

2024-2025
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
3^η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

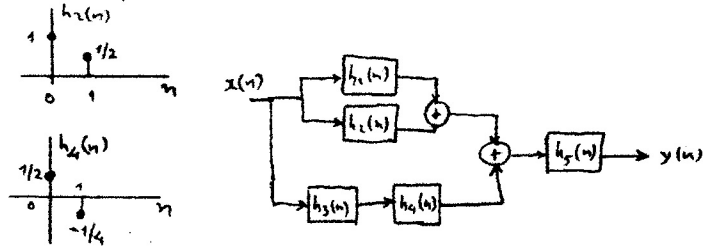
ΑΣΚΗΣΗ 3.1 Δίνονται τα σήματα διακριτού χρόνου $x_1(n) = \cos\left(\frac{5\pi}{7}n + 1\right)$, $x_2(n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)$, $x_3(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$. Να εξετάσετε εάν αυτά είναι περιοδικά και να υπολογίσετε τη θεμελιώδη περίοδο. Να σχεδιάσετε τα σήματα. (*)

ΑΣΚΗΣΗ 3.2 A. Για το διακριτού χρόνου σύστημα του σχήματος γνωρίζουμε ότι:

$$h_1(n) = -\delta(n)$$

$$h_3(n) = 2\delta(n)$$

$$h_5(n) = (0.5)^n u(n)$$



Να υπολογίσετε τη θεμελιώδη κλίμακα του συστήματος και να σχεδιάσετε την είσοδο και την έξοδο. Ποιες οι τιμές των πρώτων 4 μη μηδενικών δειγμάτων της εξόδου;

B. Να βρείτε (να γράψετε τις εξισώσεις) δύο τουλάχιστον διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου, τα οποία όταν δειγματοληπτηθούν με συχνότητα 8 KHz να παράγουν το διακριτού χρόνου σήμα $x(n) = A \cos(0.15\pi n)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3.3 Δίνεται το διακριτού χρόνου σήμα $x(n]$. (Πρόκειται για την ηχογράφιση recording X.wav.zip την οποία θα βρείτε στο eClass).

- Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε (*) το φάσμα του. Ποιες οι τρεις επιμετρετέρες συχνότητες;
- Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος $x_2(n) = x(2n)$. Ποιες οι επιμετρετέρες συχνότητες;
- Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος $x_4(n) = x(4n)$. Ποιες οι επιμετρετέρες συχνότητες;
- Το σήμα $x(n]$ εφωρρίζεται στο ΓΧΑ σύστημα του οποίου η εξίσωση διαφορών είναι:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \alpha_1 y(n-1) + \alpha_2 y(n-2)$$

$$\text{όπου } b_0 = 1, b_1 = -1.9999, b_2 = 1, \alpha_1 = 1.8999, \alpha_2 = -0.9025$$

Να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος $y(n]$ και να σχεδιάσετε το φάσμα της. Συγκρίνετε το φάσμα της εξόδου με αυτό της εισόδου. Τι παρατηρείτε;

- Πρόθεστος παράδοσης: **Δευτέρα 19.5.2025 @ 24.00**
- Τρόπος παράδοσης: **eClass**
- Οι λύσεις να είναι **ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΕΣ**, συνολικά γνωστές, κτισμένες.
- (*) Για τον σχεδιασμό των εφωρφορμών και των φασμάτων να χρησιμοποιήσετε Python ή Matlab ή Octave.

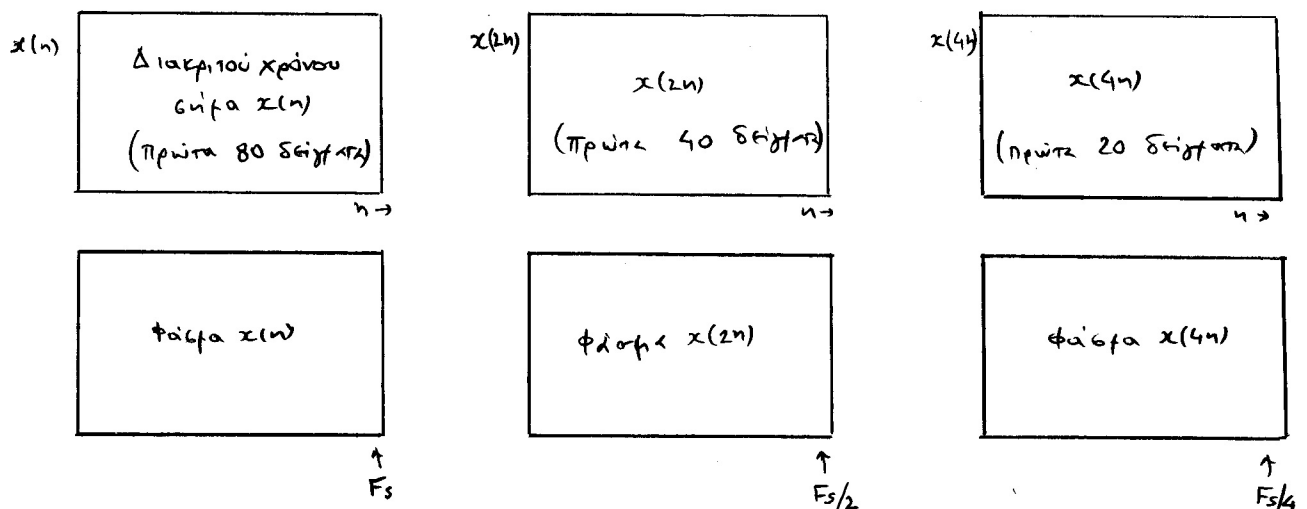
Να συμπληρώσετε τον κώδικα για

κάθε περίπτωση.

ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ 3.4

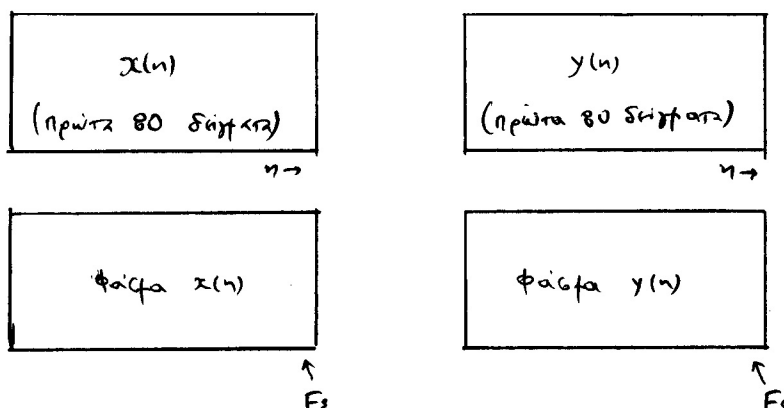
Ο στόχος της λύσης 3.4 είναι να μάθουμε να υπολογίζουμε (και να σχεδιάζουμε) τα φάσματα σήματων διακριτού χρόνου, να κατανοήσουμε την κλιμάκωση στον χρόνο και την επίδραση που επιφέρει στη συχνότητα και τέλος να κατανοήσουμε την επίδραση του 'φιλτραρίσματος' ενός σήματος στον χρόνο και στη συχνότητα. Για να γίνουν αυτά εφικτά, θα ήθελα να παρουσιάσετε τα αποτελέσματά σας ως εξής:

- Τα ερωτήματα 3.4 α, β, γ να τα απαντήσετε σχεδιάζοντας σε τρία σελίδα τα σήματα $x(n)$, $x(2n)$, $x(4n)$ και τα αντίστοιχα φάσματά τους:



Από τα φάσματα που σχεδιάσατε προσδιορίστε τις τιμές των επιμετατεμένων συχνοτήτων και σχολιάστε. Για τις περιπτώσεις της υποδειγματοληψίας, συζητήστε με τις θεωρητικά αναμενόμενες. Επιβεβαιώνεται ότι υποδειγματοληψία κατά 2 συνεπάγεται αύξηση της συχνότητας του σήματος 2 φορές ή ισοδύναμα μείωση της αρχικής συχνότητας δειγματοληψίας κατά 2 φορές. (Αυτός είναι ο λόγος που στα φάσματα χρησιμοποιώ F_s , $F_s/2$, $F_s/4$).

- Το ερώτημα 3.4δ να το απαντήσετε σχεδιάζοντας σε τρία σελίδες τα σήματα $x(n)$, $y(n)$ και τα αντίστοιχα φάσματά τους. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.



ΑΣΚΗΣΗ Να εξετάσετε εάν τα παρακάτω ΣΔΧ είναι περιοδικά και να υπολογίσετε τη θεμελιώδη περίοδο.

α. $x(n) = \cos(\frac{6\pi}{7}n + 1)$ β. $x(n) = \cos^2(\frac{\pi}{8}n)$ γ. $x(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n) \cos(\frac{\pi}{4}n)$

ΛΥΣΗ

α. $x(n) = \cos(\frac{6\pi}{7}n + 1) \leadsto \omega = \frac{6\pi}{7} \Rightarrow 2\pi f = \frac{6\pi}{7} \Rightarrow f = \frac{3}{7}$ ρητός

Άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $N=7$.

$$\begin{aligned} \beta. x(n) = \cos^2(\frac{\pi}{8}n) &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(2 \frac{\pi}{8}n\right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{x_1(n)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)}_{x_2(n)} = x_1(n) + x_2(n) \end{aligned}$$

Το σήμα $x_1(n) = \frac{1}{2}$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $N_1=1$, αφού μπορεί να γραφτεί ως $x_1(n) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1)^n$.

Το σήμα $x_2(n) = \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{4}n)$ είναι περιοδικό, αφού $\omega_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi f_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{8} \leadsto N_2=8$.

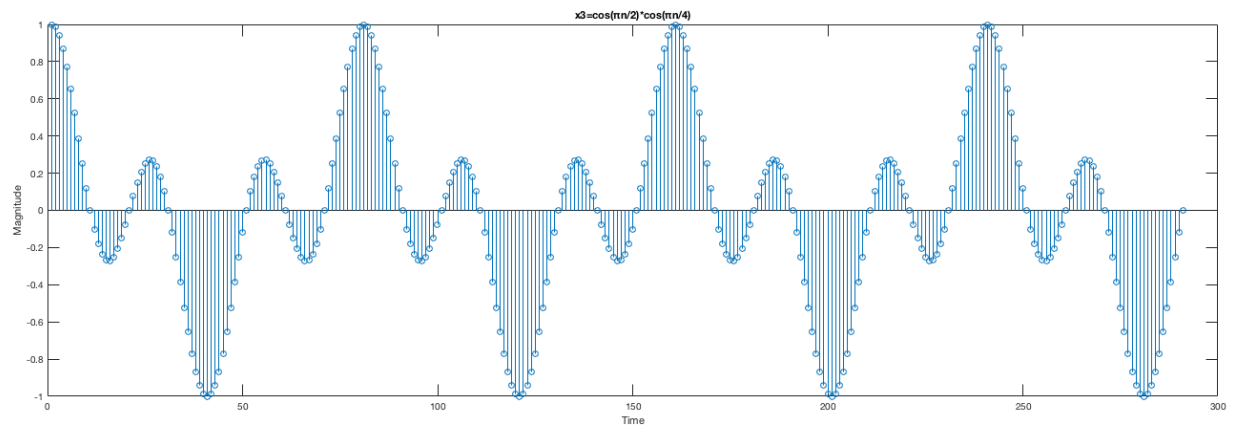
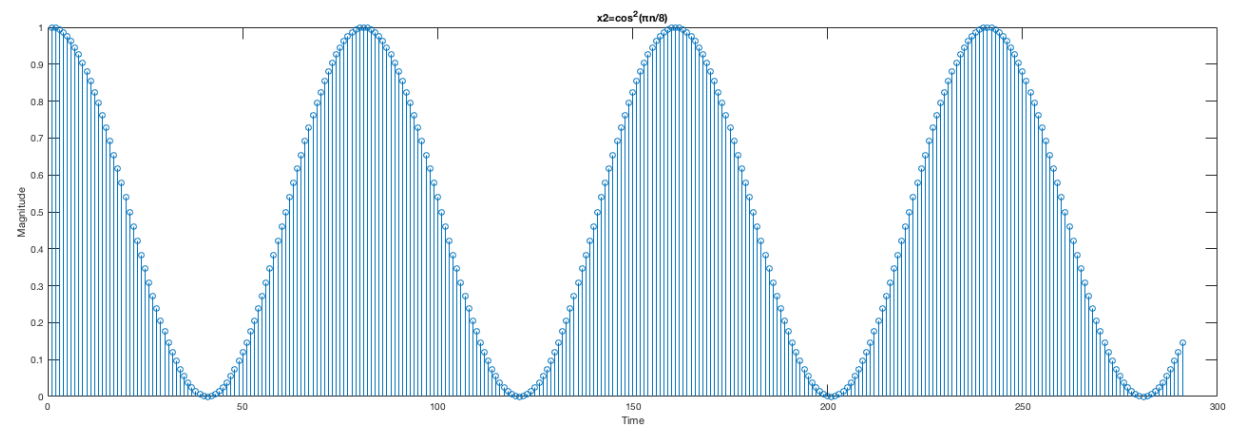
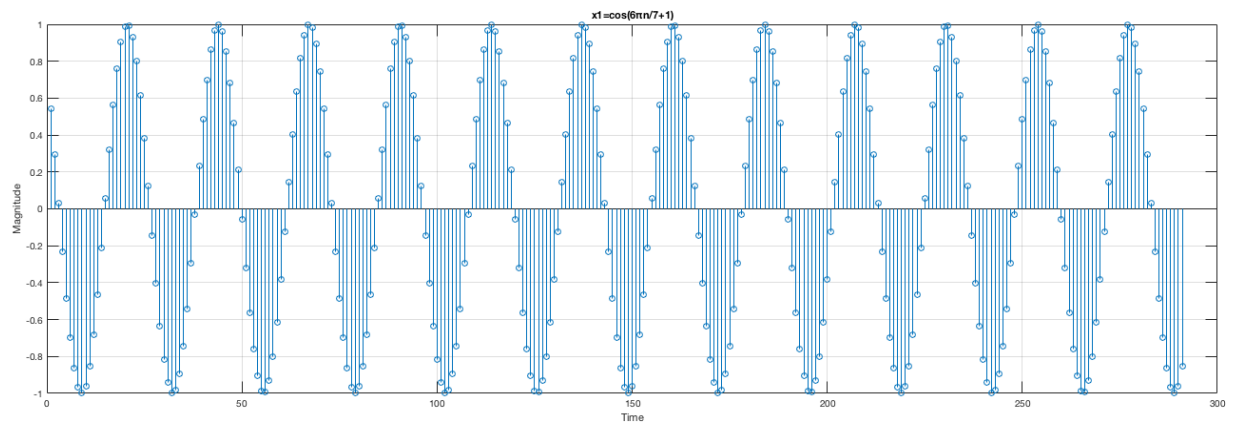
Άρα το σήμα $x(n)$ είναι περιοδικό ως άθροισμα δύο περιοδικών σιγμάτων και η θεμελιώδης περίοδος των είναι $N = \text{ΕΚΠ}(N_1, N_2) = \text{ΕΚΠ}(1, 8) = 8$

$$\begin{aligned} \gamma. x(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n) \cos(\frac{\pi}{4}n) &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}n\right) \right] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)}_{x_1(n)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}_{x_2(n)} \end{aligned}$$

Το σήμα $x_1(n)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο: $\omega_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi f_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{8} \leadsto N_1=8$

Το σήμα $x_2(n)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο: $\omega_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 2\pi f_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow f_2 = \frac{3}{8} \leadsto N_2=8$

Άρα το σήμα $x(n)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο: $N = \text{ΕΚΠ}(N_1, N_2) = \text{ΕΚΠ}(8, 8) = 8$



```

clear all;
close all;
clc;

L=30;
n = 0:0.1:L-1; % 300 samples

% Discrete Time Signal x1(n)
% -----
f1 = 3/7;
x1 = cos(2*pi*f1*n+1);
% Plot the magnitude of x1
figure()
stem(x1)
title('x1=cos(6πn/7+1)');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')
grid on

% Discrete Time Signal x2(n)
% -----
f2 = 1/16;
x2 = cos(2*pi*f2*n).^2;
% Plot the magnitude of x2
figure()
stem(x2)
title('x2=cos^2(πn/8)');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')

% Discrete Time Signal x3(n)
% -----
f3 = 1/4;
f4 = 1/8;
x3 = cos(2*pi*f3*n).*cos(2*pi*f4*n);
% Plot the magnitude of x3
figure()
stem(x3)
title('x3=cos(πn/2)*cos(πn/4)');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')

```

ΘΕΜΑ 1. α. Να υπολογίσετε τη βηματική απόκριση του συστήματος όταν

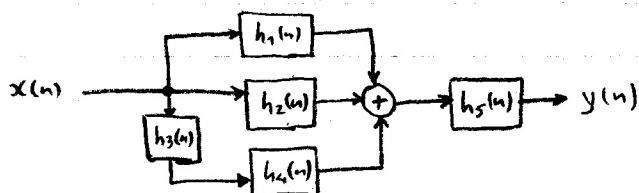
$$h_1(n) = -\delta(n)$$

$$h_2(n) = \delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1)$$

$$h_4(n) = 2\delta(n)$$

$$h_3(n) = \frac{1}{2} \delta(n) - \frac{1}{4} \delta(n-1)$$

$$h_5(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$



β. Να σχεδιάσετε τη βηματική απόκριση. Ποιες οι τιμές των 4 πρώτων δειγμάτων;

ΛΥΣΗ α. Υπολογίσαμε πρώτα τη κρουστική $h_6(n)$ του υποσυστήματος των $h_1(n), h_2(n), h_3(n), h_4(n)$.

Α' τρόπος

Υπολογισμός

στο πεδίο

του χρόνου

$$\begin{aligned} h_6(n) &= h_1(n) + h_2(n) + h_3(n) * h_4(n) = \\ &= [-\delta(n)] + [\delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1)] + [\frac{1}{2} \delta(n) - \frac{1}{4} \delta(n-1)] * 2\delta(n) = \\ &= -\delta(n) + \delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} \delta(n) * \delta(n) - 2 \cdot \frac{1}{4} \delta(n-1) * \delta(n) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} \delta(n-1) + \delta(n) - \frac{1}{2} \delta(n-1) = \\ &= \delta(n) \end{aligned}$$

Η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι

$$h(n) = h_6(n) * h_5(n) = \delta(n) * h_5(n) = h_5(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Η βηματική απόκριση προκύπτει για $x(n] = u(n)$.

Άρα

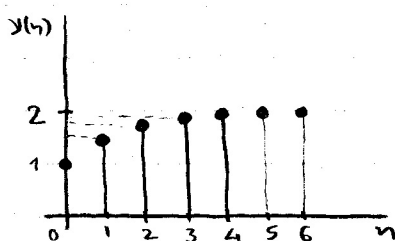
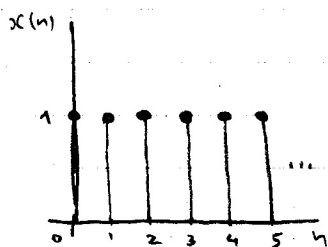
$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m u(m) u(n-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Τελικά

$$y(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$



$$y(0) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 - 1 = 1$$

$$y(1) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

$$y(2) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{4} = 1.75$$

$$y(3) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 - \frac{1}{8} = 1.875$$

ΑΣΚΗΣΗ α. Βρείτε δύο διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου τα οποία όταν δειγματοληπτηθούν με συχνότητα δειγματοληψίας 8 kHz να παράγουν το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = A \cdot \cos(0,15\pi n)$$

ΛΥΣΗ α. $F_s = 8 \text{ kHz}$

$$\omega = 0,15\pi \Rightarrow \Omega T = 0,15\pi \Rightarrow 2\pi F \cdot \frac{1}{F_s} = 0,15\pi \Rightarrow F = 0,075 F_s \Rightarrow$$

$$F = 0,075 \times 8000 = 600 \text{ Hz}$$

Αν το αναλογικό (συνεχούς χρόνου) σήμα από το οποίο μπορεί να προέρχεται το διακριτού χρόνου σήμα $x(n)$, είναι:

$$x(t) = A \cdot \cos(\Omega t) = A \cdot \cos(2\pi F t) = A \cdot \cos(1200\pi t)$$

Στο ίδιο διακριτού χρόνου σήμα καταλήγουν και αναλογικά σήματα των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά $k F_s$ της F , δηλαδή οι συχνότητες $F_k = F + k F_s$,

$$\text{Για } k=1 \text{ έχουμε } F_1 = F + F_s = 600 + 8000 = 8600 \text{ Hz}$$

και το αντίστοιχο αναλογικό σήμα θα είναι το

$$x_1(t) = A \cos(\Omega_1 t) = A \cos(2\pi F_1 t) = A \cos(17200\pi t)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.3

Στο σχήμα 3.3Α φαίνονται δείγματα από το αρχικό σήμα $x(n)$, καθώς και από το υποδειγματοληπτημένο κατά 2 και 4. Επίσης φαίνονται τα αντίστοιχα φάσματα. Συνειστώνεται ότι η συχνότητα δειγματοληψίας του δοθέντος σήματος (recording X.wav) είναι 1000 Hz, δηλ. $F_s = 1000$ Hz.

Υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Fourier, βέβαια της εντολής $\text{fft}(x, F_s)$, εμφανίζεται ότι χωρίζουμε τον άξονα των συχνοτήτων σε 1000 βίτες (bins).

Με δεδομένο ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι επίσης 1000, συνεπάγεται ότι κάθε βίτη (bin) αντιστοιχεί σε 1 Hz, δηλαδή η ανάλυση στη συχνότητα είναι 1 Hz. (Συγκεκριμένα: Αν δύο συχνότητες διαφέρουν λιγότερο από 1 Hz, π.χ. η μία είναι 50 Hz και η άλλη 50,5 Hz, οι φασματικές τους γραφές με την δεδομένη ανάλυση δεν θα ξεχωρίζουν).

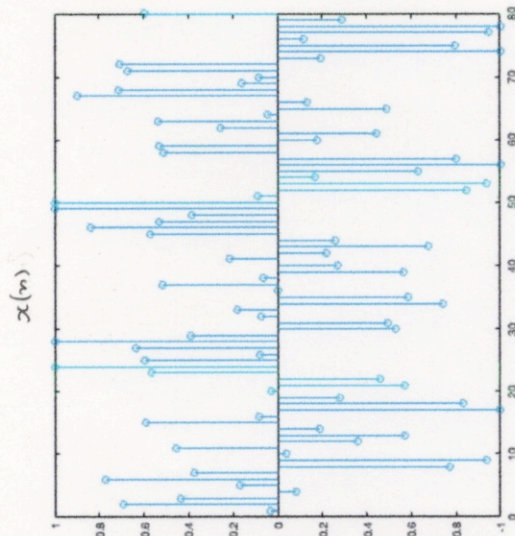
Από το φάσμα του $x(n)$ διαπιστώνουμε ότι επισημαίνονται τρεις συχνότητες, οι εξής: $F_1 = 50$ Hz (τον ηλεκτρικού ρεύματος), $F_2 = 90$ Hz, $F_3 = 230$ Hz.

Όταν το σήμα υποδειγματοληπτηθεί κατά 2, οι συχνότητες αυτές διπλασιάζονται. Πράγματι, στο φάσμα του σήματος $x(2n)$ οι συχνότητες είναι $F'_1 = 2F_1 = 100$ Hz, $F'_2 = 2F_2 = 180$ Hz, $F'_3 = 2F_3 = 460$ Hz.

Όταν το σήμα υποδειγματοληπτηθεί κατά 4, οι συχνότητες τετραπλασιάζονται και γίνονται: $F''_1 = 4F_1 = 200$ Hz, $F''_2 = 4F_2 = 360$ Hz, $F''_3 = 4F_3 = 920$ Hz.

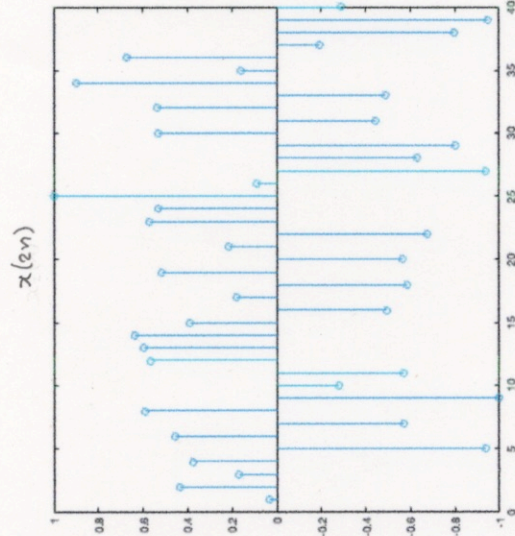
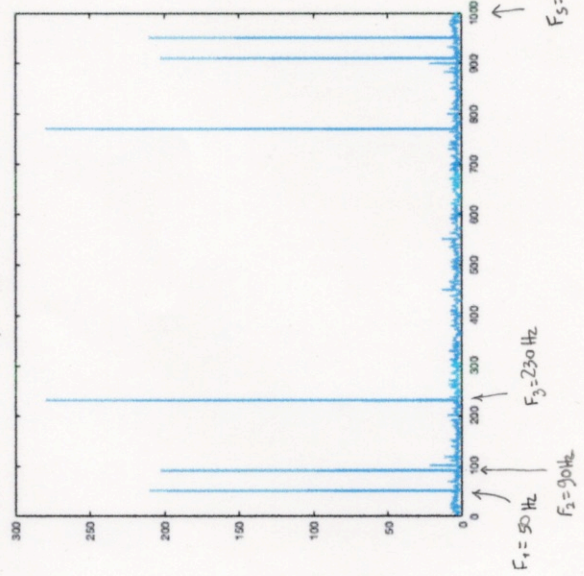
Δεδομένου όμως ότι η δειγματοληψία είναι 1000 Hz και άρα πόσον οι συχνότητες 0 έως 500 Hz παθαίνουν να αντιστρέφονται σωστά (aliasing), η συχνότητα $F''_3 = 920$ θα εμφανίζεται ως $-80 = 920 - 1000$ (aliasing).

ΣΧΥΜΑ 3.3.A



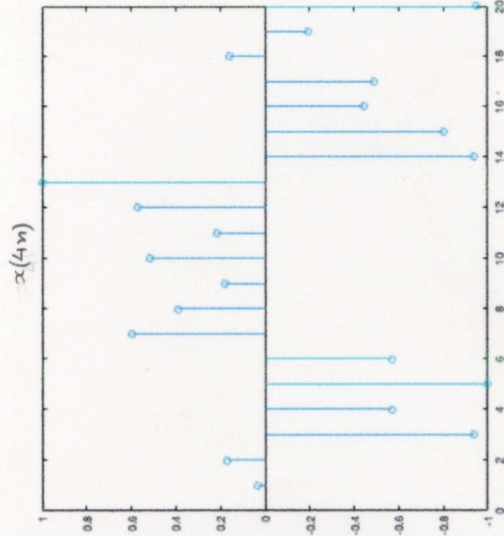
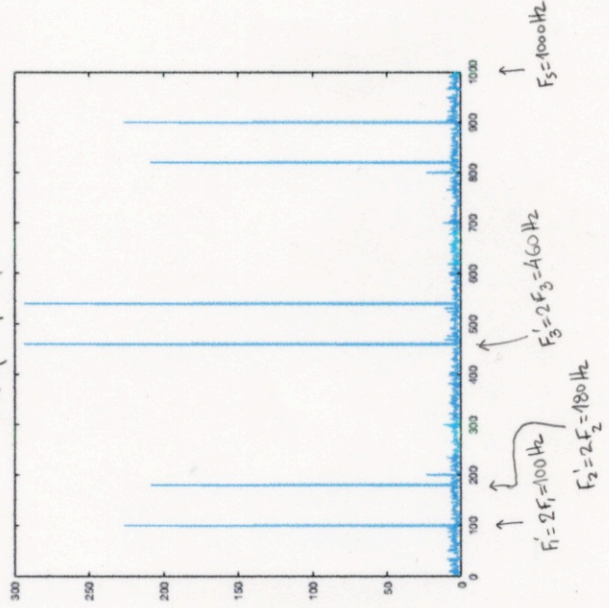
F

Μέτρο φάσματος



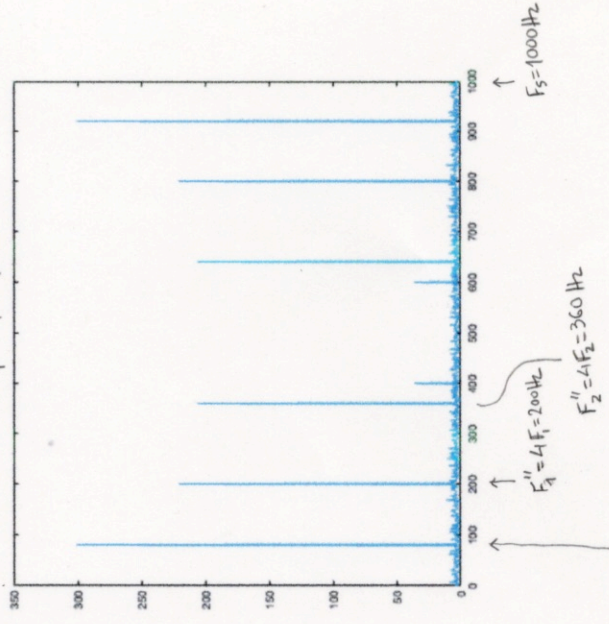
F

Μέτρο φάσματος



F

Μέτρο φάσματος



$$F_3'' = 4F_3 - kF_3 =$$

$$= 4 \cdot 1000 - k \cdot 1000 =$$

$$= 920 - 1000 = -80 \text{ Hz (aliased frequency)}$$

Στο σχήμα 3.3B δειχνονται τα ίδια κύματα, δηλ. δείγματα του $x(n)$ και των υποδείματοληφθέντων αυτού ανά 2 και ανά 4. Τα αντίστοιχα φάσματα (πέτρο) δειχνονται στη δεύτερη σειρά. Τώρα όπως, ο υπολογισμός των φασμάτων έγινε για 1000, 500 και 250 διαφορετικές συχνότητες. Αυτό σημαίνει ότι στην πρώτη περίπτωση η ανάλυση στη συχνότητα είναι ανά 1 Hz, στη δεύτερη ανά 2 Hz και στην τρίτη ανά 4 Hz. Έτσι, ενώ οι φασματικές γραφές εμφανίζονται στις ίδιες αριθμικές θέσεις, δηλ. στις θέσεις 50, 90, 230, οι συχνότητες στις οποίες αντιστοιχούν είναι διαφορετικές. Συγκεκριμένα,

50, 90, 230	για τον υπολογισμό σε 1000 σημεία συχνότητας ή 1 Hz ανά σημείο,
100, 180, 460	για τον υπολογισμό σε 500 σημεία συχνότητας ή 2 Hz ανά σημείο,
80, 200, 360, 920	για τον υπολογισμό σε 250 σημεία συχνότητας ή 4 Hz ανά σημείο.

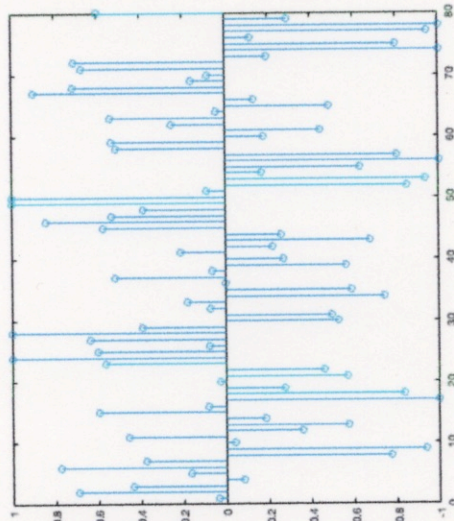


Η συχνότητα των 80 Hz είναι αυτή που προέκυψε λόγω του ανεπαρκούς ρυθμού δείγματοληψίας, αφού η πραγματική συχνότητα των 920 Hz δεν μπορεί να αναφασματιστεί σωστά για ρυθμό δείγματοληψίας 1000 Hz.

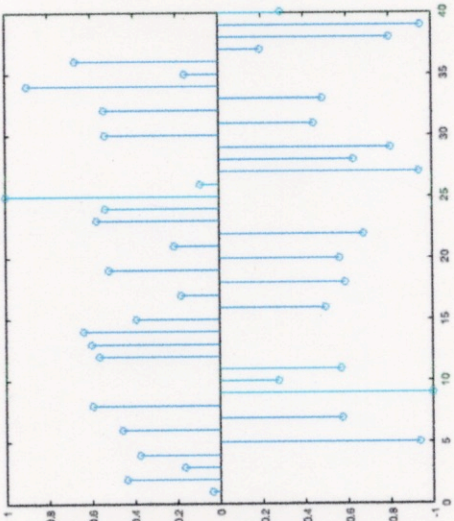
Υποσέλιωση: Το ότι μας ζητείται να δείξουμε 80, 40, 20 δείγματα από κάθε σήμα, δεν παίζει κανέναν ρόλο στους υπολογισμούς.

ΣΧΗΜΑ 3.3B

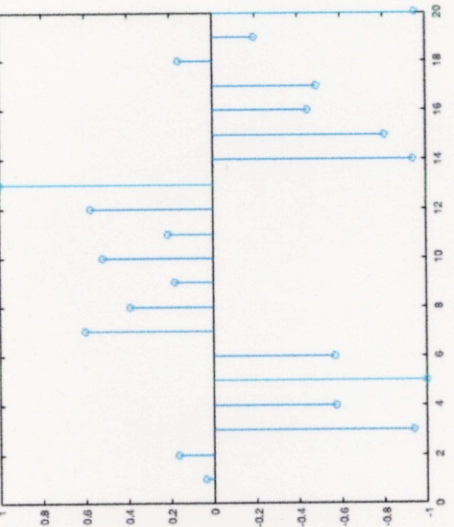
$x(n)$



$x(2n)$

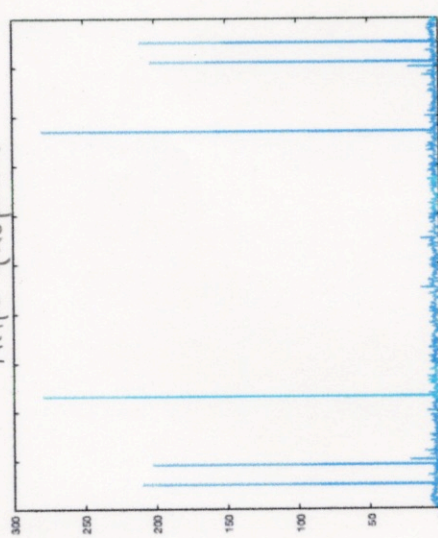


$x(4n)$



F

Μίγρο παίσματα



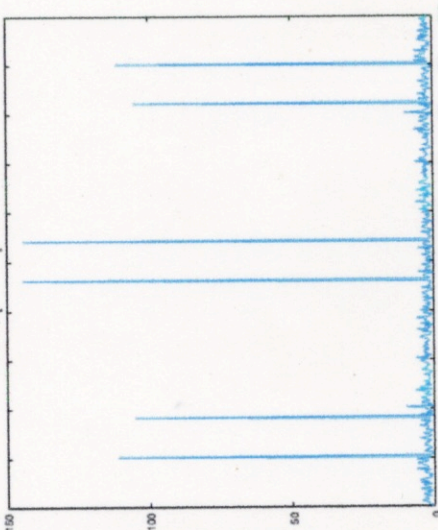
$F_1 = 50 \times 1 \text{ Hz}$

$F_3 = 230 \times 1 \text{ Hz}$

$F_2 = 90 \times 1 \text{ Hz}$

F

Μίγρο παίσματα



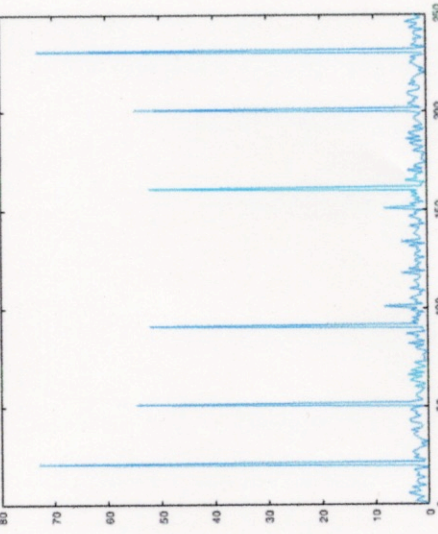
$F'_1 = 50 \times 2 \text{ Hz}$

$F'_3 = 230 \times 2 \text{ Hz}$

$F'_2 = 90 \times 2 \text{ Hz}$

F

Μίγρο παίσματα



$F''_1 = 20 \times 4 \text{ Hz}$

$F''_3 = 90 \times 4 \text{ Hz}$

$F''_2 = 50 \times 4 \text{ Hz}$

```

clear all
close all

[x,Fs]=audioread('recordingX.wav');
% sound(x,Fs)

% Downsampling by 2
x2 = x(1:2:end);

% Downsampling by 4
x4 = x(1:4:end);

% DFT computation
% Fig. 3.3A
% X = abs(fft(x,Fs));
% X2 = abs(fft(x2,Fs));
% X4 = abs(fft(x4,Fs));

% Fig. 3.3B
X = abs(fft(x,Fs));
X2 = abs(fft(x2,Fs/2));
X4 = abs(fft(x4,Fs/4));

% Plot of signals and corresponding spectra
subplot(2,3,1),stem(x(1:80))
subplot(2,3,2),stem(x2(1:40))
subplot(2,3,3),stem(x4(1:20))

subplot(2,3,4),plot(X)
subplot(2,3,5),plot(X2)
subplot(2,3,6),plot(X4)

%-----
% Writing an audio file
%-----
info = audioinfo('recordingX.wav')

[x,Fs]=audioread('recordingX.wav');

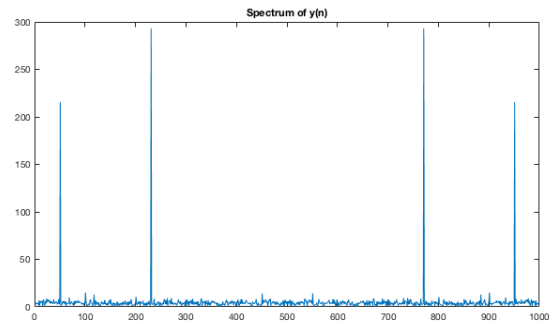
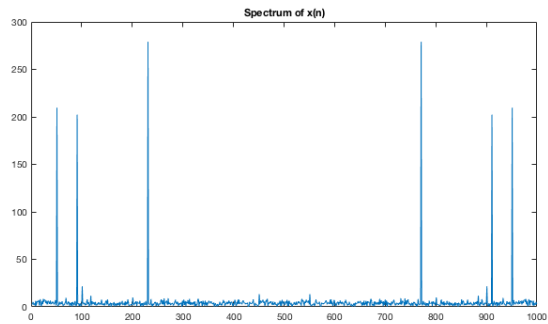
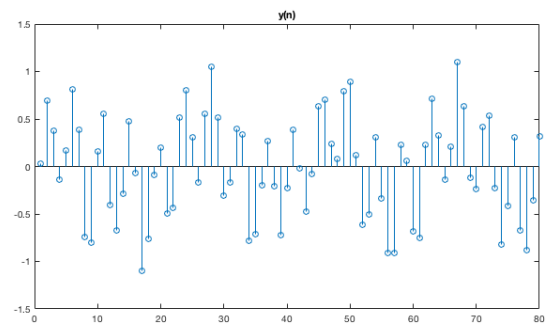
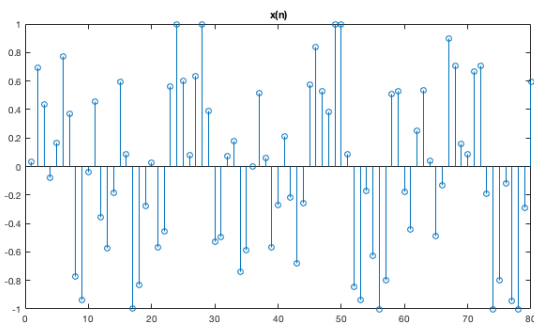
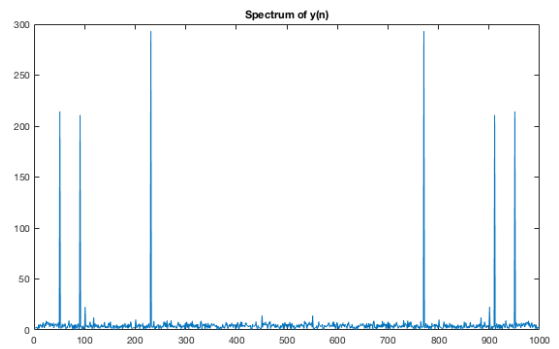
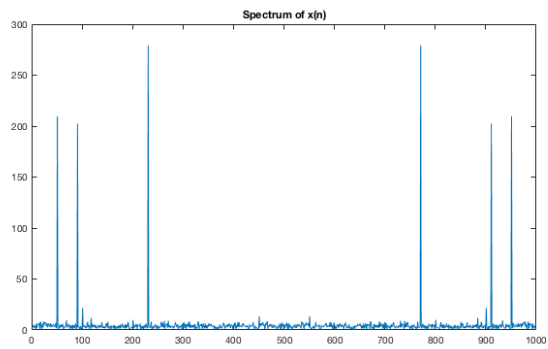
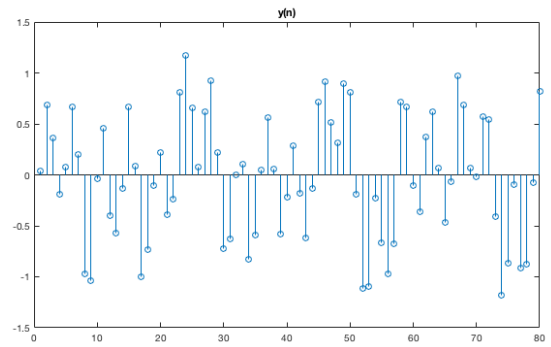
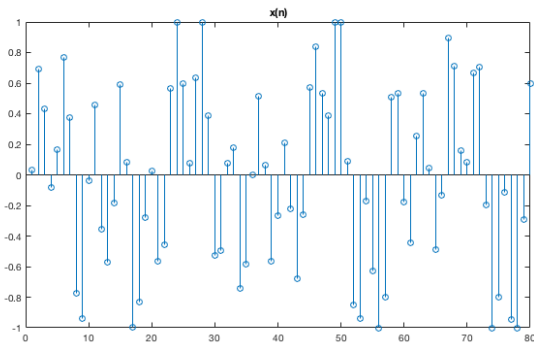
% t = 0:seconds(1/Fs):seconds(info.Duration);
% t = t(1:end-1);

N = length(x);
t = 1:N;

plot(t,x)
xlabel('Time')
ylabel('recordingX Audio Signal')

audiowrite('x2.wav',x2,Fs)
audiowrite('x4.wav',x4,Fs)

```



```

clear all
close all

[x,Fs]=audioread('recordingX.wav');

% Computation of y(n)
b=[1 -1.9999 1];
a=[1 -1.8999 0.9025];
y = filter(b,a,x);

% Computation of y(n) for the case of a notch filter
% b=[1 -1.6891 1];
% a=[1 -1.6046 0.9025];
% y = filter(b,a,x);

% DFT computation
X = abs(fft(x,Fs));
Y = abs(fft(y,Fs));

% Plot signals and corresponding spectra
subplot(2,2,1),stem(x(1:80))
title('x(n)');
subplot(2,2,2),stem(y(1:80))
title('y(n)');
subplot(2,2,3),plot(X)
title('Spectrum of x(n)');
subplot(2,2,4),plot(Y)
title('Spectrum of y(n)');

```