ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ9 – ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

Άσκηση Να προσδιοριστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Λύση

$$H(z)=\frac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}} \rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}+\frac{1}{2}}{e^{j\omega}-\frac{1}{2}}=\frac{\cos\omega+j\sin\omega+\frac{1}{2}}{\cos\omega+j\sin\omega-\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\cos\omega\right)+j\sin\omega}{\left(-\frac{1}{2}+\cos\omega\right)+j\sin\omega}=$$

$$=\frac{C\,e^{ja}}{D\,e^{jb}}=\frac{C}{D}e^{j(a-b)}$$ όπου

$$C=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\cos\omega\right)^2+\sin^2\omega}=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\cos\omega+\underbrace{\cos^2\omega+\sin^2\omega}_{1}}=\sqrt{\tfrac{5}{4}+\cos\omega}$$

$$D=\sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}+\cos\omega\right)^2+\sin^2\omega}=\sqrt{\tfrac{1}{4}-\cos\omega+\underbrace{\cos^2\omega+\sin^2\omega}_{1}}=\sqrt{\tfrac{5}{4}-\cos\omega}$$

$$a=\tan^{-1}\frac{\sin\omega}{\frac{1}{2}+\cos\omega} \qquad b=\tan^{-1}\frac{\sin\omega}{-\frac{1}{2}+\cos\omega}$$

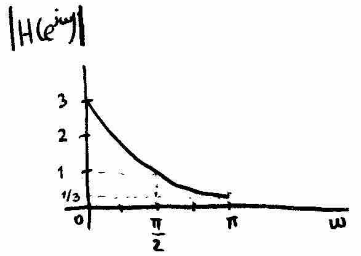
Για να προσδιορίσουμε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας, υπολογίζουμε αυτό για κάποιες χαρακτηριστικές συχνότητες, όπως για $\omega=0$, $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\omega=\pi$.

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{C}{D}=\sqrt{\frac{\frac{5}{4}+\cos\omega}{\frac{5}{4}-\cos\omega}}$$

Για $\omega=0 \rightarrow |H(e^{j0})|=\sqrt{\dfrac{\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}-1}}=\sqrt{\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{4}}}=\sqrt{9}=3$

Για $\omega=\frac{\pi}{2} \rightarrow |H(e^{j\frac{\pi}{2}})|=\sqrt{\dfrac{\frac{5}{4}+0}{\frac{5}{4}-0}}=1$

Για $\omega=\pi \rightarrow |H(e^{j\pi})|=\sqrt{\dfrac{\frac{5}{4}-1}{\frac{5}{4}+1}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος $H(z)=\dfrac{0.2}{1-0.8z^{-1}}$

ΛΥΣΗ Α' τρόπος: $H(z)=\dfrac{0.2\cdot z}{z-0.8}$ ⇝ μηδενικό στο $z=0$ και πόλος $z=0.8$

$$|H(e^{j\omega})| = 0.2\frac{|e^{j\omega}|}{|e^{j\omega}-0.8|} = 0.2\frac{1}{\sqrt{1.64-1.6\cos\omega}}$$ ← μέτρο

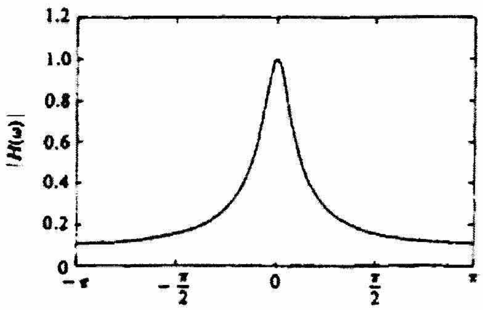
$$\angle H(e^{j\omega}) = \omega - \tan^{-1}\frac{\sin\omega}{\cos\omega-0.8}$$ ← φάση

Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης δίνονται στο πρώτο και τρίτο σχήμα παρακάτω. Παρατηρούμε ότι το μέγιστο του μέτρου εμφανίζεται στη συχνότητα $\omega=0$, δηλαδή στο σημείο εκείνο του μοναδιαίου κύκλου όπου βρίσκεται πλησιέστερα ο πόλος.

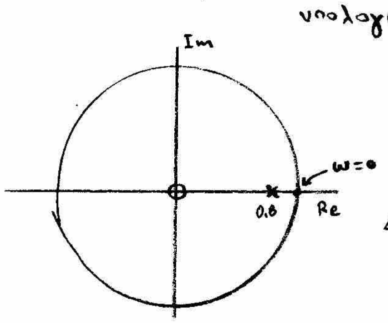
Η απόκριση μέτρου σε dB (decibels) υπολογίζεται από τη σχέση

$$|H(e^{j\omega})|_{dB} = 20\log_{10}(0.2) + 20\log_{10}|e^{j\omega}| - 20\log_{10}|e^{j\omega}-0.8|$$

και δείχνεται στη δεύτερη κυματομορφή του σχήματος.

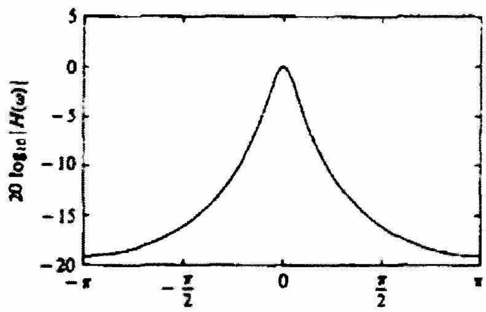


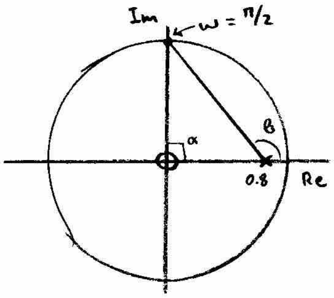
Β' τρόπος: Γραφικός ή γεωμετρικός υπολογισμός



$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 0.2\frac{1}{0.2} = 1$$

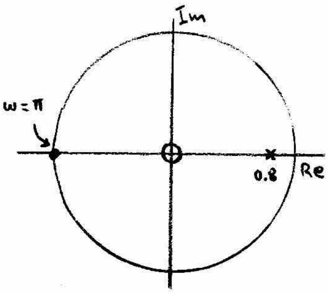
$$\angle H(e^{j\omega}) = 0^\circ - 0^\circ = 0^\circ$$





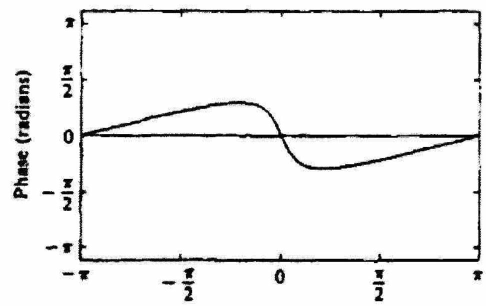
$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi}{2}} = 0.2\frac{1}{\sqrt{1+0.8^2}} = 0.15$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \alpha - \beta = \dots$$ μικρότερη του μηδενός



$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 0.2\frac{1}{1.8} = 0.11$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = 0^\circ$$



Σημείωση: Το κέρδος του συστήματος έχει επιλεγεί να είναι 0.2, δηλαδή 1−0.8, όπου 0.8 είναι ο πόλος του συστήματος, ώστε η απόκριση συχνότητας αυτού να είναι 1 για $\omega=0$.

Αναλυτικά οι πράξεις υπολογισμού μέτρου και φάσης

$$H(z) = 0.2 \frac{z}{z-0.8} \rightsquigarrow H(e^{j\omega}) = 0.2 \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.8} = 0.2 \frac{e^{j\omega}}{\cos\omega + j\sin\omega - 0.8} =$$

$$= 0.2 \frac{e^{j\omega}}{(\cos\omega - 0.8) + j\sin\omega} \qquad (1)$$

$$|H(e^{j\omega})| = 0.2 \frac{|e^{j\omega}|}{|(\cos\omega - 0.8) + j\sin\omega|} = 0.2 \frac{1}{\sqrt{(\cos\omega - 0.8)^2 + \sin^2\omega}} =$$

$$= 0.2 \frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega + 0.8^2 - 2\cdot 0.8\cos\omega + \sin^2\omega}} = 0.2 \frac{1}{\sqrt{1 + 0.64 - 1.6\cos\omega}} =$$

$$= \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\omega}} \qquad (2)$$

$$\underline{/H(e^{j\omega})} = \underline{/\text{Αριθμητή}} - \underline{/\text{Παρονομαστή}} = \langle \text{από την (1) έχουμε} \rangle$$

$$= \underline{/0.2\, e^{j\omega}} - \underline{/(\cos\omega - 0.8) + j\sin\omega} =$$

$$= \omega - \tan^{-1}\frac{\sin\omega}{\cos\omega - 0.8}$$

Έστω ότι έχουμε έναν μιγαδικό αριθμό x + jy. Όταν θέλουμε να βρούμε τη φάση αυτού του αριθμού μας ενδιαφέρουν τα πρόσημα των x και y. Γι'αυτό αντί για arctan(y/x) χρησιμοποιούμε το atan2(y/x).

Ισχύει ότι:

$$\operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & y \geq 0\,,\ x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & y < 0\,,\ x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0\,,\ x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0\,,\ x = 0 \\ \text{undefined} & y = 0\,,\ x = 0 \end{cases}$$

Στη δική μας περίπτωση ο μιγαδικός αριθμός είναι (cosω - 0.8) + jsinω .

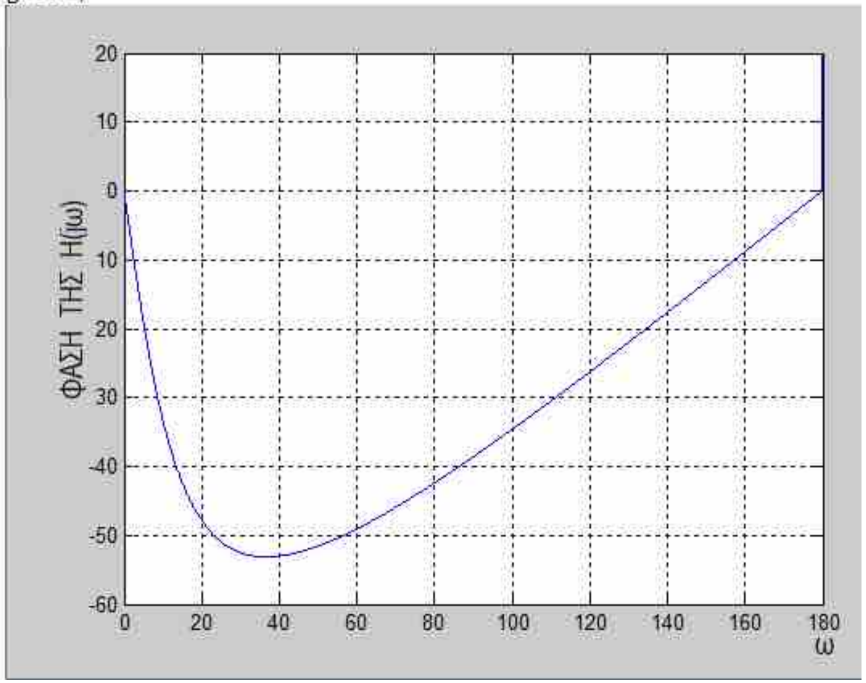
Δηλαδή x = cosω - 0.8 και y = sinω

Είναι H(jω) = ω – atan2(sinω/(cosω - 0.8))

Με τον κώδικα MATLAB δεξιά παίρνουμε το διάγραμμα φάσης του μιγαδικού μας αριθμού.

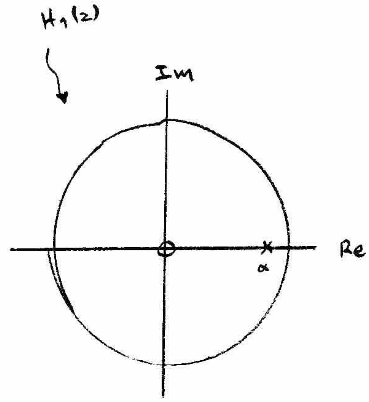
Κώδικας MATLAB

```
w = 0: 0.0001: 180;
phase_H = w -  atan2(sind(w),(cosd(w) - 0.8) )*180/pi ;
plot(w,phase_H) ;
axis([0 180 -60 20]);
grid on;
```



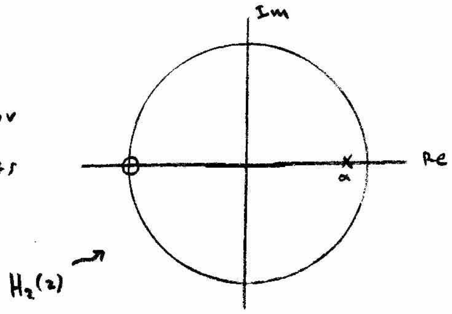
Παράδειγμα

Το σύστημα $H_1(z) = (1-a)\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ έχει ένα μηδενικό στο $z=0$ και έναν πόλο στο $z=a$. Ο παράγοντας κλιμάκωσης $(1-a)$ διαμορφώνει το συνολικό κέρδος του συστήματος ώστε να είναι 1 για $\omega=0$.



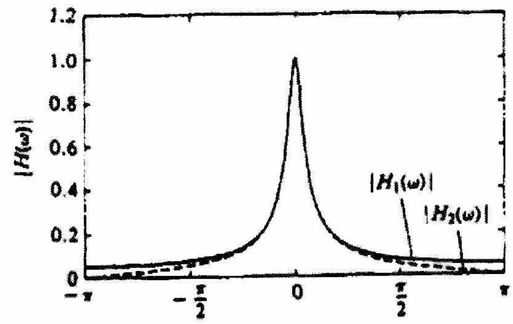
Οι αποκρίσεις μέτρου και φάσης του συστήματος $H_1(z)$ για $\alpha=0.9$ φαίνονται στο σχήμα.

Η μετατόπιση του μηδενικού στο $z=-1$ συμβάλλει στην επιπλέον εξασθένηση του σήματος στις υψηλές συχνότητες $(\omega=\pi)$. Η νέα συνάρτηση μεταφοράς γίνεται

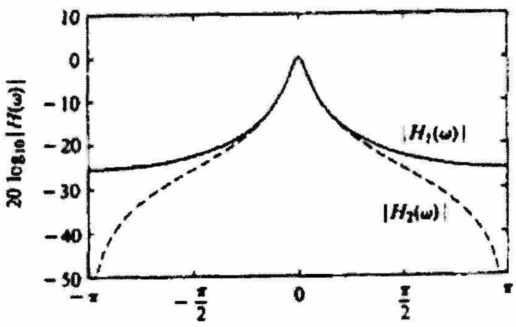


$$H_2(z) = \frac{1-a}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

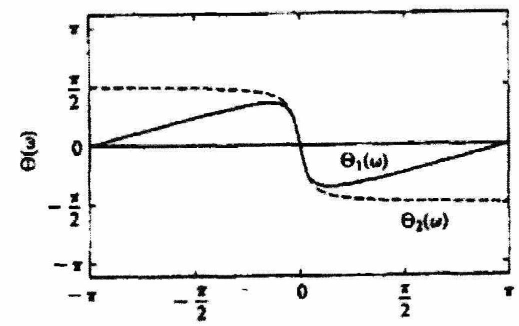
Οι αποκρίσεις συχνότητας της $H_2(z)$ δείχνονται στο σχήμα με διακεκομμένες γραμμές.



Παρατηρείστε ότι ο παράγοντας κλιμάκωσης της $H_2(z)$ έχει γίνει τώρα $\frac{1-a}{2}$ ώστε και πάλι το κέρδος να είναι ίσο με τη μονάδα για $\omega=0$.

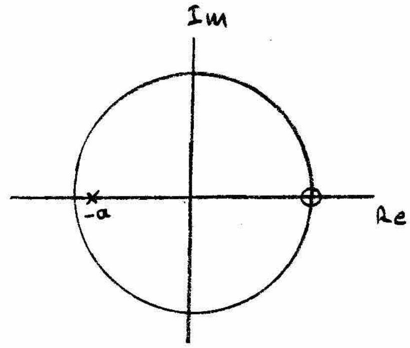


Τα φίλτρα και στις δύο περιπτώσεις είναι βαθυπερατά (lowpass).

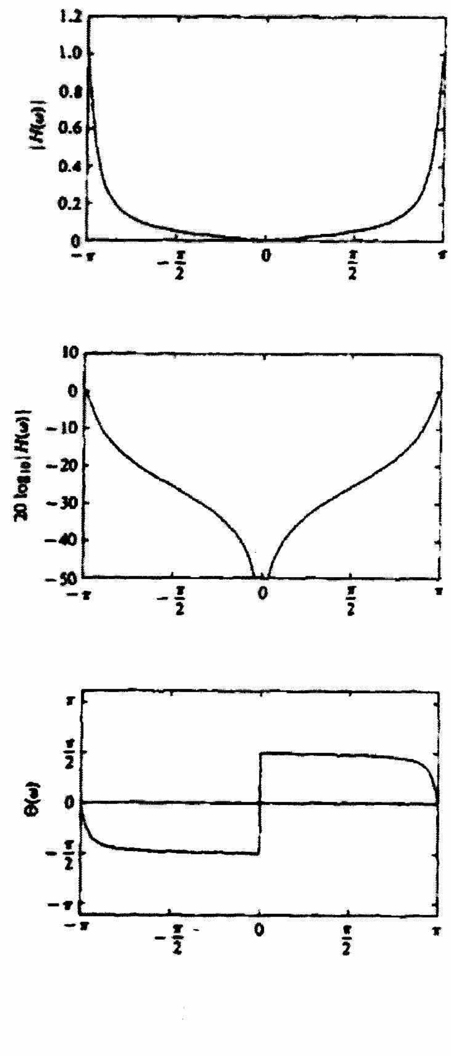


Παράδειγμα (συνέχεια)

Η συνάρτηση $H_3(z) = \frac{1-a}{2} \; \frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}$ έχει προκύψει από τον κατοπτρισμό των πόλων και μηδενικών της $H_2(z)$ γύρω από τον άξονα των μιγαδικών στο επίπεδο-z.



Σχεδιάζοντας τις γραφικές παραστάσεις για $a=0{,}9$ της απόκρισης συχνότητας παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα υψιπερατό (high pass) φίλτρο.



ΑΣΚΗΣΗ Ένα βαθυπερατό φίλτρο με δύο πόλους έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{b_0}{(1-p z^{-1})^2}$$

. Να υπολογιστούν οι τιμές b_0 και p ώστε η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ να ικανοποιεί τις συνθήκες: $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = 1$, $\left|H(e^{j\omega})\right|^2_{\omega=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ Για $\omega=0$ έχουμε: $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = \frac{b_0}{(1-p)^2} = 1 \Rightarrow b_0 = (1-p)^2$

Για $\omega=\frac{\pi}{4}$ έχουμε:

$$H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{\pi}{4}} = H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = \frac{\overbrace{(1-p)^2}^{b_0}}{(1-p\, e^{-j\frac{\pi}{4}})^2} =$$

$$= \frac{(1-p)^2}{(1-p\cos\frac{\pi}{4} + j\, p \sin\frac{\pi}{4})^2} =$$

$$= \frac{(1-p)^2}{(1-p/\sqrt{2} + jp/\sqrt{2})^2}$$

Με βάση το δεδομένο ότι $\left|H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right|^2 = \frac{1}{2}$ βρίσκουμε:

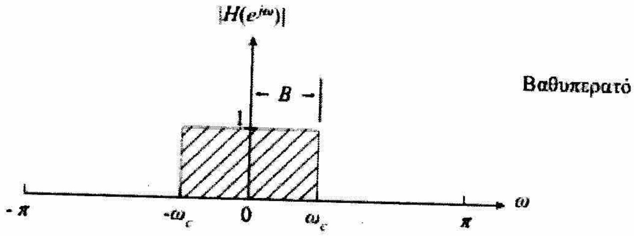
$$\frac{(1-p)^4}{\left[(1-p/\sqrt{2})^2 + p^2/2\right]^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\,(1-p)^2 = 1 + p^2 - \sqrt{2}\,p \Rightarrow p = 0.32$$

Άρα

$$H(z) = \frac{0.46}{(1-0.32 z^{-1})^2}$$

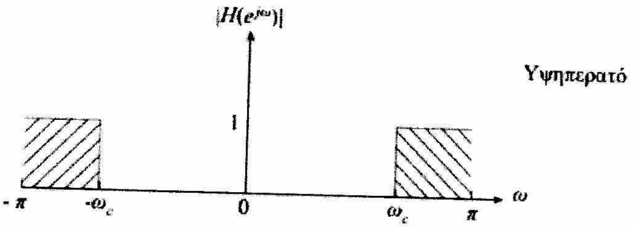
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ-ΣΕ-ΥΨΗΠΕΡΑΤΟ

Έστω $h_{lp}(n)$ η κρουστική απόκριση ενός πρωτότυπου βαθυπερατού φίλτρου.



Από το σχήμα βλέπουμε ότι η απόκριση συχνότητας ενός υψηπερατού φίλτρου είναι ίδια με εκείνη του βαθυπερατού, αλλά μετατοπισμένη κατά π ακτίνια.

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$$



Με βάση τις ιδιότητες, μετατόπιση στη συχνότητα κατά π ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό της κρουστικής απόκρισης h_{lp} επί $e^{j\pi n}$, δηλαδή

$$h_{hp}(n) = e^{j\pi n} h_{lp}(n) =$$
$$= (e^{j\pi})^n h_{lp}(n) =$$
$$= (-1)^n h_{lp}(n) \quad \overset{\text{ισοδύναμα}}{\rightsquigarrow} \quad h_{lp}(n) = (-1)^n h_{hp}(n)$$ ← μετασχηματισμός από highpass σε lowpass

Άρα, η κρουστική απόκριση του υψηπερατού φίλτρου προκύπτει από εκείνη του βαθυπερατού, αλλάζοντας το πρόσημο των συντελεστών $h_{lp}(n)$ που αντιστοιχούν σε <u>περιττό δείκτη</u>.

Στην περίπτωση που το βαθυπερατό φίλτρο περιγράφεται μέσω της εξίσωσης διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, y(n-k)$$

δηλαδή η απόκριση συχνότητας είναι

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{-j\omega k}}$$

τότε η απόκριση συχνότητας του αντίστοιχου υψηπερατού προκύπτει με αντικατάσταση του ω με ω−π

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \alpha_k e^{-j\omega k}}$$

οπότε η εξίσωση διαφορών του υψηπερατού είναι

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k\, x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \alpha_k\, y(n-k)$$

δηλαδή αλλάζει το πρόσημο των συντελεστών που αντιστοιχούν σε <u>περιττή καθυστέρηση</u>.

Παράδειγμα Να μετατραπεί το βαθυπερατό φίλτρο με εξίσωση διαφορών

$$y(n) = 0.1\,x(n) + 0.9\,y(n-1)$$

σε υψιπερατό.

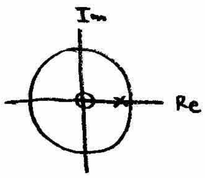
Λύση Η εξίσωση διαφορών του υψιπερατού προκύπτει από την αντίστοιχη του βαθυπερατού με αλλαγή του προσήμου των συντελεστών που αντιστοιχούν σε περιττές καθυστερήσεις. Άρα $y(n) = 0.1\,x(n) - 0.9\,y(n-1)$

Αναλυτικά για την άσκηση αυτή έχουμε:

Βαθυπερατό

$$y(n) = 0.1\,x(n) + 0.9\,y(n-1)$$

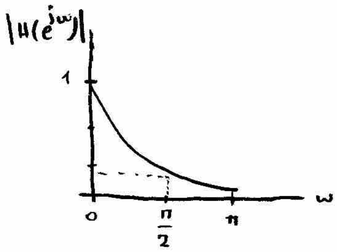
$$H(z) = \frac{0.1}{1-0.9z^{-1}}$$



$$\omega=0 \rightsquigarrow \left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=0} = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

$$\omega=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\frac{\pi}{2}} = 0.1\,\frac{1}{\sqrt{1+0.81}} = 0.074$$

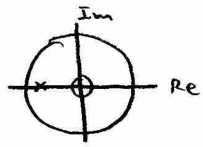
$$\omega=\pi \rightsquigarrow \left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\pi} = 0.1\,\frac{1}{1+0.9} = 0.053$$



Υψιπερατό

$$y(n) = 0.1\,x(n) - 0.9\,y(n-1)$$

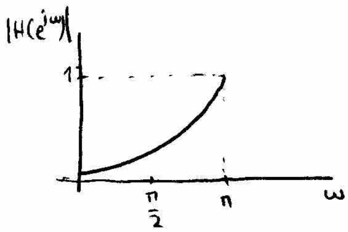
$$H(z) = \frac{0.1}{1+0.9z^{-1}}$$



$$\omega=0 \rightsquigarrow \left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=0} = 0.1\,\frac{1}{1+0.9} = 0.053$$

$$\omega=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\frac{\pi}{2}} = 0.1\,\frac{1}{\sqrt{1+0.81}} = 0.074$$

$$\omega=\pi \rightsquigarrow \left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\pi} = 0.1\,\frac{1}{0.1} = 1$$



Παράδειγμα σχεδιασμού φίλτρου εγκοπής (notch filter)

Να σχεδιαστεί φίλτρο το οποίο να αποκόπτει τη συχνότητα των 50Hz.
Η συχνότητα δειγματοληψίας του συστήματος είναι 400 Hz.

Λύση

Η συχνότητα ω_0 την οποία θέλουμε να απαλείψουμε υπολογίζεται από τη σχέση $\omega = \Omega T$.

$$\omega_0 = \Omega_0 T = 2\pi F_0 \cdot \frac{1}{F_s} = 2\pi \frac{F_0}{F_s} = 2\pi \frac{50\ \text{Hz}}{400\ \text{Hz}} = \frac{\pi}{4}$$

Συνεπώς για να μηδενίσουμε τη συγκεκριμένη συχνότητα, τοποθετούμε ένα μηδενικό (και το αντίστοιχο συζυγές του) πάνω στον μοναδιαίο κύκλο στη γωνία ω_0, δηλαδή

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$$

Η συνάρτηση συστήματος (συνάρτηση μεταφοράς) του FIR φίλτρου που προκύπτει είναι (*)

$$H(z) = b_0 \left(1 - e^{j\omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}\right) =$$

$$= b_0 \left(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}\right)$$

Το μέτρο και η φάση του φίλτρου αυτού για $b_0 = 1$ και $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ φαίνεται στο πρώτο σχήμα της επόμενης σελίδας. Παρατηρούμε ότι η απόκριση μέτρου παρουσιάζει μεγάλο εύρος συχνοτήτων γύρω από την επιθυμητή συχνότητα ω_0 που θέλουμε να αποκόψουμε. Για να βελτιώσουμε τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας, εισάγουμε έναν πόλο (και τον συζυγή του) πολύ κοντά στο υπάρχον μηδενικό. Προσοχή, οι πόλοι πρέπει πάντα να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (δηλ. $r<1$) ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές. Το ζεύγος των συζυγών μιγαδικών πόλων είναι

$$p_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$$

οπότε η συνάρτηση του συστήματος γίνεται τώρα:

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Οι αποκρίσεις συχνότητας (μέτρο και φάση) του συστήματος για $b_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, $r = 0.85$ και $r = 0.95$ φαίνονται στο δεύτερο και τρίτο σχήμα της επόμενης σελίδας.

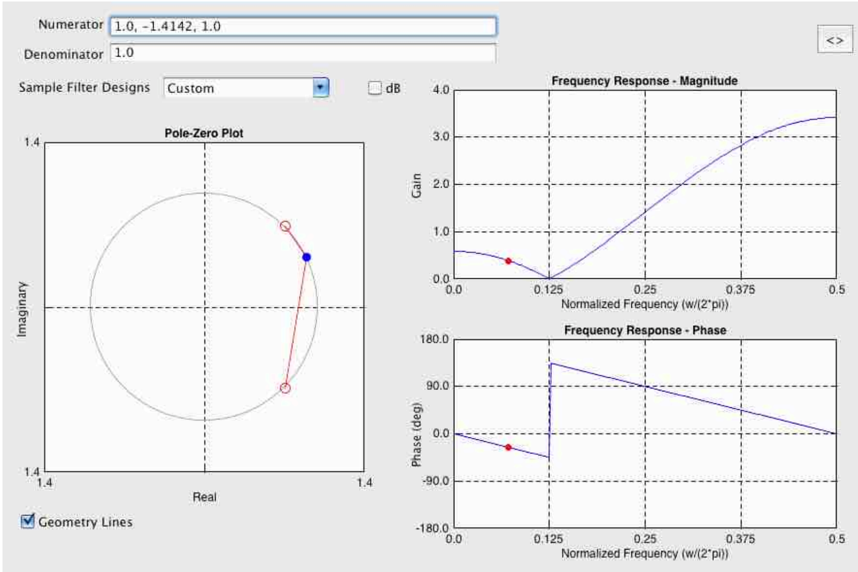
Παρατηρούμε ότι η απόκριση βελτιώνεται (γίνεται πιο απότομη, δηλαδή μειώνεται το εύρος ζώνης συχνοτήτων που αποκόπτονται) καθώς ο πόλος πλησιάζει προς τον μοναδιαίο κύκλο.

Σημείωση: Οι συναρτήσεις μεταφοράς για $r=0.85$ και $r=0.95$ είναι αντίστοιχα:

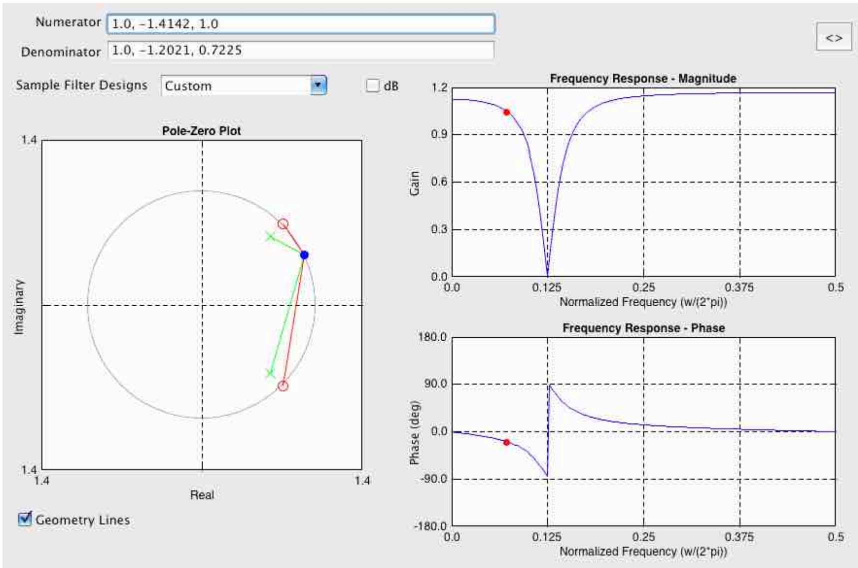
$$H(z) = \frac{1 - 1.4142 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.2021 z^{-1} + 0.7225 z^{-2}} \qquad H(z) = \frac{1 - 1.4142 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.3435 z^{-1} + 0.9025 z^{-2}}$$

(*) Θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει: $H(z) = b_0 (z - z_1)(z - z_2) = b_0 (z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0}) = b_0 \frac{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{z^{-2}}$

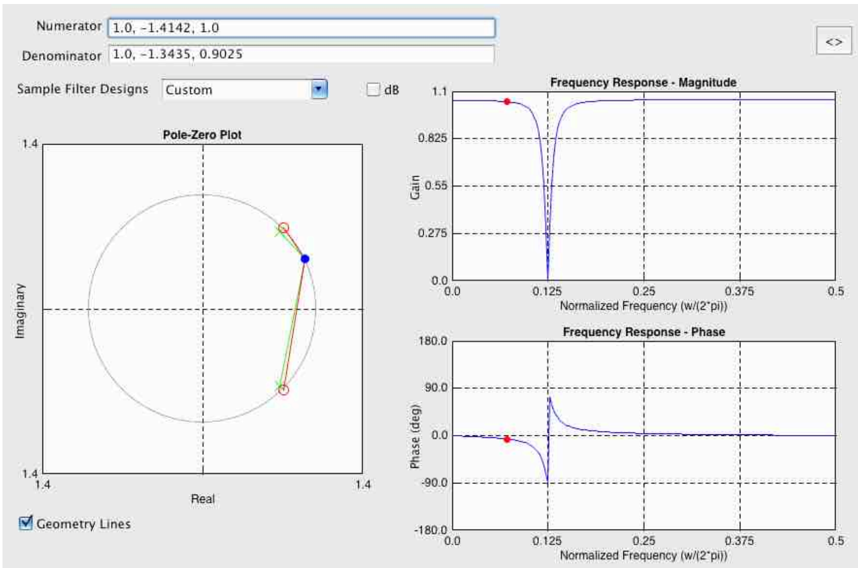
Ο διπλός πόλος στο $z=0$ δεν αλλάζει τη μορφή της απόκρισης συχνότητας.



Φίλτρο εγκοπής (notch) με ένα μόνο μηδενικό (και το συζυγές του) στη συχνότητα ω=π/4



Φίλτρο εγκοπής (notch) με μηδενικό και πόλο σε απόσταση r=0.85 (και τα συζυγή τους) στη συχνότητα ω=π/4



Φίλτρο εγκοπής (notch) με μηδενικό και πόλο σε απόσταση r=0.95 (και τα συζυγή τους) στη συχνότητα ω=π/4

ΘΕΜΑ 3

Η εξίσωση διαφορών ενός ΓΧΑ αιτιατού συστήματος διακριτού χρόνου δίνεται από τη σχέση:

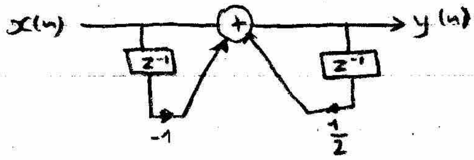
$$y(n) = x(n) - x(n-1) + (1/2)\, y(n-1)$$

α. Να σχεδιάσετε τη **δομή πραγματοποίησης** (διάγραμμα βαθμίδων) του συστήματος.
β. Να γράψετε τη **συνάρτηση μεταφοράς H(z)** του συστήματος.
γ. Να τοποθετήσετε τους **πόλους** και τα **μηδενικά** στο επίπεδο-z. Πρόκειται για **ευσταθές ή ασταθές** σύστημα και **γιατί**;
δ. Να σχεδιάσετε το **μέτρο της απόκρισης συχνότητας** του συστήματος (φίλτρου). Ποιος ο **τύπος** του φίλτρου; Πρόκειται δηλαδή για βαθυπερατό (low-pass, LP), υψηπερατό (high-pass, HP), ζωνοπερατό (band-pass, BP) ή ζωνοφρακτικό (band-stop, BS);

ΘΕΜΑ 3

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + \frac{1}{2} y(n-1)$$

α. δομή πραγματοποίησης



β. Για να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς παίρνουμε τον ΜΖ και των δύο μελών της εξίσωσης διαφορών

$$Z\{y(n)\} = Z\{x(n) - x(n-1) + \tfrac{1}{2} y(n-1)\} \Rightarrow$$

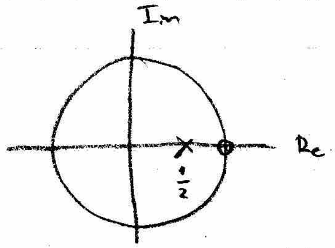
$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) + \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) \Rightarrow$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) = X(z)\left(1 - z^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = H(z)$$

γ. Μηδενικό στο $z = 1$

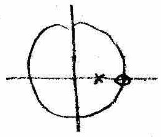
Πόλος στο $z = \frac{1}{2}$



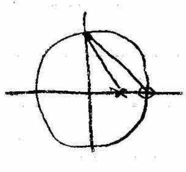
Το σύστημα είναι ευσταθές, αφού ο πόλος βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

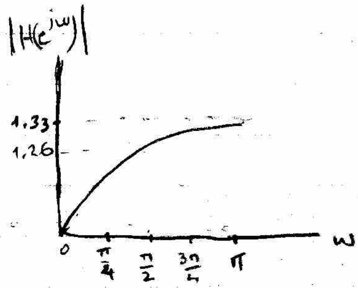
δ

$\omega = 0 \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$

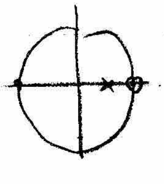


$\omega = \frac{\pi}{2} \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2}} = 1.26$

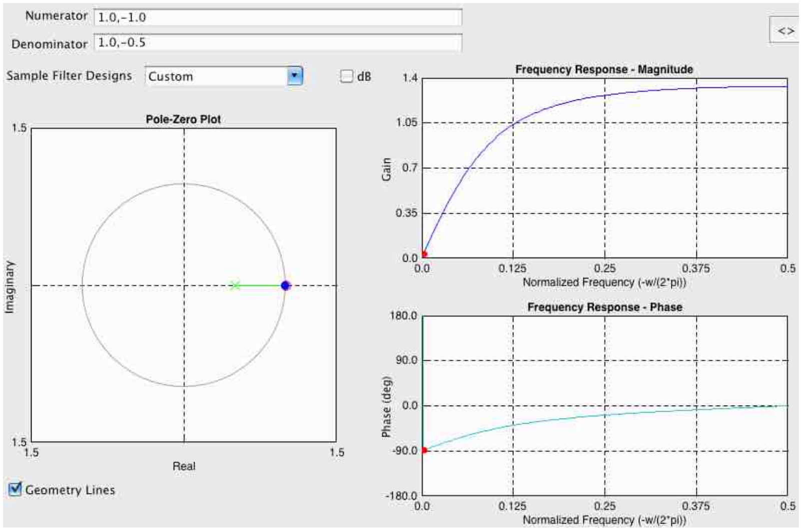


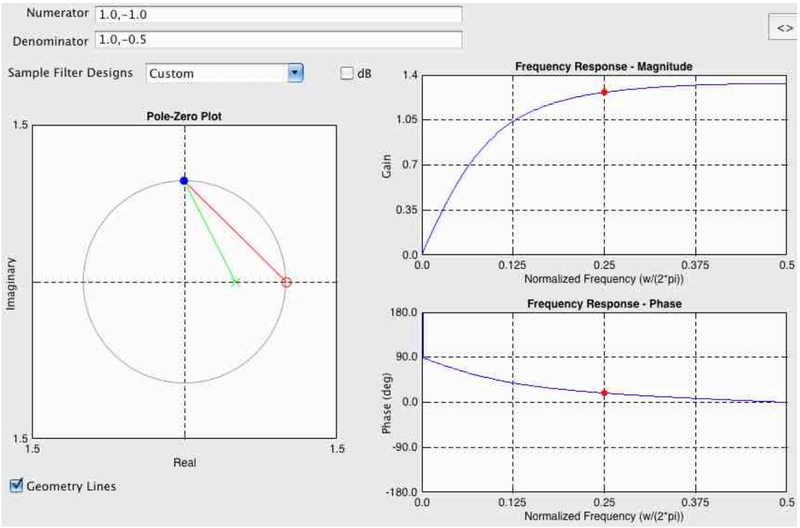


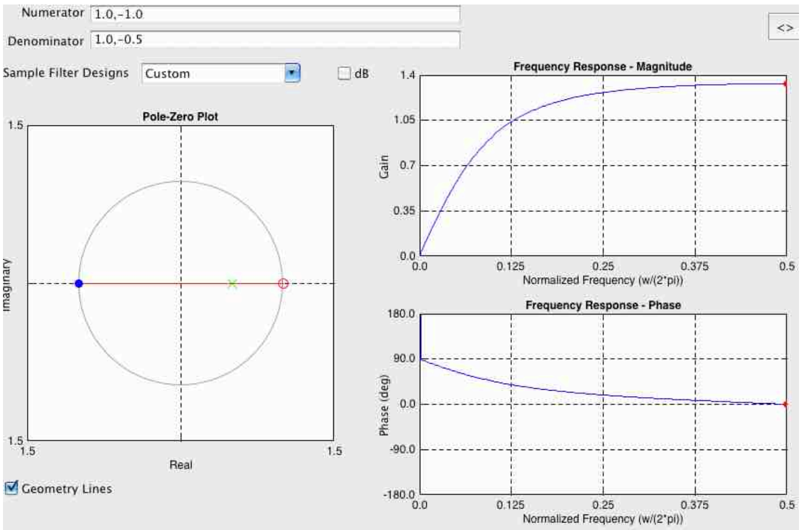
$\omega = \pi \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1.33$



Πρόκειται για ένα υψιπερατό (highpass) φίλτρο


Numerator 1.0,-1.0
Denominator 1.0,-0.5
<>
Sample Filter Designs Custom
dB
Pole-Zero Plot
Imaginary
Real
1.5
1.5
1.5
1.5
Geometry Lines
Frequency Response - Magnitude
Gain
1.4 1.05 0.7 0.35 0.0
0.0 0.125 0.25 0.375 0.5
Normalized Frequency (-w/(2*pi))
Frequency Response - Phase
Phase (deg)
180.0 90.0 0.0 -90.0 -180.0
0.0 0.125 0.25 0.375 0.5
Normalized Frequency (-w/(2*pi))


Numerator 1.0,-1.0
Denominator 1.0,-0.5
<>
Sample Filter Designs Custom
dB
Pole-Zero Plot
Imaginary
Real
1.5
1.5
1.5
1.5
Geometry Lines
Frequency Response - Magnitude
Gain
1.4 1.05 0.7 0.35 0.0
0.0 0.125 0.25 0.375 0.5
Normalized Frequency (w/(2*pi))
Frequency Response - Phase
Phase (deg)
180.0 90.0 0.0 -90.0 -180.0
0.0 0.125 0.25 0.375 0.5
Normalized Frequency (w/(2*pi))


Numerator 1.0,-1.0
Denominator 1.0,-0.5
<>
Sample Filter Designs Custom
dB
Pole-Zero Plot
Imaginary
Real
1.5
1.5
1.5
1.5
Geometry Lines
Frequency Response - Magnitude
Gain
1.4 1.05 0.7 0.35 0.0
0.0 0.125 0.25 0.375 0.5
Normalized Frequency (w/(2*pi))
Frequency Response - Phase
Phase (deg)
180.0 90.0 0.0 -90.0 -180.0
0.0 0.125 0.25 0.375 0.5
Normalized Frequency (w/(2*pi))