ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

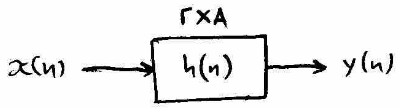
Δ10 – ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ: ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΣΧΕΣΗ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



Για <u>κρουστική είσοδο</u> $x(n) = \delta(n)$, η έξοδος του συστήματος είναι $y(n) = h(n)$, δηλαδή η <u>κρουστική απόκριση.</u> Η απόδειξη είναι εύκολη: $y(n) = x(n) * h(n) = \delta(n) * h(n) =$
$= h(n)$

Για βηματική είσοδο $x(n) = u(n)$, η έξοδος του συστήματος είναι $y(n) = s(n)$, δηλαδή η <u>βηματική απόκριση,</u> $s(n) = u(n) * h(n)$

Η σχέση που συνδέει τη κρουστική ακολουθία $\delta(n)$ με τη βηματική ακολουθία $u(n)$ είναι;

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

Η εφαρμογή της κρουστικής εισόδου $\delta(n)$ στο ΓΧΑ σύστημα δίνει ως έξοδο την κρουστική απόκριση $h(n)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n) * h(n) = \\ &= [u(n) - u(n-1)] * h(n) = \\ &= u(n) * h(n) - u(n-1) * h(n) = \\ &= s(n) - s(n-1) \end{aligned}$$

Άρα

$$h(n) = s(n) - s(n-1)$$

Με άλλα λόγια, η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου ισούται με την πρώτη διαφορά της βηματικής του απόκρισης.

Τέλος, η βηματική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου μπορεί να υπολογιστεί από την κρουστική απόκριση του συστήματος ως

$$s(n) = h(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} h(m)$$

δεδομένου ότι $u(n)$ είναι η κρουστική απόκριση του συσσωρευτή (accumulator).

ΑΣΚΗΣΗ (ΘΕΜΑ 1)

Δίνεται το διακριτού χρόνου σήμα

$$x(n) = \cos(n\pi/8).$$

Να βρεθούν δύο διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου τα οποία παράγουν το *x(n)* όταν δειγματοληπτηθούν με συχνότητα **F_s=10KHz**.

<u>Λύση</u>

$$w=\frac{\pi}{8} \Rightarrow \Omega T=\frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\cancel{\pi}F\cdot\frac{1}{F_s}=\frac{\cancel{\pi}}{8} \Rightarrow F=\frac{1}{16}F_s=\frac{1}{16}\cdot 10000\ Hz = 625\ Hz$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε σήμα με συχνότητα $F'=F+kF_s$ θα δίνει τα ίδια δείγματα, αφού

$$\cos(2\pi F't)=\cos(2\pi(F+kF_s)t)=\cos\left(\frac{2\pi F n}{F_s}+\frac{2\pi k F_s n}{F_s}\right)=\cos\left(2\pi\frac{F}{F_s}n+2\pi k n\right)=$$

$$=\cos\left(2\pi\frac{F}{F_s}n\right)=\cos\left(2\pi\frac{1}{16}n\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$$

Άρα για διαφορετικά k θα έχουμε τις διαφορετικές συχνότητες που θα δίνουν τα ίδια δείγματα.

Για $k=1 \rightsquigarrow F_1 = F+kF_s = F+F_s = 625+10000 = 10625\ Hz$

Για $k=2 \rightsquigarrow F_2 = F+kF_s = F+2F_s = 625+20000 = 20625\ Hz$

Θυμηθείτε ότι το k μπορεί να είναι και αρνητικός ακέραιος.

Για $k=-1 \rightsquigarrow F_{-1} = F+kF_s = F-F_s = 625-10000 = -9375\ Hz$

Για $k=-10 \rightsquigarrow F_{-10} = F+kF_s = F-10F_s = 625-100000 = -99375\ Hz$

Τελικά, κάποια από τα σήματα που όταν δειγματοληπτηθούν με ρυθμό F_s=10KHz παράγουν το σήμα $x(n)=\cos(n\pi/8)$ είναι τα εξής:

→ $\cos(2\pi F t)=\cos(2\pi 625 t)=\cos(1250\pi t)$

→ $\cos(2\pi F_1 t)=\cos(2\pi 10625 t)=\cos(21250\pi t)$

→ ...

ΑΣΚΗΣΗ Δίνονται τα σήματα διακριτού χρόνου $x_1(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$, $x_2(n) = x_1^2(n)$, $x_3(n) = x_1^3(n)$, $x_4(n) = x_1^4(n)$. Να εξετάσετε εάν αυτά είναι περιοδικά και στην περίπτωση που αυτό ισχύει, να υπολογίσετε τη θεμελιώδη περίοδο. Να σχεδιάσετε τα σήματα (πρώτα 300 δείγματα).

ΛΥΣΗ • $x_1(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

$$\hookrightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\cancel{\pi} f_1 = \frac{\cancel{\pi}}{8} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{16} \rightsquigarrow N_1 = 16$$

ρητός

• $x_2(n) = x_1^2(n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2\frac{\pi}{8}n\right)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

$$\omega_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\cancel{\pi} f_2 = \frac{\cancel{\pi}}{4} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{8} \text{ ρητός}$$

$$N_2 = 8$$

Άρα το σήμα $x_2(n)$ έχει περίοδο 8, δηλαδή μισή σε σχέση με εκείνη του σήματος $x_1(n)$. Αυτό σημαίνει ότι η συχνότητα του σήματος $x_2(n)$ είναι διπλάσια της συχνότητας του σήματος $x_1(n)$.

• $x_3(n) = x_1^3(n) = \cos^3\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cdot\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] =$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$N_1 = 16$ $\quad$ $N_1 = 16$ $\quad$ $N_2 = 8$

$$N_{12} = \text{ΕΚΠ}(N_1, N_2) = \text{ΕΚΠ}(16, 8) = 16$$

$$N_3 = \text{ΕΚΠ}(N_1, N_{12}) = \text{ΕΚΠ}(16, 16) = 16$$

Άρα το σήμα $x_3(n)$ έχει περίοδο $N_3 = 16$, δηλαδή ίση με την περίοδο του σήματος $x_1(n)$.

- $x_4(n) = x_1^4(n) = \cos^4\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) =$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}n\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\frac{\pi}{4}n\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$N_0 = 1 \qquad N_2 = 8 \qquad \omega_5 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi f_5 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_5 = \frac{\pi}{4} \text{ ρητός}$$

$$N_5 = 4$$

$$N_{24} = \text{ΕΚΠ}(N_2, N_4) = \text{ΕΚΠ}(8,4) = 8$$

$$N_4 = \text{ΕΚΠ}(N_0, N_{24}) = (1,8) = 8$$

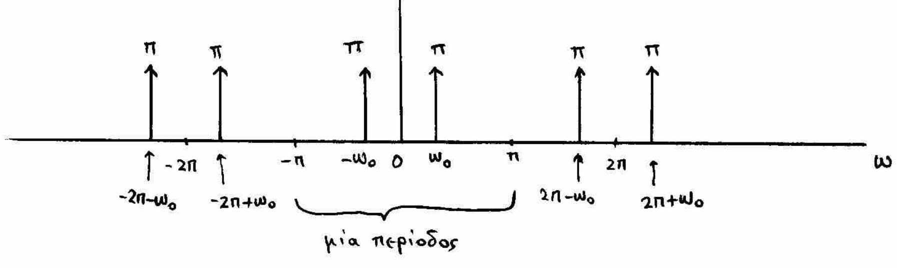
- Ένας άλλος τρόπος για τον υπολογισμό της περιόδου, δηλαδή της συχνότητας, καθενός από τα σήματα, είναι μέσω του μετασχηματισμού Fourier και της ιδιότητας της διαμόρφωσης ή πολλαπλασιασμού στον χρόνο. Θυμηθείτε ότι

$$x(n)\cdot y(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})\cdot Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

καθώς και ότι

$$\underbrace{\cos(\omega_0 n)}_{x(n)} \overset{F}{\longleftrightarrow} \underbrace{\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) + \delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\right\}}_{X(e^{j\omega})}$$

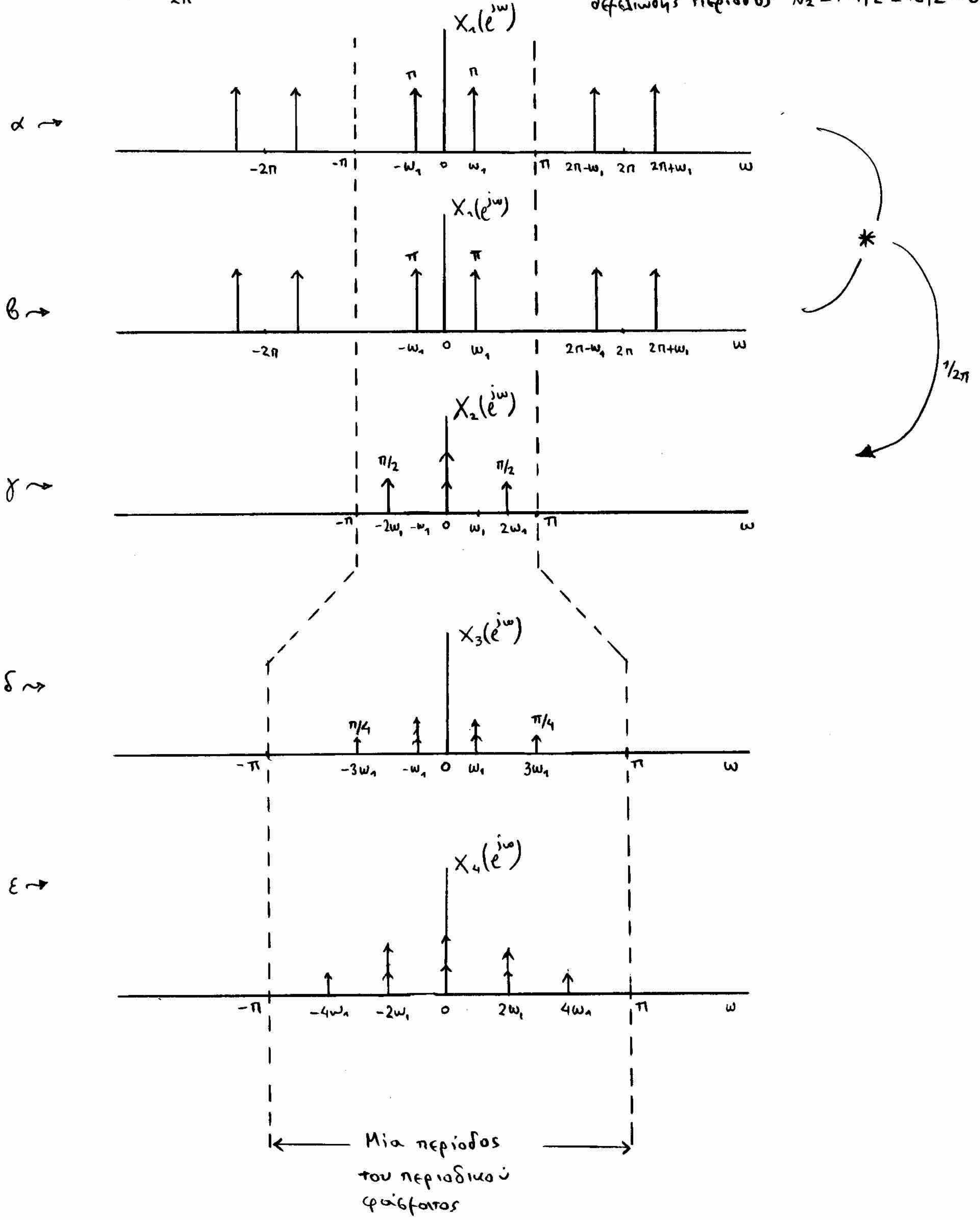
Με άλλα λόγια ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) ενός συνημιτονικού σήματος συχνότητας ω_0 είναι δύο κρουστικές (στις θέσεις ω_0 και $-\omega_0$) εμβαδού π, οι οποίες επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο 2π. (Βλ. σχήμα).



• Με βάση τα παραπάνω, το σήμα $x_1(n)=\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$ έχει συχνότητα $\omega_1=\frac{\pi}{8}$ και όπως δείξαμε προηγουμένως είναι περιοδικό με περίοδο $N_1=16$. Το φάσμα του είναι αυτό του σχήματος της προηγούμενης σελίδας για $\omega_0=\omega_1=\frac{\pi}{8}$.

• Το σήμα $x_2(n)=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)$ γράφεται ως γινόμενο: $x_2(n)=\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$.

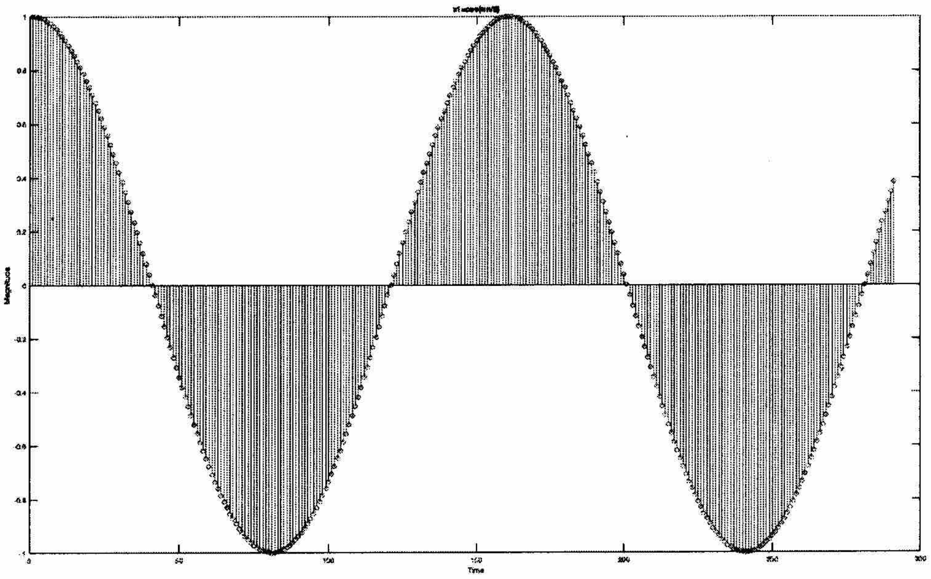
Το φάσμα του προκύπτει από τη συνέλιξη των φασμάτων των σημάτων,
$X_2(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega})*X_1(e^{j\omega})$ (βλ. σχ. γ). Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $2\omega_1$ και άρα η θεμελιώδης περίοδος $N_2=N_1/2=16/2=8$.

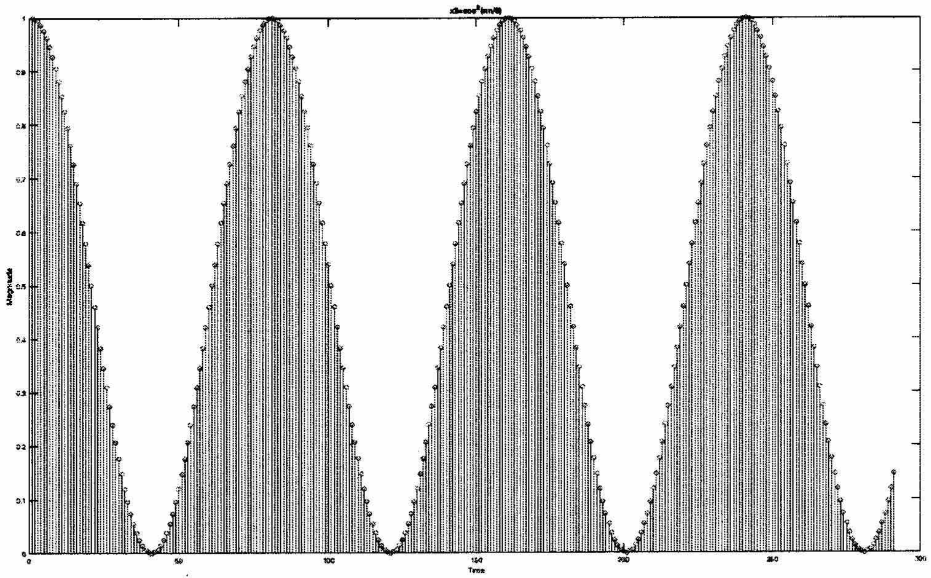


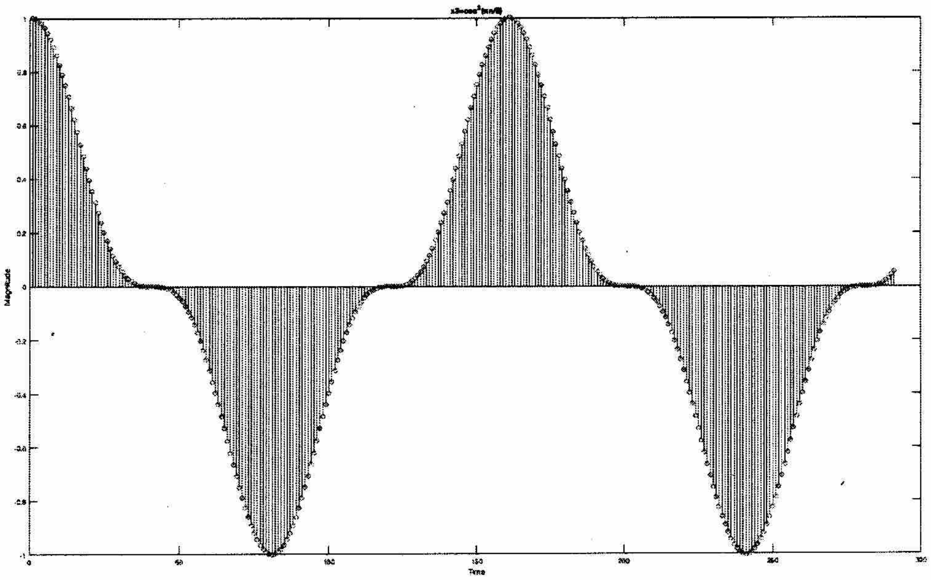
Σημείωση: Τα φάσματα είναι περιοδικά με περίοδο 2π. Δείχνεται μόνον η μία περίοδος από -π έως π για λόγους απλότητας των σχημάτων.

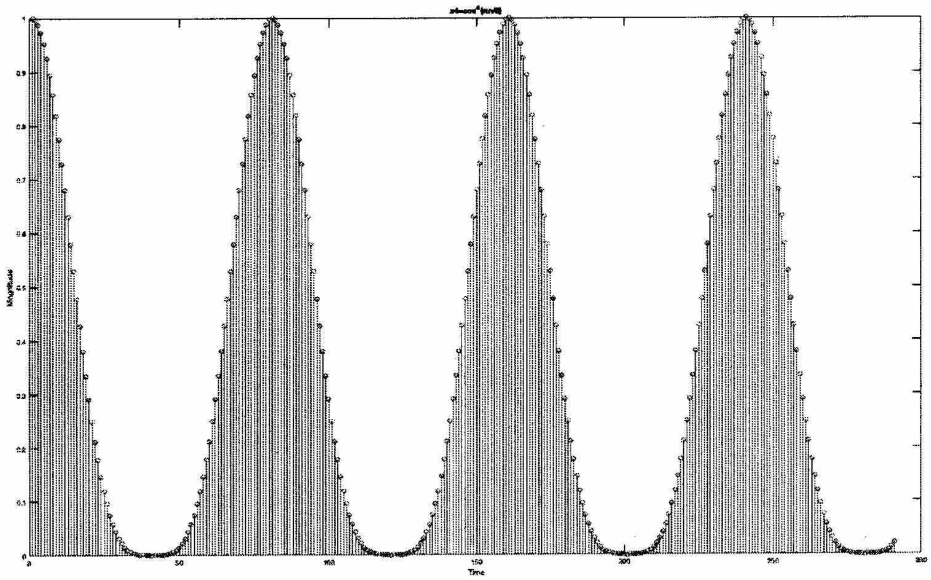
• Το σήμα $x_3(n) = \cos^3(\frac{\pi}{8}n)$ γράφεται ως $x_3(n) = \cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \cos^2(\frac{\pi}{8}n)$.
Άρα το φάσμα του $X_3(e^{jw})$ θα ισούται με τη συνέλιξη των φασμάτων $X_1(e^{jw})$ και $X_2(e^{jw})$, ήτοι $X_3(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{jw}) * X_2(e^{jw})$.
Από το σχήμα (δ) βλέπουμε ότι το σήμα $x_3(n)$ αποτελείται από τις συχνότητες w_1 και $3w_1$. Άρα η βασική (θεμελιώδης) συχνότητα είναι η w_1 και κατά συνέπεια η θεμελιώδης περίοδος ισούται με εκείνη του σήματος $x_1(n)$, δηλαδή $N_1 = 16$.

• Το σήμα $x_4(n) = \cos^4(\frac{\pi}{8}n)$ γράφεται ως $x_4(n) = \cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \cos^3(\frac{\pi}{8}n)$.
Άρα το φάσμα $X_4(e^{jw})$ θα ισούται με τη συνέλιξη των φασμάτων $X_1(e^{jw})$ και $X_3(e^{jw})$, ήτοι $X_4(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{jw}) * X_3(e^{jw})$.
Από το σχήμα (ε) βλέπουμε ότι το σήμα $x_4(n)$ αποτελείται από τις συχνότητες $2w_1$ και $4w_1$. Άρα η θεμελιώδης συχνότητα είναι $2w_1$ και αντίστοιχα η θεμελιώδης περίοδος θα ισούται με 8.


Magnitude
Time
0
50
100
150
200
250
300


Magnitude
Time
0
50
100
150
200
250
300


Magnitude
Time


Magnitude
Time

```
clear all;
close all;
clc;

L=30;
n  = 0:0.1:L-1; % 300 samples


% Discrete Time Signal x1(n)
% --------------------------
f2 = 1/16;
x1 = cos(2*pi*f2*n);
% Plot the magnitude of x1
figure()
stem(x1)
title('x1=cos(πn/8)');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')


% Discrete Time Signal x2(n)
% --------------------------
f2 = 1/16;
x2 = cos(2*pi*f2*n).^2;
% Plot the magnitude of x2
figure()
stem(x2)
title('x2=cos^2(πn/8)');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')

% Discrete Time Signal x3(n)
% --------------------------
f2 = 1/16;
x3 = cos(2*pi*f2*n).^3;
% Plot the magnitude of x3
figure()
stem(x3)
title('x3=cos^3(πn/8)');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')

% Discrete Time Signal x4(n)
% --------------------------
f2 = 1/16;
x4 = cos(2*pi*f2*n).^4;
% Plot the magnitude of x4
figure()
stem(x4)
title('x4=cos^4(πn/8)');
xlabel('Time')
ylabel('Magnitude')
```

ΑΣΚΗΣΗ Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(n)=\alpha^n u(n)$, όπου $|\alpha|<1$.
Στο σύστημα εφαρμόζεται η είσοδος $x(n) = b^n[u(n)-u(n-5)]$.
α. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος.
β. Ποιες οι τιμές της εξόδου $y(n)$ για $n=0,2,10$ όταν $\alpha=0.6$ και $b=0.8$;
γ. Σχεδιάστε τα σήματα $x(n)$, $h(n)$, $y(n)$ για $n\in[0,10]$ όταν $\alpha=0.6$ και $b=0.8$.

ΛΥΣΗ

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = h(n) * x(n)$$

α. $$y(n) = h(n) * x(n) = \alpha^n u(n) * b^n[u(n) - u(n-5)] =$$
$$= \underbrace{\alpha^n u(n) * b^n u(n)}_{y_1(n)} - \underbrace{\alpha^n u(n) * b^n u(n-5)}_{y_2(n)}$$

$$y_1(n) = \alpha^n u(n) * b^n u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m)\, b^{n-m} u(n-m) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m b^n b^{-m} u(m) u(n-m) =$$
$$= b^n \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{b}\right)^m = b^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)}$$

και τελικά

$$y_1(n) = b^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n) \qquad (1)$$

$$y_2(n) = \alpha^n u(n) * b^n u(n-5) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m)\, b^{n-m} u(n-m-5) =$$
$$= b^n \sum_{m=0}^{n-5} \left(\frac{\alpha}{b}\right)^m = b^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-5+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)}$$

και τελικά

$$y_2(n) = b^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n-5) \qquad (2)$$

Άρα

$$y(n) = y_1(n) - y_2(n) =$$
$$= b^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n) - b^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n-5) \qquad (3)$$

Η έξοδος του συστήματος $y(n)$ μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(n)=\begin{cases} 0 & \text{για } n<0 \\ b^n \dfrac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)} & \text{για } 0\le n\le 4 \\ b^n \dfrac{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)} & \text{για } n\ge 5 \end{cases}$$

Σημειώνεται ότι για $n\geq 5$ οι μοναδιαίες βηματικές $u(n)$ και $u(n-5)$ είναι ίσες με 1, οπότε η σχέση (3) δίνει:

$$y(n)=b^n\frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)}-b^n\frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)}=$$

$$=b^n\frac{\left[1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}\right]-\left[1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}\right]}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)}=$$

$$=b^n\frac{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-4}-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)}$$

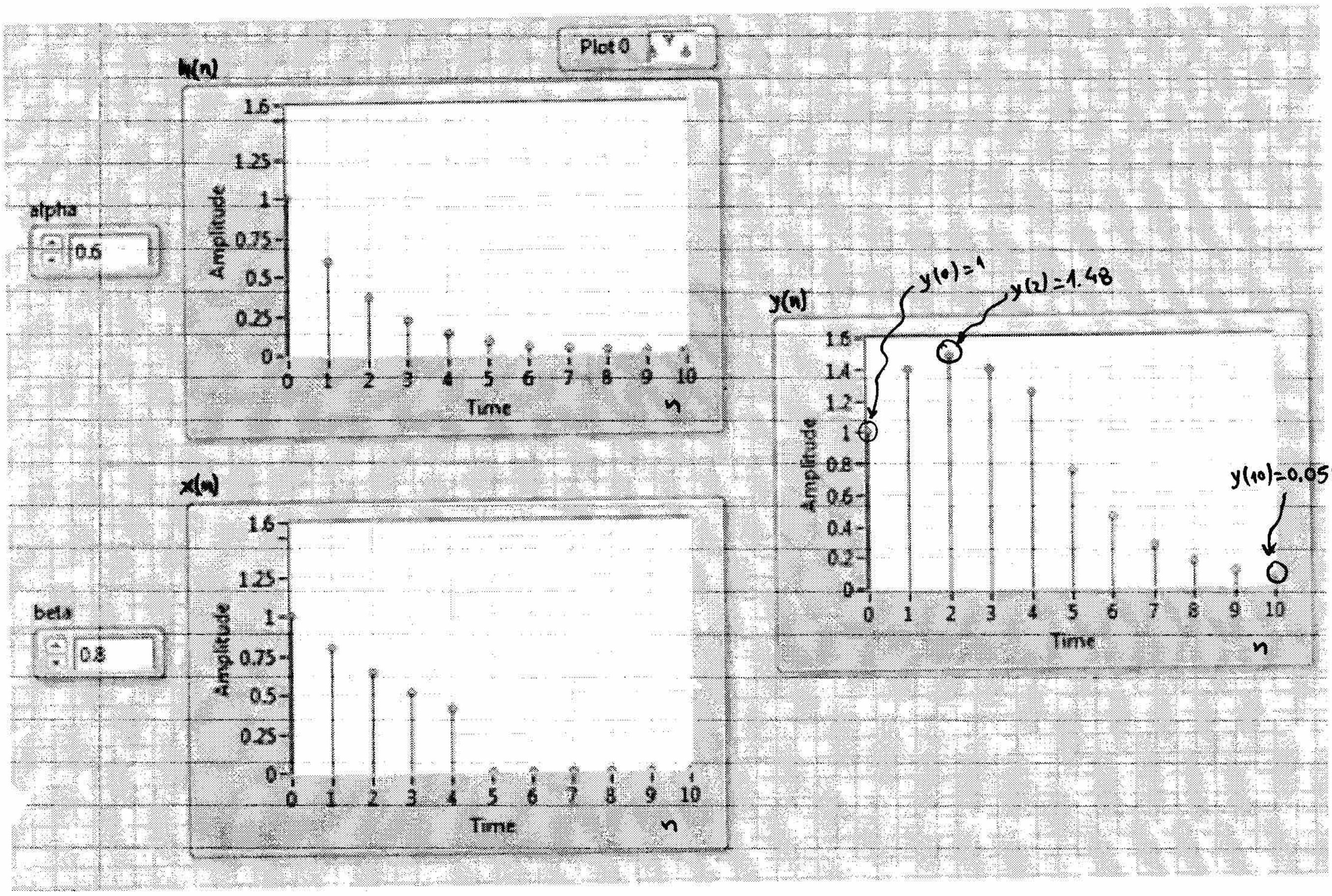
β. Για $\alpha=0.6$, $b=0.8$ η έξοδος $y(n)$ στις χρονικές στιγμές $n=0,2,10$ ισούται με:

$$n=0 \rightsquigarrow y(0)=0.8^0\frac{1-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)^{0+1}}{1-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)}=1\,\frac{1-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)}{1-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)}=1$$

$$n=2 \rightsquigarrow y(2)=0.8^2\frac{1-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)^{2+1}}{1-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)}=0.64\,\frac{1-0.75^3}{1-0.75}=1.48$$

$$n=10 \rightsquigarrow y(10)=0.8^{10}\frac{\left(\frac{0.6}{0.8}\right)^{10-4}-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)^{10+1}}{1-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)}=0.0583$$

γ. Τα 11 πρώτα σημεία των σημάτων $x(n)$, $h(n)$, $y(n)$ φαίνονται παρακάτω.

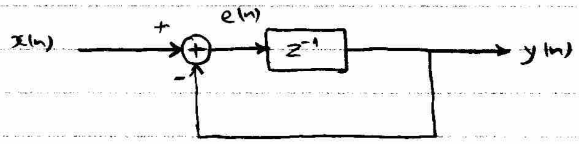


Προσοχή: Η $y_2(n)$ ΔΕΝ προκύπτει από ολίσθηση (καθυστέρηση) της $y_1(n)$ ώστε να χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη ιδιότητα της συνέλιξης. Παρατηρήστε ότι η ολίσθηση (καθυστέρηση) της $b^n u(n)$ κατά 5 θέσεις δεξιά είναι η $b^{n-5} u(n-5)$ και όχι η $b^n u(n-5)$ που μας δίνεται.
Θα μπορούσαμε βέβαια να εκφράσουμε την $b^n u(n-5)$ ως $b^5 \cdot b^{n-5} u(n-5)$, οπότε στην περίπτωση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί η ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο ως εξής:

$$y(n) = \underbrace{\alpha^n u(n) * b^n u(n)}_{y_1(n)} - b^5 \underbrace{\alpha^n u(n) * b^{n-5} u(n-5)}_{y_1(n-5)} = y_1(n) - b^5 y_1(n-5) =$$

$$= b^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n) - b^5 \, b^{n-5} \frac{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-5+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{b}\right)} u(n-5)$$

ΑΣΚΗΣΗ Για το σύστημα του σχήματος να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την έξοδο $y(n)$ για $x(n)=\delta(n)$ και για $x(n)=u(n)$. Θεωρήστε ότι $y(n)=0$ για $n<0$.



ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} e(n)=x(n)-y(n) \\ y(n)=e(n-1) \end{array}\right\} \; y(n)=x(n-1)-y(n-1) \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας τον ΜΖ και στα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$Y(z)=z^{-1}X(z)-z^{-1}Y(z) \Rightarrow$$

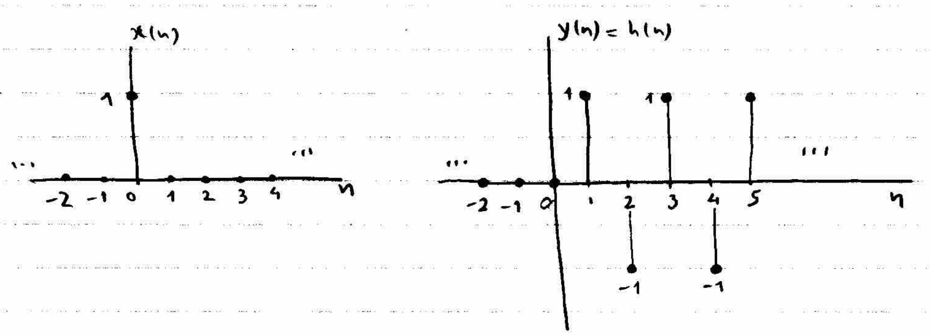
$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad (2)$$

Άρα

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}=z^{-1}\underbrace{\frac{1}{1+z^{-1}}}_{\xrightarrow{z^{-1}}\;(-1)^n u(n)} \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} \quad h(n)=(-1)^{n-1}u(n-1) \qquad (4)$$

Συνεπώς για είσοδο $x(n)=\delta(n)$ η έξοδος $y(n)=h(n)=(-1)^{n-1}u(n-1)$



Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης από την $H(z)$ θα ήταν ο εξής:

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{1+z^{-1}-1}{1+z^{-1}}=1-\frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} \quad h(n)=\delta(n)-(-1)^n u(n)=\delta(n)+(-1)^{n+1}u(n)$$

Για είσοδο $x(n)=u(n)$ η έξοδος μπορεί να υπολογιστεί είτε στο πεδίο του χρόνου (μέσω της συνέλιξης), είτε στο πεδίο z (μέσω πολλαπλασιασμού).

A. Πεδίο χρόνου

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\,x(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m-1}u(m-1)\,u(n-m)=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}=\langle \text{θέτω } m-1=\ell \Rightarrow m=\ell+1\rangle=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}=\frac{1-(-1)^{n}}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\left[1-(-1)^{n}\right]u(n) \qquad (5)$$

B. Πεδίο z

$$Y(z)=H(z)\cdot X(z)=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{A_1}{1+z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

όπου

$$A_1=Y(z)\,(1+z^{-1})\Big|_{z^{-1}=-1}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-1}=\frac{-1}{1-(-1)}=-\frac{1}{2} \qquad (6)$$

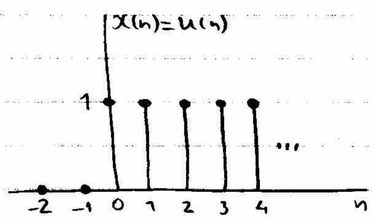
$$A_2=Y(z)\,(1-z^{-1})\Big|_{z^{-1}=1}=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad (7)$$

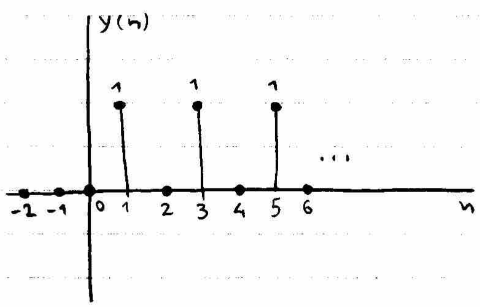
Άρα

$$Y(z)=\frac{-\frac{1}{2}}{1+z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1+z^{-1}}\right]$$

z^{-1}

$$y(n)=\frac{1}{2}\left[u(n)-(-1)^{n}u(n)\right]=\frac{1}{2}\left[1-(-1)^{n}\right]u(n) \qquad (8)$$





B΄ τρόπος υπολογισμού

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{z^{-1}} = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{B_1}{1+z^{-1}} + \frac{B_2}{1-z^{-1}}$$

όπου

$$B_1 = (1+z^{-1}) \left.\frac{Y(z)}{z^{-1}}\right|_{z^{-1}=-1} = \left.\frac{1}{1-z^{-1}}\right|_{z^{-1}=-1} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$B_2 = (1-z^{-1}) \left.\frac{Y(z)}{z^{-1}}\right|_{z^{-1}=1} = \left.\frac{1}{1+z^{-1}}\right|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$Y(z) = \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Z^{-1}

$$y(n) = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}u(n-1) + \frac{1}{2}(1)^{n-1}u(n-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{n-1}\right]u(n-1)$$

Γ' τρόπος υπολογισμού

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}$$ $= \langle$ πολ/ζω αριθμ. & παρονομ. επί $z^2 \rangle =$

$$= \frac{z}{(z+1)(z-1)} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{C_1}{z+1} + \frac{C_2}{z-1}$$

όπου

$$C_1 = (z+1)\frac{Y(z)}{z}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{z-1}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = (z-1)\frac{Y(z)}{z}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{z+1}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$Y(z) = -\frac{1}{2}\frac{z}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow$$

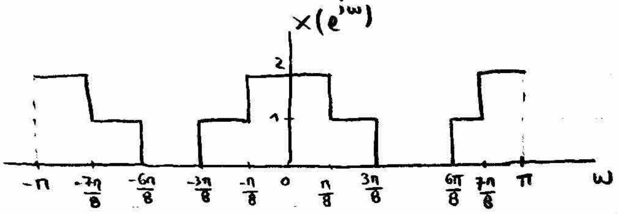
$$Y(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}}\right]$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}}$$

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[u(n) - (-1)^n u(n)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^n\right] u(n)$$

__ΑΣΚΗΣΗ__ Να υπολογιστεί το σήμα $x(n)$ του οποίου ο DTFT είναι αυτός του σχήματος.



(παίρνω τα συμμετρικά μαζί)

__ΛΥΣΗ__

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\Bigg[\underbrace{\int_{-\pi}^{-\frac{7\pi}{8}}2\,e^{j\omega n}d\omega+\int_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi}2\,e^{j\omega n}d\omega}+\underbrace{\int_{-\frac{7\pi}{8}}^{-\frac{6\pi}{8}}e^{j\omega n}d\omega+\int_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}e^{j\omega n}d\omega}+$$

$$+\int_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{8}}e^{j\omega n}d\omega+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}e^{j\omega n}d\omega+\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}2\,e^{j\omega n}d\omega+\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}2e^{j\omega n}d\omega\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Bigg[\frac{2}{jn}\left(e^{j\omega n}\Big|_{-\pi}^{-\frac{7\pi}{8}}+e^{j\omega n}\Big|_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi}\right)+\frac{1}{jn}\left(e^{j\omega n}\Big|_{-\frac{7\pi}{8}}^{-\frac{6\pi}{8}}+e^{j\omega n}\Big|_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}\right)+$$

$$+\frac{1}{jn}\left(e^{j\omega n}\Big|_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{8}}+e^{j\omega n}\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\right)+\frac{2}{jn}\left(e^{j\omega n}\Big|_{-\frac{\pi}{8}}^{0}+e^{j\omega n}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{8}}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Bigg[\frac{2}{jn}\left(e^{-j\frac{7\pi}{8}n}-e^{-j\pi n}+e^{j\pi n}-e^{j\frac{7\pi}{8}n}\right)+\frac{1}{jn}\left(e^{-j\frac{6\pi}{8}n}-e^{-j\frac{7\pi}{8}n}+e^{j\frac{7\pi}{8}n}-e^{j\frac{6\pi}{8}n}\right)+$$

$$+\frac{1}{jn}\left(e^{-j\frac{\pi}{8}n}-e^{-j\frac{3\pi}{8}n}+e^{j\frac{3\pi}{8}n}-e^{j\frac{\pi}{8}n}\right)+\frac{2}{jn}\left(\cancel{e^{0}}-e^{-j\frac{\pi}{8}n}+e^{j\frac{\pi}{8}n}-\cancel{e^{0}}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Bigg[\frac{2}{jn}\left(2j\sin\pi n-2j\sin\frac{7\pi}{8}n\right)+\frac{1}{jn}\left(2j\sin\frac{7\pi}{8}n-2j\sin\frac{6\pi}{8}n\right)+$$

$$\frac{1}{jn}\left(2j\sin\frac{3\pi}{8}n-2j\sin\frac{\pi}{8}n\right)+\frac{2}{jn}\left(2j\sin\frac{\pi}{8}n\right)\Bigg]=$$

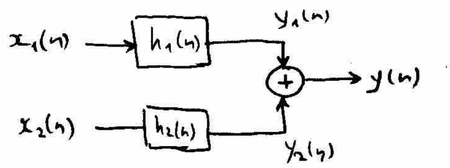
$$=\frac{1}{\cancel{2}\pi}\cdot\frac{\cancel{2}}{n}\left[2\,\cancel{\sin\pi n}^{\,0}-2\sin\frac{7\pi}{8}n+\sin\frac{7\pi}{8}n-\sin\frac{6\pi}{8}n+\sin\frac{3\pi}{8}n-\sin\frac{\pi}{8}n+2\sin\frac{\pi}{8}n\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left[-\sin\frac{7\pi}{8}n-\sin\frac{6\pi}{8}n+\sin\frac{3\pi}{8}n+\sin\frac{\pi}{8}n\right]=$$

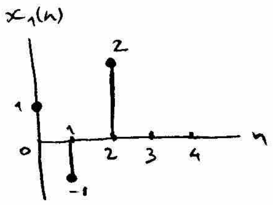
ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογίσετε τους συντελεστές $Y(0)$ και $Y(2)$ του DFT του σήματος $y(n)$.

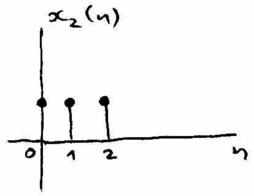
Δίνεται: $x_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + 2[u(n-2) - u(n-3)]$ $\qquad h_1(n) = 2\,\delta(n) + \delta(n-1)$

$x_2(n) = u(n) - u(n-3)$ $\qquad h_2(n) = -\delta(n) - \delta(n-1)$



ΛΥΣΗ





$h_1(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{2}, 1\}$

$h_2(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1}, -1\}$

$y_1(n) = h_1(n) * x_1(n)$

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 1 & -1 & 2 & \leftarrow x_1(n) \\
 & & 2 & 1 & \leftarrow h_1(n) \\
\hline
 & 1 & -1 & 2 & \\
2 & -2 & 4 & & \\
\hline
2 & -1 & 3 & 2 & \leftarrow y_1(n)
\end{array}$$

$y_2(n) = h_2(n) * x_2(n)$

$$\begin{array}{rrrr}
 & 1 & 1 & 1 \\
 & & -1 & -1 \\
\hline
 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & \\
\hline
-1 & -2 & -2 & -1
\end{array}$$

$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = \{1, -3, 1, 1\}$

DFT: $Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{nk} \Rightarrow Y(k) = \sum_{n=0}^{3} y(n) W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{3} y(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}$, $k=0,1,2,3$

$Y(0) = \sum_{n=0}^{3} y(n) W_4^{n\cdot 0} = \sum_{n=0}^{3} y(n) = y(0)+y(1)+y(2)+y(3) = 1+(-3)+1+1 = 0$

$Y(2) = \sum_{n=0}^{3} y(n) W_4^{n\cdot 2} = y(0)\, e^{-j\frac{2\pi}{4}.0.2} + y(1)\, e^{-j\frac{2\pi}{4}1.2} + y(2)\, e^{-j\frac{2\pi}{4}2.2} + y(3)\, e^{-j\frac{2\pi}{4}3.2} =$

$= 1\cdot e^{-j0} + (-3)\cdot e^{-j\pi} + 1\cdot e^{-j2\pi} + 1\cdot e^{-j3\pi} =$

$= 1\cdot 1 + (-3)(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) =$

$= 1 + 3 + 1 - 1 = 4$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(n) = 2^{n} u(-n)$. Σχεδιάστε το σήμα και το μέτρο του φάσματός του.

ΛΥΣΗ

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{n} u(-n)\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{n} e^{-j\omega n} = \langle \text{θέτω } -n = m \Rightarrow n = -m \rangle =$$

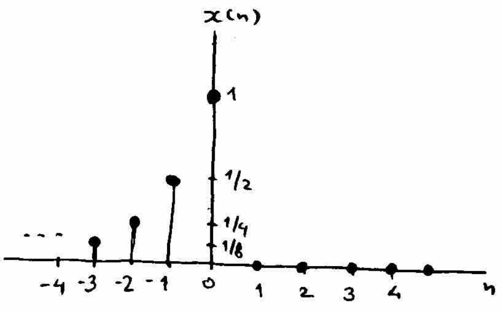
$$= \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} e^{j\omega m} =$$

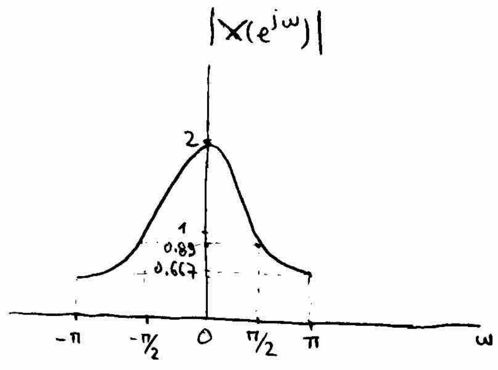
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{-1} e^{j\omega}\right)^{m} =$$

$$= \frac{1}{1 - 2^{-1} e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{e^{j\omega}}{2}} = \frac{2}{2 - e^{j\omega}}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{2}{2 - e^{j\omega}} \right| = \frac{2}{|2 - \cos\omega - j\sin\omega|} = \frac{2}{\sqrt{(2-\cos\omega)^2 + \sin^2\omega}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4 + \cos^2\omega - 4\cos\omega + \sin^2\omega}} = \frac{2}{\sqrt{5 - 4\cos\omega}}$$





ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT των σημάτων:

α. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$ β. $\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u(-n-2)$

ΛΥΣΗ α.

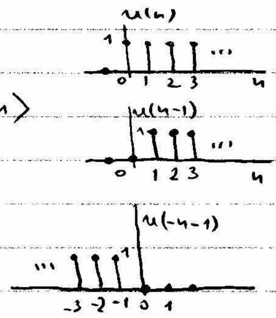
$$F\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-j\omega n} = \langle \text{θέτω } \ell = -n \rangle$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} e^{j\omega \ell} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{j\omega}\right)^{\ell} - \left(\frac{1}{2}\right)^{0} e^{j\omega 0}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} - 1 = \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$



β.

$$F\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u(-n-2)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u(-n-2)\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} e^{-j\omega n} = \langle \text{θέτω } q = -n \rangle$$

$$= \sum_{q=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^{q} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^{q} - \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^{0} - \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^{1} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}} - 1 - \frac{1}{3}e^{j\omega} =$$

$$= \frac{1-\left(1-\frac{1}{3}e^{j\omega}\right) - \frac{1}{3}e^{j\omega}\left(1-\frac{1}{3}e^{j\omega}\right)}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}} =$$

$$= \frac{\cancel{1-1+\frac{1}{3}e^{j\omega}-\frac{1}{3}e^{j\omega}} + \frac{1}{9}e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{9}e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(n) = e^{j\omega_0 n}$, $n \in [-N, N]$.

ΛΥΣΗ

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} e^{j\omega_0 n}\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} e^{-j(\omega-\omega_0)n} = \quad \langle \text{με χρήση της σχέσης } \sum_{n=\ell}^{m} \alpha^n = \frac{\alpha^{\ell} - \alpha^{m+1}}{1-\alpha} \rangle$$

$$= \frac{e^{-j\theta(-N)} - e^{-j\theta(N+1)}}{1 - e^{-j\theta}} = \quad \langle \text{έθεσα } \theta = \omega - \omega_0$$

$$= \frac{e^{j\theta N} - e^{-j\theta(N+1)}}{1 - e^{-j\theta}} =$$

$$= e^{j\theta N}\, \frac{1 - e^{-j\theta(2N+1)}}{1 - e^{-j\theta}} =$$

$$= e^{j\theta N}\, \frac{e^{-j\theta(2N+1)/2}\left[e^{j\theta(2N+1)/2} - e^{-j\theta(2N+1)/2}\right]}{e^{-j\theta/2}\left[e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}\right]} =$$

$$= \underbrace{e^{j\theta N}\, e^{-j\theta(2N+1)/2}\, e^{j\theta/2}}_{1} \cdot \frac{\cancel{2j}\, \sin[\theta(2N+1)/2]}{\cancel{2j}\, \sin[\theta/2]} =$$

$$= \frac{\sin[(\omega-\omega_0)(2N+1)/2]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]}$$

ή

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega-\omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega-\omega_0}{2}\right]} = \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})(\omega-\omega_0)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)\right]} \qquad (1)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Παρατηρούμε ότι $x(n) = c(n)\cdot p(n)$, όπου $c(n) = e^{j\omega_0 n}$, $p(n) = u(n+N) - u(n-N-1)$.
Τα φάσματα των $c(n)$ και $p(n)$ είναι αντίστοιχα μία κρουστική στη συχνότητα ω_0 και η ψηφιακή sinc: $\sin[(N+1/2)\omega] \,/\, \sin[\omega/2]$. (2)
Το σήμα $x(n)$ ισούται με το γινόμενο των σημάτων $c(n)$ και $p(n)$. Το φάσμα του $x(n)$ ισούται με τη συνέλιξη των φασμάτων των $c(n)$ και $p(n)$. Η συνέλιξη με την κρουστική ισοδυναμεί με μετακίνηση του φάσματος στο σημείο που βρίσκεται η κρουστική, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση στο ω_0. Άρα η σχέση (2) παίρνει αμέσως τη μορφή της σχέσης (1) για ω ίσο με $\omega - \omega_0$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(n) = \cos(\omega_0 n)$, $n \in [-N, N]$.

ΛΥΣΗ

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \cos(\omega_0 n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{-j(\omega-\omega_0)n}}_{X_1(e^{j\omega})} + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{-j(\omega+\omega_0)n}}_{X_2(e^{j\omega})}\Big] \qquad (1)$$

Αλλά το $X_1(e^{j\omega})$ το υπολογίσαμε σε προηγούμενη άσκηση:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega-\omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega-\omega_0}{2}\right]} \qquad (2)$$

Όμοια μπορούμε να βρούμε ότι

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega+\omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega+\omega_0}{2}\right]} \qquad (3)$$

Με βάση τις (2), (3) η (1) γίνεται:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega-\omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega-\omega_0}{2}\right]} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega+\omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega+\omega_0}{2}\right]} \qquad (4)$$

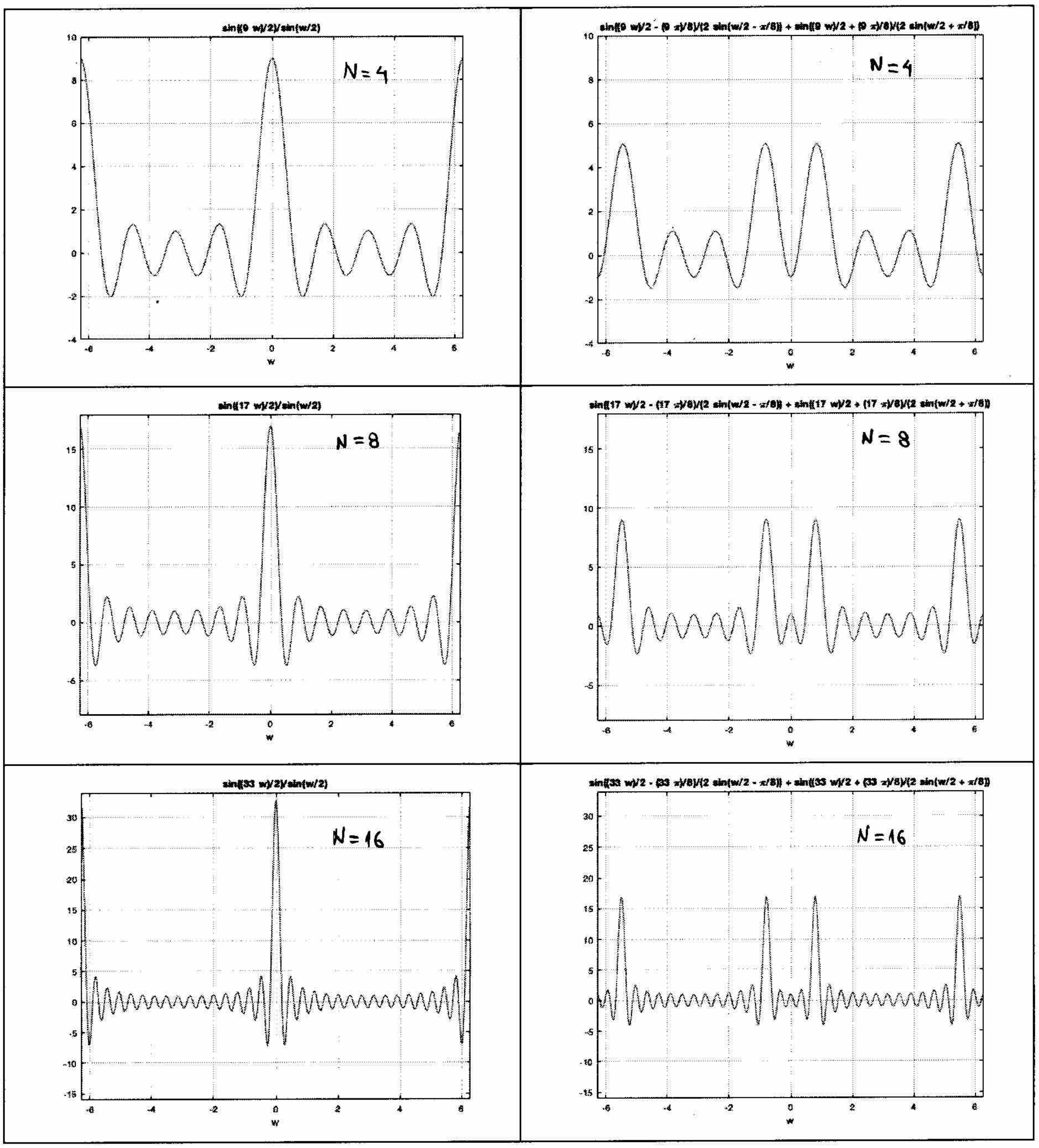
ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η σχέση (4) θα μπορούσε καλύτερα να γραφεί ως:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left[(N+1/2)(\omega-\omega_0)\right]}{\sin\left[1/2(\omega-\omega_0)\right]} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})(\omega+\omega_0)\right]}{\sin\left[1/2\,(\omega+\omega_0)\right]} \qquad (5)$$

Με τον τρόπο αυτό γίνεται φανερό το γεγονός ότι το $X(e^{j\omega})$ είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης των φασμάτων των σημάτων $c(n) = \cos(\omega_0 n)$ και $p(n) = u(n+N) - u(n-N-1)$. Υπενθυμίζεται ότι το φάσμα της $c(n)$ είναι δύο κρουστικές στις θέσεις ω_0 και $-\omega_0$, ενώ εκείνο του $p(n)$ είναι η ψηφιακή sinc: $\sin[(N+\frac{1}{2})\omega] \,/\, \sin[\omega/2]$.

Στα σχήματα που ακολουθούν δείχνονται τα φάσματα του τετραγωνικού παλμού διακριτού χρόνου $2N+1$ σημείων, δηλ. $p(n)=\begin{cases}1 & \text{για } -N\le n\le N\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$ και του γινομένου αυτού με το σήμα $\cos(\omega_0 n)$ για $\omega_0=\pi/4$.



$$\frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega}{2}\right]}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega-\omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega-\omega_0}{2}\right]}+\frac{1}{2}\,\frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega+\omega_0}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega+\omega_0}{2}\right]}$$

```
syms w
N = 8;
w0 = pi/4;
X1(w) = 0.5 *sin((N+1/2)*(w-w0)) / sin((w-w0)/2);
X2(w) = 0.5 *sin((N+1/2)*(w+w0)) / sin((w+w0)/2);
X(w) = X1(w) + X2(w);
ezplot(X(w), [-2*pi, 2*pi]); ylim([-N, 2*N+2]); grid on
```

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της $X(z) = \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z|>|\alpha|$

ΛΥΣΗ Εφαρμόζοντας τη συνεχή διαίρεση έχουμε:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-\alpha z^{-1} \\ \cline{2-2}
\underline{1-\alpha z^{-1}} & 1+\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}+\ldots \\
\quad \alpha z^{-1} & \\
\quad \underline{\alpha z^{-1}-\alpha^2 z^{-2}} & \\
\qquad \alpha^2 z^{-2} & \\
\qquad \underline{\alpha^2 z^{-2}-\alpha^3 z^{-3}} & \\
\qquad\quad \alpha^3 z^{-3} & \\
\qquad\quad \vdots &
\end{array}
$$

Άρα

$$X(z) = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \ldots$$

$$\Big\downarrow Z^{-1}$$

$$x(n) = 1 + \alpha\,\delta(n-1) + \alpha^2\delta(n-2) + \alpha^3\delta(n-3) + \ldots$$

ή

$$x(n) = \alpha^n\, u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της συνάρτησης $X(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$

ΛΥΣΗ Α Η συνάρτηση αυτή <u>ΔΕΝ</u> είναι σε κατάλληλη (proper) μορφή, δηλαδή ο βαθμός του αριθμητή ΔΕΝ είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή. Για να την κάνουμε κατάλληλη, εκτελούμε τη διαίρεση των δύο πολυωνύμων (αριθμητή και παρονομαστή).

$$
\Delta \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{r|l}
1 - z^{-1} & 1 - 0.5z^{-1} \leftarrow \delta \\ \cline{2-2}
1 - 0.5z^{-1} & 1 \leftarrow \pi \\ \cline{1-1}
-0.5z^{-1} & \\
\uparrow & \\
\upsilon &
\end{array}
$$

$$\Delta = \delta\pi + \upsilon \Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\upsilon}{\delta} \Rightarrow \frac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = 1 + \frac{-0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

Άρα

$$X(z) = 1 - 0.5z^{-1}\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} \quad x(n) = \delta(n) - 0.5\,(0.5)^{n-1}\,u(n-1) = \delta(n) - (0.5)^n\,u(n-1)$$

$n=0 \rightsquigarrow x(0) = 1$

$n=1 \rightsquigarrow x(1) = -0.5$

$n=2 \rightsquigarrow x(2) = -(0.5)^2 = -0.25$

$n=3 \rightsquigarrow x(3) = -(0.5)^3 = -0.125$

$\vdots \qquad \vdots$

ΛΥΣΗ Β Η συνάρτηση $X(z)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} - z^{-1}\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}}$$

$$x(n) = (0.5)^n u(n) - (0.5)^{n-1} u(n-1)$$

$n=0 \rightsquigarrow x(0) = (0.5)^0 \cdot 1 - (0.5)^{-1} \cdot 0 = (0.5)^0 = 1$

$n=1 \rightsquigarrow x(1) = (0.5)^1\, 1 - (0.5)^0 \cdot 1 = 0.5 - 1 = -0.5$

$n=2 \rightsquigarrow x(2) = (0.5)^2 \cdot 1 - (0.5)^1 \cdot 1 = 0.25 - 0.5 = -0.25$

$n=3 \rightsquigarrow x(3) = (0.5)^3 \cdot 1 - (0.5)^2 \cdot 1 = 0.125 - 0.25 = -0.125$

$\vdots \qquad \vdots$

ΛΥΣΗ Γ

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{-z^{-1}+1}{-0.5z^{-1}+1}$$

Διαίρεση πολυωνύμων.

$$\Delta \rightsquigarrow \begin{array}{r|l} -z^{-1} + 1 & -0.5z^{-1}+1 \rightsquigarrow \delta \\ \underline{-z^{-1} + 2} & 2 \leftarrow \pi \\ \underset{\overset{\uparrow}{\upsilon}}{-1} & \end{array}$$

$$\Delta = \delta\pi + \upsilon \Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\upsilon}{\delta} \Rightarrow$$

$$X(z) = 2 - \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}}$$

$$x(n) = 2\,\delta(n) - (0.5)^n u(n)$$

$n=0 \rightsquigarrow x(0) = 2 - 1 = 1$

$n=1 \rightsquigarrow x(1) = 2 \cdot 0 - (0.5)^1 \cdot 1 = -0.5$

$n=2 \rightsquigarrow x(2) = 2 \cdot 0 - (0.5)^2 \cdot 1 = -0.25$

$\vdots \qquad \vdots$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z^2+2z}{z^2+0.4z-0.12}$$

ΛΥΣΗ Α Η ρητή συνάρτηση $X(z)$ είναι σε μορφή μη κατάλληλη για την ανάπτυξη σε μερικά, δηλαδή ο βαθμός του αριθμητή δεν είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή.

Άρα θα πρέπει να προχωρήσουμε στη διαίρεση των δύο πολυωνύμων ώστε να εκφράσουμε την $X(z) = \frac{Q(z)}{R(z)}$

$$X(z) = P(z) + \frac{S(z)}{R(z)}$$

όπου η ρητή συνάρτηση $\frac{S(z)}{R(z)}$ είναι πλέον σε μορφή κατάλληλη (proper).

$$\begin{array}{ll|ll}
\Delta \rightarrow & z^2+2z & z^2+0.4z-0.12 & \leftarrow \delta \\ \hline
 & z^2+0.4z-0.12 & 1 & \leftarrow \pi \\ \hline
\upsilon \rightarrow & 1.6z+0.12 & &
\end{array}$$

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\upsilon}{\delta} \Rightarrow$$

$$X(z) = \underbrace{1}_{P(z)} + \frac{\overbrace{1.6z+0.12}^{S(z)}}{\underbrace{z^2+0.4z-0.12}_{R(z)}} = 1 + X_1(z)$$

Αναλύουμε την $X_1(z)$ σε απλά κλάσματα.

$$X_1(z) = \frac{1.6z+0.12}{z^2+0.4z-0.12} = \frac{1.6z+0.12}{(z-0.2)(z+0.6)} = \frac{A_1}{z-0.2} + \frac{A_2}{z+0.6}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A_1, A_2.

$$A_1 = (z-0.2)X_1(z)\Big|_{z=0.2} = \frac{1.6z+0.12}{z+0.6}\Big|_{z=0.2} = \frac{0.44}{0.8} = 0.55$$

$$A_2 = (z+0.6)X_1(z)\Big|_{z=-0.6} = \frac{1.6z+0.12}{z-0.2}\Big|_{z=-0.6} = \frac{-0.84}{-0.8} = 1.05$$

Συνεπώς

$$X_1(z) = \frac{0.55}{z-0.2} + \frac{1.05}{z+0.6}$$

και

$$X(z) = 1 + X_1(z) = 1 + \frac{0.55}{z-0.2} + \frac{1.05}{z+0.6}$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με z, η X(z) γίνεται:

$$X(z) = 1 + 0.55\, z^{-1} \frac{1}{1-0.2z^{-1}} + 1.05\, z^{-1} \frac{1}{1+0.6z^{-1}}$$

Z^{-1}

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο ΜΖ και των δύο μελών, έχουμε:

$$x(n) = \delta(n) + 0.55\,(0.2)^{n-1} u(n-1) + 1.05\,(-0.6)^{n-1} u(n-1)$$

$n=0 \rightsquigarrow x(0) = 1 + 0.55\,(0.2)^{-1}\cdot 0 + 1.05\,(-0.6)^{-1}\cdot 0 = 1$

$n=1 \rightsquigarrow x(1) = 0 + 0.55\,(0.2)^{0}\cdot 1 + 1.05\,(-0.6)^{0}\cdot 1 = 1+0.55+1.05 = 1.6$

$n=2 \rightsquigarrow x(2) = 0 + 0.55\,(0.2)^{1}\cdot 1 + 1.05\,(-0.6)^{1}\cdot 1 = 0.11 - 0.63 = -0.52$

$\vdots \qquad \vdots$

<u>Σημείωση</u>: Η x(n) μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$x(n) = \delta(n) + \Big[\underbrace{\frac{0.55}{0.2}}_{2.75}(0.2)^n + \underbrace{\frac{1.05}{-0.6}}_{-1.75}(-0.6)^n\Big] u(n-1)$$

Αλλά $\delta(n) = u(n) - u(n-1) \Rightarrow u(n-1) = u(n) - \delta(n)$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(n) = \delta(n) + \left[2.75\,(0.2)^n - 1.75\,(-0.6)^n\right]\left[u(n) - \delta(n)\right] =$$

$$= \underbrace{\left[1 - 2.75(0.2)^n + 1.75\,(-0.6)^n\right]}_{g(n)} \delta(n) + \left[2.75\,(0.2)^n - 1.75(-0.6)^n\right] u(n)$$

$$= g(n)\,\delta(n) + \left[2.75\,(0.2)^n - 1.75\,(-0.6)^n\right] u(n)$$

Όμως $g(n)\,\delta(n) = g(0)\,\delta(n) = \left[1 - 2.75 + 1.75\right]\delta(n) = 0\cdot\delta(n) = 0$

Άρα τελικά $x(n) = \left[2.75\,(0.2)^n - 1.75\,(-0.6)^n\right] u(n)$

ΛΥΣΗ Β   Η $X(z)$ δεν είναι σε κατάλληλη μορφή, αλλά η $\frac{X(z)}{z}$ είναι.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{z^2+0.4z-0.12} = \frac{z+2}{(z-0.2)(z+0.6)} = \frac{B_1}{z-0.2} + \frac{B_2}{z+0.6}$$

$$B_1 = (z-0.2)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=0.2} = \left.\frac{z+2}{z+0.6}\right|_{z=0.2} = \frac{2.2}{0.8} = 2.75$$

$$B_2 = (z+0.6)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=-0.6} = \left.\frac{z+2}{z-0.2}\right|_{z=-0.6} = \frac{1.4}{-0.8} = -1.75$$

Άρα

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2.75}{z-0.2} - \frac{1.75}{z+0.6} \Rightarrow$$

$$X(z) = 2.75\,\frac{z}{z-0.2} - 1.75\,\frac{z}{z+0.6} \Rightarrow$$ ⟨διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το z⟩

$$X(z) = 2.75\,\frac{1}{1-0.2z^{-1}} - 1.75\,\frac{1}{1+0.6z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}$$

$$x(n) = 2.75\,(0.2)^n u(n) - 1.75\,(-0.6)^n u(n)$$

$n=0 \rightsquigarrow x(0) = 2.75\,(0.2)^0 \cdot 1 - 1.75\,(-0.6)^0 \cdot 1 = 1$

$n=1 \rightsquigarrow x(1) = 2.75\,(0.2)^1 \cdot 1 - 1.75\,(-0.6)^1 \cdot 1 = 0.55 + 1.05 = 1.6$

$n=2 \rightsquigarrow x(2) = 2.75\,(0.2)^2 \cdot 1 - 1.75\,(-0.6)^2 \cdot 1 = 0.11 - 0.63 = -0.52$

ΛΥΣΗ Γ

$$X(z)=\frac{z^2+2z}{z^2+0.4z-0.12}$$ = <διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με z^2>

$$=\frac{1+2z^{-1}}{1+0.4z^{-1}-0.12z^{-2}}$$

Η συνάρτηση $X(z)$ είναι σε κατάλληλη μορφή (!), οπότε την αναπτύσσουμε σε απλά κλάσματα.

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})}=\frac{C_1}{1-0.2z^{-1}}+\frac{C_2}{1+0.6z^{-1}}$$

$$C_1=(1-0.2z^{-1})\,X(z)\Big|_{z^{-1}=1/0.2}=\frac{1+2z^{-1}}{1+0.6z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=1/0.2}=\frac{1+2\cdot\frac{1}{0.2}}{1+0.6\,\frac{1}{0.2}}=\frac{11}{4}=2.75$$

$$C_2=(1+0.6z^{-1})\,X(z)\Big|_{z^{-1}=-1/0.6}=\frac{1+2z^{-1}}{1-0.2z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-1/0.6}=\frac{1-2\cdot\frac{1}{0.6}}{1+0.2\,\frac{1}{0.6}}=\frac{-2.3333}{1.3333}=-1.75$$

Άρα

$$X(z)=2.75\,\frac{1}{1-0.2z^{-1}}-1.75\,\frac{1}{1+0.6z^{-1}}$$

z^{-1}

$$x(n)=2.75\,(0.2)^n\,u(n)-1.75\,(-0.6)^n\,u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response) του διακριτού ΓΧΑ συστήματος $h(n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n u(n)$ για είσοδο $x(n) = u(n) - u(n-7)$.

ΛΥΣΗ – Α τρόπος (πεδίο-Z)

$$h(n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{2}{5}$$

$$x(n) = u(n) - u(n-7) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1-z^{-7}}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$y(n) = h(n) * x(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z) = H(z)\cdot X(z)$$

Άρα

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{1}{1-\frac{2}{5}z^{-1}} \cdot \frac{1-z^{-7}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - z^{-7}\frac{1}{1-z^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} - z^{-7}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = Y_1(z) - z^{-7}Y_1(z)$$

όπου

$$Y_1(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{A_1}{1-\frac{2}{5}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

$$A_1 = \left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)Y_1(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{5}{2}} = \frac{1}{1-z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=\frac{5}{2}} = \frac{1}{1-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$A_2 = \left(1-z^{-1}\right)Y_1(z)\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$$

Άρα

$$Y_1(z) = \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{5}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{3}}{1-z^{-1}} \xleftrightarrow{z^{-1}} y_1(n) = -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n u(n) + \frac{5}{3}u(n)$$

ή $y_1(n) = \frac{1}{3}\left[5 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]u(n)$

Τελικά

$$Y(z) = Y_1(z) - z^{-7}Y_1(z)$$

z^{-1}

$$y(n) = \frac{1}{3}\left[5-2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]u(n) - \frac{1}{3}\left[5-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-7}\right]u(n-7)$$

- Β τρόπος (πεδίο χρόνου)

$$h(n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n u(n) \qquad x(n) = x_1(n) - x_2(n) = u(n) - u(n-7)$$

$$y_1(n) = h(n) * x_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, x_1(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^m u(m)\, u(n-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^m = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$$

Άρα $y_1(n) = \frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right] u(n)$

Αλλά $x_2(n) = x_1(n-7) \Rightarrow y_2(n) = y_1(n-7) = \frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-6}\right] u(n-7)$

Τελικά

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = \frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right] u(n) - \frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-6}\right] u(n-7) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[5-2\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right] u(n) - \frac{1}{3}\left[5-2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-7}\right] u(n-7)$$

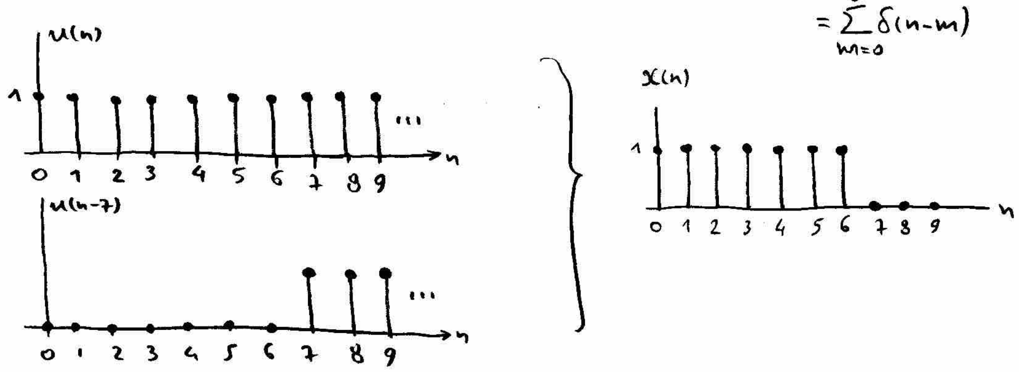
$n=0 \rightsquigarrow y(0) = \frac{1}{3}\left[5-2\left(\frac{2}{5}\right)^0\right] = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$

$n=1 \rightsquigarrow y(1) = \frac{1}{3}\left[5-2\left(\frac{2}{5}\right)^1\right] = \frac{1}{3}\cdot\left[5-\frac{4}{5}\right] = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$

$n=2 \rightsquigarrow y(2) = \frac{1}{3}\left[5-2\left(\frac{2}{5}\right)^2\right] = \frac{1}{3}\left[5-\frac{8}{25}\right] = \frac{117}{75} = \frac{39}{25}$

- Γ τρόπος (πεδίο χρόνου)

$$x(n) = u(n) - u(n-7) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) + \delta(n-5) + \delta(n-6) =$$
$$= \sum_{m=0}^{6} \delta(n-m)$$



$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * \sum_{m=0}^{6} \delta(n-m) =$$

$$= h(n) + h(n-1) + h(n-2) + h(n-3) + h(n-4) + h(n-4) + h(n-5) + h(n-6) =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^{n} u(n) + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} u(n-1) + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} u(n-2) + \ldots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-6} u(n-6)$$

$n=0 \rightsquigarrow \quad y(0) = 1$

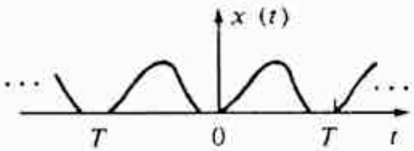
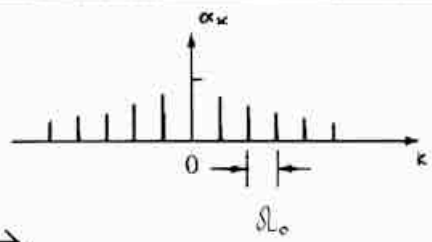
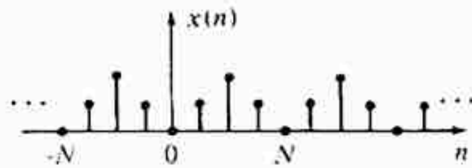
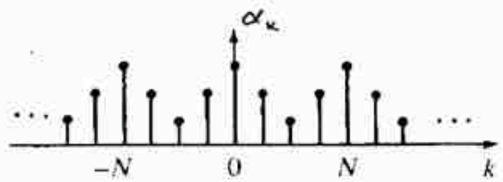
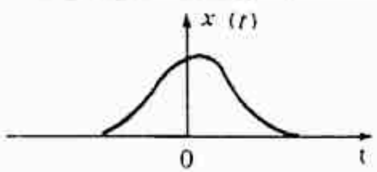
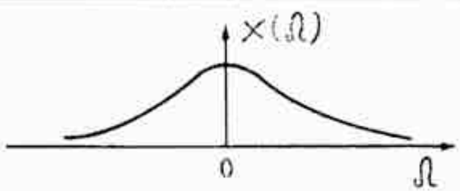
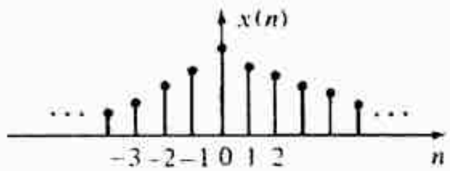
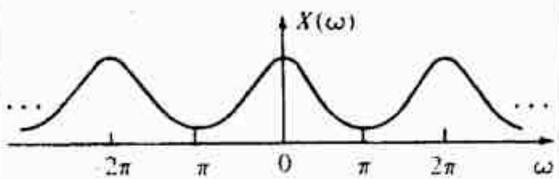
$n=1 \rightsquigarrow \quad y(1) = \left(\frac{2}{5}\right)^{1} + \left(\frac{2}{5}\right)^{0} = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}$

$n=2 \rightsquigarrow \quad y(2) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{1} + \left(\frac{2}{5}\right)^{0} = \frac{4}{25} + \frac{2}{5} + 1 = \frac{39}{25}$

$n=3 \rightsquigarrow \quad y(3) = \left(\frac{2}{5}\right)^{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{1} + \left(\frac{2}{5}\right)^{0} = \frac{8}{125} + \frac{4}{25} + \frac{2}{5} + 1 = \frac{178}{125}$

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform *signals that are continious and aperiodic*	
Fourier Series *signals that are continious and periodic*	
Discrete Time Fourier Transform *signals that are discrete and aperiodic*	
Discrete Fourier Transform *signals that are discrete and periodic*	

	ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Σειρά Fourier $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t}$ $\alpha_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$	Σειρά Fourier $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-nk}$ $X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}$ $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
ΜΗ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Μετασχηματισμός Fourier $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$ $X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$	Μετασχηματισμός Fourier $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$

	CONTINUOUS–TIME SIGNALS		DISCRETE–TIME SIGNALS	
	TIME DOMAIN	FREQUENCY–DOMAIN	TIME–DOMAIN	FREQUENCY–DOMAIN
PERIODIC SIGNALS — FOURIER SERIES				
	$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$ ⟹	⟸ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k\, e^{jk\Omega_0 t}$	$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ ⟹	⟸ $x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$
	CONTINUOUS AND PERIODIC	DISCRETE AND APERIODIC	DISCRETE AND PERIODIC	DISCRETE AND PERIODIC
APERIODIC SIGNALS — FOURIER TRANSFORMS				
	$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$ ⟹	⟸ $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$ ⟹	⟸ $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$
	CONTINUOUS AND APERIODIC	CONTINUOUS AND APERIODIC	DISCRETE AND APERIODIC	CONTINUOUS AND PERIODIC

Σημ.: 1. $\omega = \Omega T$
2. $X(\omega) \triangleq X(e^{j\omega})$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

$$\mathrm{sinc}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$$\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x\pm y)=\sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$$
$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$
$$2\cos(x)\cos(y)=\cos(x-y)+\cos(x+y)$$
$$2\sin(x)\sin(y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$
$$2\sin(x)\cos(y)=\sin(x-y)+\sin(x+y)$$
$$2\cos^2(x)=1+\cos(2x)$$
$$2\sin^2(x)=1-\cos(2x)$$

$x(t)=1$	$2\pi\,\delta(\omega)$ ή $\delta(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$ ή $\frac{2}{j\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$\Pi\left(\frac{t}{2T_1}\right)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T_1\\ 0, & \lvert t\rvert>T_1\end{cases}$	$2T_1\,\mathrm{sin}c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$
$\frac{W}{\pi}\mathrm{sin}c\left(\frac{Wt}{\pi}\right)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$X(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<W\\ 0, & \lvert\omega\rvert\geq W\end{cases}$
$\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right)=\begin{cases}1-\lvert t\rvert/T_1, & \lvert t\rvert<T_1\\ 0, & \lvert t\rvert\geq T_1\end{cases}$	$T_1\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T_1}{2\pi}\right)$
$\left(\frac{W}{\pi}\right)\left(\frac{\sin(Wt)}{Wt}\right)^2$	$X(\omega)=\begin{cases}1-\lvert\omega\rvert\backslash 2W, & \lvert\omega\rvert<2W\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$
$te^{-at}u(t)$, $\Re e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$, $\Re e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$, $\Re e\{a\}>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για μη περιοδικά σήματα

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\omega)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Γραμμικότητα	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(\omega)+bX_2(\omega)$
Πραγματικό μέρος	$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x^*(-t)]$	$\Re e\{X(\omega)\}=R(\omega)$
Φανταστικό μέρος	$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x^*(-t)]$	$j\Im m\{X(\omega)\}=jI(\omega)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j\omega t_o}X(\omega)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\omega_o t}x(t)$	$X(\omega-\omega_o)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t}x(\xi)d\xi$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(\omega)\delta(\omega)$
Πραγματικό σήμα	$x(t)=x^*(t)$	$X(\omega)=X^*(-\omega)$ $\Re e\{X(\omega)\}=\Re e\{X(-\omega)\}$ $\Im m\{X(\omega)\}=-\Im m\{X(-\omega)\}$ $\lvert X(\omega)\rvert=\lvert X(-\omega)\rvert$ $\arg X(\omega)=-\arg X(-\omega)$
Συγκερασμός	$x(t)*h(t)$	$X(\omega)H(\omega)$
Διαμόρφωση	$x(t)\cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}[X(\omega)*Y(\omega)]$
Διαφόριση στο χρονικό πεδίο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Διαφόριση στο πεδίο συχνοτήτων	$tx(t)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Αλλαγή κλίμακας:	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t)\xleftrightarrow{F}X(\omega)$	$y(t)=X(t)$	$Y(\omega)=2\pi x(-\omega)$
Θεώρημα Parseval	$\mathcal{E}_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt$	$\mathcal{E}_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert X(\omega)\rvert^2d\omega$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$$

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

Μετασχηματισμοί z μερικών βασικών συναρτήσεων

	Σήμα	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγ/λισης
1	$\delta(n)$	1	για κάθε $z \neq 0$
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$\delta(n-m)$, $m>0$	z^{-m}	$\lvert z\rvert \neq 0$
4	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6	$[\cos(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1-[\cos\Omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\Omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
7	$[\sin(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{[\sin\Omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\Omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$[r^n\cos(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1-[r\cos\Omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\Omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
9	$[r^n\sin(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{[r\sin\Omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\Omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

Ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z

Ιδιότητα	Σήμα	M z	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα.	$a x_1(n) + b x_2(n)$	$a\cdot X_1^+(z) + b\cdot X_2^+(z)$	$P_1 \cap P_2$
Δεξιά ολίσθηση	$x(n-n_0), n_0 \geq 0$	$z^{-n_0}\left[X^+(z) + \sum_{i=1}^{n_0} x(-i)z^{i}\right]$	$R<\lvert z\rvert$
Αριστερή ολίσθηση	$x(n+n_0), n_0 \geq 0$	$z^{+n_0}\left[X^+(z) - \sum_{i=0}^{n_0-1} x(+i)z^{-i}\right]$	$R<\lvert z\rvert$
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1^+(z)\cdot X_2^+(z)$	$P_1 \cap P_2$
Ολίσθησης Συχνότητας	$c^n x(n)$	$X^+\left(\frac{z}{c}\right)$	$\lvert c\rvert R<\lvert z\rvert$
Περιοδικό σήμα	$x(n+N) = x(n)$	$X^+(z) = \frac{1}{1-z^{-N}}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$	$\lvert z\rvert > 0$
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\Re e\{x(n)\}$ $-\Im m\{x(n)\}$	$X^*(z^*)$ $\frac{1}{2j}\left[X(z) - X^*(z^*)\right]$ $\frac{1}{2}\left[X(z) + X^*(z^*)\right]$	$R<\lvert z\rvert$
Θεώρημα αρχικής τιμής	$x(0) = \lim_{z\to\infty} X^+(z)$		
Θεώρημα τελικής τιμής	$\lim_{n\to\infty} x(0) = \lim_{z\to 1}(z-1)X^+(z)$		

Ιδιότητες του μετασχηματισμού z

Ιδιότητα	Σήμα	M z	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα.	$a x_1(n) + b x_2(n)$	$a\cdot X_1(z) + b\cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Χρονική ολίσθηση	$x(n+n_0)$	$z^{n_0} X(z)$	P
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)\cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Ολίσθησης Συχνότητας	$c^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{c}\right)$	$\lvert c\rvert R^+ < \lvert z\rvert < \lvert c\rvert R^-$
Παραγώγιση στο Χώρο του z	$n x(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R^+ < \lvert z\rvert < R^-$
M z περιοδικών σημάτων.	$x(n+N) = x(n)$	$X(z) = \frac{1}{1-z^{-N}}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$	P
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\Re e\{x(n)\}$ $-\Im m\{x(n)\}$	$X^*(z^*)$ $\frac{1}{2j}\left[X(z) - X^*(z^*)\right]$ $\frac{1}{2}\left[X(z) + X^*(z^*)\right]$	P
Αθροίσματος	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap \lvert z\rvert>1$
Κατοπτρισμός	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R^-} < \lvert z\rvert < \frac{1}{R^+}$