ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ8 – ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Ή ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$y(n) = h(n) * x(n) \qquad\qquad Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$h(n)$: χαρακτηρίζη το σύστημα στο πεδίο του χρόνου

$H(z)$: χαρακτηρίζη το σύστημα στο πεδίο -z

$h(n)$: απόκριση μοναδιαίου δείγματος ή μοναδιαία κρουστική απόκριση

$H(z)$: συνάρτηση συστήματος ή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}$$

$H(z)$ και $h(n)$ είναι δύο ισοδύναμες περιγραφές ενός συστήματος σε δύο διαφορετικά πεδία.

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την γραμμική σταθερών συντελεστών εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k)$$

Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών και αξιοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης στον χρόνο έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) \quad \Rightarrow$$

$$Y(z)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right] = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Συνεπώς ένα ΓΧΑ το οποίο περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών (difference equation) με σταθερούς συντελεστές, έχει μια ρητή (rational) συνάρτηση συστήματος.

Περίπτωση 1: $\alpha_k = 0 \rightsquigarrow H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}$

Η $H(z)$ έχει M μηδενικά (zeros) και ένα πόλο (pole) πολλαπλότητας M στην αρχή των αξόνων $z=0$.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-μηδενικά (all-zero system).

Επίσης, το σύστημα αυτό έχει πεπερασμένη κρουστική απόκριση γι' αυτό και ονομάζεται FIR σύστημα.
(FIR: Finite Impulse Response)

Τέλος ονομάζεται και σύστημα κινούμενου μέσου όρου
(MA: Moving Average).

Περίπτωση 2: $b_k = 0 \rightsquigarrow H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^{N-k}} \quad \alpha_0 \equiv 1$

Η $H(z)$ έχει N πόλους και ένα μηδενικό πολλαπλότητας N στην αρχή των αξόνων $z=0$.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-πόλους (all-pole system).

Η ύπαρξη των πόλων οδηγεί με μια απόκριση του συστήματος άπειρης διάρκειας γι' αυτό και ονομάζεται IIR σύστημα
(IIR: Infinite Impulse Response)

Περίπτωση 3. $\alpha_k \neq 0,\ b_k \neq 0 \rightsquigarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k}}$

Πρόκειται για τη γενική περίπτωση. Η $H(z)$ έχει N πόλους και M μηδενικά. Οι πόλοι και τα μηδενικά στο $z=0$ και $z=\infty$ δεν προσμετρώνται.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα πόλων-μηδενικών (pole-zero system).

Λόγω της ύπαρξης των πόλων, το σύστημα αυτό είναι IIR.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Γιατί η συνάρτηση μεταφοράς να είναι εκφρασμένη ως $H(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{N-1} z^{-(N-1)}}$;
Δηλαδή, γιατί θα πρέπει $\alpha_0 = 1$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όλα ξεκινάνε από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}}$ (1)

(Σημείωση: Το εάν τα όρια των αθροισμάτων είναι M-1 και N-1 και όχι M και N, δεν έχει καμμία σημασία).

Παρατηρήστε τον παρονομαστή της (1). Τον έχω γράψει ως $1+\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}$. Το έκανα αυτό για να μπορέσω να υπολογίσω την εξίσωση διαφορών του συστήματος, ως εξής:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k} Y(z)$$

$$\Big\downarrow z^{-1}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k y(n-k)$$

Είναι φανερό ότι η μονάδα στον παρονομαστή με βοήθησε για να βρω εύκολα το $Y(z)$ και εν συνεχεία το $y(n)$.

→ Εάν η συνάρτηση $H(z)$ <u>δεν</u> είναι εκφρασμένη έτσι, αλλά γενικά ως λόγος δύο πολυωνύμων, π.χ. $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{M-1} c_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} d_k z^{-k}}$, τότε μπορώ να την φέρω στη μορφή της (1), διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το d_0.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} c_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} d_k z^{-k}} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots c_{M-1} z^{-(M-1)}}{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N-1} z^{-(N-1)}} = \langle \text{διαιρώ με } d_0 \rangle =$$

$$= \frac{\frac{c_0}{d_0} + \frac{c_1}{d_0} z^{-1} + \frac{c_2}{d_0} z^{-2} + \dots + \frac{c_{N-1}}{d_0} z^{-(M-1)}}{1 + \frac{d_1}{d_0} z^{-1} + \dots + \frac{d_{N-1}}{d_0} z^{(N+1)}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \quad \text{όπου} \quad b_k = \frac{c_k}{d_0} \quad \text{και} \quad \alpha_k = \frac{d_k}{d_0}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ-Ζ

● ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΕ ΗΡΕΜΙΑ (ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ)

$$\underbrace{H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \qquad X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \quad (*)}$$

$$Y(z) = H(z)\,X(z) = \frac{B(z)\,N(z)}{A(z)\,Q(z)}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{Y(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}}_{\substack{\text{φυσική} \\ \text{απόκριση} \\ \text{(natural} \\ \text{response)}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}}_{\substack{\text{εξαναγκασμένη} \\ \text{απόκριση} \\ \text{(forced} \\ \text{response)}}}}_{} \qquad (**)$$

$$\Big\downarrow Z^{-1} \quad \text{απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)} \qquad (***)$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$

Σημειώσεις: (*) Θεωρήσαμε ότι $X(z) = N(z)/Q(z)$. Πράγματι τα περισσότερα σήματα που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον, έχουν ρητούς ΜΖ.

(**) Θεωρήσαμε ότι οι πόλοι του συστήματος $p_1, p_2, \dots, p_N$ καθώς και οι πόλοι του σήματος εισόδου $q_1, q_2, \dots, q_L$ είναι απλοί και διάφοροι μεταξύ τους, δηλ. $p_k \neq q_m$, όπου $k = 1, 2, \dots, N$ και $m = 1, 2, \dots, L$.

(***) Θεωρήσαμε ότι το σύστημα, πριν την εφαρμογή του σήματος εισόδου, ήταν σε ηρεμία, δηλαδή $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-N) = 0$.

(**) Επίσης θεωρήσαμε ότι τα μηδενικά είναι διαφορετικά από τους πόλους, ώστε να μην έχουμε απαλοιφή κάποιων πόλων.

Στην περίπτωση ύπαρξης πόλων πολλαπλότητας l, όπου $l \neq 1$, η ανάλυση της $Y(z)$ σε μερικά κλάσματα θα περιέχει όρους της μορφής $1/(1-p_k)^l$ και συνεπώς η $y(n)$ θα περιέχει όρους της μορφής $n^{l-1} p_k^n$.

Β. ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Έστω ότι η είσοδος $x(n)$ εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n=0$ σε σύστημα το οποίο δεν βρίσκεται σε ηρεμία, δηλ. κάποιες από τις τιμές $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$ είναι διάφορες του μηδενός.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

$$\Big\downarrow\, Z^+$$

$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n)\, z^{n}\right] + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X^+(z)$$

$$\Big\downarrow$$

$$Y^+(z) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}}_{H(z)} X(z) - \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n)\, z^{n}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}}_{\frac{N_0(z)}{A(z)}}$$

$$\Big\downarrow$$

$$Y^+(z) = \underbrace{H(z)\cdot X(z)}_{Y_{zs}(z)} + \underbrace{\frac{N_0(z)}{A(z)}}_{Y_{zi}^+(z)}$$

Zero-State response

zero-input response

$$\Big\downarrow\, Z^{-1}$$

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

$$y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k (p_k)^n u(n)$$

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$

$$\Big\downarrow \oplus$$

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A'_k (p_k)^n u(n)}_{\text{φυσική απόκριση}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)}_{\text{εξαναγκασμένη απόκριση}} \qquad \text{όπου } A'_k = A_k + D_k$$

Σημειώσεις: Η ύπαρξη αρχικών συνθηκών επηρεάζει τη φυσική απόκριση του συστήματος. Δεν εισάγονται νέοι πόλοι και δεν επηρεάζεται η εξαναγκασμένη απόκριση.

Μεταβατική / Μόνιμη Κατάσταση

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A'_k (p_k)^n u(n)}_{\substack{y_{nr}(n) \\ \text{φυσική απόκριση}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)}_{\substack{y_{fr}(n) \\ \text{εξαναγκασμένη απόκριση}}}$$

- Φυσική απόκριση: $y_{nr}(n)$
  - $\{p_k\}$, $k=1,2,\dots,N$ είναι οι πόλοι του συστήματος
  - $\{A'_k\}$ είναι οι παράγοντες κλιμάκωσης που προκύπτουν από την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα.

    Εξαρτώνται τόσο από τις αρχικές συνθήκες, όσο και από τα χαρακτηριστικά της εισόδου: $A'_k = A_k + D_k$
  - Εάν $|p_k|<1$ για όλα τα k, τότε η $y_{nr}(n)$ φθίνει προς το μηδέν καθώς $n \to \infty$

    (μεταβατική απόκριση - transient response).

  Για μικρά μεγέθη των πόλων, ο ρυθμός εξασθένησης της απόκρισης είναι μεγάλος.

- Εξαναγκασμένη απόκριση: $y_{fr}(n)$
  - $\{q_k\}$, $k=1,2,\dots,L$ είναι οι πόλοι του σήματος που εφαρμόζεται στο σύστημα.
  - $\{Q_k\}$ είναι οι παράγοντες κλιμάκωσης που προκύπτουν από την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

    Εξαρτώνται τόσο από το σήμα εισόδου, όσο και από τα χαρακτηριστικά του συστήματος.
  - Εάν όλοι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η $y_{fr}(n)$ θα φθίνει προς το μηδέν καθώς $n \to \infty$.
  - Εάν οι πόλοι βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο (γεγονός που συμβαίνει για ημιτονοειδή είσοδο), τότε η εξαναγκασμένη απόκριση θα είναι επίσης ημιτονοειδής για κάθε $n \geq 0$ (απόκριση μόνιμης κατάστασης - steady-state response).

Παράδειγμα απόκρισης μόνιμης (σταθερής) κατάστασης

Να υπολογιστεί η μεταβατική και η μόνιμη απόκριση του συστήματος

$y(n) = 0.5\,y(n-1) + x(n)$ το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία και στο οποίο εφαρμόζεται

η είσοδος $x(n) = 10\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n)$.

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \qquad X(z) = \frac{10\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}\right)}{1-\sqrt{2}\,z^{-1}+z^{-2}}$$

Επομένως

$$Y(z) = H(z)\,X(z) = \frac{10\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}\right)}{(1-0.5z^{-1})\left(1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)} =$$

$$= \underbrace{\frac{-1.91}{1-0.5z^{-1}}}_{Y_{nr}(z)} + \underbrace{\frac{6.78\,e^{-j28.7^\circ}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{6.78\,e^{j28.7^\circ}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}}_{Y_{fr}(z)}$$

$$Y_{nr}(z) \xrightarrow{z^{-1}} y_{nr}(n) \qquad Y_{fr}(z) \xrightarrow{z^{-1}} y_{fr}(n)$$

$y_{nr}(n) = -1.91(0.5)^n u(n)$ ← φυσική ή μεταβατική απόκριση

$$y_{fr}(n) = \left[6.78\,e^{-j28.7}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n}\right) + 6.78\,e^{j28.7}\left(e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)\right]u(n) =$$

$= 13.56\cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^\circ\right)u(n)$ ← μόνιμη (σταθερή) απόκριση

Σημείωση

$$28.7^\circ \longleftrightarrow 0.16\pi \simeq 0.5 = \frac{1}{2}\ \text{rad}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y(n) = 0.9\,y(n-1) - 0.81\,y(n-2) + x(n)$ όταν αυτό βρίσκεται σε ηρεμία και όταν $y(-1) = y(-2) = 1$.

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9 z^{-1} + 0.81 z^{-2}} \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$p_1 = 0.9 e^{j\pi/3}, \quad p_2 = 0.9 e^{-j\pi/3}$$

- Όταν το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία, τότε

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{(1 - 0.9 e^{j\pi/3} z^{-1})(1 - 0.9 e^{-j\pi/3} z^{-1})(1 - z^{-1})} =$$

$$= \frac{0.542 - j0.049}{1 - 0.9 e^{j\pi/3} z^{-1}} + \frac{0.542 + j0.049}{1 - 0.9 e^{-j\pi/3} z^{-1}} + \frac{1.099}{1 - z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} \quad y_{zs}(n) = \left[1.099 + 1.088\,(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3} n - 5.2^\circ\right)\right] u(n)$$

- Όταν το σύστημα δεν βρίσκεται σε ηρεμία κατά την εφαρμογή της βηματικής εισόδου, αλλά $y(-1) = y(-2) = 1$, τότε θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την απόκριση μηδενικής εισόδου, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0.9 - 0.81 - 0.81 z^{-1}}{1 - 0.9 z^{-1} + 0.81 z^{-2}} = \frac{0.026 + j0.4936}{1 - 0.9 e^{j\pi/3} z^{-1}} + \frac{0.026 - j0.4936}{1 - 0.9 e^{-j\pi/3} z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} \quad y_{zi}(n) = 0.988\,(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3} n + 87^\circ\right) u(n)$$

Η τελική απόκριση έχει ΜΖ

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) = \frac{1.099}{1 - z^{-1}} + \frac{0.568 + j0.445}{1 - 0.9 e^{j\pi/3} z^{-1}} + \frac{0.568 - j0.445}{1 - 0.9 e^{-j\pi/3} z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} \quad y(n) = 1.099\,u(n) + 1.44\,(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3} n + 38^\circ\right) u(n)$$

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ & ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ

Αιτιατό είναι το σύστημα για το οποίο ισχύει $h(n)=0$ για $n<0$.

Όπως γνωρίζουμε, η ΠΣ του ΜΖ των αιτιατών ακολουθιών είναι το εξωτερικό ενός κύκλου.

Άρα, ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό εάν και μόνον εάν η ΠΣ της συνάρτησης του συστήματος είναι το εξωτερικό ενός κύκλου ακτίνας $r<\infty$, συμπεριλαμβανομένου του σημείου $z=\infty$. (*)

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, δηλ. Φραγμένης Εισόδου Φραγμένης Εξόδου, είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Η σχέση αυτή αποτελεί και την ικανή συνθήκη για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Άρα ο ΜF συγκλίνει (υπάρχει) και συνεπώς η ΠΣ της $H(z)$ πρέπει να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

Άρα, ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, εάν και μόνον εάν η ΠΣ της συνάρτησης του συστήματος περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο ($|z|=1$).

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ & ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Συνδυάζοντας το γεγονός ότι η ΠΣ ενός αιτιατού συστήματος είναι το εξωτερικό ενός κύκλου που ορίζεται από τον πόλο εκείνον που βρίσκεται πιο μακριά από το κέντρο του κύκλου, και ότι για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η ΠΣ να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, καταλήγουμε στο εξής:

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, εάν και μόνον εάν όλοι οι πόλοι της $H(z)$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

(*) Ένα ΓΧΑ διακριτού χρόνου σύστημα με $H(z)$ εκφρασμένη ως λόγο πολυωνύμων του z, είναι αιτιατό εάν και μόνον εάν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή.

Για παράδειγμα, για το σύστημα $H(z)=(z^3-2z^2+z)/(z^2+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8})$ μπορούμε αμέσως να αποφανθούμε ότι είναι μη αιτιατό, χωρίς να χρειαστεί να βρούμε την ΠΣ.

Παραδείγματα

Για το ΓΧΑ σύστημα $H(z)=\dfrac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{2}{1-3z^{-1}}$

να προσδιοριστεί η ΠΣ και να υπολογιστεί η $h(n)$ όταν:

α. Το σύστημα είναι ευσταθές

β. το σύστημα είναι αιτιατό

γ. το σύστημα είναι αντιαιτιατό.

Λύση

Οι πόλοι του συστήματος είναι $z=\frac{1}{2}$ και $z=3$.

α. Αφού το σύστημα είναι ευσταθές, η ΠΣ θα πρέπει να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή $\frac{1}{2}<|z|<3$. Συνεπώς η $h(n)$ είναι μη αιτιατή.

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-2(3)^n u(-n-1)$$

β. Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, η ΠΣ θα είναι $|z|>3$, και συνεπώς

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+2(3)^n u(n)$$

Το σύστημα αυτό είναι ασταθές αφού η ΠΣ δεν περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο. Παρατηρείστε ότι η αστάθεια προέρχεται από τον πόλο $z=3$ ο οποίος βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου και ο οποίος δημιουργεί την απόκριση $(3)^n u(n)$.

γ. Αφού το σύστημα είναι αντιαιτιατό, η ΠΣ είναι $|z|<0.5$, και συνεπώς

$$h(n)=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+2(3)^n\right]u(-n-1)$$

Το σύστημα είναι ασταθές αφού η ΠΣ δεν περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το αντίστροφο (inverse)(*) σύστημα $\tilde{H}(z)$, ενός αιτιατού συστήματος $H(z)$, το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

ΛΥΣΗ Η συνάρτηση του συστήματος το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι:

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ΠΣ: } |z| > \frac{1}{2}$$

Το σύστημα αυτό είναι αιτιατό και ευσταθές, αφού ο πόλος του $z=\frac{1}{2}$ βρίσκεται <u>εντός</u> του μοναδιαίου κύκλου.

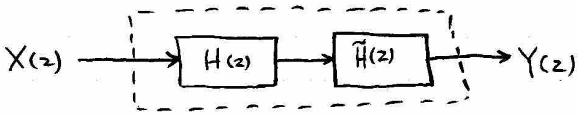
Η $H(z)$ έχει μόνο πόλους (all-pole system). Η αντίστροφη συνάρτηση θα έχει μόνο μηδενικά, θα έχουμε δηλαδή ένα σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR).

$$\tilde{H}(z) = \frac{1}{H(z)} = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

Η κρουστική απόκριση του αντίστροφου συστήματος θα είναι:

$$\tilde{h}(n) = Z^{-1}\{\tilde{H}(z)\} = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

(*) Σημείωση: Αντίστροφα λέγονται τα συστήματα των οποίων το γινόμενο είναι μονάδα. Με άλλα λόγια, τα συστήματα $H(z)$, $\tilde{H}(z)$ τα οποία είναι συνδεδεμένα σε σειρά (cascade) είναι αντίστροφα όταν $H(z)\cdot\tilde{H}(z) = 1$.



Για το σύστημα του σχήματος, εάν τα υποσυστήματα $H(z)$ και $\tilde{H}(z)$ είναι αντίστροφα, τότε η έξοδος ισούται με την είσοδο, δηλαδή $Y(z) = X(z)$.

Στο πεδίο του χρόνου για τα αντίστροφα συστήματα ισχύει ότι:

$$h(n) * \tilde{h}(n) = \delta(n)$$

Σε μια τέτοια περίπτωση $y(n) = x(n)$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του αντίστροφου (inverse) συστήματος ενός συστήματος το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

ΛΥΣΗ Η συνάρτηση του δοθέντος συστήματος είναι:

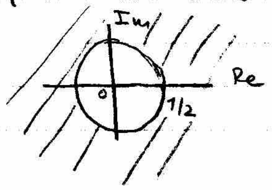
$$H(z) = Z\{h(n)\} = 1 - \frac{1}{2} z^{-1}$$ με ΠΣ $|z|>0$ (όλο το z εκτός $z=0$)

Το αντίστροφο σύστημα θα έχει συνάρτηση συστήματος:

$$\tilde{H}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

Το σύστημα αυτό έχει ένα μηδενικό στο $z=0$ και έναν πόλο στο $z=\frac{1}{2}$. Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα εάν η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό ή το εσωτερικό του κύκλου ακτίνας $z=\frac{1}{2}$.

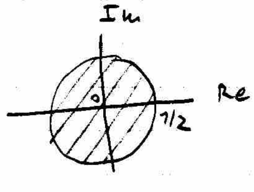
α. ΠΣ: $|z| > \frac{1}{2}$



Στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό και η κρουστική του απόκριση είναι:

$$\tilde{h}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

β. ΠΣ: $|z| < \frac{1}{2}$



Στην περίπτωση αυτή το αντίστροφο σύστημα είναι μη αιτιατό και ασταθές και η κρουστική του απόκριση είναι:

$$\tilde{h}(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

Απαλοιφές Πόλων - Μηδενικών

- Όταν η θέση ενός πόλου συμπίπτει με εκείνη ενός μηδενικού, τότε ο πόλος αναιρείται από το μηδενικό.

  Αναιρέσεις πόλων-μηδενικών μπορεί να υπάρξουν είτε στη συνάρτηση του συστήματος αυτή καθαυτή, είτε στο γινόμενό της με τον ΜΖ του σήματος εισόδου.

- Όταν ένα μηδενικό βρίσκεται πολύ κοντά σε έναν πόλο, αλλά δεν συμπίπτει, τότε ο όρος της απόκρισης έχει πολύ μικρό πλάτος.

  Η περίπτωση αυτή μπορεί να εμφανιστεί και ως αποτέλεσμα της πεπερασμένης ακρίβειας αναπαράστασης των συντελεστών του συστήματος.

Παράδειγμα Να υπολογιστεί η απόκριση του αιτιατού συστήματος

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

για είσοδο $x(n) = \delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1)$.

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$ με πόλους $z=\frac{1}{2}$ και $z=\frac{1}{3}$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1}$$ με μηδενικό στο σημείο $z=\frac{1}{3}$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{\cancel{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cancel{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Συνεπώς η απόκριση του συστήματος ισούται με

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Ο όρος $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ που αρχικά υπήρχε, 'εξαφανίστηκε' λόγω της απαλοιφής του πόλου $z=\frac{1}{3}$ από το μηδενικό στην ίδια θέση $z=\frac{1}{3}$.

Άσκηση Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του αιτιατού συστήματος

$$y(n) = 2.5\,y(n-1) - y(n-2) + x(n) - 5\,x(n-1) + 6\,x(n-2)$$

Λύση

$$H(z) = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$ με πόλους στο $z=\frac{1}{2}$ και $z=2$.

Υπολογίζοντας τις ρίζες του αριθμητή (τα μηδενικά) βρίσκουμε ότι αυτές είναι στις θέσεις $z=3$ και $z=2$. Συνεπώς η $H(z)$ γίνεται:

$$H(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{5}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = 1 - \frac{\frac{5}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Ο αντίστροφος ΜΖ της $H(z)$ μας δίνει την $h(n)$:

$$h(n) = \delta(n) - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \quad (*)$$

Η εξίσωση διαφορών του συστήματος, όπως προκύπτει εύκολα από τη σχέση $H(z) = (1-3z^{-1})/(1-\frac{1}{2}z^{-1})$ ισούται με: $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) - 3x(n-1)$

Σημείωση: Το σύστημα είναι ευσταθές αφού ο μοναδικός πόλος που έχει ($z=\frac{1}{2}$) βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Υπάρχει περίπτωση όμως, κατά την υλοποίηση του αρχικού 2ης τάξης συστήματος, να παρουσιαστούν προβλήματα αστάθειας λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας των συντελεστών, η οποία τελικά μπορεί να οδηγήσει στην μη πλήρη απαλοιφή του πόλου από το αντίστοιχο μηδενικό!

(*) Εκφράζοντας την $H(z)$ ως $H(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 3z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

καταλήγουμε σε μια εναλλακτική μορφή για την $h(n)$, την εξής:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$