΑ συστήματος,



όπου $x(t) = -2x_1(\frac{1}{2}t - 2)$ και $h(t) = -h_1(-t)$.

Οι γραφικές παραστάσεις των $x_1(t)$, $h_1(t)$ δίνονται παρακάτω:



Το σήμα $x(t)$ εκφράζεται ως: $x(t) = 2[u(t) - u(t-2)]$

Το σήμα, δηλαδή στην προεπιβλεπόμενη περίπτωση η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος, εκφράζεται ως:

$$h(t) = (3-3t)[u(t) - u(t-1)]$$

Η έξοδος $y(t)$ του συστήματος ισούται με τη συνδίξη των $x(t)$ και $h(t)$: $y(t) = x(t) * h(t)$

$$\begin{aligned}
 \text{Exauf: } y(t) &= x(t) * h(t) = 2 [u(t) - u(t-2)] * (3-3t) [u(t) - u(t-1)] = \\
 &= [2u(t) - 2u(t-2)] * [3u(t) - 3u(t-1) - 3tu(t) + 3tu(t-1)] = \\
 &= 6 \underbrace{u(t) * u(t)}_{y_1} - 6 \underbrace{u(t) * u(t-1)}_{y_2} - 6 \underbrace{u(t) * tu(t)}_{y_3} + 6 \underbrace{u(t) * tu(t-1)}_{y_4} \\
 &\quad - 6 \underbrace{u(t-2) * u(t)}_{y_5} + 6 \underbrace{u(t-2) * u(t-1)}_{y_6} + 6 \underbrace{u(t-2) * tu(t)}_{y_7} - 6 \underbrace{u(t-2) * tu(t-1)}_{y_8}
 \end{aligned}$$

$$y_1(t) = u(t) * u(t) = t u(t)$$

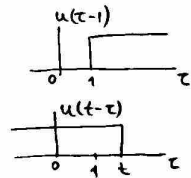
$$y_2(t) = u(t) * u(t-1) = y_1(t-1) = (t-1) u(t-1)$$

$$y_5(t) = u(t-2) * u(t) = y_1(t-2) = (t-2) u(t-2)$$

$$y_6(t) = u(t-2) * u(t-1) = y_1(t-3) = (t-3) u(t-3)$$

$$\begin{aligned}
 y_3(t) &= u(t) * t u(t) = t u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \\
 &= \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2} \quad \text{w} \quad y_3(t) = \frac{t^2}{2} u(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_4(t) &= u(t) * t u(t-1) = t u(t-1) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau u(\tau-1) u(t-\tau) d\tau = \\
 &= \int_1^t \tau d\tau = \left. \frac{\tau^2}{2} \right|_1^t = \frac{1}{2} (t^2 - 1) \\
 \text{w} \quad y_4(t) &= \frac{1}{2} (t^2 - 1) u(t-1)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y_7(t) &= u(t-2) * t u(t) = t u(t) * u(t-2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau u(\tau) u(t-\tau-2) d\tau = \\
 &= \int_0^{t-2} \tau d\tau = \left. \frac{1}{2} \tau^2 \right|_0^{t-2} = \frac{1}{2} (t-2)^2
 \end{aligned}$$

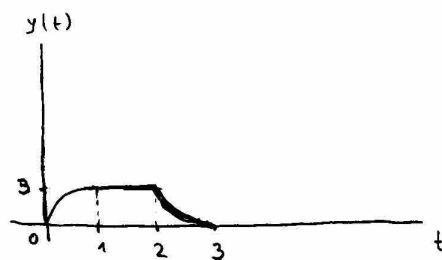
$$\text{w} \quad y_7(t) = \frac{1}{2} (t-2)^2 u(t-2)$$

$$\begin{aligned}
 y_8(t) &= u(t-2) * t u(t-1) = t u(t-1) * u(t-2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau u(\tau-1) u(t-\tau-2) d\tau = \\
 &= \int_1^{t-2} \tau d\tau = \left. \frac{1}{2} \tau^2 \right|_1^{t-2} = \frac{1}{2} [(t-2)^2 - 1] = \frac{1}{2} (t^2 - 4t + 3)
 \end{aligned}$$

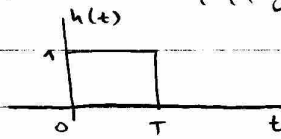
$$\text{w} \quad y_8(t) = \frac{1}{2} (t^2 - 4t + 3) u(t-3)$$

Τελικά έχουμε :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 6[y_1(t) - y_2(t) - y_3(t) + y_4(t) - y_5(t) + y_6(t) + y_7(t) - y_8(t)] = \\
 &= 6 \left[\underbrace{t u(t)}_{y_1} - \underbrace{(t-1)u(t-1)}_{y_2} - \underbrace{\frac{1}{2} t^2 u(t)}_{y_3} + \underbrace{\frac{1}{2} (t^2-1) u(t-1)}_{y_4} - \underbrace{(t-2)u(t-2)}_{y_5} + \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{(t-3)u(t-3)}_{y_6} + \underbrace{\frac{1}{2} (t-2)^2 u(t-2)}_{y_7} - \underbrace{\frac{1}{2} (t^2-4t+3) u(t-3)}_{y_8} \right] = \\
 &= 6 \left[t u(t) - t u(t-1) + \underbrace{u(t-1)}_{\text{...}} - \frac{1}{2} t^2 u(t) + \frac{1}{2} t^2 u(t-1) - \frac{1}{2} u(t-1) - t u(t-2) + \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{2 u(t-2)}_{\text{...}} + t u(t-3) - 3 u(t-3) + \frac{1}{2} t^2 u(t-2) - \underbrace{2 t u(t-2)}_{\text{...}} + \underbrace{2 u(t-2)}_{\text{...}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} t^2 u(t-3) + \underbrace{2 t u(t-3)}_{\text{...}} - \frac{3}{2} u(t-3) \right] = \\
 &= 6 \left[t u(t) - t u(t-1) + \frac{1}{2} u(t-1) - \frac{1}{2} t^2 u(t) + \frac{1}{2} t^2 u(t-1) - 3 t u(t-2) + \right. \\
 &\quad \left. + 4 u(t-2) + 3 t u(t-3) - \frac{9}{2} u(t-3) + \frac{1}{2} t^2 u(t-2) - \frac{1}{2} t^2 u(t-3) \right] = \\
 &\quad \underbrace{\frac{9}{2} u(t-2) - \frac{1}{2} u(t-2)}_{\text{...}} \\
 &= 6 \left[\left(-\frac{1}{2} t^2 + t \right) [u(t) - u(t-1)] + \frac{1}{2} [u(t-1) - u(t-2)] + \left(\frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2} \right) [u(t-2) - u(t-3)] \right]
 \end{aligned}$$



ΑΙΤΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $h(t)$ αυτή του σχήματος, στο οποίο εφαρμόζεται η είσοδος $x(t)$.



ΛΥΣΗ $h(t) = u(t) - u(t-T)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-T)] x(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) x(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-T) x(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} x(t-\tau) d\tau - \int_T^{\infty} x(t-\tau) d\tau = \int_0^T x(t-\tau) d\tau = \langle \text{ότι } t-\tau \geq 0 \rangle$$

$$= - \int_t^{t-T} x(q) dq = \int_{t-T}^t x(q) dq$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το σύμφα αυτό πρέπει να ολοκληρωθεί πεπερασμένου χρόνου.

Δηλαδή ολοκληρώνει την είσοδο για διαστήματα T , από $t-T$ έως t .

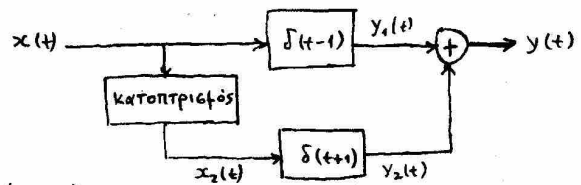
ΑΣΚΗΣΗ 1.4 Δίνεται το συνεχούς χρόνου
σήμα $v(t) = (t+4) \frac{u(t) - u(t+4)}{4}$

α. Να σχεδιάσετε το σήμα $v(t)$.

β. Να σχεδιάσετε το σήμα $x(t) = -v(-2t-2)$.

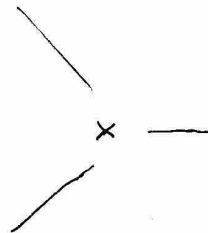
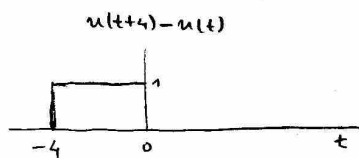
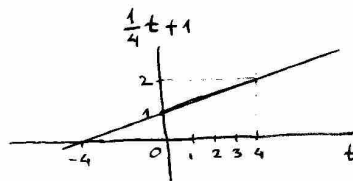
γ. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τα σήματα $x_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y(t)$.

δ. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τον μετασχηματισμό Fourier $Y(\omega)$ του σήματος $y(t)$

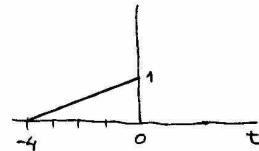


ΛΥΣΗ α. Το σήμα $v(t)$ γράφεται ως

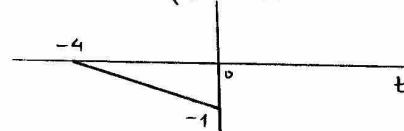
$$v(t) = \frac{1}{4} (t+4) [u(t) - u(t+4)] = -\left(\frac{1}{4}t + 1\right) [u(t+4) - u(t)]$$



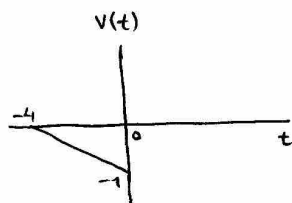
$$\left(\frac{1}{4}t + 1\right) [u(t+4) - u(t)]$$



$$v(t) = -\left(\frac{1}{4}t + 1\right) [u(t+4) - u(t)]$$

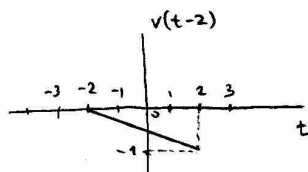


β. Το σήμα $x(t)$ ισούται με $x(t) = -v(-2t-2)$. Θα το σχεδιάσουμε σταδιακά αρχίζοντας από το σήμα $v(t)$, ολισθαίνοντας στον χρόνο για να βρούμε το $v(t-2)$, κλιτακλώντας τον χρόνο για να βρούμε το $v(2t-2)$, επιτελώντας κατοπτρισμό στον χρόνο για να βρούμε το $v(-2t-2)$ και τέλος παίρνουμε το συγγενη ως προς τον άξονα των χρόνων για να βρούμε το αρνητικό του μέχρι τώρα αποτελέσματος, δηλαδή το $-v(-2t-2)$. Η διαδικασία αυτή δίνεται στα σχήματα που ακολουθούν.



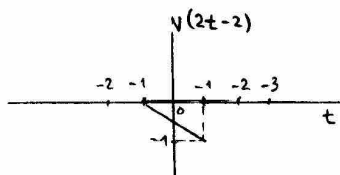
Σχ.1

Καθυστέρηση
κατά 2



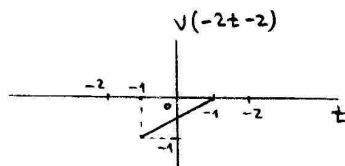
Σχ.2

Επιπλέον
χρόνου
κατά 2



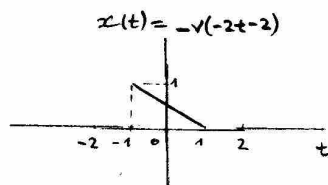
Σχ.3

Κατοπτρισμός
στον
χρόνο



Σχ.4

Αντιστροφή
προσήτου
πλάτους



Σχ.5

Συμπεριέεται ότι στο κριτήριο αυτό μπορούμε να καταλήξουμε βασισμένοι στον ορισμό του $v(t)$:

$$v(t) = -\left(\frac{1}{4}t + 1\right) [u(t+4) - u(t)] \Leftrightarrow v(t) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{4}t + 1\right) & \text{για } -4 \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με βάση αυτό, το σήμα $x(t)$ είναι:

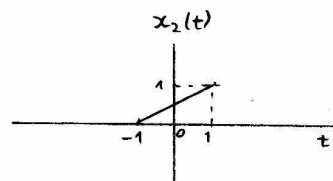
$$x(t) = -v(-2t-2) = \begin{cases} -\left[-\left(\frac{1}{4}(-2t-2) + 1\right)\right] & \text{για } -4 \leq -2t-2 \leq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{για } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

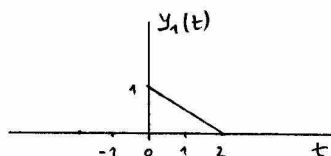
Η γραφική παράσταση του $x(t)$ είναι ακριβώς αυτή του Σχ.5.

8.

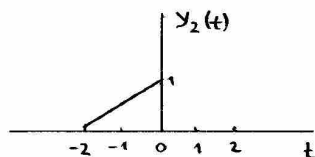
$$x_2(t) = x(-t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(-t) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{για } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



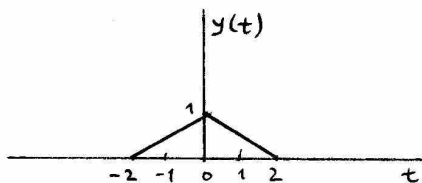
$$y_1(t) = x(t) * \delta(t-1) = x(t-1) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{2} & \text{για } -1 \leq t-1 \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}t + 1 & \text{για } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$y_2(t) = x_2(t) * \delta(t+1) = x_2(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{2} & \text{για } -1 \leq t+1 \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 1 & \text{για } -2 \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 1 & \text{για } -2 \leq t \leq 0 \\ -\frac{1}{2}t + 1 & \text{για } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 \delta. \quad Y(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}t+1\right) e^{-j\Omega t} dt + \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}t+1\right) e^{-j\Omega t} dt = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-2}^0 t e^{-j\Omega t} dt}_{Y_1(\Omega)} + \underbrace{\int_{-2}^0 e^{-j\Omega t} dt}_{Y_2(\Omega)} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-j\Omega t} dt}_{Y_3(\Omega)} + \underbrace{\int_0^2 e^{-j\Omega t} dt}_{Y_4(\Omega)} \quad (1)
 \end{aligned}$$

όπου

$$Y_1(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 t e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{-j\Omega} \int_{-2}^0 t d(e^{-j\Omega t}) =$$

$$= \frac{1}{-2j\Omega} \left[t e^{-j\Omega t} \Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 e^{-j\Omega t} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{-2j\Omega} \left[0 - (-2) e^{-j\Omega(-2)} - \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-2}^0 \right] =$$

$$= \frac{1}{-2j\Omega} \left[2 e^{j2\Omega} + \frac{1}{j\Omega} (e^0 - e^{-j\Omega(-2)}) \right] =$$

$$= \frac{1}{-2j\Omega} \left[2 e^{j2\Omega} + \frac{1}{j\Omega} (1 - e^{j2\Omega}) \right] =$$

$$= \frac{e^{j2\Omega}}{-j\Omega} + \frac{1}{2\Omega^2} - \frac{e^{j2\Omega}}{2\Omega^2} \quad (1a)$$

$$Y_2(\Omega) = \int_{-2}^0 e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-2}^0 = \frac{1}{-j\Omega} (e^0 - e^{-j\Omega(-2)}) =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega} (1 - e^{j2\Omega}) = \frac{1}{-j\Omega} + \frac{e^{j2\Omega}}{j\Omega} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned}
 Y_3(\Omega) &= \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{-j\Omega} \int_0^2 t d(e^{-j\Omega t}) = \\
 &= \frac{1}{-2j\Omega} \left[t e^{-j\Omega t} \Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-j\Omega t} dt \right] = \\
 &= \frac{1}{-2j\Omega} \left[2 e^{-j\Omega 2} - 0 - \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_0^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{-2j\Omega} \left[2 e^{-j\Omega 2} + \frac{1}{j\Omega} (e^{-j\Omega 2} - e^0) \right] = \\
 &= \frac{1}{-2j\Omega} \left[2 e^{-j\Omega 2} + \frac{e^{-j\Omega 2}}{j\Omega} - \frac{1}{j\Omega} \right] = \\
 &= \frac{e^{-j\Omega 2}}{-j\Omega} + \frac{e^{-j\Omega 2}}{2\Omega^2} - \frac{1}{2\Omega^2} \quad (18)
 \end{aligned}$$

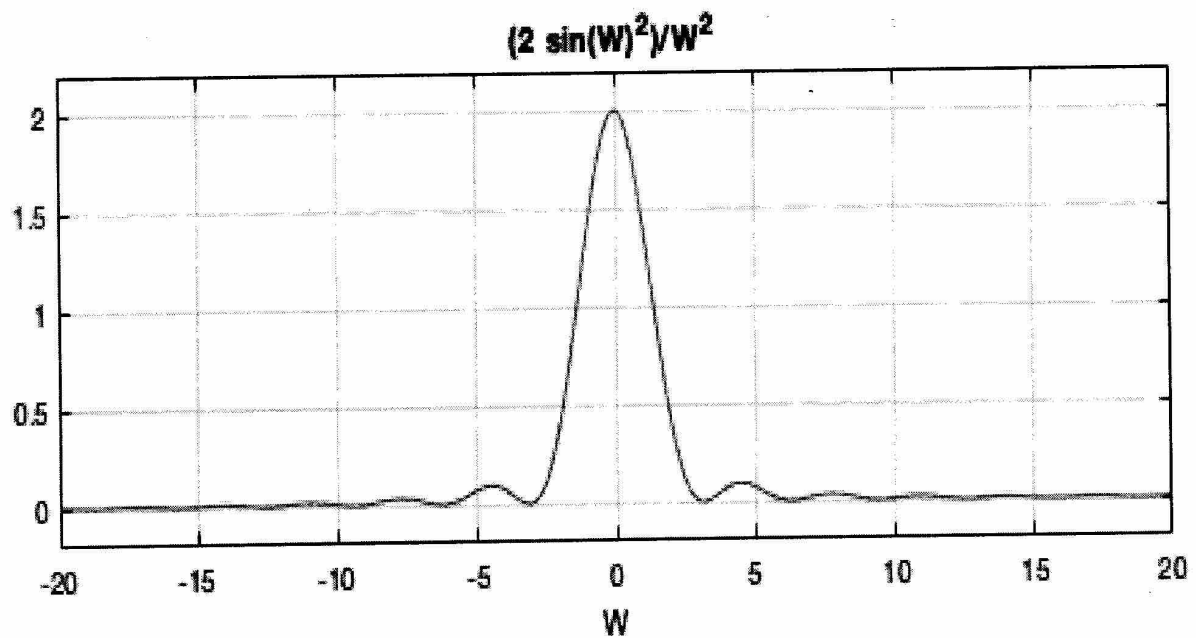
$$\begin{aligned}
 Y_4(\Omega) &= \int_0^2 e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_0^2 = \frac{1}{-j\Omega} (e^{-j\Omega 2} - e^0) = \\
 &= \frac{e^{-j\Omega 2}}{-j\Omega} + \frac{1}{j\Omega} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Με βάση τα κριτήρια εφάρτα αυτά η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 Y(\Omega) &= \underbrace{\left[\frac{e^{j2\Omega}}{-j\Omega} + \frac{1}{2\Omega^2} - \frac{e^{-j2\Omega}}{2\Omega^2} \right]}_{(14)} + \underbrace{\left[\frac{1}{-j\Omega} + \frac{e^{j2\Omega}}{j\Omega} \right]}_{(16)} - \underbrace{\left[\frac{e^{-j2\Omega}}{-j\Omega} + \frac{e^{-j2\Omega}}{2\Omega^2} - \frac{1}{2\Omega^2} \right]}_{(18)} + \underbrace{\left[\frac{e^{-j2\Omega}}{-j\Omega} + \frac{1}{j\Omega} \right]}_{(19)} = \\
 &= \frac{1}{2\Omega^2} - \frac{e^{j2\Omega}}{2\Omega^2} + \cancel{\frac{e^{-j2\Omega}}{j\Omega}} - \frac{e^{-j2\Omega}}{2\Omega^2} + \frac{1}{2\Omega^2} - \cancel{\frac{e^{j2\Omega}}{j\Omega}} = \\
 &= \frac{2}{2\Omega^2} - \frac{e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega}}{2\Omega^2} = \frac{1}{\Omega^2} - \frac{2\cos(2\Omega)}{2\Omega^2} = \frac{1 - \cos(2\Omega)}{\Omega^2} = \frac{1 - [1 - 2\sin^2(\Omega)]}{\Omega^2} = \\
 &= \frac{2\sin^2(\Omega)}{\Omega^2}
 \end{aligned}$$

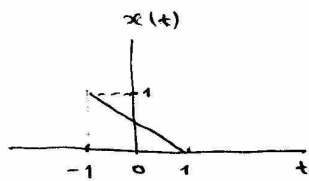

```
syms W
```

```
Y(W) = 2 * sin(W)* sin(W) / (W * W);  
subplot(2,1,1); ezplot(Y(W), [-20 20]); grid on;  
ylim([-0.2,2.2]);
```



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο (εναρμ. Fourier του σήματος $x(t) = \frac{1}{2}(1-t)$ για $-1 \leq t \leq 1$ και $x(t) = 0$ αλλιώς.

ΛΥΣΗ



$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-t) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^1 e^{-j\Omega t} dt - \int_{-1}^1 t e^{-j\Omega t} dt \right] = \frac{1}{2} [X_1(\Omega) - X_2(\Omega)] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου} \\ X_1(\Omega) &= \int_{-1}^1 e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{-j\Omega} (e^{-j\Omega} - e^{+j\Omega}) = \\ &= \frac{1}{j\Omega} 2j \sin \Omega = \frac{2}{\Omega} \sin \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} X_2(\Omega) &= \int_{-1}^1 t e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{-j\Omega} \int_{-1}^1 t d(e^{-j\Omega t}) = \langle \text{κατά παράγοντες} \rangle \\ &= \frac{1}{-j\Omega} \left[t e^{-j\Omega t} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^{-j\Omega t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{-j\Omega} \left[(e^{-j\Omega} - (-1)e^{+j\Omega}) - \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-1}^1 \right] = \\ &= \frac{1}{-j\Omega} \left[(e^{-j\Omega} + e^{+j\Omega}) + \frac{1}{j\Omega} (e^{-j\Omega} - e^{+j\Omega}) \right] = \\ &= \frac{1}{-j\Omega} \left[2 \cos \Omega + \frac{1}{j\Omega} (-2j \sin \Omega) \right] = \\ &= \frac{1}{-j\Omega} \left[2 \cos \Omega - \frac{2}{\Omega} \sin \Omega \right] = \\ &= -\frac{2}{j\Omega} \cos \Omega + \frac{2}{j\Omega^2} \sin \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(2,3)} X(\Omega) = \frac{1}{2} [X_1(\Omega) - X_2(\Omega)] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\Omega} \sin \Omega + \frac{2}{j\Omega} \cos \Omega - \frac{2}{j\Omega^2} \sin \Omega \right] =$$

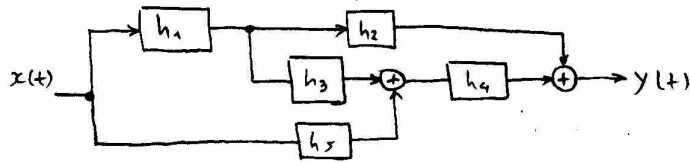
$$= \frac{\sin \Omega}{\Omega} + \frac{1}{j\Omega} \left(\cos \Omega - \frac{\sin \Omega}{\Omega} \right) =$$

$$= \frac{\sin \Omega}{\Omega} - j \frac{1}{\Omega} \left(\cos \Omega - \frac{\sin \Omega}{\Omega} \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος των σχήματος, όταν

$$h_1(t) = h_2(t) = h_5(t) = u(t)$$

$$h_3(t) = 5\delta(t), \quad h_4(t) = e^{-2t}u(t)$$



$$\begin{aligned} \Lambda \Upsilon \Sigma \Upsilon \quad h(t) &\triangleq h = (h_1 * h_2) + h_4 * (h_1 * h_3 + h_5) = \\ &= (u(t) * u(t)) + h_4(t) * [(u(t) * 5\delta(t)) + u(t)] = \\ &= t u(t) + h_4(t) * [5u(t) + u(t)] = \\ &= t u(t) + \underbrace{h_4(t) * 6u(t)}_{h_6(t)} \end{aligned}$$

$$h_6(t) = 6 h_4(t) * u(t) = 6 e^{-2t} u(t) * u(t) =$$

$$= 6 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = 6 \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2\tau} \Big|_0^t =$$

$$= -3 \left(e^{-2t} - e^0 \right) = 3 (1 - e^{-2t})$$

$$\dot{\text{u}} \quad h_6(t) = 3 (1 - e^{-2t}) u(t)$$

Τελικά

$$h(t) = t u(t) + 3(1 - e^{-2t}) u(t) =$$

$$= (t + 3 - 3e^{-2t}) u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Η κραυεπτική κνάνρηση γραφτινάυ δυομμάτος είναι $h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}u(t)$.
Να υπολογιστεί η έβουος για μν έβουο $x(t) = \text{sgn}(t)$.

ΛΥΣΗ

Α' τρόπος - πείδίο κρύνου

$$x(t) = \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

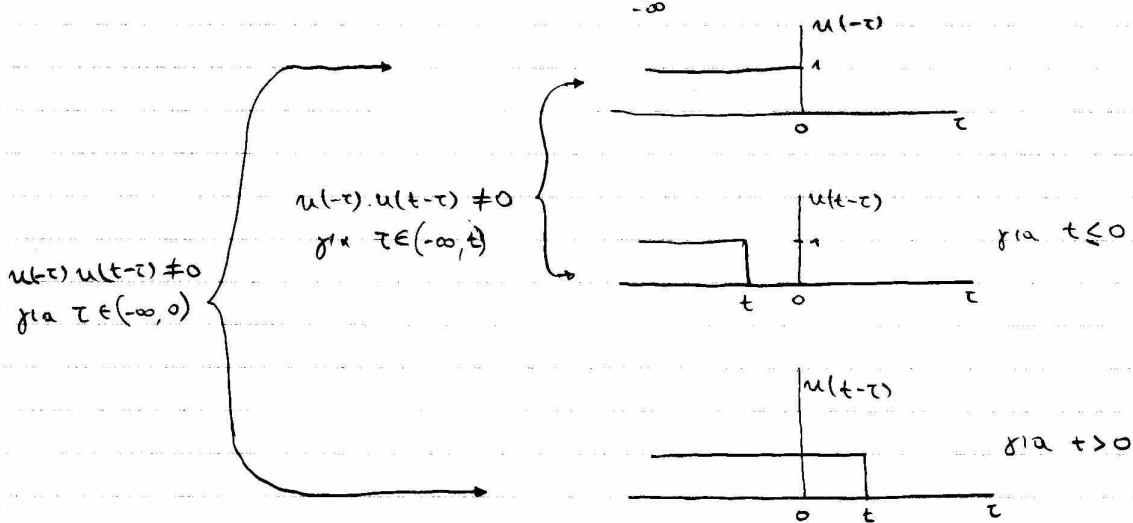
Άρα

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = [\delta(t) - 2e^{-t}u(t)] * [u(t) - u(-t)] = \\ &= \underbrace{\delta(t) * u(t)}_{u(t)} - \underbrace{\delta(t) * u(-t)}_{u(-t)} - \underbrace{2e^{-t}u(t) * u(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2e^{-t}u(t) * u(-t)}_{y_2(t)} = \\ &= u(t) - u(-t) - y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2e^{-t}u(t) * u(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \\ &= 2 \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -2e^{-\tau} \Big|_0^t = -2(e^{-t} - e^0) = 2(1 - e^{-t}) \Rightarrow y_1(t) = 2(1 - e^{-t})u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 2e^{-t}u(t) * u(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-\tau) \cdot 2e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau = \\ &= 2e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$



Για τον υπολογισμό του $y_2(t)$ διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

α. $t \leq 0$:

$$y_2(t) = 2e^{-t} \int_{-\infty}^t e^{\tau} d\tau = 2e^{-t} e^{\tau} \Big|_{-\infty}^t = 2e^{-t} (e^t - e^{-\infty}) = 2e^{-t} e^t = 2$$

β. $t > 0$:

$$y_2(t) = 2e^{-t} \int_{-\infty}^0 e^{\tau} d\tau = 2e^{-t} e^{\tau} \Big|_{-\infty}^0 = 2e^{-t} (e^0 - e^{-\infty}) = 2e^{-t}$$

$$\text{Ένωση: } y_2(t) = 2 \cdot u(-t) + 2e^{-t}u(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Τελικά: } y_1(t) &= u(t) - u(-t) - y_1(t) + y_2(t) = \\ &= u(t) - u(-t) - [2(1 - e^{-t})u(t)] + [2u(-t) + 2e^{-t}u(t)] = \\ &= 4e^{-t}u(t) - [u(t) - u(-t)] = 4e^{-t}u(t) - \text{sgn}(t) \end{aligned}$$

Ερωτήματα: 82 προκύπτει να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση
 $\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$ για να υπολογίσουμε την ευρέωση.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h(t) * x(t) = [\delta(t) - 2e^{-t}u(t)] * [2u(t) - 1] = \\
 &= \delta(t) * 2u(t) - \delta(t) * 1 - 2e^{-t}u(t) * 2u(t) + \\
 &\quad + 2e^{-t}u(t) * 1 = \\
 &= 2u(t) - 1 - 4e^{-t}u(t) * u(t) + 2 = \langle \text{b2. σύστημα} \rangle \\
 &= 2u(t) + 1 - 4(1 - e^{-t})u(t) = \\
 &= 2u(t) + 1 - 4u(t) + 4e^{-t}u(t) = \\
 &= 4e^{-t}u(t) - 2u(t) + 1 = \\
 &= 4e^{-t}u(t) - [2u(t) - 1] = \\
 &= 4e^{-t}u(t) - \text{sgn}(t)
 \end{aligned}$$

Σημειών:

$$\bullet \delta(t) * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot 1 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

$$\bullet 2e^{-t}u(t) * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau) \cdot 1 d\tau = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau =$$

$$= -2 \left. e^{-\tau} \right|_0^{\infty} = -2(e^{-\infty} - e^{-0}) = -2(0 - 1) = 2$$

B! γρόνος - ρεξία συχνότητας

$$H(\omega) = F\{\delta(t) - 2e^{-t}u(t)\} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+j\omega}$$

$$X(\omega) = F\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{2}{j\omega} \left(1 - 2 \frac{1}{1+j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega} - \underbrace{\frac{4}{j\omega(1+j\omega)}}_{G(\omega)}$$

H $G(\omega)$ αναλύεται σε φερνυα' ελαιοφωτε με γυης:

$$G(\omega) = \frac{4}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

όπου

$$A = j\omega G(\omega) \Big|_{j\omega=0} = \frac{4}{1+j\omega} \Big|_{j\omega=0} = \frac{4}{1} = 4$$

$$B = (1+j\omega) G(\omega) \Big|_{j\omega=-1} = \frac{4}{j\omega} \Big|_{j\omega=-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

Απλ

$$Y(\omega) = \frac{2}{j\omega} - \left(\frac{4}{j\omega} + \frac{-4}{1+j\omega}\right) = \frac{-2}{j\omega} + \frac{4}{1+j\omega}$$

F^{-1}

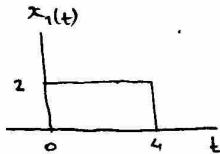
$$\begin{aligned} y(t) &= -F^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\right\} + 4F^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\} = -\operatorname{sgn}(t) + 4e^{-t}u(t) = \\ &= 4e^{-t}u(t) - \operatorname{sgn}(t) \end{aligned}$$

ΑΙΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΦ των συστημάτων:

$$\begin{aligned} \alpha. \quad x_1(t) &= 2[u(t) - u(t-4)] & \gamma. \quad x_3(t) &= 2t[u(t) - u(t-4)] \\ \beta. \quad x_2(t) &= e^{-3t}[u(t) - u(t-4)] & \delta. \quad x_4(t) &= \cos 4\pi t[u(t) - u(t-4)] \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ $\alpha. \quad X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2[u(t) - u(t-4)] e^{-j\omega t} dt =$

$$= 2 \int_0^4 e^{-j\omega t} dt = 2 \cdot \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^4 = \frac{-2}{j\omega} (e^{-j\omega 4} - e^0) =$$



$$= \frac{2}{j\omega} (1 - e^{-j4\omega}) = \frac{2}{j\omega} e^{-j2\omega} (e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}) =$$

$$= \frac{2}{j\omega} e^{-j2\omega} 2j \sin 2\omega = 4 e^{-j2\omega} \frac{\sin 2\omega}{\omega} = 8 e^{-j2\omega} \frac{\sin 2\omega}{2\omega}$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του $X_1(\omega)$ είναι αυτός μέσω των ιδιοτήτων του ΜΦ:

$$F\{x_1(t)\} = F\{2[u(t) - u(t-4)]\} \Rightarrow$$

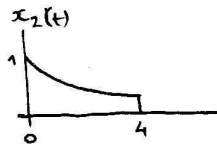
$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= 2[F\{u(t)\} - F\{u(t-4)\}] = \\ &= 2[U(\omega) - e^{-j\omega 4} U(\omega)] = \\ &= 2U(\omega)(1 - e^{-j\omega 4}) = \\ &= 2\left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)\right](1 - e^{-j\omega 4}) = \\ &= 2 \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega 4}) + \underbrace{2\pi \delta(\omega)(1 - e^{-j\omega 4})}_{\downarrow} \end{aligned}$$

Αλλά $X(\omega) \delta(\omega) = X(0) \delta(\omega)$ οπότε ο δεύτερος όρος γίνεται:
 $2\pi (1 - e^{-j\omega 4}) \delta(\omega) = 2\pi (1 - e^0) \delta(\omega) = 2\pi \cdot 0 \cdot \delta(\omega) = 0$

Τελικά

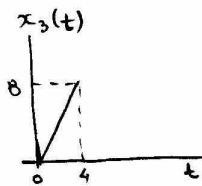
$$X_1(\omega) = \frac{2}{j\omega} (1 - e^{-j\omega 4}) = \dots = 8 e^{-j2\omega} \frac{\sin 2\omega}{2\omega}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б. } X_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} [u(t) - u(t-4)] e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \int_0^4 e^{-3t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^4 e^{-(3+j\omega)t} dt =
 \end{aligned}$$

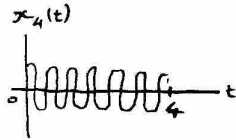


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{-(3+j\omega)} e^{-(3+j\omega)t} \Big|_0^4 = \frac{-1}{3+j\omega} [e^{-(3+j\omega)4} - e^0] = \\
 &= \frac{1}{3+j\omega} [1 - e^{-(3+j\omega)4}] = \\
 &= \frac{1}{3+j\omega} (1 - e^{-12} e^{-j\omega 4})
 \end{aligned}$$

$$\text{г. } X_3(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^4 t e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{1}{-j\omega} \int_0^4 t d(e^{-j\omega t}) = \langle \text{интегрируем по частям} \rangle$$



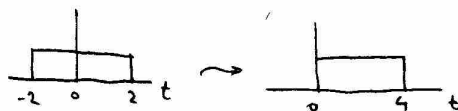
$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2}{j\omega} \left[t e^{-j\omega t} \Big|_0^4 - \int_0^4 e^{-j\omega t} dt \right] = \\
 &= \frac{-2}{j\omega} \left[(4 e^{-j\omega 4} - 0) - \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^4 \right] = \\
 &= \frac{-2}{j\omega} \left[4 e^{-j\omega 4} + \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega 4} - e^0) \right] = \\
 &= \frac{-2}{j\omega} 4 e^{-j\omega 4} + \frac{-2}{j\omega} \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega 4} - 1) = \\
 &= \frac{-8}{j\omega} e^{-j\omega 4} + \frac{2}{\omega^2} (e^{-j\omega 4} - 1) = \\
 &= \frac{8j\omega}{\omega^2} e^{-j\omega 4} + \frac{2}{\omega^2} (e^{-j\omega 4} - 1) = \\
 &= \frac{1}{\omega^2} [(8j\omega + 2) e^{-j\omega 4} - 2]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 8. \quad X_4(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_4(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_0^4 \cos 4\pi t e^{-j\Omega t} dt = \\
 &= \int_0^4 \frac{1}{2} (e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) e^{-j\Omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{j(\Omega - 4\pi)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^4 e^{-j(\Omega + 4\pi)t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{-j(\Omega - 4\pi)} e^{-j(\Omega - 4\pi)t} \Big|_0^4 + \frac{1}{2} \frac{1}{-j(\Omega + 4\pi)} e^{-j(\Omega + 4\pi)t} \Big|_0^4 = \\
 &= \frac{-1}{2j(\Omega - 4\pi)} \left[e^{-j(\Omega - 4\pi)4} - e^0 \right] + \frac{-1}{2j(\Omega + 4\pi)} \left[e^{-j(\Omega + 4\pi)4} - e^0 \right] = \\
 &= \frac{1}{2j(\Omega - 4\pi)} \left[1 - e^{-j(\Omega - 4\pi)4} \right] + \frac{1}{2j(\Omega + 4\pi)} \left[1 - e^{-j(\Omega + 4\pi)4} \right] = \\
 &= \frac{e^{-j(\Omega - 4\pi)2}}{2j(\Omega - 4\pi)} \left[e^{+j(\Omega - 4\pi)2} - e^{-j(\Omega - 4\pi)2} \right] + \frac{e^{-j(\Omega + 4\pi)2}}{2j(\Omega + 4\pi)} \left[e^{+j(\Omega + 4\pi)2} - e^{-j(\Omega + 4\pi)2} \right] = \\
 &= \frac{e^{-j(\Omega - 4\pi)2}}{2j(\Omega - 4\pi)} \cdot 2j \sin(\Omega - 4\pi)2 + \frac{e^{-j(\Omega + 4\pi)2}}{2j(\Omega + 4\pi)} \cdot 2j \sin(\Omega + 4\pi)2 = \\
 &= 2e^{-j(2\Omega - 8\pi)} \frac{\sin(2\Omega - 8\pi)}{(2\Omega - 8\pi)} + 2e^{-j(2\Omega + 8\pi)} \frac{\sin(2\Omega + 8\pi)}{(2\Omega + 8\pi)} = \\
 &= 2e^{-j2\Omega} \frac{\sin(2\Omega - 8\pi)}{(2\Omega - 8\pi)} + 2e^{-j2\Omega} \frac{\sin(2\Omega + 8\pi)}{(2\Omega + 8\pi)}
 \end{aligned}$$

↑
 υποδηλώνει
 την ολισθήση
 της κυματοστροφής
 στον χρόνο.
 [κατεύθυνση του
 τετραγωνικού παλμού
 κατά 2 φορές προς τα
 αριστερά]

↖
 υποδηλώνει τη συνεισφορά
 των παλμών sinc και $\delta(2\Omega \pm 8\pi)$
 στη συχνότητα.



ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο ΜΦ του σήματος

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos \Omega_0 t u(t), \text{ όπου } \operatorname{Re}\{\beta\} > 0$$

ΛΥΣΗ

$$x(t) = Ae^{-\beta t} u(t) \cdot \cos \Omega_0 t = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

$$\text{όπου } x_1(t) = Ae^{-\beta t} u(t)$$

$$x_2(t) = \cos \Omega_0 t$$

$$\text{Άλλα } X_1(\Omega) = \frac{A}{\beta + j\Omega}$$

$$X_2(\Omega) = \pi [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

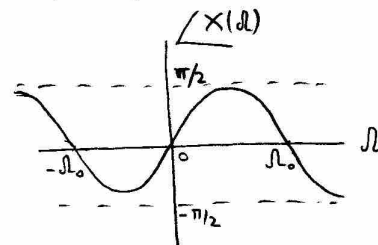
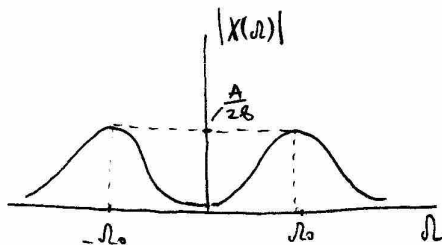
Από την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στο χρόνο έχουμε:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$$

Συνεπώς

$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{A}{\beta + j\Omega} * \pi [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] =$$

$$= \frac{A/2}{\beta + j(\Omega - \Omega_0)} + \frac{A/2}{\beta + j(\Omega + \Omega_0)}$$



Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολικής μερικής στο χρόνο, αφού πρώτα εκφράζαμε το $\cos \Omega_0 t$ μέσω του τύπου του Euler.

$$x_2(t) = \cos \Omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}) \leadsto$$

$$x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) = x_1(t) \cdot \frac{1}{2} (e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} x_1(t) + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} x_1(t)$$

Άρα

$$X(\Omega) = \frac{1}{2} X_1(\Omega + \Omega_0) + \frac{1}{2} X_1(\Omega - \Omega_0) = \frac{1}{2} \frac{A}{\beta + j(\Omega + \Omega_0)} + \frac{1}{2} \frac{A}{\beta + j(\Omega - \Omega_0)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Υπολογισμός φίτρων και φάσης του φαινομένου $X(\Omega) = \frac{A/2}{b+j(\Omega-\Omega_0)} + \frac{A/2}{b+j(\Omega+\Omega_0)}$ (1)

Θέτω $\Omega-\Omega_0 = \Omega_-$ και $\Omega+\Omega_0 = \Omega_+$ οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{A/2}{b+j\Omega_-} + \frac{A/2}{b+j\Omega_+} = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{b+j\Omega_-} + \frac{1}{b+j\Omega_+} \right] = \\ &= \frac{A}{2} \left[\frac{b-j\Omega_-}{(b+j\Omega_-)(b-j\Omega_-)} + \frac{b-j\Omega_+}{(b+j\Omega_+)(b-j\Omega_+)} \right] = \\ &= \frac{A}{2} \left[\frac{b-j\Omega_-}{b^2+\Omega_-^2} + \frac{b-j\Omega_+}{b^2+\Omega_+^2} \right] = \\ &= \frac{A}{2} \left[\frac{(b-j\Omega_-) \overbrace{(b^2+\Omega_+^2)}^{C_+} + (b-j\Omega_+) \overbrace{(b^2+\Omega_-^2)}^{C_-}}{\underbrace{(b^2+\Omega_-^2)(b^2+\Omega_+^2)}_{D=C_+C_-}} \right] = \\ &= \frac{A}{2D} \left[(b-j\Omega_-) C_+ + (b-j\Omega_+) C_- \right] = \\ &= \frac{A}{2D} \left[bC_+ - j\Omega_- C_+ + bC_- - j\Omega_+ C_- \right] = \\ &= \frac{A}{2D} \left[\underbrace{b(C_+ + C_-) - j(\Omega_- C_+ + \Omega_+ C_-)}_{X_1(\Omega)} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Η σχέση (2) εκφράζει το $X(\Omega)$ ως ένα τυχαιό στη γνωστή μορφή $x+jy$ του οποίου το μέτρο και τη φάση μπορούμε να υπολογίσουμε ως $\sqrt{x^2+y^2}$ και $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ αντίστοιχα. Συνεπώς, για το $X_1(\Omega)$ έχουμε:

$$|X_1(\Omega)| = \sqrt{b^2(C_+ + C_-)^2 + (\Omega_- C_+ + \Omega_+ C_-)^2} \quad (3)$$

$$\angle X_1(\Omega) = \tan^{-1} \frac{-(\Omega_- C_+ + \Omega_+ C_-)}{b(C_+ + C_-)} \quad (4)$$

Τελικά, για το $X(\omega) = \frac{A}{2D} X_1(\omega)$ έχουμε

$$|X(\omega)| = \frac{A}{2D} |X_1(\omega)| \quad (5)$$

$$\angle X(\omega) = \angle X_1(\omega) \quad (6)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για $A=4$, $B=2$, $\omega_0=2\pi$ το μέτρο και η φάση του $X(\omega)$ γίνονται:

$$\omega_- = \omega - \omega_0 = \omega - 2\pi$$

$$\omega_+ = \omega + \omega_0 = \omega + 2\pi$$

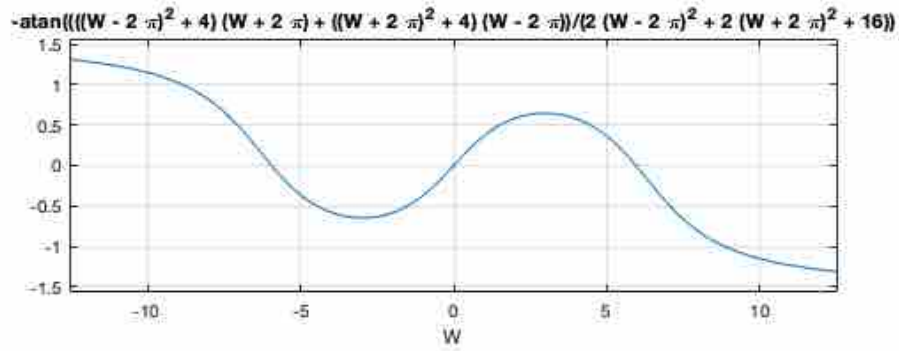
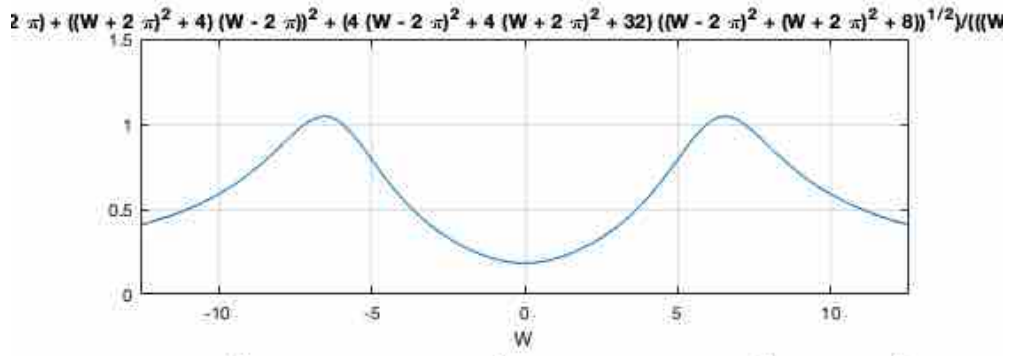
$$C_+ = B^2 + \omega_+^2 = 4 + (\omega + 2\pi)^2$$

$$C_- = B^2 + \omega_-^2 = 4 + (\omega - 2\pi)^2$$

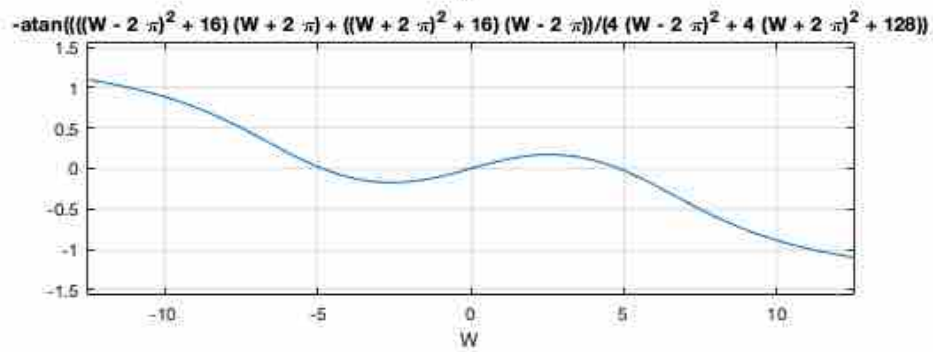
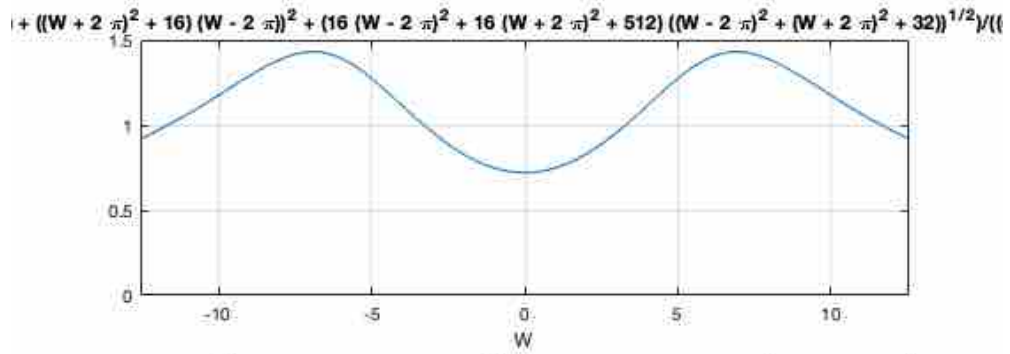
$$D = C_+ C_- = [4 + (\omega + 2\pi)^2][4 + (\omega - 2\pi)^2]$$

Οι γραμμικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης του $X(\omega)$ φαίνονται στις βελίδες που ακολουθούν, μαζί με εκθέτες για διαφορετικές τιμές των A, B, ω_0 .

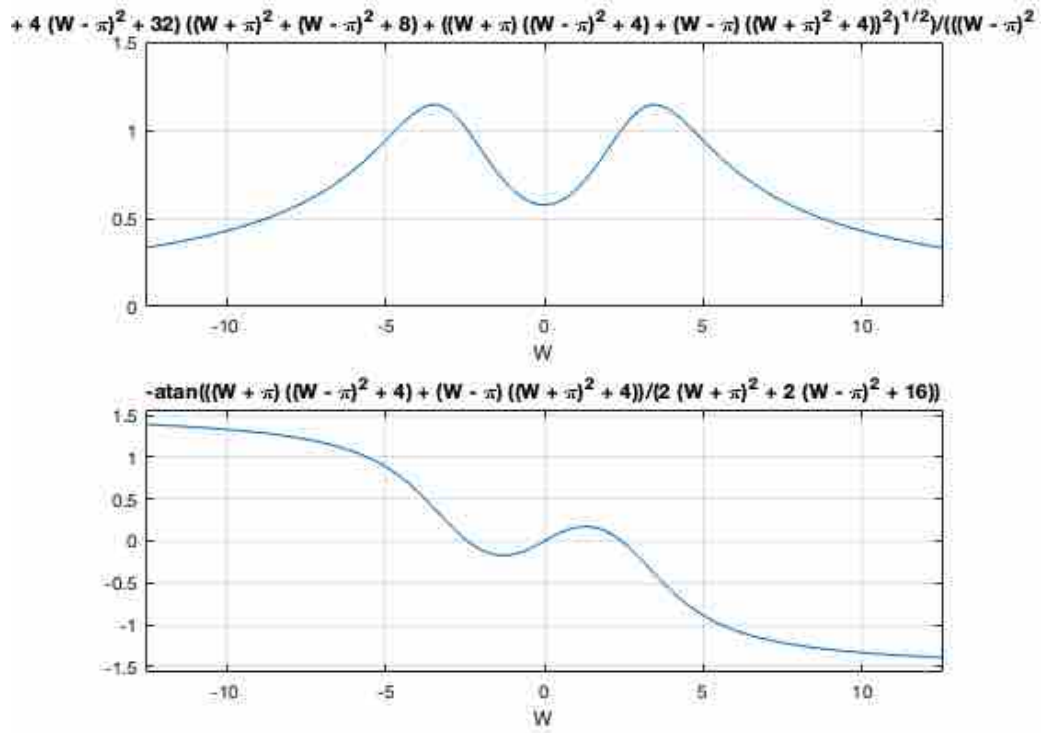
A=4
b=2
W0=2π



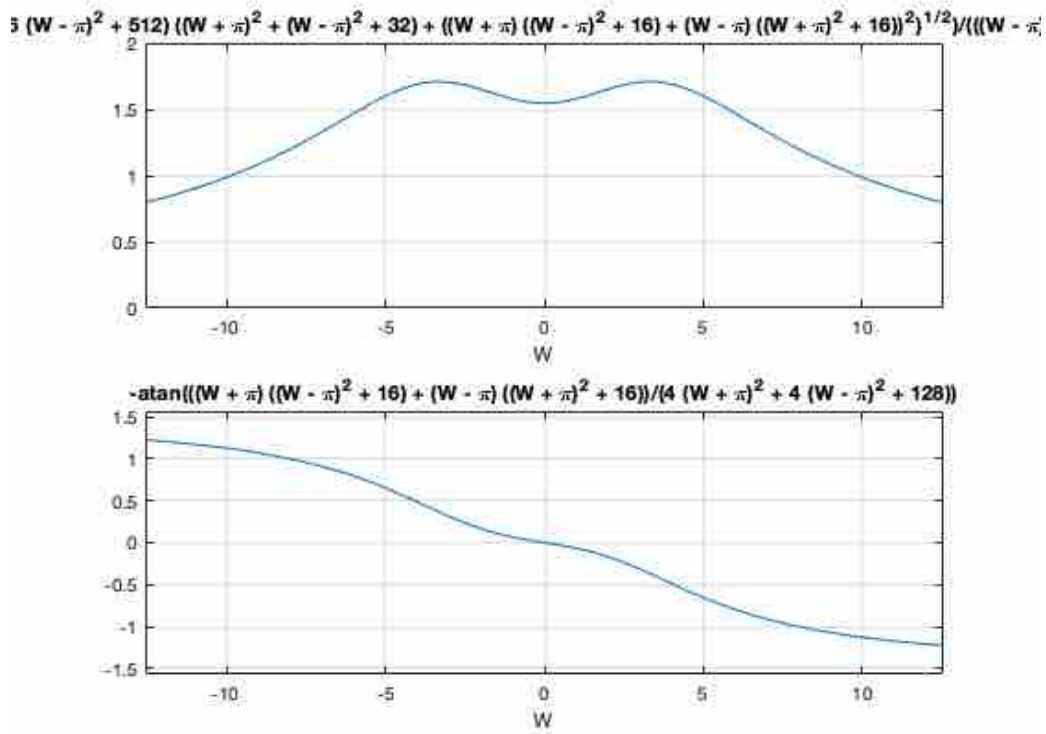
A=10
b=4
W0=2π



A=4
b=2
W0=π



A=10
b=4
W0=π



Matlab code

```
syms W

A = 4;
b = 2;
W0 = 2*pi;
Wm = W - W0;
Wp = W + W0;
Cp = b*b + Wp*Wp;
Cm = b*b + Wm*Wm;
D = Cp * Cm;

magX(W) = (A/(2*D))*sqrt((b*b*(Cp+Cm)*(Cp+Cm)) + (Wm*Cp+Wp*Cm)*(Wm*Cp+Wp*Cm));
phaX(W) = atan(-(Wm*Cp+Wp*Cm)/(b*(Cp+Cm)));

subplot(2,1,1); ezplot(magX(W), [-4*pi 4*pi]); grid on; ylim([0, 1.5]);
subplot(2,1,2); ezplot(phaX(W), [-4*pi 4*pi]); grid on; ylim([-pi/2, pi/2]);
```


ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΦ του σήματος $x(t) = \cos(6\pi t + \frac{\pi}{8})$

ΛΥΣΗ A' τρόπος

$$x(t) = \cos(6\pi t + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2} \left[e^{j(6\pi t + \frac{\pi}{8})} + e^{-j(6\pi t + \frac{\pi}{8})} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}} e^{j6\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{8}} e^{-j6\pi t}$$

Λαμβάνοντας τον ΜΦ και των δύο τελετών και έχοντας υπόψη ότι

$$e^{j\Omega t} \xrightarrow{F} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0)$$

βρίσκουμε:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}} 2\pi \delta(\Omega - 6\pi) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{8}} 2\pi \delta(\Omega + 6\pi) =$$

$$= \pi \left[e^{j\frac{\pi}{8}} \delta(\Omega - 6\pi) + e^{-j\frac{\pi}{8}} \delta(\Omega + 6\pi) \right]$$

B' τρόπος

Γνωρίζοντας ότι $\cos(\Omega_0 t) \xrightarrow{F} \pi [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$

① κλιμάκωση χρόνου

έχουμε

$$g(t) = \cos(6\pi t) \xrightarrow{F} \pi [\delta(\Omega - 6\pi) + \delta(\Omega + 6\pi)] = G(\Omega)$$

Αλλά

$$x(t) = \cos(6\pi t + \frac{\pi}{8}) = \cos\left[6\pi\left(t + \frac{1}{48}\right)\right] = g\left(t + \frac{1}{48}\right)$$

Άρα, τε βάση των ιδιοτήτων της ορισμένης στον χρόνο

② ορισμένη στον χρόνο

$$g(t - t_0) \xrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0} G(\Omega)$$

βρίσκουμε ότι:

$$X(\Omega) = F\left\{g\left(t + \frac{1}{48}\right)\right\} = e^{-j\Omega\left(-\frac{1}{48}\right)} G(\Omega) =$$

$$= e^{j\Omega/48} G(\Omega) = e^{j\Omega/48} \pi [\delta(\Omega - 6\pi) + \delta(\Omega + 6\pi)] =$$

$$= \pi \left[e^{j\Omega/48} \delta(\Omega - 6\pi) + e^{j\Omega/48} \delta(\Omega + 6\pi) \right] = \text{βλ. συνηώση}$$

$$= \pi \left[e^{j6\pi/48} \delta(\Omega - 6\pi) + e^{j(-6\pi)/48} \delta(\Omega + 6\pi) \right] =$$

$$= \pi \left[e^{j\pi/8} \delta(\Omega - 6\pi) + e^{-j\pi/8} \delta(\Omega + 6\pi) \right]$$

Σημείωση: $q(\xi) \delta(\xi - \xi_0) = q(\xi_0) \delta(\xi - \xi_0)$

Γ' Τρόπος

$$\text{Έστω } c(t) = \cos t \xleftrightarrow{F} C(\Omega) = \pi [\delta(\Omega-1) + \delta(\Omega+1)]$$

① ολίσθηση
στον χρόνο

$$\cos(t + \frac{\pi}{8}) \xleftrightarrow{F} e^{j\Omega\pi/8} C(\Omega) = e^{j\Omega\pi/8} \pi [\delta(\Omega-1) + \delta(\Omega+1)]$$

Καίνοτα, χρήση της ιδιότητας της κλιφάωσης στον χρόνο.

② κλιφάωση
χρόνου

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \cos(6\pi t + \frac{\pi}{8}) &\xleftrightarrow{F} \frac{1}{6\pi} e^{j\frac{\Omega\pi}{6\pi 8}} \pi \left[\delta\left(\frac{\Omega}{6\pi} - 1\right) + \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi} + 1\right) \right] = \\ &= \frac{1}{6\pi} \pi \left[e^{j\frac{\Omega\pi}{6\pi 8}} \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi} - 1\right) + e^{j\frac{\Omega\pi}{6\pi 8}} \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi} + 1\right) \right] = \\ &= \frac{1}{6\pi} \pi \left[e^{j\frac{6\pi\pi}{6\pi 8}} \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi} - 1\right) + e^{j\frac{(-6\pi)\pi}{6\pi 8}} \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi} + 1\right) \right] = \\ &= \frac{1}{6\pi} \pi \left[e^{j\pi/8} \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi} - 1\right) + e^{-j\pi/8} \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi} + 1\right) \right] = \\ &= \frac{1}{6\pi} \pi \left[e^{j\pi/8} \delta\left(\frac{\Omega - 6\pi}{6\pi}\right) + e^{-j\pi/8} \delta\left(\frac{\Omega + 6\pi}{6\pi}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{6\pi} \pi \left[e^{j\pi/8} \frac{1}{|\frac{1}{6\pi}|} \delta(\Omega - 6\pi) + e^{-j\pi/8} \frac{1}{|\frac{1}{6\pi}|} \delta(\Omega + 6\pi) \right] = \\ &= \pi \left[e^{j\pi/8} \delta(\Omega - 6\pi) + e^{-j\pi/8} \delta(\Omega + 6\pi) \right] \end{aligned}$$

Συμφωνείται ότι στα παραπάνω έγινε χρήση της ιδιότητας της συνάρτησης $\delta(\xi)$:

$$\delta(\alpha \xi) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(\xi)$$

Δ' Τρόπος

$$\begin{aligned} F\left\{\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)\right\} &= F\left\{\cos(6\pi t) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin(6\pi t) \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\} = \\ &= F\left\{\cos(6\pi t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\} - F\left\{\sin(6\pi t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) F\left\{\cos(6\pi t)\right\} - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) F\left\{\sin(6\pi t)\right\} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \pi [\delta(\Omega - 6\pi) + \delta(\Omega + 6\pi)] \\ &\quad - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega - 6\pi) - \delta(\Omega + 6\pi)] = \\ &= \pi \left[\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] \delta(\Omega - 6\pi) + \right. \\ &\quad \left. \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] \delta(\Omega + 6\pi) \right] = \\ &= \pi \left[e^{j\pi/8} \delta(\Omega - 6\pi) + e^{-j\pi/8} \delta(\Omega + 6\pi) \right] \end{aligned}$$

Ε' τρόπος

Ο ΜΦ ενός περιοδικού σήματος θα μπορούσε να υπολογιστεί από τη ΣΦ (σpectrum Fourier) του σήματος μέσω των σχέσεων:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t} \xrightarrow{F} X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \alpha_k \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (\text{βλ. σφίγην})$$

Καταλαβαίνουμε ότι ο τρόπος αυτός είναι ίδιος με τον Α' τρόπο, αφού εκεί συστηματικά υπολογίζαμε τους συντελεστές της ΣΦ του περιοδικού σήματος $\cos(6\pi t + \frac{\pi}{8})$.

$$x(t) = \cos(6\pi t + \frac{\pi}{8}) = \sum_{k=1,-1} \alpha_k e^{jk6\pi t} \quad \text{όπου} \quad \alpha_k = \frac{1}{2} e^{jk\frac{\pi}{8}}, \quad \Omega_0 = 6\pi$$

Άρα

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{k=1,-1} 2\pi \alpha_k \delta(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= \sum_{k=1,-1} 2\pi \frac{1}{2} e^{jk\frac{\pi}{8}} \delta(\Omega - k6\pi) = \\ &= \pi e^{j\frac{\pi}{8}} \delta(\Omega - 6\pi) + \pi e^{-j\frac{\pi}{8}} \delta(\Omega + 6\pi) \end{aligned}$$

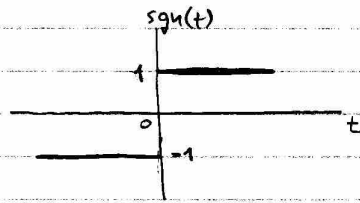
Σημείωση: Ο ΜΦ ενός περιοδικού σήματος με συντελεστές ΣΦ $\{\alpha_k\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γράφο κρουστικών σε συχνότητες αρμονικά συνδεδεμένες μεταξύ τους. Το εμβαδό της κρουστικής της k -οστής αρμονικής κ.λπ. ισούται με 2π φορές τον k -οστό συντελεστή της ΣΦ α_k .

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο ΜΦ του σήματος που ορίζεται $\text{sgn}(t)$.

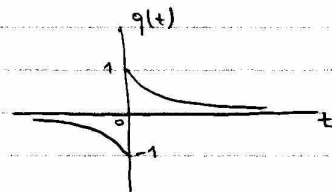
ΛΥΣΗ

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



Έστω η συνάρτηση (σήμα)

$$q_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha > 0$$



Ο ΜΦ του $q(t)$ είναι:

$$\begin{aligned} F\{q_\alpha(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha(t) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= -\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\alpha - j\Omega} + \frac{1}{\alpha + j\Omega} = -\frac{2j\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το $\alpha \rightarrow 0$, η ενδιάμεση συνάρτηση πλησιάζει όλο και περισσότερο στη συνάρτηση που ορίζεται, δηλαδή

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} q_\alpha(t) = \text{sgn}(t)$$

Ο ΜΦ και των δύο ψευδών είναι:

$$F\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F\{q_\alpha(t)\} = \frac{-2j\Omega}{\Omega^2} = \frac{2}{j\Omega}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΦ του σήματος $\frac{1}{\pi t}$.

ΛΥΣΗ Για τον υπολογισμό κυρίως βασιστάμε στην ιδιότητα του δυϊσμού (duality property) του ΜΦ η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Εάν } x(t) &\xrightarrow{F} X(\Omega) \\ \text{Τότε } y(t) = X(t) &\xrightarrow{F} Y(\Omega) = 2\pi x(-\Omega) \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα αυτή στο σήμα προσήτου (signum) και έχουμε:

$$x(t) = \text{sgn}(t) \xrightarrow{F} X(\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$$

$$y(t) = X(t) = \frac{2}{jt} \xrightarrow{F} Y(\Omega) = 2\pi x(-\Omega) = 2\pi \text{sgn}(-\Omega)$$

Άρα

$$\frac{2}{jt} \xrightarrow{F} 2\pi \text{sgn}(-\Omega) = -2\pi \text{sgn}(\Omega)$$

$$\frac{j}{2\pi} \cdot \frac{2}{jt} \xrightarrow{F} \frac{j}{2\pi} [-2\pi \text{sgn}(\Omega)]$$

Τελικά

$$\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{F} -j \text{sgn}(\Omega)$$

Αποδείξατε δηλαδή ότι:

$$F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j \text{sgn}(\Omega)$$

Σημείωση: Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\frac{1}{\pi t}$ θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του τελεστή Hilbert.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο MF του γκαουσιανού σήματος $x(t) = e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{ΛΥΣΗ} \quad X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t^2 + \frac{j\Omega}{\alpha}t)} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t + \frac{j\Omega}{2\alpha})^2 - \frac{\Omega^2}{4\alpha}} dt = \\
 &= e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \overbrace{(t + \frac{j\Omega}{2\alpha})^2}^y} dt = \\
 &= e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \overbrace{(\alpha^{1/2}y)^2}^z} dy = \\
 &= \frac{e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}}}{\alpha^{1/2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz}_{\pi^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}}
 \end{aligned}$$

Σημείωση 1: Για τον υπολογισμό κάνετε χρήση της εξίσωσης: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Σημείωση 2: Παρατηρούμε ότι ο MF μιας γκαουσιανής συνάρτησης είναι επίσης για γκαουσιανή συνάρτηση.

ΑΙΚΗΣΗ

Ο ΜΦ του σήματος $g(t)$ είναι $G(\Omega) = j\Omega / (-\Omega^2 + 7j\Omega + 6)$.

Να υπολογιστεί ο ΜΦ καθενός από τα παρακάτω σήματα:

α. $g(4t)$

δ. $g(-t)$

β. $g(6t-12)$

ε. $e^{j200t} g(t)$

γ. $\frac{dg(t)}{dt}$

στ. $\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$

ΛΥΣΗ

α. $g(4t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{4} G\left(\frac{\Omega}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{j\Omega/4}{-\frac{\Omega^2}{16} + 7j\frac{\Omega}{4} + 6} = \frac{j\Omega}{-\Omega^2 + 28j\Omega + 96}$

β. $g(6t-12) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{6} G\left(\frac{\Omega}{6}\right) \cdot e^{-j\frac{\Omega}{6}12} = \frac{1}{6} G\left(\frac{\Omega}{6}\right) e^{-j2\Omega}$

γ. $\frac{dg(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\Omega G(\Omega) = \frac{-\Omega^2}{-\Omega^2 + 7j\Omega + 6}$

δ. $g(-t) \xleftrightarrow{F} G(-\Omega) = \frac{-j\Omega}{-\Omega^2 - 7j\Omega + 6} = \frac{j\Omega}{\Omega^2 + 7j\Omega - 6}$

ε. $e^{j200t} g(t) \xleftrightarrow{F} G(\Omega-200) = \frac{j(\Omega-200)}{-(\Omega-200)^2 + 7j(\Omega-200) + 6}$

στ. $\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega} G(\Omega) + \pi G(0) \delta(\Omega) = \frac{1}{-\Omega^2 + 7j\Omega + 6} + \pi \cdot 0 = \frac{1}{-\Omega^2 + 7j\Omega + 6}$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το σήμα $s(t)$ του οποίου ο ΜΦ είναι $S(\omega) = \frac{2}{5+j\omega} \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$

ΛΥΣΗ Α' τρόπος: Συνέλιξη στον χρόνο

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S(\omega)$ είναι γινόμενο των συναρτήσεων

$$X(\omega) = \frac{2}{5+j\omega} \xleftrightarrow{F} x(t) = 2 \cdot e^{-5t} u(t)$$

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \xleftrightarrow{F} u(t)$$

Άρα το ζητούμενο σήμα $s(t)$ μπορεί να προκύψει ως συνέλιξη των $x(t)$ και $u(t)$.

$$\begin{aligned} s(t) &= x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot e^{-5\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \\ &= 2 \int_0^t e^{-5\tau} d\tau = 2 \cdot \frac{1}{-5} e^{-5\tau} \Big|_0^t = \\ &= -\frac{2}{5} (e^{-5t} - e^0) = \\ &= \frac{2}{5} (1 - e^{-5t}) \end{aligned}$$

Τελικά, το ζητούμενο σήμα $s(t)$ ισούται με:

$$s(t) = \frac{2}{5} (1 - e^{-5t}) u(t)$$

Β' τρόπος: Πολλαπλασιασμός στη συχνότητα

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{2}{5+j\omega} \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] = \\ &= \frac{2}{5+j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} + \frac{2}{5+j\omega} \cdot \pi \delta(\omega) = \left\langle \text{λόγω της ιδιότητας της } \delta(\cdot), \right. \\ &\quad \left. F(\omega) \delta(\omega - \omega_0) = F(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) \right\rangle \\ &= \underbrace{\frac{2}{5+j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega}}_{S_1(\omega)} + \underbrace{\frac{2}{5} \pi \delta(\omega)}_{S_2(\omega)} \end{aligned}$$

Αναλύουμε την $S_1(\omega)$ σε απλά κλάσματα:

$$S_1(\omega) = \frac{2}{5+j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} = \frac{A}{5+j\omega} + \frac{B}{j\omega}$$

όπου

$$A = (5+j\omega) S_1(\omega) \Big|_{j\omega=-5} = \frac{2}{j\omega} \Big|_{j\omega=-5} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

$$B = j\omega S_1(\omega) \Big|_{j\omega=0} = \frac{2}{5+j\omega} \Big|_{j\omega=0} = \frac{2}{5}$$

Άρα

$$S_1(\omega) = \frac{-\frac{2}{5}}{5+j\omega} + \frac{\frac{2}{5}}{j\omega}$$

και

$$\begin{aligned} S(\omega) &= -\frac{2}{5} \frac{1}{5+j\omega} + \frac{2}{5} \frac{1}{j\omega} + \frac{2}{5} \pi \delta(\omega) = \\ &= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5+j\omega} + \frac{2}{5} \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] \end{aligned}$$

Και λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και των δύο τελών, έχουμε:

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{2}{5} e^{-5t} u(t) + \frac{2}{5} u(t) = \\ &= \frac{2}{5} (1 - e^{-5t}) u(t) \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Ν80 $\frac{d}{dt} [x(t) * y(t)] = \frac{dx(t)}{dt} * y(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt}$

ΛΥΣΗ

Έστω $x(t) \xrightarrow{F} X(\Omega)$
 $y(t) \xrightarrow{F} Y(\Omega)$

$$F \left\{ \frac{d}{dt} [x(t) * y(t)] \right\} = j\Omega \underbrace{F \{ x(t) * y(t) \}}_{\text{λόγω της ιδιότητας της παραγωγής}} = j\Omega \underbrace{X(\Omega) \cdot Y(\Omega)}_{\text{λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στον χώρο}}$$

Άρα έχουμε

$$F \left\{ \frac{d}{dt} [x(t) * y(t)] \right\} = j\Omega X(\Omega) \cdot Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot j\Omega Y(\Omega)$$

Ισχυρίζομαι

$$F \left\{ \frac{d}{dt} [x(t) * y(t)] \right\} = F \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} \cdot F \{ y(t) \} = F \{ x(t) \} \cdot F \left\{ \frac{d}{dt} y(t) \right\}$$

Τελικά

$$\frac{d}{dt} [x(t) * y(t)] = \frac{d}{dt} x(t) * y(t) = x(t) * \frac{d}{dt} y(t)$$

ΑΙΣΧΗΝ Νόο $\frac{d^2}{dt^2} [x(t) * y(t)] = \frac{dx(t)}{dt} * \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} * y(t) = x(t) * \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$

ΛΥΣΗ Έστω $F\{x(t)\} = X(\Omega)$ και $F\{y(t)\} = Y(\Omega)$.

τότε $F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\Omega X(\Omega)$ $F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = j\Omega Y(\Omega)$

$F\left\{\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right\} = (j\Omega)^2 X(\Omega)$ $F\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = (j\Omega)^2 Y(\Omega)$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την ιδιότητα της συνεξίσωσης στο χώρο όσης, δηλ. $F\{x(t) * y(t)\} = F\{x(t)\} \cdot F\{y(t)\} = X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$, έχουμε:

$$F\left\{\frac{d^2}{dt^2} [x(t) * y(t)]\right\} = (j\Omega)^2 F\{x(t) * y(t)\} = (j\Omega)^2 X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να σφραγισ ως:

$$(j\Omega)^2 X(\Omega) \cdot Y(\Omega) \xleftrightarrow{F} \frac{d^2}{dt^2} x(t) * y(t)$$

ήτοι ως

$$j\Omega \cdot X(\Omega) \cdot j\Omega Y(\Omega) \xleftrightarrow{F} \frac{dx(t)}{dt} * \frac{dy(t)}{dt}$$

ήτοι ως

$$X(\Omega) \cdot (j\Omega)^2 Y(\Omega) \xleftrightarrow{F} x(t) * \frac{d^2}{dt^2} y(t)$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:

$$\frac{d^k}{dt^k} [x(t) * y(t)] = \frac{d^k}{dt^k} x(t) * y(t) = x(t) * \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} * \frac{d^m y(t)}{dt^m}, \text{ όπου } n+m=k$$

Ασκηση Νδο $x(t-\tau) * y(t-\tau) = x(t-2\tau) * y(t) = x(t) * y(t-2\tau)$

Λυση Έστω $F\{x(t)\} = X(\Omega)$ και $F\{y(t)\} = Y(\Omega)$

Με βάση τις ιδιότητες της συνέλιξης στο χρόνο και της ολισθησης στο χρόνο, έχουμε:

$$\begin{aligned} F\{x(t-\tau) * y(t-\tau)\} &= F\{x(t-\tau)\} \cdot F\{y(t-\tau)\} = \\ &= e^{-j\Omega\tau} X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega\tau} Y(\Omega) = \\ &= e^{-j\Omega 2\tau} X(\Omega) \cdot Y(\Omega) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{\eta} = X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega 2\tau} Y(\Omega) \quad (2)$$

Από μν (1) έχουμε:

$$\underbrace{e^{-j\Omega 2\tau} X(\Omega)}_{F\{x(t-2\tau)\}} \cdot \underbrace{Y(\Omega)}_{F\{y(t)\}} = F\{x(t-2\tau)\} \cdot F\{y(t)\} = F\{x(t-2\tau) * y(t)\}$$

Από μν (2) έχουμε:

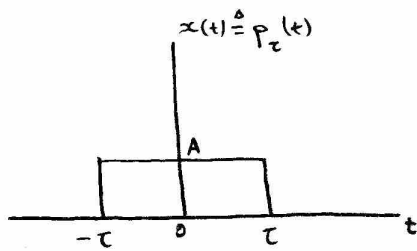
$$X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega 2\tau} Y(\Omega) = F\{x(t)\} \cdot F\{y(t-2\tau)\} = F\{x(t) * y(t-2\tau)\}$$

Γενίκευση

$$x(t-\tau_1) * y(t-\tau_2) = x(t-\tau_1-\tau_2) * y(t) = x(t) * y(t-\tau_1-\tau_2) =$$

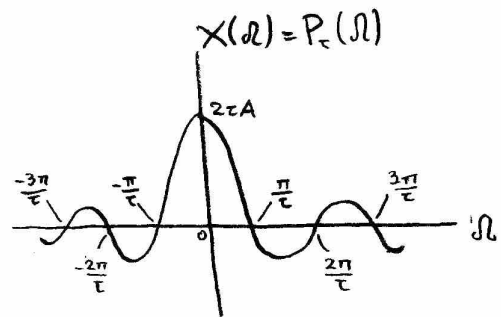
$$= x(t-\tau_n) * y(t-\tau_m) \quad \text{όπου} \quad \tau_n + \tau_m = \tau_1 + \tau_2$$

ΧΡΟΝΟΣ

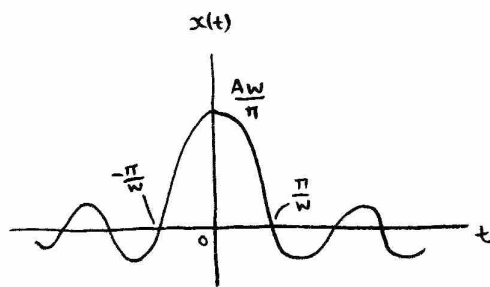


$$P_{\tau}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

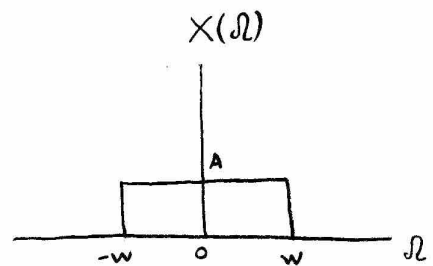


$$P_{\tau}(\omega) = 2\tau A \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} = 2A \frac{\sin \omega \tau}{\omega}$$



$$x(t) = \frac{Aw}{\pi} \frac{\sin wt}{wt} = A \frac{\sin wt}{\pi t}$$

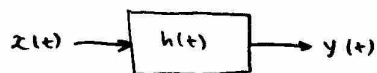
$\longleftrightarrow$



$$X(\omega) = \begin{cases} A & |\omega| < w \\ 0 & |\omega| > w \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος, όπου $x(t) = \frac{\sin \Omega_i t}{\pi t}$
και $h(t) = \frac{\sin \Omega_c t}{\pi t}$



ΛΥΣΗ

Η έξοδος $y(t)$ ισούται με τη συνέλιξη των δύο sinc συναρτήσεων. Ο υπολογισμός στο πεδίο του χρόνου μέσω της συνέλιξης μπορεί να αποφευχθεί καταφεύγοντας στο πεδίο της συχνότητας, όπου έχουμε τον πολλαπλασιασμό των δύο φασμάτων:

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega)$$

όπου

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_i \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα

$$Y(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_m \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{όπου } \Omega_m = \min\{\Omega_i, \Omega_c\}$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα εξόδου θα είναι 1 για $-\Omega_m \leq \Omega \leq \Omega_m$, όπου Ω_m η μικρότερη από τις συχνότητες Ω_i και Ω_c .

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier μας δίνει τη ζητούμενη έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin \Omega_i t}{\pi t} & \text{εάν } \Omega_i \leq \Omega_c \\ \frac{\sin \Omega_c t}{\pi t} & \text{εάν } \Omega_c \leq \Omega_i \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστικό απόκριση

$$h(t) = \frac{\sin[4(t-1)]}{\pi(t-1)}$$

όταν στην είσοδο εφαρμόζεται καθέσια από τις παρακάτω είσοδους:

α. $x_1(t) = \cos(6t + \frac{\pi}{2})$

γ. $x_3(t) = \sin[4(t+1)] / \pi(t+1)$

β. $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \sin(3kt)$

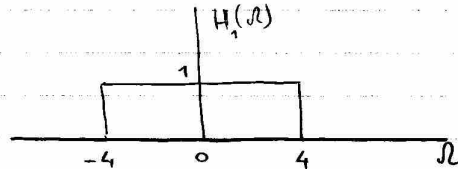
δ. $x_4(t) = (\sin 2t / \pi t)^2$

ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι $h(t) = h_1(t-1)$, όπου

$$h_1(t) = \frac{\sin 4t}{\pi t}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $h_1(t)$ δούναί τε

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{άλλω} \end{cases}$$



Πρόκειται δηλαδή για την απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού βαθυνερατού φίλτρου του οποίου η ζώνη διέλευσης (passband) εκτείνεται από $(-4, 4)$.

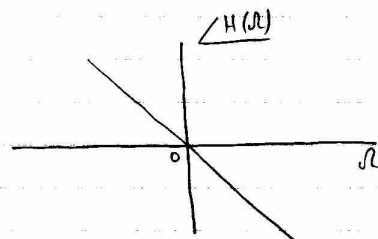
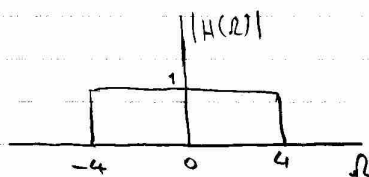
Με βάση την ιδιότητα της ολιγόθεσης στον χρόνο, υπολογίζεται εύκολα η απόκριση συχνότητας $H(\omega)$ του συστήματος:

$$h(t) = h_1(t-1) \xrightarrow{F} H(\omega) = e^{-j\omega} H_1(\omega)$$

δηλαδή

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{άλλω} \end{cases}$$

Γίνεται φανερό ότι το σύστημα που μας δίνεται θα έχει απόκριση συχνότητας όπως στο σχήμα. Με άλλη λόγια, το φίλτρο θα είναι ίδιο με εκείνο του $H_1(\omega)$, αλλά η φάση θα μεταβάλλεται γραμμικά με κλίση -1 (γινώσκ $-\pi/4$).



α. Είσοδος $x_1(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[6\left(t + \frac{\pi}{12}\right)\right]$

Το φάσμα του σήματος $x(t) = \cos 6t$ είναι $X(\omega)$:

$$x(t) = \cos 6t \xrightarrow{F} X(\omega) = \pi [\delta(\omega - 6) + \delta(\omega + 6)]$$

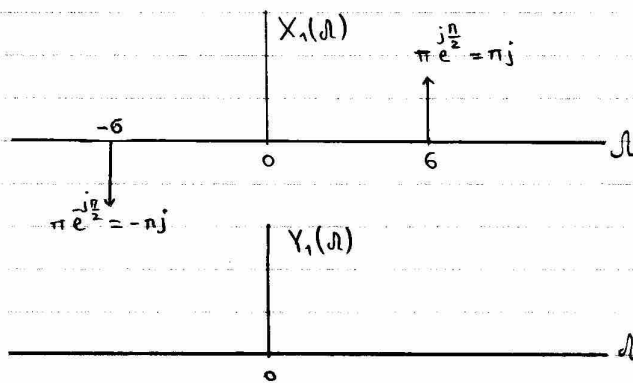
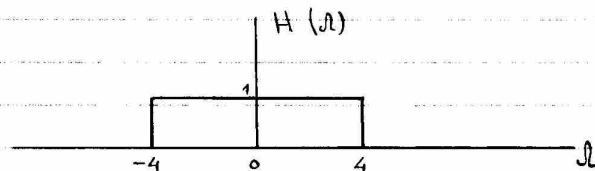
Με βάση την ιδιότητα της ολισθητικότητας στον χρόνο, το φάσμα του σήματος $x_1(t) = x\left(t + \frac{\pi}{12}\right)$ θα είναι:

$$X_1(\omega) = e^{j\omega \frac{\pi}{12}} X(\omega) = e^{j\omega \frac{\pi}{12}} \pi [\delta(\omega - 6) + \delta(\omega + 6)] \quad (\text{βλ. ενότητες})$$

Η έξοδος $y_1(\omega)$ ισούται με το γινόμενο των φασμάτων $H(\omega)$ και $X_1(\omega)$, δηλαδή

$$Y_1(\omega) = H(\omega) \cdot X_1(\omega) = 0$$

οπότε και $y_1(t) = 0$.



Σημείωση: Η σχέση $X_1(\omega)$ γραφεται:

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \pi e^{j\omega \frac{\pi}{12}} \delta(\omega - 6) + \pi e^{j\omega \frac{\pi}{12}} \delta(\omega + 6) = \langle \text{λογω της } f(\omega) \delta(\omega - \omega_0) = f(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) \rangle \\ &= \pi e^{j6 \frac{\pi}{12}} \delta(\omega - 6) + \pi e^{j(-6) \frac{\pi}{12}} \delta(\omega + 6) = \\ &= \pi e^{j\frac{\pi}{2}} \delta(\omega - 6) + \pi e^{-j\frac{\pi}{2}} \delta(\omega + 6) = \\ &= \pi j \delta(\omega - 6) + (-\pi j) \delta(\omega + 6) \end{aligned}$$

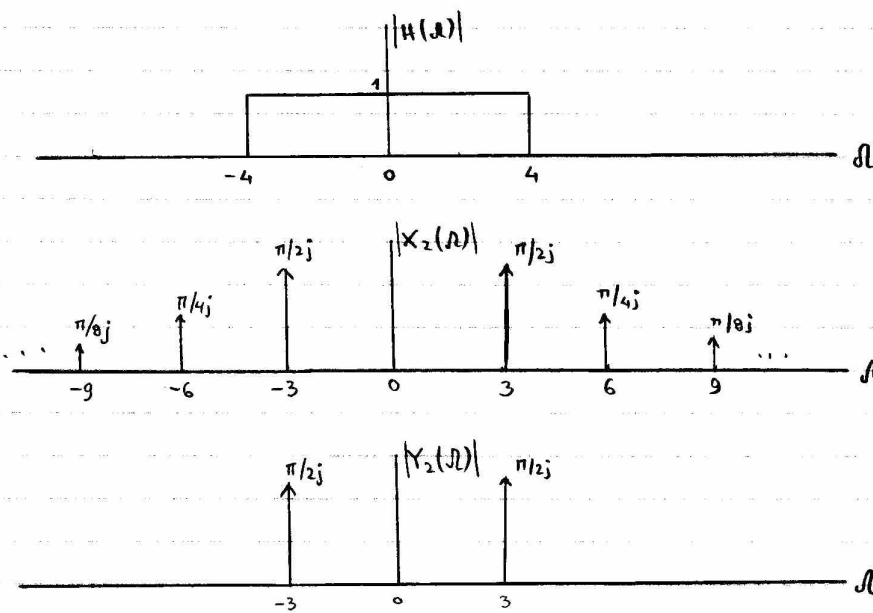
β. Γίωδος $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt) =$
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^0 \sin(3 \cdot 0 \cdot t) + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \sin(3 \cdot 1 \cdot t) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin(3 \cdot 2 \cdot t) +$
 $+ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sin(3 \cdot 3 \cdot t) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \sin(3 \cdot 4 \cdot t) + \dots$

Λαμβάνοντας τον ΜΦ και των δύο τελών, δεδομένου ότι

$$\sin(3kt) \xrightarrow{F} \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega - 3k) - \delta(\Omega + 3k)]$$

Έχουμε:

$$X_2(\Omega) = \frac{\pi}{j} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k [\delta(\Omega - 3k) - \delta(\Omega + 3k)]\right]$$



Άρα $Y_2(\Omega) = H(\Omega) \cdot X_2(\Omega) = e^{-j\Omega} \frac{\pi}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^1 [\delta(\Omega - 3) - \delta(\Omega + 3)]$

αφού τόνου αυτή η συχνότητα ($\Omega = \pm 3$) αφήνεται να περάσει από το ιδανικό φίλτρο, ενώ όλες οι υπόλοιπες μδεκνίζονται.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $Y_2(\Omega)$ μας δίνει το εύρα εξόδου

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \sin(3t - 3)$$

Σημείωση: Παράδειγμα ότι: $\sin(3t) \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega - 3) - \delta(\Omega + 3)]$

$$\sin[3(t-1)] \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega} \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega - 3) - \delta(\Omega + 3)]$$

Γ. Έξοδος $x_3(t) = \frac{\sin[4(t+1)]}{\pi(t+1)}$

Παρατηρούμε ότι $x_3(t) = h_1(t+1)$ και συνεπώς

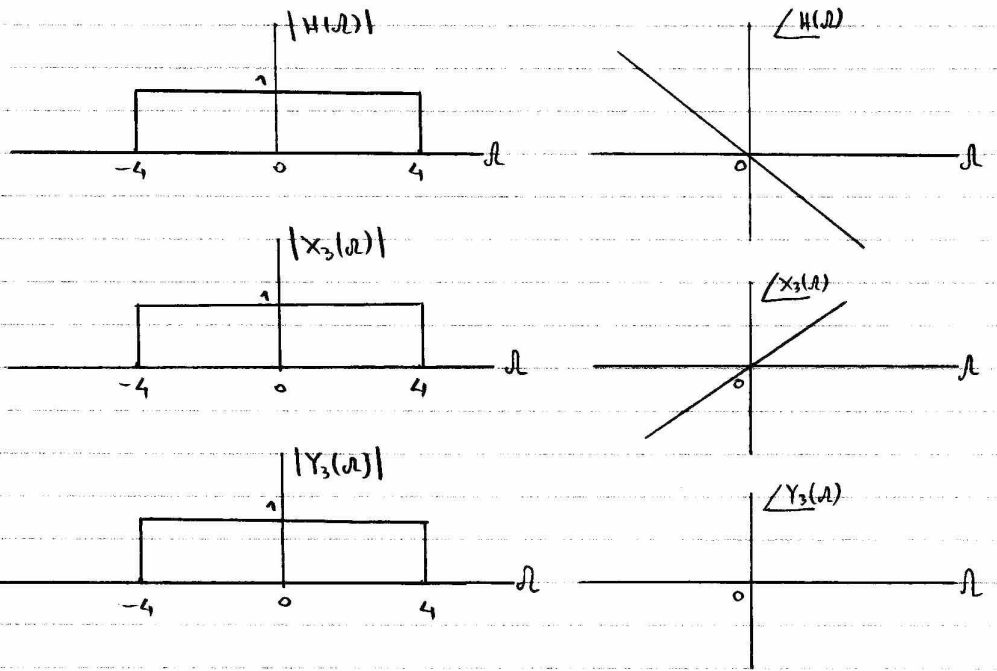
$$X_3(\omega) = e^{j\omega} H_1(\omega) = \begin{cases} e^{j\omega}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \alpha \lambda \lambda \omega \end{cases}$$

Η είσοδος $Y_3(\omega) = H(\omega) \cdot X_3(\omega) =$

$$= \begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \alpha \lambda \lambda \omega \end{cases} \cdot \begin{cases} e^{j\omega}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \alpha \lambda \lambda \omega \end{cases} = \begin{cases} 1, & |\omega| < 4 \\ 0, & \alpha \lambda \lambda \omega \end{cases}$$

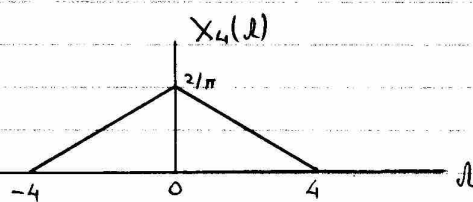
Το πρώτο εξόδοι θα είναι άλλο από το $H(\omega)$.

Η είσοδος $x_3(t) = h_1(t) = \frac{\sin 4t}{\pi t}$



δ. Γίγοςος $x_4(t) = \left(\frac{\sin 2t}{\pi t} \right)^2$

Ο ΜΕ του σήματος $x_4(t)$ είναι το τριγωνικό πακέτο του σχήματος.



$$X_4(\omega) = \frac{2}{\pi} \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{4}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο πολλαπλασιασμός του πακέτου αυτού με το ιδανικό φίλτρο από $(-4, 4)$, μας δίνει το πακέτο ερώδου $Y_4(\omega)$:

$$Y_4(\omega) = H(\omega) \cdot X_4(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega| < 4 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \cdot \frac{2}{\pi} \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{4}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y_4(\omega) = \frac{2}{\pi} \begin{cases} e^{-j\omega} \left(1 - \frac{|\omega|}{4} \right), & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Από την ιδιότητα της αδιέθνους στον χρόνο γίνεται φανερό ότι το $Y_4(\omega)$ είναι το πακέτο του σήματος $x_4(t-1)$, δηλαδή

$$y_4(t) = x_4(t-1) = \left[\frac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)} \right]^2$$

Σημείωση: Στο τυχαίο δίνεται το γίγος (παράχρημαστών:

$$x(t) = \left(\frac{W}{\pi} \right) \left(\frac{\sin Wt}{Wt} \right)^2 \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{2W}, & |\omega| < 2W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για $W=2$ έχουμε:

$$x(t) = \left(\frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{\sin 2t}{2t} \right)^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\pi} \left(\frac{\sin 2t}{2t} \right)^2 = \frac{2 \cdot \pi}{4} \left(\frac{\sin 2t}{\pi t} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot x_4(t)$$

Άρα

$$X(\omega) = \frac{\pi}{2} X_4(\omega) \Rightarrow X_4(\omega) = \frac{2}{\pi} X(\omega) = \frac{2}{\pi} \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{4}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(t) dt$

ΛΥΣΗ

Υπενθυμίζεται ότι $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}$ (1)

Επίσης έχουμε αποδείξει (βλ. παράδειγμα 3.3) ότι:

$$\frac{W}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{W}{2} \\ 0, & |\Omega| > \frac{W}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Τέλος υπενθυμίζεται το θεώρημα του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (3)$$

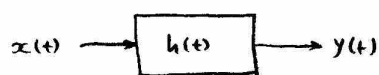
Η (2) για $\frac{W}{2\pi} = 1 \Rightarrow W = 2\pi$ γίνεται:

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi \\ 0, & |\Omega| > \pi \end{cases} \quad (4)$$

Άρα η σχέση που δείχνουμε να υπολογίζουμε, με βάση τις (3), (4) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F\{\text{sinc}(t)\}|^2 d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Omega \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} (\pi - (-\pi)) = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η είσοδος του ΓΧΑ ενταχάτος, με κρουστική απόκριση



$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

για είσοδο

$$x(t) = e^{-bt} u(t), \quad b > 0$$

ΛΥΣΗ

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega) \cdot H(\omega)\}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}, \quad X(\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

$$\text{Άρα } Y(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)(b + j\omega)}$$

Αναλύουμε την $Y(\omega)$ σε τερμικά κλάσματα:

$$Y(\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega}$$

$$A = (\alpha + j\omega) Y(\omega) \Big|_{j\omega = -\alpha} = \frac{1}{b + j\omega} \Big|_{j\omega = -\alpha} = \frac{1}{b - \alpha}$$

$$B = (b + j\omega) Y(\omega) \Big|_{j\omega = -b} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \Big|_{j\omega = -b} = \frac{1}{\alpha - b}$$

$$\text{Έτσι } Y(\omega) = \frac{1}{b - \alpha} \left[\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{και } y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \frac{1}{b - \alpha} \left[e^{-\alpha t} u(t) - e^{-bt} u(t) \right] = \\ &= \frac{e^{-\alpha t} - e^{-bt}}{b - \alpha} u(t) \end{aligned}$$

Προσοχή: Για $\alpha = b$ η ανάπτυξη σε τερμικά κλάσματα δεν είναι σωστή! Στην περίπτωση αυτή όπως η $Y(\omega)$ γίνεται:

$$Y(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$$

$$\text{Όπως } \frac{1}{(\alpha + j\Omega)^2} = j \frac{d}{d\Omega} \left[\frac{1}{\alpha + j\Omega} \right]$$

Με χρήση της ιδιότητας της διαφύρεσης (παράγωγους) στη συχνότητα

$$-j t x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d}{d\Omega} X(\Omega)$$

και δεδομένου ότι

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \frac{1}{\alpha + j\Omega}$$

βρίσκουμε ότι

$$t e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{d}{d\Omega} \left[\frac{1}{\alpha + j\Omega} \right] = \frac{1}{(\alpha + j\Omega)^2}$$

Τελικά

$$y(t) = t e^{-\alpha t} u(t),$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = t \cdot g(t)$, όπου $g(t)$ σήμα του οποίου υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier και ισούται με $G(\Omega)$.

ΛΥΣΗ Έχουμε ότι $g(t) \xleftrightarrow{F} G(\Omega)$ ή διαφορετικά εκφραζόμενο $F\{g(t)\} = G(\Omega)$.

Λαμβάνοντας την παράγωγο του $G(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} G(\Omega) &= \frac{d}{d\Omega} F\{g(t)\} = \frac{d}{d\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\Omega t} dt = \langle \text{εφαρμόζοντας την} \\ &\quad \text{εξίσωση της ολοκλήρωσης} \\ &\quad \text{με την παράγωγο} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Omega} (g(t) e^{-j\Omega t}) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) (-jt) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= -j \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{t \cdot g(t)}_{x(t)} e^{-j\Omega t} dt = \\ &\quad F\{t \cdot g(t)\} \\ &= -j F\{t \cdot g(t)\} \end{aligned}$$

Αρα καταλήγουμε ότι $\frac{dG(\Omega)}{d\Omega} = -j F\{t \cdot g(t)\} \Rightarrow$

$$F\{t \cdot g(t)\} = \frac{1}{-j} \frac{dG(\Omega)}{d\Omega} = j \frac{dG(\Omega)}{d\Omega}$$

ή

$$t \cdot g(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{dG(\Omega)}{d\Omega}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το παραπάνω γίγνης εκφράζεται στη συχνότητα F ως

$$t \cdot g(t) \xleftrightarrow{F} \frac{j}{2\pi} \frac{dG(F)}{dF}$$

δεδομένου ότι $\Omega = 2\pi F$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier οποιουδήποτε σήματος $t^n g(t)$, υπό την προϋπόθεση ότι, η είναι ένας δεσμών κλάσας και ο μετασφ. Fourier της $g(t)$ υπάρχει και ισούται με $G(\omega)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d\omega^n} G(\omega) &= \frac{d^n}{d\omega^n} F\{g(t)\} = \left(\frac{d}{d\omega}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{d\omega^n} \left(g(t) e^{-j\omega t}\right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) (-jt)^n e^{-j\omega t} dt = \\ &= (-j)^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t^n g(t) e^{-j\omega t} dt}_{F\{t^n g(t)\}} = (-j)^n F\{t^n g(t)\} \end{aligned}$$

Τελικά, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier ισούται με

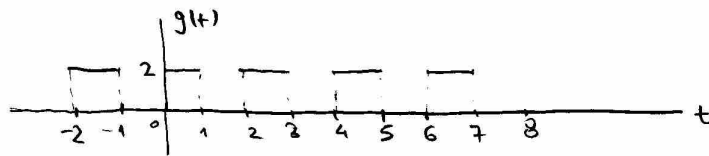
$$F\{t^n g(t)\} = \frac{1}{(-j)^n} \frac{d^n G(\omega)}{d\omega^n} = j^n \frac{d^n G(\omega)}{d\omega^n}$$

αφού $\frac{1}{(-j)^n} = \frac{1}{(-j)^n} \cdot \frac{(-j)^n}{(-j)^n} = \frac{(-j)^n}{(-j)^{2n}} = \frac{(-j)^n}{[(-j)^2]^n} = \frac{(-j)^n}{(-1)^n} = (j)^n = j^n$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το παραπάνω νόμος εκφράζεται στη συχνότητα F ως

$$t^n g(t) \xleftrightarrow{F} \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n G(F)}{dF^n}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα σε ευθεία σειρά Fourier του σήματος $g(t)$.



ΛΥΣΗ

Το σήμα $g(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_0=2 \leadsto \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$ και ισούται με

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{για } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{για } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Ο ορισμός αυτού ως ανάπτυγμα σε ευθεία σειρά Fourier είναι:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{jk\omega_0 t} = g_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} g_k e^{jk\pi t}$$

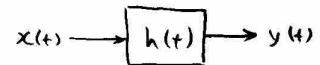
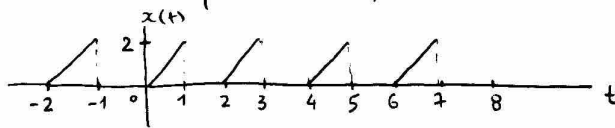
όπου:

$$g_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 g(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2 dt = \int_0^1 dt = t \Big|_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2 e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{-jk\pi} e^{-jk\pi t} \Big|_0^1 = \frac{1}{-jk\pi} (e^{-jk\pi} - 1) = \\ &= \frac{1}{-jk\pi} e^{-jk\pi/2} (e^{-jk\pi/2} - e^{jk\pi/2}) = \\ &= \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi/2} (e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2}) = \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi/2} \cdot 2j \sin \frac{k\pi}{2} = e^{-jk\pi/2} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} = \\ &= e^{-jk\pi/2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού πρόκειται για τη γνωστή sinc της ίστας (συμμετρικής ως προς άξονα) τετραγωνικής παλμοσχηματισ, πολλαπλασιασμένης επί $e^{-jk\omega_0 t}$, όπου $t_0 = \frac{1}{2}$ η καθυστέρηση στο πεδίο του χρόνου.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν τα αναπτυγματα των σιγμάτων $x(t)$ και $y(t)$ σε ευθείες σιγμές Fourier, όπου $h(t) = \delta(t-1)$



ΛΥΣΗ

Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2$, συνεπώς $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$ και ορίζεται ως:

$$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{για } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{για } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Οι συντελεστές της ευθείας σιγμής Fourier υπολογίζονται ως:

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 2t dt + \int_1^2 0 dt \right] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2t e^{-jk\pi t} dt = \langle \text{κατά παραγοντες} \rangle = \\ &= \frac{1}{-jk\pi} \int_0^1 t d(e^{-jk\pi t}) = \frac{1}{-jk\pi} \left[t e^{-jk\pi t} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-jk\pi t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{-jk\pi} \left[(1 \cdot e^{-jk\pi} - 0 \cdot e^0) - \frac{1}{-jk\pi} e^{-jk\pi t} \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{-jk\pi} e^{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2} (e^{-jk\pi} - 1) = \\ &= \frac{(-1)^k}{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] \quad \text{δεδομένου ότι } e^{-jk\pi} = \cos(k\pi) - j\sin(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \end{aligned}$$

Άρα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} = \alpha_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \alpha_k e^{jk\pi t} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] \right] e^{jk\pi t}$$

Για το σήμα $y(t)$ ισχύει ότι: $y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t-1) = x(t-1)$

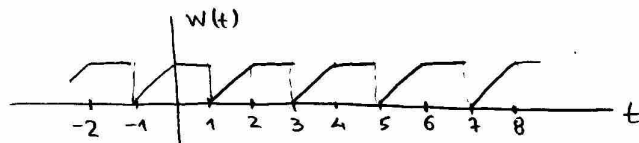
Συνεπώς στη συχνότητα θα έχουμε αλλαγή στη φάση, δηλαδή $b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} \alpha_k = \langle \text{όπου } t_0 = 1 \rangle$

$$\begin{aligned} \text{ή } b_k &= e^{-jk\pi} \alpha_k = (-1)^k \alpha_k = (-1)^k \left[\frac{(-1)^k}{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2} [(-1)^k - 1] \right] = \\ &= \frac{1}{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2} [1 - (-1)^k] \end{aligned}$$

Τελικά

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = b_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} b_k e^{jk\pi t} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} b_k e^{jk\pi t} \quad \text{όπου } b_0 = \alpha_0 \text{ αφού για } k=0 \text{ η φάση δεν αλλάζει}$$

ΑΙΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα σε μιγαδική σειρά Fourier του σήματος $w(t)$.



ΛΥΣΗ

Με βάση τις δύο προηγούμενες εκκλήσεις το σήμα $w(t)$ γράφεται ως

$$w(t) = y(t) + g(t)$$

και οι συντελεστές του σήματος αυτού w_k ως

$$w_k = b_k + g_k$$

$$\text{όπου για } k=0 \rightarrow w_0 = b_0 + g_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{για } k \neq 0 \rightarrow w_k &= \underbrace{\left[\frac{1}{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2} [1 - (-1)^k] \right]}_{b_k} + \underbrace{\left[\frac{1}{-jk\pi} [(-1)^k - 1] \right]}_{g_k} = \\ &= \frac{1}{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2} [1 - (-1)^k] + \frac{1}{-jk\pi} (-1)^k - \cancel{\frac{1}{-jk\pi}} = \\ &= \frac{1}{(k\pi)^2} [1 - (-1)^k] + j \frac{1}{k\pi} (-1)^k \end{aligned}$$

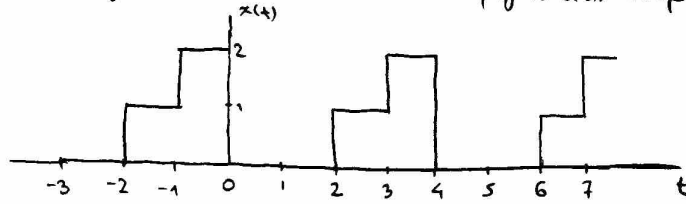
Τελικά το σήμα $w(t)$ γράφεται ως:

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k e^{jk\pi t} = w_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} w_k e^{jk\pi t}$$

όπου $w_0 = \frac{3}{2}$ και w_k η έκφραση που υπολογιστή.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστούν οι συντελεστές της ψηφιακής σειράς Fourier του σήματος.



ΛΥΣΗ

$$T=4 \Rightarrow d_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{4} \int_2^3 1 dt + \frac{1}{4} \int_3^4 2 dt = \frac{1}{4} t \Big|_2^3 + \frac{2}{4} t \Big|_3^4 = \frac{1}{4} (3-2) + \frac{2}{4} (4-3) = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{4} \left[\int_2^3 0 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_3^4 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_3^4 2 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_2^3 e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + 2 \int_3^4 e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{-jk\frac{\pi}{2}} e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \Big|_2^3 + \frac{2}{-jk\frac{\pi}{2}} e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \Big|_3^4 \right] = \\ &= \frac{-1}{jk2\pi} \left[\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}3} - e^{-jk\frac{\pi}{2}2} \right) + 2 \left(e^{-jk\frac{\pi}{2}4} - e^{-jk\frac{\pi}{2}3} \right) \right] = \\ &= \frac{j}{2k\pi} \left[e^{-jk\frac{3\pi}{2}} - e^{-jk\pi} + 2 e^{-jk2\pi} - 2 e^{-jk\frac{3\pi}{2}} \right] = \\ &= \frac{j}{2k\pi} \left[-e^{-jk\frac{3\pi}{2}} - e^{-jk\pi} + 2 e^{-jk2\pi} \right] \end{aligned}$$

Αλλά

$$e^{-j2k\pi} = \cos(2k\pi) - j \sin(2k\pi) = 1 - j0 = 1$$

$$e^{-jk\pi} = \cos(k\pi) - j \sin(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{για } k = \text{αρτιο} \\ -1 & \text{για } k = \text{περιτιο} \end{cases} = (-1)^k$$

Άρα

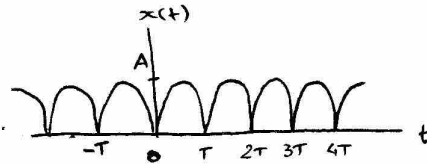
$$\alpha_k = \frac{j}{2k\pi} \left[2 - (-1)^k - e^{-jk\frac{3\pi}{2}} \right]$$

ΑΣΚΗΣΗ

Για το σύστημα που εκκρίνεται $x(t) \rightarrow [h(t)] \rightarrow y(t)$

δίνεται ότι $H(j\omega) = 10 / (5 + j\omega)$ και η είσοδος $x(t)$ είναι το πλήρως ακορρωμένο κύμα πλάτους $A=20$ και $T=3$. Να υπολογιστεί η είσοδος $y(t)$ από τη συνεχή (DC) συνιστώσα και τις πρώτες τρεις αρμονικές.

ΛΥΣΗ



Για το κύμα $x(t)$ έχουμε σε προηγούμενη άσκηση υπολογίσει τους συντελεστές της τριγωνικής σειράς Fourier:

$$\alpha_{x0} = \frac{2A}{\pi} = \frac{40}{\pi} = 12.73$$

$$\alpha_{xk} = \frac{2A}{(1-k^2)\pi}$$

$$\alpha_{x1} = \frac{40}{(1-4)\pi} = 4.244 \angle 180^\circ$$

$$\alpha_{x2} = \frac{40}{(1-4 \cdot 2^2)\pi} = 0.849 \angle 180^\circ$$

$$\alpha_{x3} = \frac{40}{(1-4 \cdot 3^2)\pi} = 0.364 \angle 180^\circ$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$$

$$H(j\omega) = \frac{10}{5 + j\omega}$$

$$H(0) = \frac{10}{5 + j0} = 2$$

$$H(j\Omega_0) = \frac{10}{5 + j\frac{2\pi}{3}} = 1.84 \angle -22.7^\circ$$

$$H(j2\Omega_0) = \frac{10}{5 + j\frac{4\pi}{3}} = 1.533 \angle -40^\circ$$

$$H(j3\Omega_0) = \frac{10}{5 + j\frac{6\pi}{3}} = \frac{10}{5 + j2\pi} = 1.245 \angle -51.5^\circ$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier του κύματος εξόδου θα ισούνται με το γινόμενο των αντίστοιχων συντελεστών της είσοδος και της απόκρισης συχνότητας του συστήματος, δηλαδή $\alpha_{yk} = H(jk\Omega_0) \cdot \alpha_{xk}$

$$\alpha_{y0} = (12.73) (2) = 25.46$$

$$\alpha_{y1} = (1.84 \angle -22.7^\circ) (4.244 \angle 180^\circ) = 7.81 \angle 157.3^\circ$$

$$\alpha_{y2} = (1.533 \angle -40^\circ) (0.849 \angle 180^\circ) = 1.30 \angle 140^\circ$$

$$\alpha_{y3} = (1.245 \angle -51.5^\circ) (0.364 \angle 180^\circ) = 0.453 \angle 128.5^\circ$$

Τελικά, το κύμα εξόδου θα είναι:

$$y(t) = 25.46 + 15.62 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + 157.3^\circ\right) + 2.60 \cos\left(\frac{4\pi}{3}t + 140^\circ\right) + 0.906 \cos\left(\frac{6\pi}{3}t + 128.5^\circ\right) + \dots$$

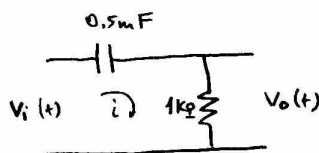
ΑΣΚΗΣΗ Για το κύκλωμα που σχήματος:

α. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την απόκριση συχνότητας.

Για τη είσοδο φίλτρο πρόκειται;

β. Να βρείτε την φασετική απόκριση του συστήματος.

γ. Ποια η έξοδος του συστήματος για είσοδο $v_i(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t)$;



ΛΥΣΗ

$$\left. \begin{aligned} \alpha. \quad v_i(t) &= v_c(t) + v_o(t) \\ i(t) &= C \frac{dv_c(t)}{dt} \\ v_o(t) &= R i(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_i(t) &= v_c(t) + RC \frac{dv_c(t)}{dt} \Rightarrow \text{MF} \Rightarrow \\ v_i(\Omega) &= v_c(\Omega) + RC j\Omega v_c(\Omega) \Rightarrow \\ v_i(\Omega) &= (1 + jRC\Omega) v_c(\Omega) \Rightarrow \end{aligned} \quad (1')$$

$$\frac{v_c(\Omega)}{v_i(\Omega)} = \frac{1}{1 + jRC\Omega} \quad (1)$$

Αλλά

$$v_i(t) = v_c(t) + v_o(t) \xrightarrow{\text{MF}} v_i(\Omega) = v_c(\Omega) + v_o(\Omega) \Rightarrow$$

$$v_c(\Omega) = v_i(\Omega) - v_o(\Omega) \quad (2)$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται:

Συμπέρασμα: Στη σχέση (3) θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και ως εξής:

$$v_o(t) = R i(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$F \rightarrow v_o(\Omega) = RC j\Omega v_c(\Omega) \quad (2')$$

Από την (1') έχουμε:

$$v_i(\Omega) = (1 + jRC\Omega) v_c(\Omega) \quad (3)'$$

Από τις (2'), (3)':

$$H(\Omega) = \frac{v_o(\Omega)}{v_i(\Omega)} = \frac{jRC\Omega}{1 + jRC\Omega} \quad (3)$$

$$\frac{v_i(\Omega) - v_o(\Omega)}{v_i(\Omega)} = \frac{1}{1 + jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{v_o(\Omega)}{v_i(\Omega)} = \frac{1}{1 + jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$\frac{v_o(\Omega)}{v_i(\Omega)} = 1 - \frac{1}{1 + jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1 + jRC\Omega} = \frac{jRC\Omega}{1 + jRC\Omega} \quad (3)$$

Για $R=1\text{ k}\Omega$ και $C=0.5\text{ mF} \rightarrow RC=1 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2}$ η σχέση (3) γίνεται:

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} = \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} \quad (4)$$

Για να βρούμε την ανάλυση συχνότητας δε πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο $|H(\Omega)|$ για διαφορετικές συχνότητες.

$$\begin{aligned} |H(\Omega)| &= \left| 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} \right| = \left| \frac{1 + j\frac{1}{2}\Omega - 1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} \right| = \left| \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} \right| = \\ &= \frac{|j\Omega|}{|2 + j\Omega|} = \frac{\sqrt{\Omega^2}}{\sqrt{4 + \Omega^2}} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{4 + \Omega^2}} \quad (5) \end{aligned}$$

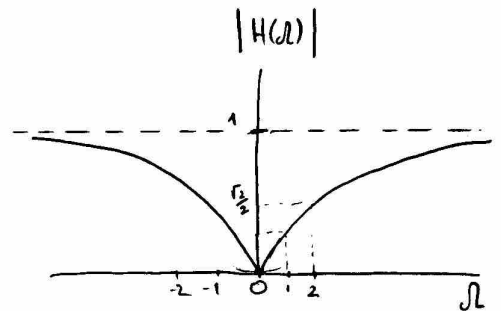
$$|H(\Omega)|_{\Omega=0} = 0$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = |H(\Omega)|_{\Omega=-1}$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=2} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = |H(\Omega)|_{\Omega=-2}$$

$$\vdots$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\Omega^2}{4 + \Omega^2}} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{\Omega^2} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{0+1}} = 1$$



Συνεπώς πρόκειται για ένα υψηλ-pass (HP - High Pass) φίλτρο.

- β. Η χρονική ανάλυση του συστήματος προκύπτει εύκολα από τη σχέση (4), λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

$$\begin{aligned} F^{-1} \left(\begin{aligned} H(\Omega) &= 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} = 1 - \frac{2}{2 + j\Omega} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2 + j\Omega} \end{aligned} \right. \quad (6) \\ \left. \begin{aligned} h(t) &= \delta(t) - 2 \cdot e^{-2t} u(t) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση από τη σχέση (4) και τις ιδιότητες της παραγώγου των ΜΦ.

$$\begin{aligned} H(\Omega) = \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} &= j\Omega \cdot \frac{1}{2 + j\Omega} = j\Omega G(\Omega) \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt} (e^{-2t} u(t)) = \\ &= \frac{d}{dt} (e^{-2t}) \cdot u(t) + e^{-2t} \frac{du(t)}{dt} = -2e^{-2t} u(t) + e^{-2t} \delta(t) = \\ &= -2e^{-2t} u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

$$8. \quad v_i(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) \xrightarrow{MF} V_i(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+j\omega} \quad (7)$$

Από την (6) έχουμε:

$$H(s) = 1 - 2 \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = 1 - 2 \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \left(1 - 2 \frac{1}{2+j\omega} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+j\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+j\omega} - \underbrace{\frac{1}{2+j\omega} \cdot \frac{1}{1+j\omega}}_{G(s)} \end{aligned} \quad (8)$$

Αντικαθιστούμε την $G(s)$ με την κατάλληλη έκφραση.

$$G(s) = \frac{1}{(2+j\omega)(1+j\omega)} = \frac{A}{2+j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

$$A = (2+j\omega) G(s) \Big|_{j\omega=-2} = \frac{1}{1+j\omega} \Big|_{j\omega=-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$B = (1+j\omega) G(s) \Big|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2+j\omega} \Big|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$\text{Συνεπώς} \quad G(s) = \frac{-1}{2+j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} \quad (9)$$

Με βάση το αποτέλεσμα (9) η σχέση (8) γίνεται:

$$V_o(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F^{-1} \left(\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+j\omega} \\ v_o(t) &= e^{-2t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-t} u(t) = \left(e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-t} \right) u(t) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$