ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

# ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## 7 – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

# ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

**ΑΣΚΗΣΗ** Θεωρείστε το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Ποια η κρουστική απόκριση του συστήματος; Για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ ποια η έξοδος $y(t)$;

**ΛΥΣΗ**

$$F\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} = F\left\{x(t)\right\} \Rightarrow j\Omega Y(\Omega) + 2Y(\Omega) = X(\Omega) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{2+j\Omega} \Rightarrow H(\Omega) = \frac{1}{2+j\Omega} \xleftrightarrow{F} h(t) = e^{-2t}u(t)$$

**Α' τρόπος:** Πολλαπλασιασμός στη συχνότητα

Για $x(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega}$ έχουμε:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\cdot X(\Omega) = \frac{1}{2+j\Omega}\cdot\frac{1}{1+j\Omega}$$

Για να υπολογίσουμε την $y(t)$, αναλύουμε την $Y(\Omega)$ σε μερικά κλάσματα.

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(2+j\Omega)(1+j\Omega)} = \frac{A}{2+j\Omega} + \frac{B}{1+j\Omega}$$

$$A = (2+j\Omega)\,Y(\Omega)\Big|_{\Omega=-\frac{2}{j}} = \frac{1}{1+j\Omega}\Big|_{\Omega=-\frac{2}{j}} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$B = (1+j\Omega)\,Y(\Omega)\Big|_{\Omega=-\frac{1}{j}} = \frac{1}{2+j\Omega}\Big|_{\Omega=\frac{-1}{j}} = \frac{1}{2-1} = 1$$

Άρα, η $Y(\Omega)$ γράφεται ως: $Y(\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega} - \frac{1}{2+j\Omega}$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο ΜF και των δύο μελών έχουμε:

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

**Β' τρόπος:** Συνέλιξη στον χρόνο

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \dots = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρείστε ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου, του οποίου η είσοδος $x(t)$ και η έξοδος $y(t)$ συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=2x(t).$$

Να υπολογίσετε την τελική τιμή $s(\infty)$ της βηματικής απόκρισης $s(t)$ του συστήματος, καθώς και την τιμή $t_0$ για την οποία $s(t_0)=s(\infty)\left[1-\frac{1}{e^2}\right]$.

ΛΥΣΗ

Λαμβάνοντας τον ΜF και των δύο μελών έχουμε:

$$F\left\{\frac{dy(t)}{dt}+5\,y(t)\right\}=F\{2x(t)\} \Rightarrow j\Omega\, Y(\Omega)+5\,Y(\Omega)=2\,X(\Omega) \Rightarrow$$

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{2}{j\Omega+5} \xleftrightarrow{F} h(t)=2\,e^{-5t}u(t)$$

Για είσοδο $x(t)=u(t)$ η έξοδος θα είναι $s(t)=y(t)=h(t)*x(t)$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}2\cdot e^{-5\tau}\,u(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=2\int_0^t e^{-5\tau}\,d\tau=-\frac{2}{5}\,e^{-5\tau}\Big|_0^t=-\frac{2}{5}\left(e^{-5t}-1\right)=\frac{2}{5}\left(1-e^{-5t}\right)$$

Η τελική τιμή $s(\infty)$ ισούται με: $s(\infty)=\lim_{t\to\infty}s(t)=\frac{2}{5}$

Τέλος, για $t=t_0=\frac{2}{5}$ έχουμε

$$s\left(\tfrac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}\left[1-e^{-5\frac{2}{5}}\right]=s(\infty)\left[1-\frac{1}{e^2}\right]$$

Παρατήρηση: Στο παράδειγμα αυτό διαπιστώσαμε ότι μας ήταν πιο εύκολο να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$ μέσω της συνέλιξης στον χρόνο, παρά να υπολογίσουμε το γινόμενο $H(\Omega)\cdot X(\Omega)$ και ακολούθως τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\,X(\Omega)=\underbrace{\frac{2}{j\Omega+5}}_{H(\Omega)}\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right]}_{X(\Omega)=F\{u(t)\}}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Για το ΓΧΑ σύστημα $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+8\frac{dy(t)}{dt}+7y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$

να υπολογιστούν: α) η απόκριση συχνότητας, β) η κρουστική απόκριση και γ) η έξοδος $y(t)$ για είσοδο $x(t)=e^{-4t}u(t)$.

ΛΥΣΗ

Λαμβάνοντας τον ΜF και των δύο μελών και με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης έχουμε:

$$(j\Omega)^2Y(\Omega)+8j\Omega Y(\Omega)+7Y(\Omega)=j\Omega X(\Omega)+4X(\Omega) \Rightarrow$$

(α) $$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{j\Omega+4}{(j\Omega)^2+8(j\Omega)+7}=\frac{j\Omega+4}{(j\Omega+7)(j\Omega+1)}$$ ← Απόκριση συχνότητας

Με ανάλυση σε μερικά κλάσματα προκύπτει:

$$H(\Omega)=\frac{4+j\Omega}{(7+j\Omega)(1+j\Omega)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7+j\Omega}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+j\Omega}\right]$$

(β) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ προκύπτει από τον αντίστροφο ΜF της $H(\Omega)$

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-7t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-t}u(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-7t}+e^{-t}\right)u(t)$$ ← Κρουστική απόκριση

(γ) Η έξοδος $y(t)$ για είσοδο $x(t)=e^{-4t}u(t)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε στο χρόνο (συνέλιξη $h(t)*x(t)$), είτε στη συχνότητα (πολ/σμός $H(\Omega)\cdot X(\Omega)$).

(i) Συνέλιξη στο χρόνο:

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-7\tau}+e^{-\tau}\right)u(\tau)}_{h(\tau)}\cdot\underbrace{e^{-4(t-\tau)}u(t-\tau)}_{x(t-\tau)}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(e^{-7\tau}+e^{-\tau}\right)e^{-4(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t e^{-7\tau}e^{-4(t-\tau)}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\tau}e^{-4(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-4t}\int_0^t e^{-3\tau}d\tau+\frac{1}{2}e^{-4t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau=$$

$$=\frac{e^{-4t}}{2}\cdot\frac{1}{-3}\,e^{-3\tau}\Big|_0^t+\frac{e^{-4t}}{2}\,\frac{1}{3}\,e^{3\tau}\Big|_0^t=$$

$$=\frac{e^{-4t}}{6}\left(1-e^{-3t}\right)+\frac{e^{-4t}}{6}\left(e^{3t}-1\right)=\frac{e^{-4t}}{6}\left[\cancel{1}-e^{-3t}+e^{3t}-\cancel{1}\right]=$$

$$=\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-7t}=\frac{1}{6}\left(e^{-t}-e^{-7t}\right)u(t)$$

(ii) Πολλαπλασιασμός στη συχνότητα:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\cdot X(\Omega) = \frac{\cancel{4+j\Omega}}{(7+j\Omega)(1+j\Omega)} \cdot \frac{1}{\cancel{4+j\Omega}} = \frac{1}{(7+j\Omega)(1+j\Omega)}$$

Σημειώνεται ότι: $e^{-4t}u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{4+j\Omega}$ (Βλ. παράδειγμα 3.4)

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(7+j\Omega)(1+j\Omega)} = \frac{A}{7+j\Omega} + \frac{B}{1+j\Omega}$$

$$A = \left[(7+j\Omega)\,Y(\Omega)\right]\Big|_{j\Omega=-7} = \frac{1}{1+j\Omega}\Big|_{j\Omega=-7} = -\frac{1}{6}$$

$$B = \left[(1+j\Omega)\,Y(\Omega)\right]\Big|_{j\Omega=-1} = \frac{1}{7+j\Omega}\Big|_{j\Omega=-1} = \frac{1}{6}$$

Άρα $Y(\Omega) = -\dfrac{1}{6}\,\dfrac{1}{7+j\Omega} + \dfrac{1}{6}\,\dfrac{1}{1+j\Omega}$

Και παίρνοντας τον αντίστροφο ΜF υπολογίζουμε την έξοδο $y(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου:

$$y(t) = -\frac{1}{6}\,e^{-7t}u(t) - \frac{1}{6}\,e^{-t}u(t) = \frac{1}{6}\left(e^{-t} - e^{-7t}\right)u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ Η είσοδος $x(t)=e^{-t}u(t)$ εφαρμόζεται στο σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$

Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$.

ΛΥΣΗ

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)\right\}=F\left\{\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\right\}\Rightarrow$$

$$(j\Omega)^2Y(\Omega)+4j\Omega Y(\Omega)+3Y(\Omega)=j\Omega X(\Omega)+2X(\Omega)\Rightarrow$$

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{j\Omega+2}{(j\Omega)^2+4j\Omega+3} \quad \text{ή} \quad H(\Omega)=\frac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)(j\Omega+3)}$$

Η είσοδος $x(t)=e^{-t}u(t)$ έχει ΜΦ $X(\Omega)=\frac{1}{1+j\Omega}$

Συνεπώς ο ΜΦ της εξόδου θα είναι:

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\,X(\Omega)=\frac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)^2(j\Omega+3)}$$

Αναλύουμε την τελευταία σχέση σε μερικά κλάσματα και έχουμε:

$$Y(\Omega)=\frac{A_1}{j\Omega+1}+\frac{A_2}{(j\Omega+1)^2}+\frac{B}{j\Omega+3}$$ (Βλ. παρατήρηση στην επόμενη σελίδα)

$$A_1=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{d(j\Omega)}\left[(j\Omega+1)^2Y(\Omega)\right]\Big|_{j\Omega=-1}=\frac{d}{d(j\Omega)}\left[\frac{j\Omega+2}{j\Omega+3}\right]\Big|_{j\Omega=-1}=\frac{1}{4}$$ (Βλ. υποσημείωση)

$$A_2=\left[(j\Omega+1)^2Y(\Omega)\right]\Big|_{j\Omega=-1}=\left[\frac{j\Omega+2}{j\Omega+3}\right]\Big|_{j\Omega=-1}=\frac{1}{2}$$

$$B=\left[(j\Omega+3)\,Y(\Omega)\right]\Big|_{j\Omega=-3}=\left[\frac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)^2}\right]\Big|_{j\Omega=-3}=-\frac{1}{4}$$

Άρα

$$Y(\Omega)=\frac{1/4}{j\Omega+1}+\frac{1/2}{(j\Omega+1)^2}-\frac{1/4}{j\Omega+3}\overset{F}{\longleftrightarrow}y(t)=\left[\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)$$

όπου κάναμε χρήση της ιδιότητας της διαφόρισης στη συχνότητα:

$$t\,x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}\;\leadsto\;t\cdot e^{-at}u(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}j\frac{-j}{(j\Omega+a)^2}=\frac{1}{(j\Omega+a)^2}$$

---

Υπενθύμιση: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε $v=x+2$, $u=x+3$ όπου $x=j\Omega$

Παρατήρηση: Εναλλακτικά, η ανάλυση σε μερικά κλάσματα θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

$$Y(j\Omega)=\frac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)^2(j\Omega+3)}=\frac{A_1}{j\Omega+1}+\frac{A_2}{(j\Omega+1)^2}+\frac{B}{j\Omega+3}$$

Για λόγους ευκολίας αντικαθιστώ προσωρινά όπου $j\Omega$ το $x$, δηλ. $x=j\Omega$, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{x+2}{(x+1)^2(x+3)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+3}$$

Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη επί $(x+1)^2(x+3)$

$$x+2=A_1(x+1)(x+3)+A_2(x+3)+B(x+1)^2=\dots=$$
$$=\underbrace{(A_1+B)}_{0}x^2+\underbrace{(4A_1+A_2+2B)}_{1}x+\underbrace{(3A_1+3A_2+B)}_{2}$$

Εξισώνω τους συντελεστές για τις ίδιες δυνάμεις του $x$ και έχω το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} &A_1+B=0\\ &4A_1+A_2+2B=1\\ &3A_1+3A_2+B=2 \end{aligned}\right\}$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων υπολογίζουμε τους τρεις αγνώστους $A_1, A_2, B$

$$A_1=\frac{1}{4}\qquad A_2=\frac{1}{2}\qquad B=-\frac{1}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ Για το ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(\Omega)=\dfrac{3+j\Omega}{4+5j\Omega-\Omega^2}$ να υπολογιστούν:

α. Η διαφορική εξίσωση που το περιγράφει.

β. Η κρουστική απόκριση του συστήματος.

γ. Η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t)=e^{-3t}u(t)$

ΛΥΣΗ

α. $H(\Omega)=\dfrac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\dfrac{3+j\Omega}{4+5j\Omega-\Omega^2} \Rightarrow 4Y(\Omega)+5j\Omega Y(\Omega)-\Omega^2 Y(\Omega)=3X(\Omega)+j\Omega X(\Omega)$

Από την ιδιότητα της διαφόρισης του μετασχηματισμού Fourier γνωρίζουμε ότι:

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=j\Omega X(\Omega)$$

$$F\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\}=(j\Omega)^2X(\Omega)=-\Omega^2X(\Omega)$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις και λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών της ανωτέρω εξίσωσης, έχουμε:

$$4y(t)+5\frac{dy(t)}{dt}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}=3x(t)+\frac{dx(t)}{dt}$$

ή

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

που είναι και η ζητούμενη διαφορική εξίσωση.

β. Η κρουστική απόκριση προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega)$ του συστήματος.

$$H(\Omega)=\frac{3+j\Omega}{4+5j\Omega-\Omega^2}=\frac{3+j\Omega}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)}=\frac{A}{1+j\Omega}+\frac{B}{4+j\Omega}$$

$$A=(1+j\Omega)\,H(\Omega)\Big|_{j\Omega=-1}=\frac{3+j\Omega}{4+j\Omega}\Big|_{j\Omega=-1}=\frac{3-1}{4-1}=\frac{2}{3}$$

$$B=(4+j\Omega)\,H(\Omega)\Big|_{j\Omega=-4}=\frac{3+j\Omega}{1+j\Omega}\Big|_{j\Omega=-4}=\frac{3-4}{1-4}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

Άρα $H(\Omega)=\frac{2}{3}\,\frac{1}{1+j\Omega}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{4+j\Omega}$

Συνεπώς

$$h(t)=F^{-1}\left\{H(\Omega)\right\}=\frac{2}{3}\,e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}\,e^{-4t}u(t)$$

γ. Ο υπολογισμός της εξόδου γίνεται εύκολα στο πεδίο των συχνοτήτων.

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\cdot X(\Omega)=H(\Omega)\cdot F\{x(t)\}=\frac{\cancel{3+j\Omega}}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)}\cdot\frac{1}{\cancel{3+j\Omega}}=\frac{1}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα.

$$Y(\Omega)=\frac{1}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)}=\frac{C}{1+j\Omega}+\frac{D}{4+j\Omega}$$

$$C=(1+j\Omega)\,Y(\Omega)\Big|_{j\Omega=-1}=\frac{1}{4+j\Omega}\Big|_{j\Omega=-1}=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$$

$$D=(4+j\Omega)\,Y(\Omega)\Big|_{j\Omega=-4}=\frac{1}{1+j\Omega}\Big|_{j\Omega=-4}=\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}$$

Άρα $Y(\Omega)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+j\Omega}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{4+j\Omega}$

Τελικά $y(t)=F^{-1}\{Y(\Omega)\}=\frac{1}{3}\,e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}\,e^{-4}u(t)=\frac{1}{3}\left(e^{-t}-e^{-4t}\right)u(t)$

# ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \qquad\qquad Y(\Omega) = H(\Omega)\cdot X(\Omega)$$

ή

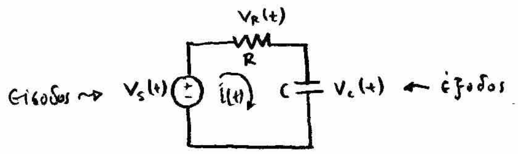
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Η συνάρτηση $h(t)$ αποτελεί την <u>κρουστική απόκριση</u> του συστήματος.
Η συνάρτηση $H(\Omega)$ αποτελεί την <u>απόκριση συχνότητας</u> του συστήματος.

Η συνάρτηση $H(\Omega)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε ως ο ΜF της $h(t)$, είτε ως λόγος του ΜF της εξόδου προς τον ΜF της εισόδου, δηλαδή

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Παράδειγμα . Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας του πρώτης τάξεως RC φίλτρου για την περίπτωση που η έξοδος λαμβάνεται από τον πυκνωτή.




$$\left.\begin{aligned} V_s(t) &= V_R(t) + V_c(t) \\ i(t) &= C\frac{dV_c(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \quad V_s(t) = R\cdot i(t) + V_c(t) = RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t)$$

Υπολογίζοντας τον ΜF και των δύο μελών της εξίσωσης έχουμε:

$$F\{V_s(t)\} = F\left\{RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t)\right\} \Rightarrow$$

$$F\{V_s(t)\} = RC\; F\left\{\frac{dV_c(t)}{dt}\right\} + F\{V_c(t)\} \Rightarrow$$

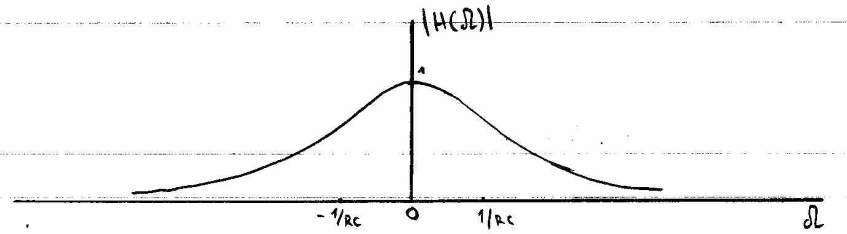
$$V_s(\Omega) = RC\cdot j\Omega\, V_c(\Omega) + V_c(\Omega) \Rightarrow$$

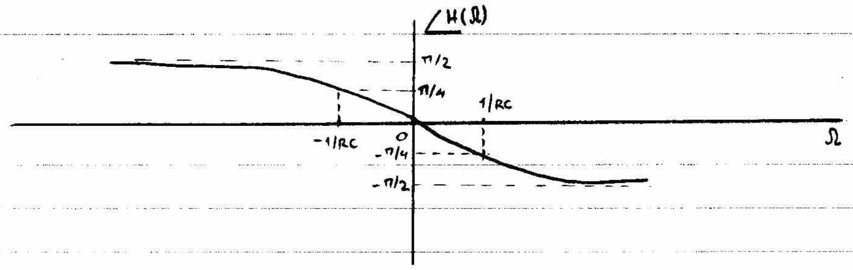
$$V_s(\Omega) = [RCj\Omega + 1]\, V_c(\Omega) \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = \frac{V_c(\Omega)}{V_s(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} = \frac{1/RC}{1/RC + j\Omega} \quad \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} \quad h(t) = \frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$$

Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega)$ είναι:

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\Omega^2}} \qquad \angle H(\Omega) = -\tan^{-1}(RC\Omega)$$




Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο, αφού για $\Omega=0$ το μέτρο $|H(\Omega)|=1$, ενώ για $\Omega \to \infty$, $|H(\Omega)| \to 0$. Με άλλα λόγια το σύστημα (φίλτρο) αυτό επιτρέπει τις χαμηλές συχνότητες να διέλθουν, ενώ εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες. Η σταθερά χρόνου $\tau = RC$ καθορίζει τον ρυθμό εξασθένησης.

# ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΙΣΟΔΟΥΣ

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

ΓΧΑ

Για είσοδο $x(t) = e^{j\Omega t}$ η έξοδος του συστήματος ισούται

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j\Omega(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= e^{j\Omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\Omega \tau}\, d\tau}_{H(\Omega)} = H(\Omega)\, e^{j\Omega t}$$

ιδιοσυνάρτηση

ιδιοτιμή

Άρα η απόκριση του ΓΧΑ συστήματος σε μιγαδική εκθετική είσοδο είναι το ίδιο μιγαδικό εκθετικό με αλλαγή μόνο στο πλάτος.
Ένα σήμα το οποίο εφαρμοζόμενο σε ένα σύστημα παραμένει αναλλοίωτο, δηλαδή η έξοδος του συστήματος ισούται με την είσοδο πολλαπλασιασμένη επί μία σταθερά (πραγματική ή μιγαδική), αποτελεί μία **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος, ενώ η σταθερά αποτελεί την **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του συστήματος.

Συμπέρασμα: Ένα γραμμικό σύστημα μεταβάλλει το μέτρο και τη φάση του σήματος εισόδου, αλλά όχι την κυκλική συχνότητά του.

Η διατήρηση της κυκλικής συχνότητας αποτελεί μια βασική ιδιότητα των γραμμικών συστημάτων.

Σημείωση: Με τον όρο "σταθερά" εννοούμε ότι αυτή δεν εξαρτάται από τον χρόνο $t$. Αυτό θα μπορούσε να γίνει περισσότερο σαφές αν αντί για $\Omega$ χρησιμοποιούσαμε $\Omega_0$ στην είσοδο, δηλαδή $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$, όπου $\Omega_0$ οποιαδήποτε συχνότητα.

ΑΣΚΗΣΗ Ποια η απόκριση συχνότητας του συστήματος το οποίο για είσοδο $x(t) = e^{-3t}u(t)$ παράγει την έξοδο $y(t) = t\,e^{-3t}u(t)$; Ποια η κρουστική απόκριση του συστήματος;

ΛΥΣΗ

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \frac{1}{3+j\Omega}$$

$$y(t) \xleftrightarrow{F} Y(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-3t} u(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} t\, e^{-(3+j\Omega)t}\, dt = \frac{1}{-(3+j\Omega)} \int_{0}^{\infty} t\, d\left[e^{-(3+j\Omega)t}\right] = \langle \text{ολοκλ. κατά παράγ.} \rangle$$

$$= \frac{-1}{3+j\Omega}\left[t\, e^{-(3+j\Omega)t}\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-(3+j\Omega)t}\, dt\right] =$$

$$= \frac{-1}{3+j\Omega}\left[(0-0) - \frac{1}{-(3+j\Omega)}\, e^{-(3+j\Omega)t}\Big|_{0}^{\infty}\right] =$$

$$= \frac{-1}{(3+j\Omega)^2}\left[0-1\right] =$$

$$= \frac{1}{(3+j\Omega)^2}$$

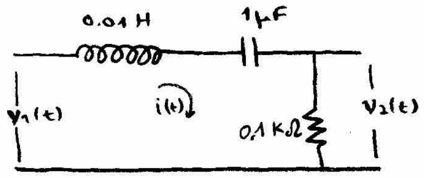
Συνεπώς η ζητούμενη απόκριση συχνότητας ισούται με

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\frac{1}{(3+j\Omega)^2}}{\frac{1}{3+j\Omega}} = \frac{1}{3+j\Omega}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος προκύπτει ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της απόκρισης συχνότητας:

$$H(\Omega) \xleftrightarrow{F} h(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{3+j\Omega}\right\} = e^{-3t}u(t) = x(t)$$

**ΑΣΚΗΣΗ** Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του κυκλώματος και να σχεδιαστεί το μέτρο και η φάση της.




**ΛΥΣΗ**

$$v_1(t) = v_L(t) + v_C(t) + v_2(t) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} \\[2ex] i(t) = \dfrac{v_2(t)}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow v_L(t) = \frac{L}{R}\frac{dv_2(t)}{dt} \qquad (2)$$

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[v_1(t) - v_2(t) - v_L(t)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{v_2(t)}{R} = C\frac{dv_1(t)}{dt} - C\frac{dv_2(t)}{dt} - C\frac{dv_L(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R}v_2(t) = C\frac{dv_1(t)}{dt} - C\frac{dv_2(t)}{dt} - C\frac{L}{R}\frac{d^2v_2(t)}{dt^2} \Rightarrow$$

$$LC\frac{d^2v_2(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = RC\frac{dv_1(t)}{dt} \qquad (3)$$

Εφαρμόζω τον μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης (3) και έχω:

$$F\left\{LC\frac{d^2v_2(t)}{dt^2}\right\} + F\left\{RC\frac{dv_2(t)}{dt}\right\} + F\left\{v_2(t)\right\} = F\left\{RC\frac{dv_1(t)}{dt}\right\} \Rightarrow$$

$$LC(j\Omega)^2V_2(\Omega) + RCj\Omega V_2(\Omega) + V_2(\Omega) = RCj\Omega V_1(\Omega) \Rightarrow$$

$$\frac{V_2(\Omega)}{V_1(\Omega)} = \frac{j\Omega RC}{(j\Omega)^2LC + j\Omega RC + 1}$$ ⇒ ⟨Διαιρώ αριθμ. και παρονομ. με $j\Omega C$⟩

$$H(\Omega) = \frac{R}{j\Omega L + R + \dfrac{1}{j\Omega C}} \qquad (4)$$

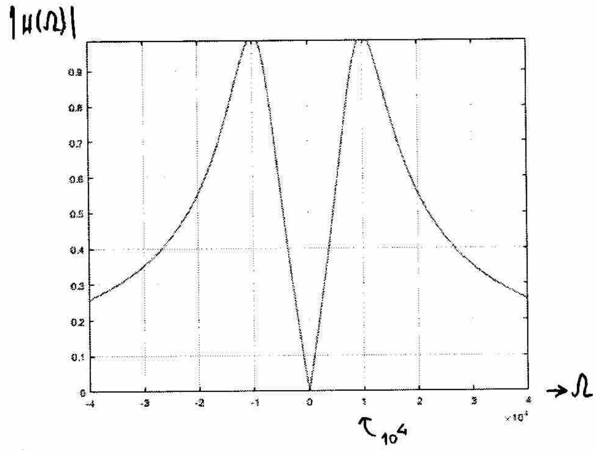
Για $L = 10^{-2}$ H $\quad C = 10^{-6}$ F $\quad R = 10^2\,\Omega$ έχουμε:

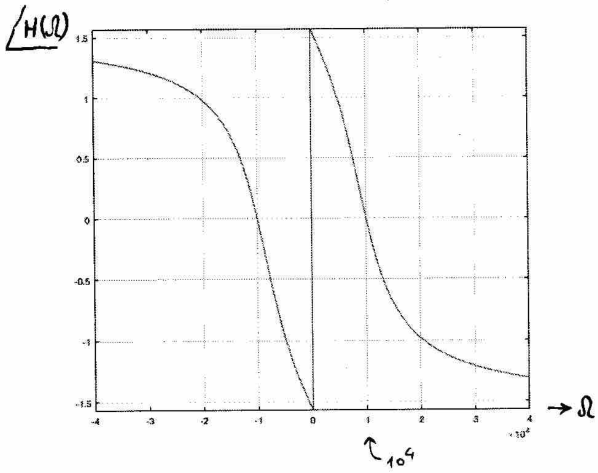
$$H(\Omega) = \frac{10^2}{j\Omega 10^{-2} + 10^2 + \frac{1}{j\Omega 10^{-6}}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\Omega}{10^4} - \frac{10^4}{\Omega}\right)} = |H(\Omega)|\, e^{j\phi(\Omega)}$$

Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι αντίστοιχα:

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{10^4} - \frac{10^4}{\Omega}\right)^2}}$$

$$\phi(\Omega) \equiv \angle H(\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{10^4} - \frac{10^4}{\Omega}\right)$$




Για $\Omega = 1 \rightsquigarrow$

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (10^{-4} - 10^4)^2}} \simeq \frac{1}{10^4} \simeq 0$$

Η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ γίνεται 1, δηλ. $H(\Omega) = 1$, όταν

$$\frac{\Omega}{10^4} - \frac{10^4}{\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega^2 = 10^8 \Rightarrow \Omega = 10^4$$

Στην περίπτωση αυτή η φάση γίνεται μηδέν, δηλαδή

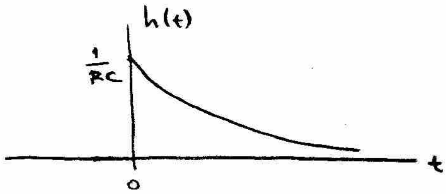
$$\phi(\Omega) = -\tan^{-1}(0) = 0$$

Κώδικας Matlab για τη σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας (μέτρου και φάσης):

```
Hmag=@(W) (1/(sqrt(1+(W/10000-10000/W)*(W/10000-10000/W))));
Hpha=@(W) (-atan(W/10000-10000/W));
fplot(Hmag, [-40000 40000])
grid on
fplot(Hpha, [-40000 40000])
grid on
```

**ΑΣΚΗΣΗ** Ηλεκτρικό κύκλωμα δέχεται είσοδο $x(t)=\delta(t)$ και παράγει την έξοδο $h(t)=\frac{1}{RC}\, e^{-t/RC}\, u(t)$.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;h(t)\;} \longrightarrow y(t)$$




Να υπολογιστούν η απόκριση συχνότητας και η απόκριση του συστήματος για είσοδο τη βηματική συνάρτηση πλάτους V, δηλαδή $V\cdot u(t)$.

**ΛΥΣΗ** Στη συχνότητα, η έξοδος $Y(\Omega)$ για είσοδο $X(\Omega)$ ισούται με

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\,X(\Omega) \qquad (1)$$

όπου
$$H(\Omega)=F\{h(t)\}=\frac{1}{RC}\,\frac{1}{\frac{1}{RC}+j\Omega}=\frac{1}{1+j\Omega RC} \qquad (2)$$

$$X(\Omega)=F\{V\,u(t)\}=V\left[\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right] \qquad (3)$$

Άρα
$$Y(\Omega)=\left[\frac{1}{1+j\Omega RC}\right]V\left[\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right]=V\left[\underbrace{\frac{1}{j\Omega(1+j\Omega RC)}}_{A}+\underbrace{\frac{\pi\delta(\Omega)}{1+j\Omega RC}}_{B}\right] \qquad (4)$$

Αναλύουμε την A σε μερικά κλάσματα:

$$A=\frac{1}{j\Omega(1+j\Omega RC)}=\frac{-RC}{1+j\Omega RC}+\frac{1}{j\Omega} \qquad (5)$$

Η κρουστική συνάρτηση στην B έχει τιμή διάφορη του μηδενός μόνο για $\Omega=0$, οπότε $B=\pi\delta(\Omega)$ αφού ο παρονομαστής $1+j\Omega RC$ για $\Omega=0$ ισούται με 1. (Βλ. σημείωση)

Άρα η (4) γίνεται:

$$Y(\Omega)=V\left[\frac{-RC}{1+j\Omega RC}+\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right] \qquad (6)$$

---

Σημείωση: Θυμηθείτε ότι $X(\Omega)\,\delta(\Omega)=X(0)\,\delta(\Omega)$. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε:

$$B=\frac{\pi}{1+j\Omega RC}\,\delta(\Omega)=\frac{\pi}{1+j0RC}\,\delta(\Omega)=\pi\,\delta(\Omega)$$

Η βηματική απόκριση του συστήματος προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $Y(\Omega)$:

$$y(t) = F^{-1}\left\{Y(\Omega)\right\} = V\cdot F^{-1}\left\{\frac{-RC}{1+j\Omega RC} + \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right\} =$$

$$= V\cdot F^{-1}\left\{\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right\} + V\cdot F^{-1}\left\{\frac{-1}{\frac{1}{RC}+j\Omega}\right\} \qquad (7)$$

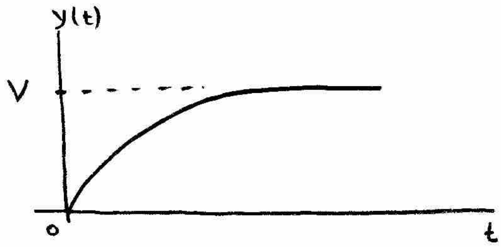
Αλλά

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega) \qquad (8)$$

$$e^{-\frac{1}{RC}} u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\frac{1}{RC}+j\Omega} \qquad (9)$$

Με βάση τις (8),(9) η (7) γίνεται:

$$y(t) = V u(t) - V e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) = V\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right) u(t) \qquad (10)$$

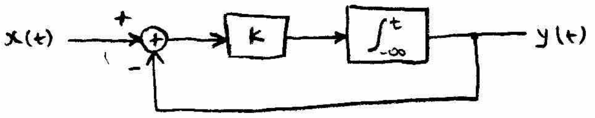



---

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε υπολογίζοντας την $y(t)$ μέσω της συνέλιξης των $x(t)$ και $h(t)$. [Βλ. σημειώσεις συνέλιξης #2]

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

ΑΣΚΗΣΗ Το σύστημα ελέγχου της θερμοκρασίας ενός δωματίου δίνεται στο σχήμα.




Το σήμα εισόδου $x(t)$ αντιπροσωπεύει την επιθυμητή αλλαγή θερμοκρασίας από την ονομαστική, ενώ το σήμα εξόδου $y(t)$ είναι η παραγόμενη αλλαγή θερμοκρασίας από την ονομαστική. Ο χρόνος $t$ είναι σε λεπτά (min).

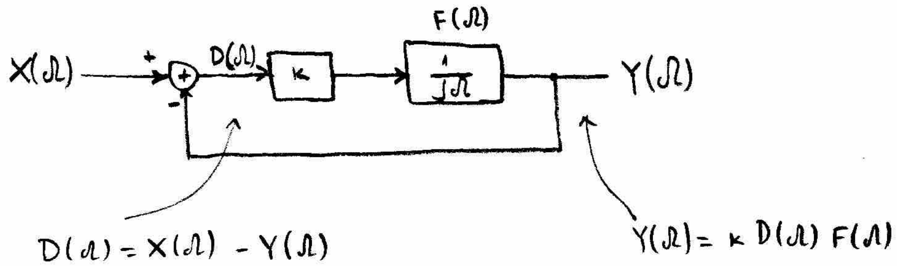
α. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

β. Να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας για $\kappa=1/2$ και $\kappa=2$.

γ. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

δ. Να σχεδιαστεί η έξοδος του συστήματος όταν $\kappa=1/2$ και κατά τη χρονική στιγμή $t=4$ min η επιθυμητή θερμοκρασία μεταβάλλεται ακαριαία κατά $2^\circ C$.

ΛΥΣΗ α. Σχεδιάζουμε το σύστημα στο πεδίο της συχνότητας.



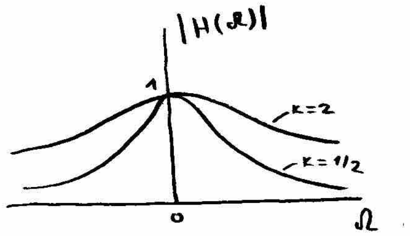

Άρα
$$Y(\Omega)=\kappa\cdot D(\Omega)\,F(\Omega)=$$
$$=\kappa\cdot\left[X(\Omega)-Y(\Omega)\right]\cdot F(\Omega)=$$
$$=\kappa\,X(\Omega)\,F(\Omega)-\kappa\,Y(\Omega)\,F(\Omega)\Rightarrow$$
$$Y(\Omega)\left[1+\kappa F(\Omega)\right]=\kappa\,X(\Omega)\,F(\Omega)\Rightarrow$$
$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{\kappa F(\Omega)}{1+\kappa F(\Omega)}\Rightarrow$$
$$H(\Omega)=\frac{\kappa\frac{1}{j\Omega}}{1+\kappa\frac{1}{j\Omega}}=\frac{\kappa}{\kappa+j\Omega}\qquad(1)$$

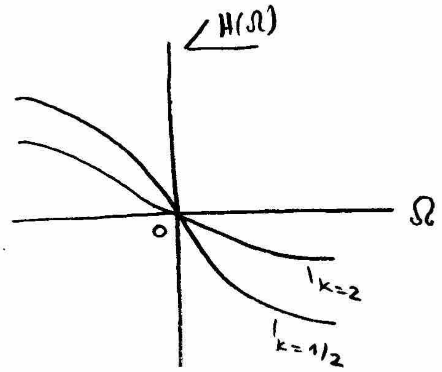
---

Σημείωση: Για το σύστημα ολοκλήρωσης $F(\Omega)$ χρησιμοποιήσαμε $F(\Omega)=\frac{1}{j\Omega}$ αντί για $F(\Omega)=\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$. Το αποτέλεσμα και στην περίπτωση αυτή θα είναι το ίδιο, αφού

$$H(\Omega)=\frac{\kappa F(\Omega)}{1+\kappa F(\Omega)}=\frac{\kappa\left[\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right]}{1+\kappa\left[\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right]}=\frac{\kappa/j\Omega+\kappa\pi\delta(\Omega)}{1+\kappa/j\Omega+\kappa\pi\delta(\Omega)}=\langle\text{πολ/ζω αρ.θρ. και παρονομαστή επί } j\Omega\rangle=$$
$$=\frac{\kappa+\kappa\pi j\Omega\delta(\Omega)}{j\Omega+\kappa+\kappa\pi j\Omega\delta(\Omega)}=\frac{\kappa}{\kappa+j\Omega}\quad\langle\text{αφού } \Omega\delta(\Omega)=0\rangle.$$

β. Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας δείχνονται στα σχήματα που ακολουθούν.




Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο. Ο συντελεστής κέρδους k καθορίζει το εύρος ζώνης (bandwidth) των συχνοτήτων που επιτρέπεται να διέλθουν από το σύστημα. Για μεγαλύτερο k έχουμε μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων που σημαίνει ότι το σύστημα ανταποκρίνεται πιο γρήγορα στην επιθυμητή αλλαγή θερμοκρασίας.

γ. Η κρουστική απόκριση του συστήματος υπολογίζεται εύκολα από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητα $H(\Omega)$.

$$h(t) = F^{-1}\{H(\Omega)\} = F^{-1}\left\{k \cdot \frac{1}{k+j\Omega}\right\} = k\, F^{-1}\left\{\frac{1}{k+j\Omega}\right\} = k\, e^{-kt} u(t)$$

δ. Κατά τη χρονική στιγμή $t=4$ min εφαρμόζεται μια βηματική πλάτους 2, δηλαδή $x(t) = 2\cdot u(t-4)$

$$X(\Omega) = F\{x(t)\} = 2\,F\{u(t-4)\} = 2\cdot e^{-j\Omega 4}\,U(\Omega) = 2\cdot e^{-j\Omega 4}\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]$$

Συνεπώς

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\cdot X(\Omega) = \left[\frac{k}{k+j\Omega}\right]\cdot\left[2\cdot e^{-j4\Omega}\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]\right] \Rightarrow$$

$$Y(\Omega)= 2\kappa\, e^{-j4\Omega}\left[\frac{1}{(\kappa+j\Omega)\,j\Omega} + \frac{\pi}{\kappa+j\Omega}\,\delta(\Omega)\right]$$

Αλλά από την ιδιότητα της ολίσθησης της $\delta(t)$ γνωρίζουμε ότι $f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$ οπότε έχουμε $\frac{\pi}{\kappa+j\Omega}\,\delta(\Omega) = \frac{\pi}{\kappa+j0}\,\delta(\Omega) = \frac{\pi}{\kappa}\,\delta(\Omega)$.

Για $\kappa=\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$Y(\Omega) = 2\cdot\frac{1}{2}\,e^{-j4\Omega}\left[\frac{1}{(1/2+j\Omega)\,j\Omega} + \frac{\pi}{1/2}\,\delta(\Omega)\right] =$$

$$= e^{-j4\Omega}\left[\underbrace{\frac{1}{(1/2+j\Omega)\,j\Omega}}_{G(\Omega)} + 2\pi\,\delta(\Omega)\right] \qquad (2)$$

Αναλύουμε την $G(\Omega)$ σε μερικά κλάσματα.

$$G(\Omega) = \frac{1}{1/2+j\Omega}\cdot\frac{1}{j\Omega} = \frac{A}{1/2+j\Omega} + \frac{B}{j\Omega}$$

όπου

$$A = \left(\tfrac{1}{2}+j\Omega\right)G(\Omega)\Big|_{j\Omega=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{j\Omega}\Big|_{j\Omega=-\frac{1}{2}} = -2$$

$$B = j\Omega\, G(\Omega)\Big|_{j\Omega=0} = \frac{1}{\frac{1}{2}+j\Omega}\Big|_{j\Omega=0} = 2$$

Άρα

$$G(\Omega) = \frac{-2}{1/2+j\Omega} + \frac{2}{j\Omega} \qquad (3)$$

Με βάση την τελευταία σχέση η (2) γίνεται:

$$Y(\Omega) = e^{-j4\Omega}\left[\frac{-2}{1/2+j\Omega} + \frac{2}{j\Omega} + 2\pi\,\delta(\Omega)\right] =$$

$$= 2\cdot e^{-j4\Omega}\left[\frac{-1}{1/2+j\Omega} + \left(\frac{1}{j\Omega} + \pi\,\delta(\Omega)\right)\right] \qquad (4)$$

Τελικά η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $Y(\Omega)$ ως ακολούθως:

$$y(t) = F^{-1}\left\{Y(\Omega)\right\} = 2\, F^{-1}\left\{-e^{-j\Omega 4}\left(\underbrace{\frac{1}{1/2+j\Omega}}_{W(\Omega)}\right)\right\} + 2\, F^{-1}\left\{e^{-j\Omega 4}\left(\underbrace{\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)}_{U(\Omega)}\right)\right\} =$$

$$= 2\cdot F^{-1}\left\{-e^{-j\Omega 4}W(\Omega)\right\} + 2\, F^{-1}\left\{e^{-j\Omega 4}U(\Omega)\right\}$$

όπου

$W(\Omega) = \dfrac{1}{1/2+j\Omega}$ ο μετασχημ. Fourier της $w(t) = e^{-1/2 t}u(t)$

$U(\Omega) = \dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$ ο μετασχ Fourier της $u(t)$

Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στο χρόνο του ΜF έχουμε:

$$e^{-j\Omega 4}W(\Omega) \xleftrightarrow{F} w(t-4)$$

$$e^{-j\Omega 4}U(\Omega) \longleftrightarrow u(t-4)$$

Άρα τελικά η $y(t)$ ισούται με:

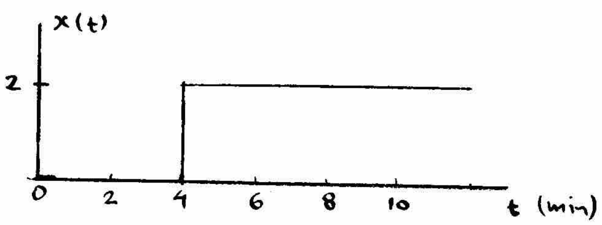
$$y(t) = 2\cdot\left[-w(t-4)\right] + 2\,u(t-4) =$$

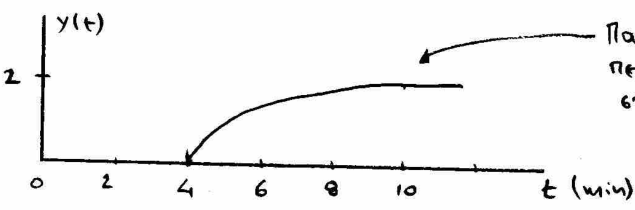
$$= 2\left[u(t-4) - w(t-4)\right] =$$

$$= 2\left[u(t-4) - e^{-\frac{1}{2}(t-4)}u(t-4)\right] =$$

$$= 2\left[1 - e^{-1/2(t-4)}\right]u(t-4)$$

Οι γραφικές παραστάσεις εισόδου και εξόδου είναι οι ακόλουθες.

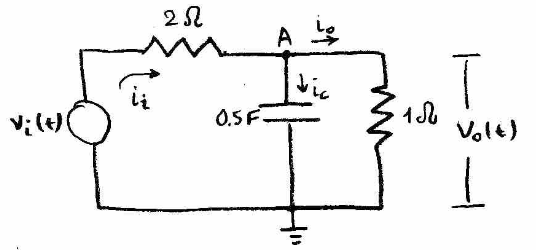



Παρατηρούμε ότι χρειάζονται περίπου 6 λεπτά για να φτάσει στην επιθυμητή τιμή των 2° C. Για να μειωθεί ο χρόνος αυτός θα πρέπει να αυξηθεί το κέρδος κ.

ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος, όπου $v_i(t) = 5e^{-2t}u(t)$.

Να υπολογιστεί ο λόγος της ενέργειας που καταναλίσκεται στον αντιστάτη του $1\Omega$ προς την ενέργεια που παρέχεται από την πηγή.




ΛΥΣΗ Η ενέργεια που παρέχεται από την πηγή ισούται με:

$$E_i = \int_{-\infty}^{\infty} |v_i(t)|^2\, dt = \int_0^{\infty} \left(5e^{-2t}\right)^2 dt = 25\int_0^{\infty} e^{-4t} dt = 25\cdot\frac{1}{-4}\, e^{-4t}\Big|_0^{\infty} = \frac{-25}{4}(0-1) = \frac{25}{4}\ \text{J}$$

Joule

Η ενέργεια $E_o$ που καταναλίσκεται στον αντιστάτη της εξόδου μπορεί να υπολογιστεί είτε στο πεδίο του χρόνου ως $E_o = \int_{-\infty}^{\infty} |v_o(t)|^2 dt$, είτε στο πεδίο της συχνότητας ως $E_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |V_o(\Omega)|^2 d\Omega$.

Από τον νόμο των ρευμάτων στον κόμβο A του κυκλώματος έχουμε:

$$i_o = i_i - i_c \Rightarrow \frac{v_o(t)}{1} = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{2} - C\frac{dv_o(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$2v_o(t) = v_i(t) - v_o(t) - 2C\frac{dv_o(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$2C\frac{dv_o(t)}{dt} + 3v_o(t) = v_i(t) \Rightarrow \langle \text{για } C = 0.5\text{F} \rangle$$

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + 3v_o(t) = v_i(t) \Rightarrow \langle \text{μετασχ. Fourier και στα δύο μέλη} \rangle$$

$$j\Omega V_o(\Omega) + 3V_o(\Omega) = V_i(\Omega) \Rightarrow$$

$$\frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{3+j\Omega} \Rightarrow$$

$$V_o(\Omega) = \frac{1}{3+j\Omega}V_i(\Omega) = \frac{1}{3+j\Omega}\cdot\frac{5}{2+j\Omega}$$

αφού $v_i(t) = 5e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} V_i(\Omega) = 5\cdot\frac{1}{2+j\Omega}$

Άρα η ενέργεια εξόδου, με δεδομένο ότι η $|V_o(\Omega)|^2$ είναι άρτια συνάρτηση, γίνεται:

$$E_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |V_o(\Omega)|^2 \, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{0}^{\infty} |V_o(\Omega)|^2 \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{5^2}{|3+j\Omega|^2 \, |2+j\Omega|^2} \, d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{25}{(9+\Omega^2)(4+\Omega^2)} \, d\Omega$$

· Αναπτύσσουμε την προς ολοκλήρωση συνάρτηση σε μερικά κλάσματα:

$$E_o = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[ \frac{5}{4+\Omega^2} - \frac{5}{9+\Omega^2} \right] d\Omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{5}{4+\Omega^2} \, d\Omega - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{5}{9+\Omega^2} \, d\Omega =$$

$$= \frac{5}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2^2+\Omega^2} \, d\Omega - \frac{5}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{3^2+\Omega^2} \, d\Omega =$$

$$= \frac{5}{\pi}\left[ \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{2}\right)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{3}\right)\Big|_0^{\infty} \right] =$$

$$= \frac{5}{\pi}\left[ \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \right] = \frac{5}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{\cancel{\pi}}\cancel{\pi}\left(\frac{3-2}{12}\right) = \frac{5}{12} \text{ Joule}$$

Τελικά, ο ζητούμενος λόγος ενεργειών είναι:

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{25}{4}} = \frac{1}{15}$$

---

Σημείωση: Θυμηθείτε ότι $\displaystyle\int \frac{1}{\alpha^2+x^2} dx = \frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

ή γενικότερα $\displaystyle\int \frac{1}{\alpha^2+b^2x^2} dx = \frac{1}{\alpha b}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{\alpha}\right)$

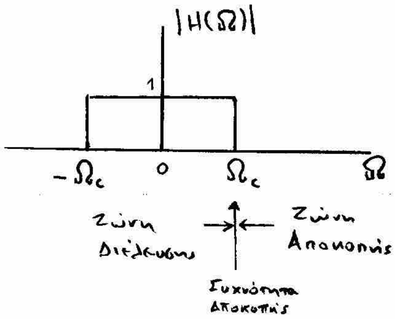
# ΙΔΑΝΙΚΟ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

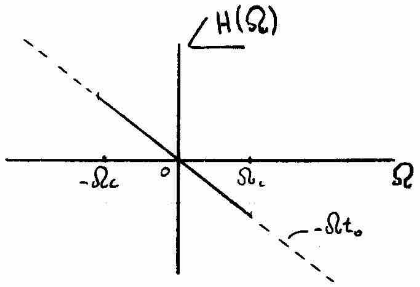
$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \quad \text{ή} \quad X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega)$$

Το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο (ideal lowpass filter) έχει απόκριση συχνότητας

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

όπου $t_0$ σταθερά και $\Omega_c$ η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου.
Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης του φίλτρου είναι:




Αφού $Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$, γίνεται φανερό ότι ένα τέτοιο σύστημα (φίλτρο) επιτρέπει να διέρχονται αμετάβλητες όλες οι συχνότητες που είναι μικρότερες της $\Omega_c$, ενώ απορρίπτει (μηδενίζει) τις συχνότητες τις μεγαλύτερες από $\Omega_c$.

Για την περιοχή των συχνοτήτων $\Omega < \Omega_c$, δηλαδή για τη ζώνη διέλευσης, θα ισχύει

$$Y(\Omega) = e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$$

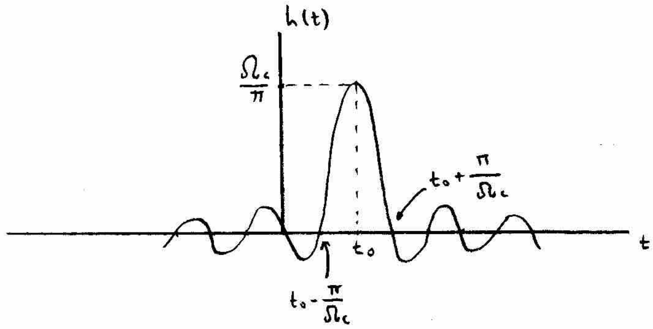
ή ισοδύναμα

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το σήμα εισόδου παραμένει αναλλοίωτο και το μόνο που υφίσταται είναι μια χρονική καθυστέρηση κατά $t_0$.

Τέλος, με βάση το παράδειγμα 3.3 και την ιδιότητα της ολίσθησης στο χρόνο, μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου $h(t)$, δηλ. τον αντίστροφο MF:

$$h(t) = \frac{\sin[\Omega_c (t-t_0)]}{\pi (t-t_0)} = \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin[\Omega_c(t-t_0)]}{\Omega_c(t-t_0)} = \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Omega_c(t-t_0)}{\pi}\right]$$

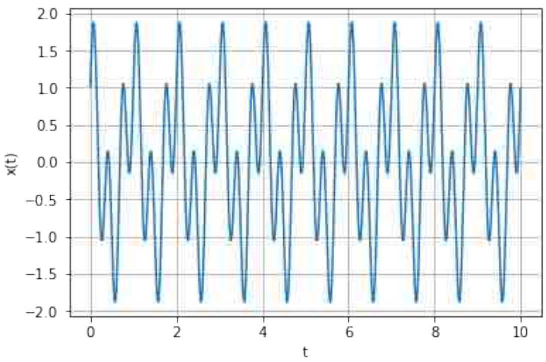


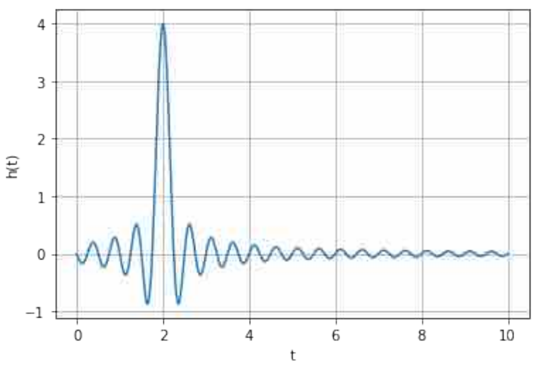
Παράδειγμα: Η είσοδος $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$ εφαρμόζεται σε ΓΧΑ σύστημα η κρουστική απόκριση του οποίου είναι $h(t) = \frac{\sin[4\pi(t-2)]}{\pi(t-2)}$.
Να προσδιοριστεί η έξοδος $y(t)$.

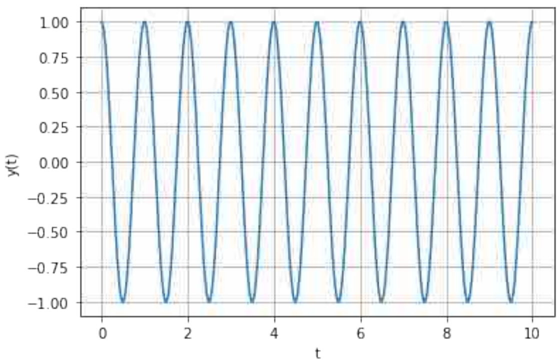
Λύση

Η κρουστική απόκριση αντιστοιχεί σε ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο το οποίο έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 4\pi$ και χρονική καθυστέρηση $t_0 = 2$. Άρα, από το σήμα εισόδου $x(t)$, το οποίο αποτελείται από δύο συχνότητες $\Omega_1 = 2\pi$ και $\Omega_2 = 6\pi$, μόνο η πρώτη θα 'επιβιώσει', ενώ η δεύτερη θα απορριφθεί. Τελικά, η έξοδος θα είναι:

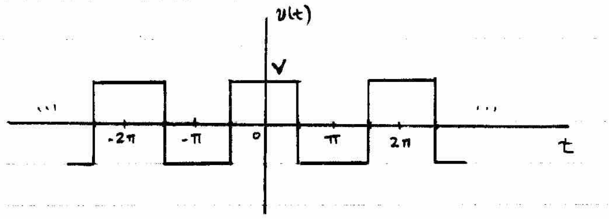
$$y(t) = \cos[2\pi(t-2)]$$



Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η έξοδος του φίλτρου $H(\Omega)=\begin{cases} e^{-j\Omega} & |\Omega|<4 \\ 0 & |\Omega|>4 \end{cases}$ για είσοδο το τρένο παλμών του σχήματος.




Λύση

Το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_c=4$ και εισάγει χρονική καθυστέρηση $t_0=1$.

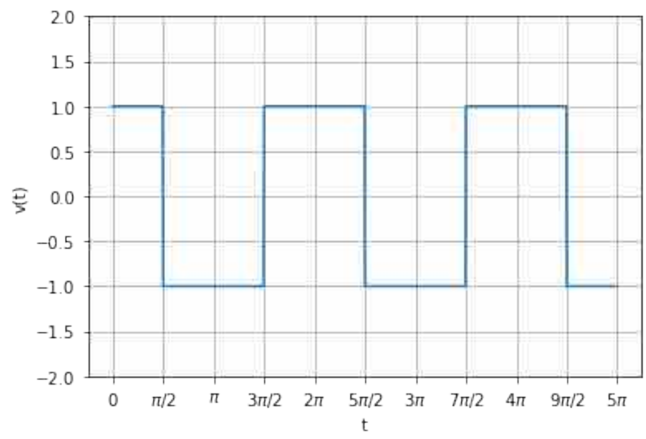
Η τάση εισόδου v(t) είναι ένα περιοδικό σήμα με $\Omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$

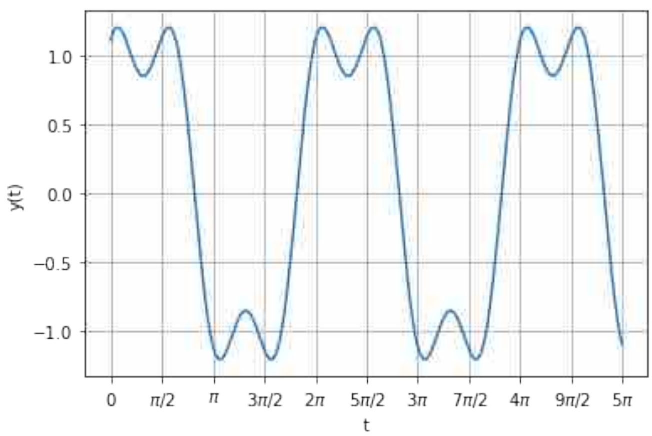
Το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier (βλ. και παραδείγματα 5.4, 5.6) θα είναι:

$$v(t)=\frac{4V}{\pi}\left[\cos(t)-\frac{1}{3}\cos(3t)+\frac{1}{5}\cos(5t)+\dots\right]$$

Από το σήμα αυτό μόνον οι δύο πρώτοι όροι (για $\Omega<\Omega_c$) επιτρέπεται να διέλθουν από το φίλτρο, ενώ όλοι οι υπόλοιποι απορροφώνται (μηδενίζονται). Συνεπώς η έξοδος του φίλτρου θα είναι:

$$v_0(t)=\frac{4V}{\pi}\left[\cos(t-1)-\frac{1}{3}\cos[3(t-1)]\right]$$



ΑΣΚΗΣΗ α. Η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος συνεχούς χρόνου είναι

$$H(\Omega) = \frac{\alpha - j\Omega}{\alpha + j\Omega} \qquad \text{όπου } \alpha > 0.$$

Ποιο το μέτρο και η φάση της $H(\Omega)$; Ποια η κρουστική απόκριση του συστήματος;

β. Να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος για $\alpha = 1$, όταν εφαρμόζεται η είσοδος

$$x(t) = \cos(t/\sqrt{3}) + \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t).$$

ΛΥΣΗ α.

$$|H(\Omega)| = \frac{|\alpha - j\Omega|}{|\alpha + j\Omega|} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\Omega^2}}{\sqrt{\alpha^2+\Omega^2}} = 1$$

$$\angle H(\Omega) = \angle \alpha - j\Omega - \angle \alpha + j\Omega = \tan^{-1}\left(\frac{-\Omega}{\alpha}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right) =$$

$$= -2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$$

δηλαδή

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|\, e^{j\angle H(\Omega)}$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος είναι μονάδα, ενώ η φάση είναι διάφορη του μηδενός. Άρα, το σύστημα δεν θα επηρεάζει το μέτρο του σήματος που εφαρμόζεται στην είσοδο, αλλά θα αλλάζει μόνον τη φάση του, όπως θα δούμε στο επόμενο ερώτημα β.

Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης, εκφράζουμε την $H(\Omega)$ σε μορφή που να είναι εύκολα αντιστρέψιμη, αφού $h(t) = F^{-1}\{H(\Omega)\}$.

$$H(\Omega) = \frac{\alpha - j\Omega}{\alpha + j\Omega} = \frac{-\alpha - j\Omega + 2\alpha}{\alpha + j\Omega} = \frac{-(\alpha + j\Omega) + 2\alpha}{\alpha + j\Omega} = -1 + \frac{2\alpha}{\alpha + j\Omega} \xrightarrow{F^{-1}}$$

$$h(t) = -\delta(t) + 2\alpha\, e^{-\alpha t} u(t)$$

αφού $F^{-1}\{1\} = \delta(t)$

$$F^{-1}\left\{\frac{2\alpha}{\alpha + j\Omega}\right\} = 2\alpha\, F^{-1}\left\{\frac{1}{\alpha + j\Omega}\right\} = 2\alpha \cdot e^{-\alpha t} u(t)$$

β. Η έξοδος $y(t)$ του συστήματος ισούται με:

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{F} Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega)$$

Άρα

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\angle H(\Omega)} \cdot |X(\Omega)| e^{j\angle X(\Omega)} =$$

$$= |H(\Omega)| \cdot |X(\Omega)| \cdot e^{j(\angle H(\Omega) + \angle X(\Omega))}$$

Αλλά $|H(\Omega)| = 1$ και $\angle H(\Omega) = -2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$

Άρα $Y(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\left(\angle X(\Omega) - 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)\right)}$

και για $\alpha = 1$ έχουμε

$$Y(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\left(\angle X(\Omega) - 2\tan^{-1}\Omega\right)}$$

Συνεπώς η έξοδος θα είναι ίδια με την είσοδο, αλλά με διαφορετική φάση, δηλαδή καθεμιά από τις συνιστώσες της εισόδου θα υποστεί καθυστέρηση κατά $2\tan^{-1}\Omega$. Αναλυτικά:

i. Η πρώτη συνιστώσα $\cos(t/\sqrt{3})$ έχει $\Omega_1 = 1/\sqrt{3}$ και άρα

$$2\tan^{-1}\Omega_1 = 2\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = 2\tan^{-1}(\sqrt{3}/3) = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Δηλαδή για είσοδο $\cos(t/\sqrt{3})$ το σύστημα θα δώσει ως έξοδο $\cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right)$.

ii. Η δεύτερη συνιστώσα $\cos(t)$ έχει $\Omega_2 = 1$ και άρα

$$2\tan^{-1}\Omega_2 = 2\tan^{-1}(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Δηλαδή για είσοδο $\cos(t)$ το σύστημα θα δώσει ως έξοδο $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

iii. Η τρίτη συνιστώσα $\cos(\sqrt{3}t)$ έχει $\Omega_3 = \sqrt{3}$ και άρα

$$2\tan^{-1}\Omega_3 = 2\tan^{-1}(\sqrt{3}) = 2\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Δηλαδή για είσοδο $\cos(\sqrt{3}t)$ το σύστημα θα δώσει ως έξοδο $\cos\left(\sqrt{3}t - \frac{2\pi}{3}\right)$.

Τελικά, η συνολική έξοδος του γραμμικού αυτού συστήματος θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους εξόδων, ήτοι:

$$y(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\sqrt{3}\,t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

---

Σημείωση: Για να γίνει κατανοητό το γεγονός του ότι το εν λόγω σύστημα επηρεάζει μόνο τη φάση, θα το αντιμετωπίσουμε ως ένα φίλτρο στο οποίο εφαρμόζεται ένα περιοδικό σήμα, έστω το ένα από τα παραπάνω, το $\cos t$.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Το σήμα $x(t) = \cos t$ είναι περιοδικό με $\Omega_0 = 1$ και περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi$. Η ανάλυση αυτού σε σειρά Fourier γίνεται εύκολα μέσω της εξίσωσης Euler.

$$x(t) = \cos t = \frac{1}{2}\left[e^{jt} + e^{-jt}\right] = \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt}$$

Αλλά, από τη σειρά Fourier γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t} = \alpha_1 e^{j1\cdot 1t} + \alpha_{-1} e^{j(-1)1t}$$

Γίνεται φανερό ότι οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier για το συγκεκριμένο σήμα είναι $\alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{1}{2}$.

Όταν το σήμα αυτό περάσει μέσα από το σύστημα, οι συντελεστές αυτοί θα αλλάξουν, αφού θα πολλαπλασιαστούν με το φάσμα $H(\Omega)$. Το νέο σήμα που θα προκύψει στην έξοδο $y(t)$, θα είναι και πάλι περιοδικό με συντελεστές $b_k = \alpha_k H(k\Omega_0)$, δηλαδή η εκθετική σειρά Fourier του σήματος εξόδου $y(t)$ θα γράφεται ως:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\Omega_0 t}$$ και στην προκειμένη περίπτωση

$$y(t) = b_1 e^{jt} + b_{-1} e^{-jt}$$

όπου

$$b_k = \alpha_k H(k\Omega_0) = \alpha_k \left|H(k\Omega_0)\right| e^{j\angle H(k\Omega_0)} =$$

$$= \alpha_k \cdot 1 \cdot e^{j(-2\tan^{-1}(k\Omega_0))} =$$

$$= \alpha_k \, e^{-j2\tan^{-1}(k\Omega_0)}$$

Τα $b_1$ και $b_{-1}$ υπολογίζονται αντίστοιχα ως:

$$b_1 = \alpha_1 e^{-j2\tan^{-1}(1\cdot 1)} = \frac{1}{2} e^{-j2\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$b_{-1} = \alpha_{-1} e^{-j2\tan^{-1}[(-1)\cdot 1]} = \frac{1}{2} e^{j2\tan^{-1}(1)} = \frac{1}{2} e^{j2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

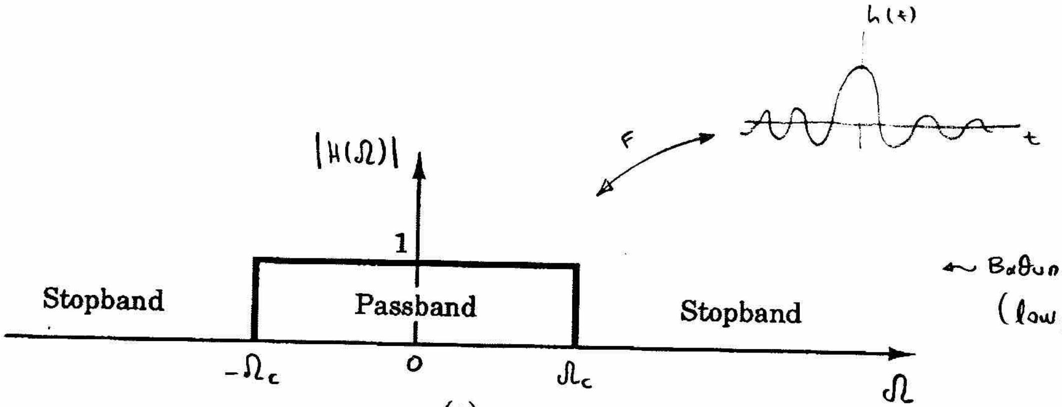
Τελικά

$$y(t) = b_1 e^{jt} + b_{-1} e^{-jt} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{jt} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-jt} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[ e^{j(t-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(t-\frac{\pi}{2})} \right] =$$

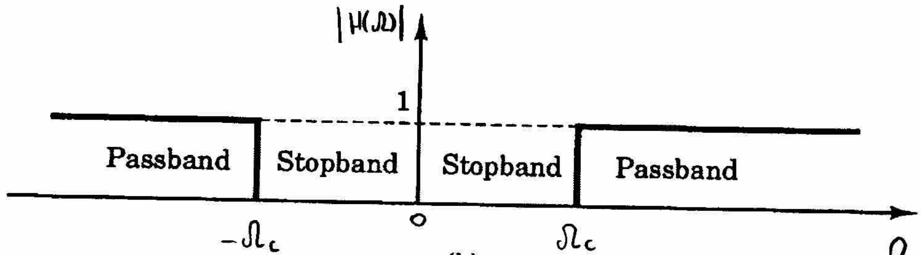
$$= \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

## ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ



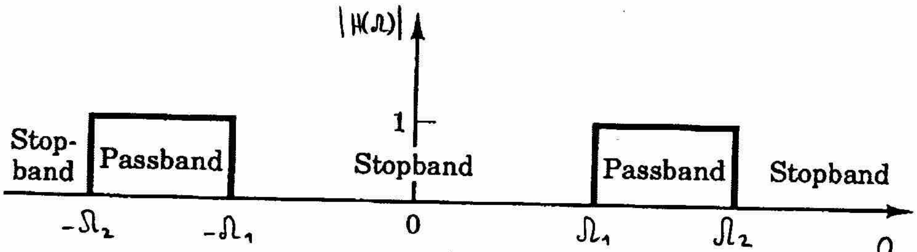

(a)

← Βαθυπερατό (low pass)



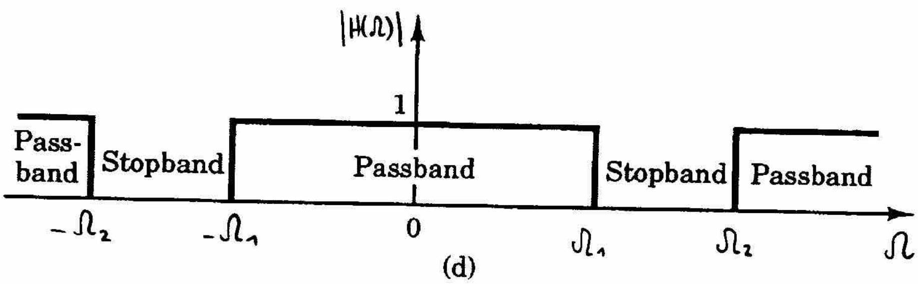

(b)

← Υψιπερατό (high pass)




(c)

← Ζωνοπερατό (band pass)



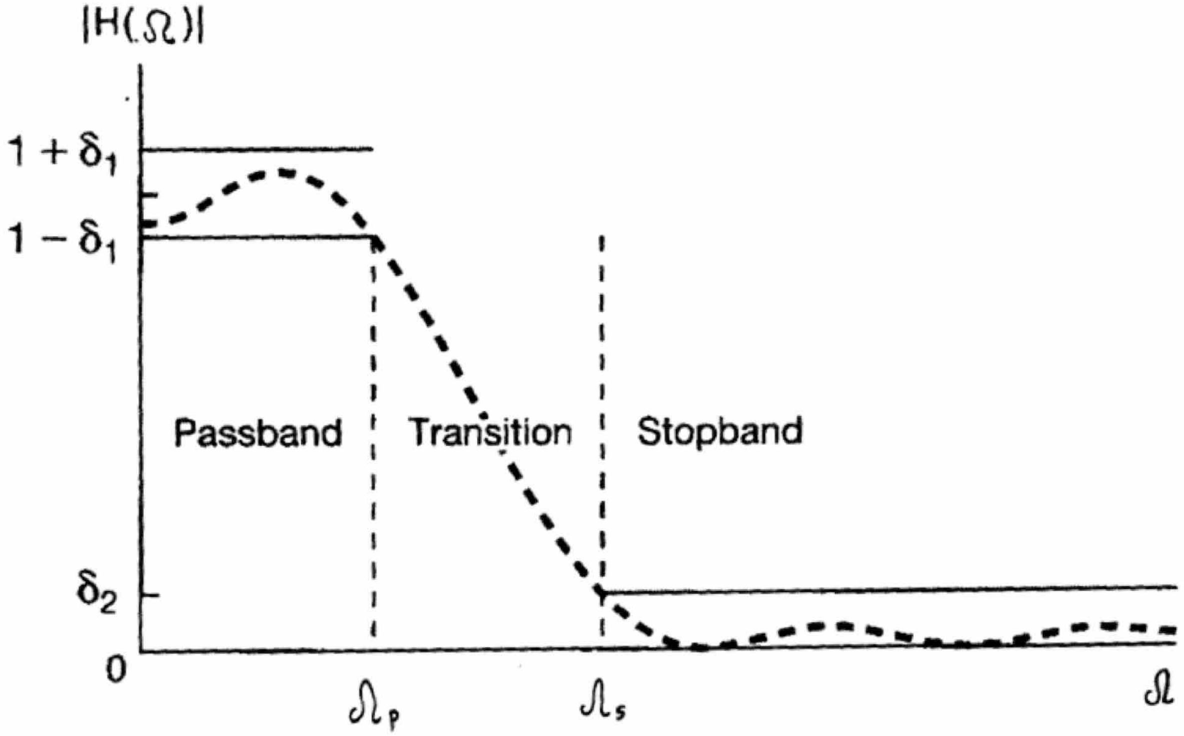

(d)

← Απόρριψης Ζώνης (band stop)

Τα ιδανικά φίλτρα είναι είναι μη αιτιατά αφού η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είναι μη μηδενική για $t<0$.

Τα φυσικά (πραγματοποιήσιμα) φίλτρα πρέπει να είναι αιτιατά. Για να προσεγγίσουμε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας των ιδανικών (μη αιτιατών) φίλτρων, τα σχεδιάζουμε έτσι ώστε η κρουστική απόκριση των φυσικών φίλτρων να είναι ίδια με την κρουστική απόκριση των ιδανικών, αλλά καθυστερημένη στον χρόνο. Αυτή η καθυστέρηση στον χρόνο έχει ως αποτέλεσμα την αρνητική φάση στην απόκριση συχνότητας του φυσικού φίλτρου.

## ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ (ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ)




Τα πραγματικά φίλτρα προσπαθούν να προσεγγίσουν τα ιδανικά.

- Ορισμένα επιδιώκουν να προσεγγίσουν το πλάτος όσο το δυνατόν πιο καλά, αγνοώντας την απόκριση φάσης, όπως για παράδειγμα τα φίλτρα Butterworth, Chebyshev και ελλειπτικά. Τέτοια φίλτρα είναι κατάλληλα για ακουστικά σήματα (audio signals), αφού η ανθρώπινη ακοή δεν είναι ευαίσθητη στην ολίσθηση της φάσης των συνιστωσών του σήματος.
- Άλλα φίλτρα, όπως το φίλτρο Bessel, επιδιώκουν να προσεγγίσουν τη φάση κατά το δυνατόν καλύτερα, αγνοώντας την απόκριση μέτρου.
- Είναι αδύνατον να βελτιστοποιήσουμε μέτρο και φάση ταυτόχρονα, αφού η απόκριση φάσης ενός ευσταθούς αιτιατού φίλτρου με δεδομένη απόκριση μέτρου δεν μπορεί να επιλεγεί τυχαία, όπως και το αντίθετο.

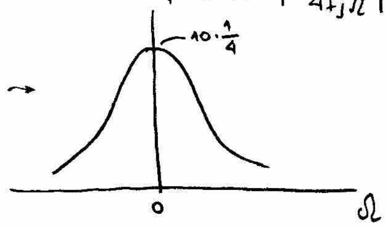
ΑΣΚΗΣΗ Σε ιδανικό ζωνοδιαβατό (bandpass) φίλτρο με συχνότητες αποκοπής $\Omega_1 = 10$ rad/sec και $\Omega_2 = 20$ rad/sec εφαρμόζεται η είσοδος $v_i(t) = 10\, e^{-4t} u(t)$. Να υπολογιστεί ο λόγος της ενέργειας του σήματος εξόδου προς την ενέργεια του σήματος εισόδου. Να σχεδιαστούν τα φάσματα (μέτρο μόνο) εισόδου, εξόδου και φίλτρου.

ΛΥΣΗ

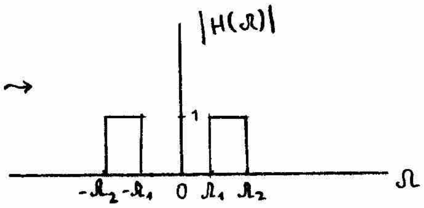
Ενέργεια σήματος εισόδου[1]: $E_i = \int_{-\infty}^{\infty} |v_i(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} 10^2 \left(e^{-4t}\right)^2 dt = 100 \frac{1}{-8} e^{-8t}\Big|_0^{\infty} = \frac{25}{2}$

$$|V_i(\Omega)| = \left|\frac{10}{4+j\Omega}\right| = \frac{10}{\sqrt{4^2+\Omega^2}}$$

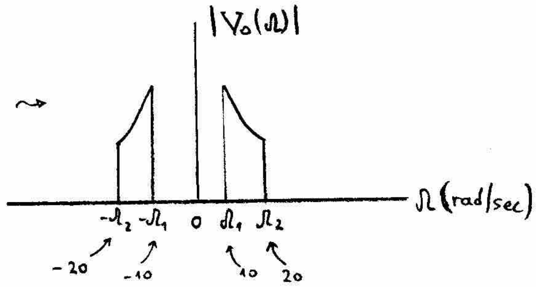
είσοδος →




φίλτρο →




έξοδος →




Ενέργεια σήματος εξόδου:

$$E_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |V_o(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\, 2\int_0^{\infty} |V_i(\Omega)\cdot H(\Omega)|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} |V_i(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{10}^{20} \left|\frac{10}{4+j\Omega}\right|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{100}{\pi}\int_{10}^{20} \frac{1}{4^2+\Omega^2} d\Omega =$$

$$= \frac{100}{\pi}\,\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{4}\right)\Big|_{10}^{20} =$$

$$= \frac{25}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{20}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{10}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{25}{\pi}\left[1.3734 - 1.1903\right] =$$

$$= \frac{25}{\pi}\, 0.1831$$

Τελικά

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{\frac{25}{\pi}\, 0.1831}{\frac{25}{2}} = \frac{2}{\pi}\, 0.1831 = 0.1166 = 11.66\,\%$$

---

[1] Στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει εάν υπολογίζαμε την ενέργεια στο πεδίο της συχνότητας:

$$E_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |V_i(\Omega)|^2 d\Omega = 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\frac{10}{4+j\Omega}\right|^2 d\Omega = \frac{100}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{4^2+\Omega^2} d\Omega = \frac{100}{\pi}\left[\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{4}\right)\right]\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{100}{4\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$$