ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

5 – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΣΕΙΡΑ FOURIER

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΣΕΙΡΑ FOURIER

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt$$

$$c_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt$$

Ανάλυση

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\Omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\Omega_0 t)$$

$$t \in [t_0, t_0+T_0]$$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ η βασική συχνότητα

Σύνθεση

$$\Updownarrow$$

$$A_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2} \qquad \theta_k = -\tan^{-1}\frac{c_k}{b_k} \qquad x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$

Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier με τρεις ισοδύναμους τρόπους ως εξής:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t}$	$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\,dt$
$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$	$A_k = 2\lvert a_k\rvert$
$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \cos(k\Omega_0 t) + c_k \sin(k\Omega_0 t)]$	$2a_k = b_k - jc_k$

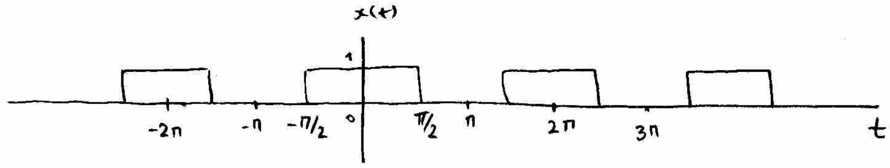
Σχόλια:

- Η περίοδος $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι κοινή για όλα τα σήματα $e^{jk\Omega_0 t}$, $\cos(k\Omega_0 t)$, $\sin(k\Omega_0 t)$ (συναρτήσεις βάσης) στα οποία αναλύεται το περιοδικό σήμα $x(t)$.

  $$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = k\cdot\frac{2\pi}{k\Omega_0} = kT_k$$

- Οι συναρτήσεις βάσης στη διάρκεια μιας περιόδου T_0 είναι χρονικά συσχετισμένες και αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής και της τριγωνομετρικής σειράς Fourier του σήματος $x(t)$.



ΛΥΣΗ Η περίοδος του σήματος είναι 2π, δηλαδή $T_0 = 2\pi \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$

<u>Εκθετική σειρά Fourier</u>

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dt = \frac{1}{2\pi}\, t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot e^{-jk\cdot 1\cdot t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-1}{jk}\, e^{-jkt}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi jk}\left[e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{\cancel{2}\pi \cancel{j} k}\,\cancel{2}\cancel{j}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

Συνεπώς το σήμα $x(t)$ εκφράζεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jkt} =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \alpha_k e^{jkt} =$$

$$= \frac{1}{2} + \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j2t} + \alpha_3 e^{j3t} + \alpha_4 e^{j4t} + \alpha_5 e^{j5t} + \ldots +$$
$$+ \alpha_{-1} e^{-jt} + \alpha_{-2} e^{-j2t} + \alpha_{-3} e^{-j3t} + \alpha_{-4} e^{-j4t} + \alpha_{-5} e^{-j5t} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{jt} + 0 + \frac{-1}{3\pi} e^{j3t} + 0 + \frac{1}{5\pi} e^{j5t} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{\pi} e^{-jt} + 0 + \frac{-1}{3\pi} e^{-j3t} + 0 + \frac{1}{5\pi} e^{-j5t} + \ldots$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Συνεχίζοντας τις πράξεις καταλήγουμε στην τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier, ως εξής:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) - \frac{1}{3\pi}\left(e^{j3t} + e^{-j3t}\right) + \frac{1}{5\pi}\left(e^{j5t} + e^{-j5t}\right) - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\, 2\cos t - \frac{1}{3\pi}\, 2\cos 3t + \frac{1}{5\pi}\, 2\cos 5t - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos t}{1} - \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} - \frac{\cos 7t}{7} + \ldots\right]$$

Τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dt = \frac{1}{2\pi}\, t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k\pi}\sin(kt)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-k\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Συνεπώς

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{για } k = \text{άρτιο} \\ \dfrac{2}{k\pi} & \text{για } k = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ \dfrac{-2}{k\pi} & \text{για } k = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

$$c_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot\sin(kt)\,dt = 0$$

αφού πρόκειται για περιττή συνάρτηση

Άρα το σήμα $x(t)$ γράφεται ως:

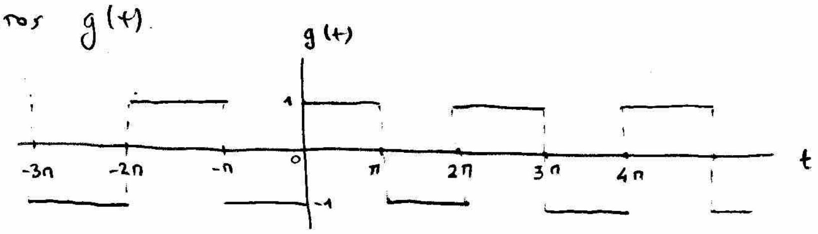
$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos(k\Omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\sin(k\Omega_0 t) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(kt) + 0 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5t) - \frac{2}{7\pi}\cos(7t) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos t}{1} - \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} - \frac{\cos 7t}{7} + \ldots\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η εκθετική και η τριγωνομετρική σειρά Fourier του σήματος $g(t)$.



ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι η $g(t)$ σε σχέση με την $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{για } |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ και περίοδο $T_0 = 2\pi$ που είδαμε σε προηγούμενη λύση, είναι μετατοπισμένη κατά $\pi/2$ (δηλ. έχει υποστεί καθυστέρηση κατά $\pi/2$), είναι μετατοπισμένη στον κάθετο άξονα κατά $-1/2$ και τέλος έχει πλάτος 2, αντί για 1 που έχει η $x(t)$, δηλαδή έχει υποστεί κλιμάκωση πλάτους κατά 2. Συνεπώς

$$g(t) = 2\cdot\left[x\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] = 2\,x\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - 1$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές της εκθετικής και της τριγωνομετρικής σειράς Fourier βάσει των αντίστοιχων συντελεστών της $x(t)$ και των ιδιοτήτων της σειράς Fourier. Έχουμε λοιπόν:

$$F\{g(t)\} = F\left\{2\,x\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - 1\right\} \Rightarrow$$

$$g_k = 2\,F\left\{x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} - F\{1\} =$$

$$= 2\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}\,\alpha_k - F\{1\}$$

Για $k=0 \rightarrow g_0 = 2\cdot\alpha_0 - 1 = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού η dc συνιστώσα g_0 είναι η μέση τιμή του σήματος.

Για $k \neq 0 \rightarrow g_k = 2\,e^{-jk\frac{\pi}{2}}\,\alpha_k = 2\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$

Για k άρτιο, δηλ. $k=2m$ έχουμε $g_{2m} = 2\cdot e^{-jm\pi}\,\frac{\sin(m\pi)}{2m\pi} = 0$

Για k περιττό, δηλ. $k=2m+1$ έχουμε $g_{2m+1} = 2\cdot e^{-j(2m+1)\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sin((2m+1)\pi/2)}{(2m+1)\pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow g_{2m+1} = \frac{2}{(2m+1)\pi}\left[\cancelto{0}{\cos(2m+1)\frac{\pi}{2}} - j\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]\sin(2m+1)\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{-2j}{(2m+1)\pi}\sin^2(2m+1)\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{-2j}{(2m+1)\pi}\left[(-1)^m\right]^2 = \frac{-2j}{(2m+1)\pi}$$

Τελικά οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier είναι:

$$g_0 = 0 \qquad g_{2m} = 0,\ m \neq 0 \qquad g_{2m+1} = \frac{-2j}{(2m+1)\pi} = \frac{2}{j\pi(2m+1)}$$

Το σήμα $g(t)$ γράφεται ως:

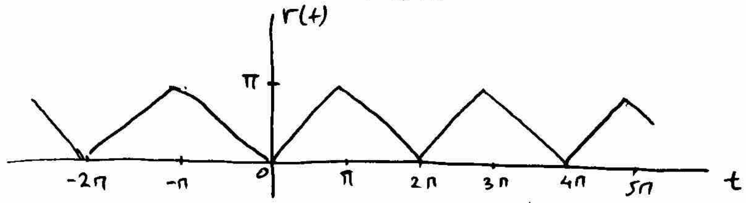
$$g(t) = \frac{2}{j\pi}\left[\frac{e^{jt}}{1} + \frac{e^{j3t}}{3} + \frac{e^{j5t}}{5} + \dots + \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-jt}}{1} - \frac{e^{-j3t}}{3} - \frac{e^{-j5t}}{5} - \dots\right]$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις μπορούμε εύκολα να βρούμε την τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier:

$$g(t) = \frac{2}{j\pi}\left[2j\frac{\sin t}{1} + 2j\frac{\sin 3t}{3} + 2j\frac{\sin 5t}{5} + \dots\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η εκθετική και τριγωνομετρική σειρά Fourier του σήματος $r(t)=|t|=\begin{cases} t & 0<t<\pi \\ -t & -\pi<t<0 \end{cases}$



ΛΥΣΗ

Συγκρίνοντας το $r(t)$ με το σήμα $g(t)$ της προηγούμενης άσκησης, παρατηρούμε ότι $\frac{dr(t)}{dt}=g(t)$ ή $r(t)=\int g(t)\,dt \Rightarrow F\{r(t)\}=F\left\{\int g(t)dt\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_k=\frac{1}{jk\Omega_0}\cdot g_k \Rightarrow r_k=\frac{1}{jk}g_k \quad \text{αφού } T_0=2\pi \text{ και } \Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=1$$

Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε:
Για $k\neq 0$
k άρτιο, $k=2m \rightsquigarrow g_{2m}=0$, άρα και $r_{2m}=0$

k περιττό, $k=2m+1 \rightsquigarrow g_{2m+1}=\frac{2}{j\pi(2m+1)}$, άρα $r_{2m+1}=\underset{\uparrow k=2m+1}{\frac{1}{jk}}\cdot\frac{2}{j\pi(2m+1)}=\frac{-2}{\pi(2m+1)^2}$

Για $k=0$ έχουμε τη μέση τιμή του σήματος, η οποία όμως δεν μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $r_k=\frac{1}{jk}g_k$ λόγω απροσδιοριστίας, αφού ο αριθμητής είναι 0 ($g_0=0$) και ο παρονομαστής επίσης 0 ($k=0$).
Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε τον ορισμό:

$$r_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} r(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-t)\,dt+\int_0^{\pi}t\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[-(0-\pi^2)+(\pi^2-0)\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi}2\pi^2=\frac{\pi}{2}$$

Άρα το σήμα $r(t)$ εκφράζεται ως:

$$r(t)=r_0+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}r_k e^{jk\Omega_0 t}=r_0+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}r_k e^{jkt} \Rightarrow$$

$$r(t) = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{-2}{\pi 1^2} e^{j1t} + \frac{-2}{\pi 3^2} e^{j3t} + \frac{-2}{\pi 5^2} e^{j5t} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{-2}{\pi 1^2} e^{-j1t} + \frac{-2}{\pi 3^2} e^{-j3t} + \frac{-2}{\pi 5^2} e^{-j5t} + \dots \right]$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις στην παραπάνω εκθετική μορφή της σειράς Fourier, και κάνοντας χρήση της ταυτότητας του Euler, καταλήγουμε στην τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier.

$$r(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{jt}}{1^2} + \frac{e^{j3t}}{3^2} + \frac{e^{j5t}}{5^2} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-jt}}{1^2} + \frac{e^{-j3t}}{3^2} + \frac{e^{-j5t}}{5^2} + \dots \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right]$$

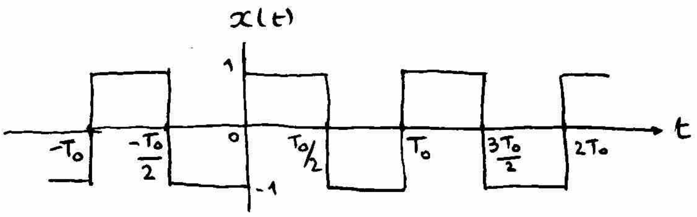
ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται το τραίνο τετραγωνικών παλμών $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0<t<T_0/2 \\ -1 & \text{για } \frac{T_0}{2}<t<T_0 \end{cases}$
το οποίο είναι περιοδικό με περίοδο T_0.

α. Να υπολογιστεί η τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier αυτού.

β. Να υπολογιστεί το σφάλμα $e(t)$ μεταξύ του σήματος $x(t)$ και αυτού που προκύπτει από την πρώτη αρμονική.

γ. Να υπολογιστεί το μέσο σφάλμα και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

ΛΥΣΗ α.



Η κυκλική συχνότητα του σήματος είναι $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Ο υπολογισμός της τριγωνομετρικής μορφής της σειράς Fourier του σήματος $x(t)$ μπορεί να γίνει είτε μέσω της εκθετικής σειράς Fourier, είτε απ' ευθείας μέσω των σχέσεων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier. Ας ακολουθήσουμε αυτή τη φορά την δεύτερη επιλογή, δηλαδή τον υπολογισμό μέσω των σχέσεων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier.

Το περιοδικό σήμα $x(t)$ είναι περιττό (αντισυμμετρικό), οπότε η μέση τιμή αυτού είναι μηδέν, δηλαδή $a_0 = 0$.

Οι συντελεστές b_k είναι όλοι μηδενικοί, δηλαδή $b_k = 0$, αφού αυτοί αποτελούν την προβολή του σήματος στις άρτιες συναρτήσεις βάσης $\cos(k\Omega_0 t)$.

Οι συντελεστές c_k είναι αυτοί που τελικά πρέπει να υπολογιστούν, αφού αυτοί αποτελούν τις προβολές του περιττού σήματος $x(t)$ στις περιττές συναρτήσεις βάσης $\sin(k\Omega_0 t)$.

$$c_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2}(1)\sin(k\Omega_0 t)\,dt + \int_{T_0/2}^{T_0}(-1)\sin(k\Omega_0 t)\,dt\right]=$$

$$=\frac{2}{T_0}\frac{1}{k\Omega_0}\left[-\cos(k\Omega_0 t)\Big|_0^{T_0/2} + \cos(k\Omega_0 t)\Big|_{T_0/2}^{T_0}\right]=$$

$$=\frac{2}{T_0}\frac{T_0}{k2\pi}\left[\left[-\cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\frac{T_0}{2}\right)+\cos(k\Omega_0 0)\right]+\left[\cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}T_0\right)-\cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\frac{T_0}{2}\right)\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left[-\cos(k\pi)+\underbrace{\cos(0)}_{1}+\underbrace{\cos(k2\pi)}_{1}-\cos(k\pi)\right]=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left[2-2\cos(k\pi)\right]=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left[1-\cos(k\pi)\right]=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right]=\begin{cases}\dfrac{4}{k\pi} & \text{για } k=\text{περιττός}\\ 0 & \text{για } k=\text{άρτιος}\end{cases}$$

Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι μόνον οι περιττοί συντελεστές είναι διάφοροι του μηδενός. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού όπως έχουμε δει, το σήμα έχει κύκλο εργασίας (duty cycle) 50%.

Τελικά, το σήμα $x(t)$ εκφράζεται ως

$$x(t) = \underbrace{a_0}_{0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos(k\Omega_0 t)}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\sin(k\Omega_0 t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\sin(k\Omega_0 t)=$$

$$=c_1\sin(\Omega_0 t)+c_3\sin(3\Omega_0 t)+c_5\sin(5\Omega_0 t)+\dots=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t)+\frac{4}{3\pi}\sin(3\Omega_0 t)+\frac{4}{5\pi}\sin(5\Omega_0 t)+\dots=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(\Omega_0 t)}{1}+\frac{\sin(3\Omega_0 t)}{3}+\frac{\sin(5\Omega_0 t)}{5}+\dots\right]$$

β. Η πρώτη αρμονική του σήματος είναι η $\frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t)$. Συνεπώς το σφάλμα $e(t)$ μεταξύ του αρχικού σήματος $x(t)$ και της πρώτης αρμονικής του ισούται με:

$$e(t) = x(t) - \frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t) & 0 < t < T_0/2 \\ -1 - \frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t) & T_0/2 < t < T_0 \end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις (κυματομορφές) του σήματος $x(t)$, της πρώτης αρμονικής του και του σφάλματος $e(t)$ δείχνονται στο σχήμα της επόμενης σελίδας.

γ. Το <u>μέσο σφάλμα</u> υπολογίζεται ως:

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} e(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2}\left[1 - \frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t)\right]dt + \int_{T_0/2}^{T_0}\left[-1 - \frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t)\right]dt\right] =$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[t\Big|_0^{T_0/2} + \frac{4}{\pi\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\Big|_0^{T_0/2} - t\Big|_{T_0/2}^{T_0} + \frac{4}{\pi\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\Big|_{T_0/2}^{T_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\left(\frac{T_0}{2} - 0\right) + \frac{4}{\pi\Omega_0}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\frac{T_0}{2}\right) - \cos(\Omega_0 0)\right]\right.$$

$$\left. - \left(T_0 - \frac{T_0}{2}\right) + \frac{4}{\pi\Omega_0}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}T_0\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\frac{T_0}{2}\right)\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\cancel{\frac{T_0}{2}} + \frac{4}{\pi\Omega_0}\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right] - \cancel{\frac{T_0}{2}} + \frac{4}{\pi\Omega_0}\left[\cos(2\pi) - \cos(\pi)\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{4}{\pi\Omega_0}\left[\cancel{\cos(\pi)} - \cancel{\cos(0)} + \cancel{\cos(2\pi)} - \cancel{\cos(\pi)}\right] =$$

$$= 0$$

Στο αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσαμε να έχουμε καταλήξει παρατηρώντας ότι σε μία περίοδο, το τμήμα του $e(t)$ που βρίσκεται στα θετικά είναι ίσο με εκείνο που βρίσκεται στα αρνητικά (βλ. σχήμα).

Το ενδιαφέρον όμως έγκειται στο γεγονός ότι, ενώ το μέσο σφάλμα (average error) προκύπτει μηδενικό, τα σήματα $x(t)$ και $\frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t)$ ΔΕΝ είναι ίδια (ίσα). Άρα, το μέσο σφάλμα δεν μπορεί να αποτελεί μία αξιόπιστη μετρική για τη σύγκριση δύο σημάτων. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο καταφεύγουμε στη χρήση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (average squared error), αφού πρόκειται για μη αρνητική συνάρτηση και συνεπώς δεν μπορεί να υπάρξει αναίρεση των θετικών από τα αρνητικά.

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα υπολογίζεται ως:

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |e(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\left[\underbrace{\int_0^{T_0/2}\left[1-\frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t)\right]^2 dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{T_0/2}^{T_0}\left[-1-\frac{4}{\pi}\sin(\Omega_0 t)\right]^2 dt}_{I_2}\right] =$$

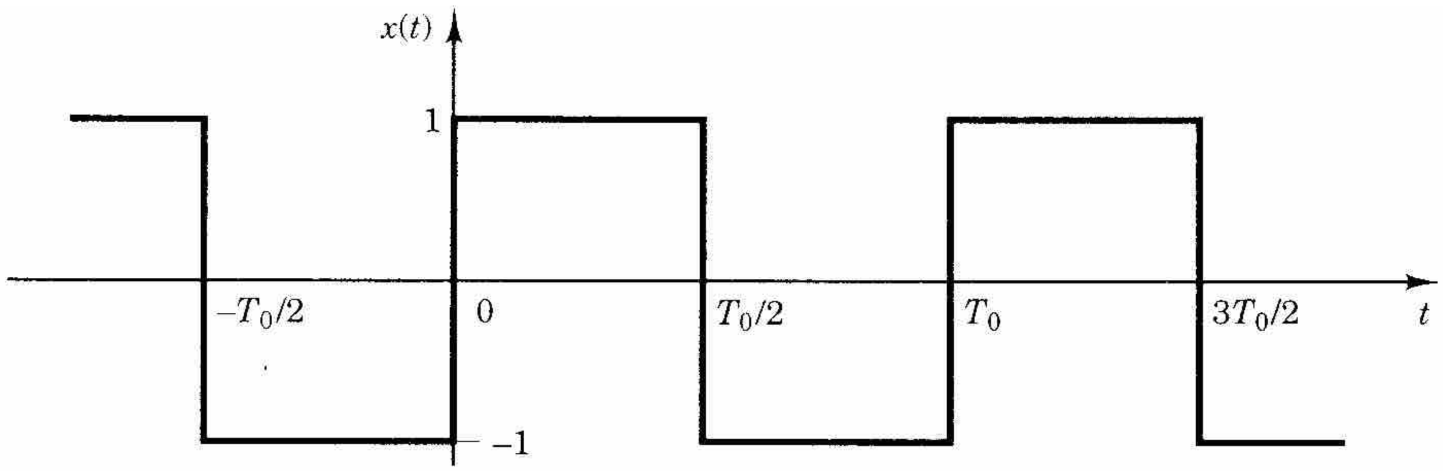
$$= \frac{1}{T_0}\left[I_1 + I_2\right]$$

$$I_1 = \int_0^{T_0/2}\left[1 + \frac{16}{\pi^2}\sin^2(\Omega_0 t) - \frac{8}{\pi}\sin(\Omega_0 t)\right] dt = \left\langle \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right\rangle$$

$$= \int_0^{T_0/2}\left[1 - \frac{8}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2}\cos(2\Omega_0 t) - \frac{8}{\pi}\sin(\Omega_0 t)\right] dt =$$

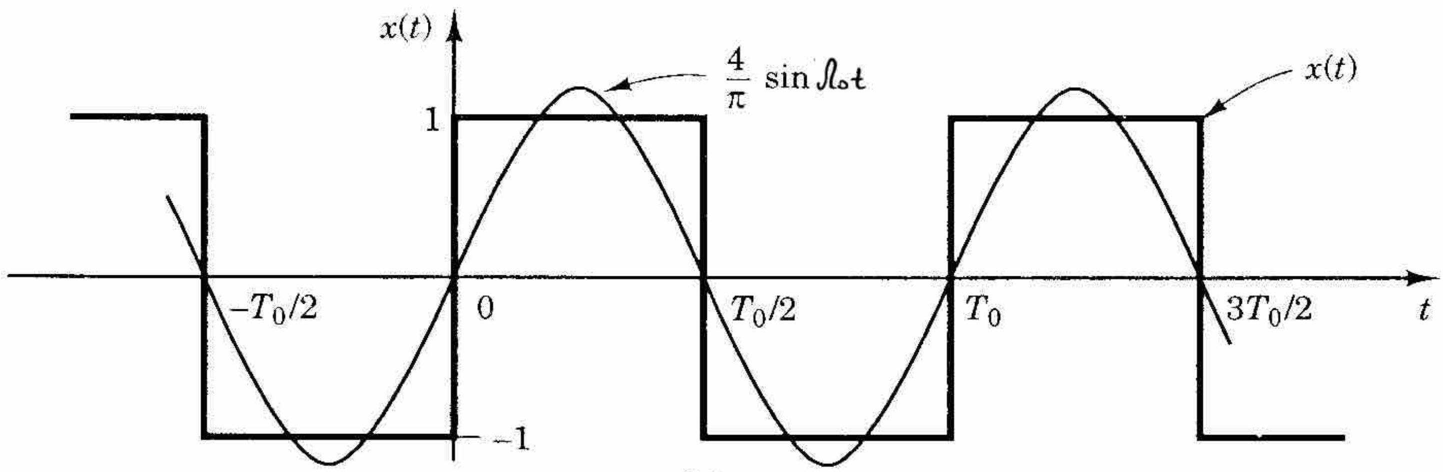
$$= \int_0^{T_0/2}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right) dt - \frac{8}{\pi^2}\int_0^{T_0/2}\cos(2\Omega_0 t)\, dt - \frac{8}{\pi}\int_0^{T_0/2}\sin(\Omega_0 t)\, dt = \ldots$$

Ο ακριβής προσδιορισμός των I_1, I_2 δεν έχει ιδιαίτερη σημασία στην προκειμένη περίπτωση. Το ουσιώδες είναι ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα θα έχει τιμή μη αρνητική και άρα θα μπορούμε να εκτιμήσουμε σωστά το μέγεθος της διαφοράς. Μάλιστα, όπως μπορεί να συνάγει κάποιος, καθώς προσθέτουμε και άλλες αρμονικές η προσέγγιση προς το αρχικό σήμα $x(t)$ θα βελτιώνεται και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα θα ελαττώνεται.



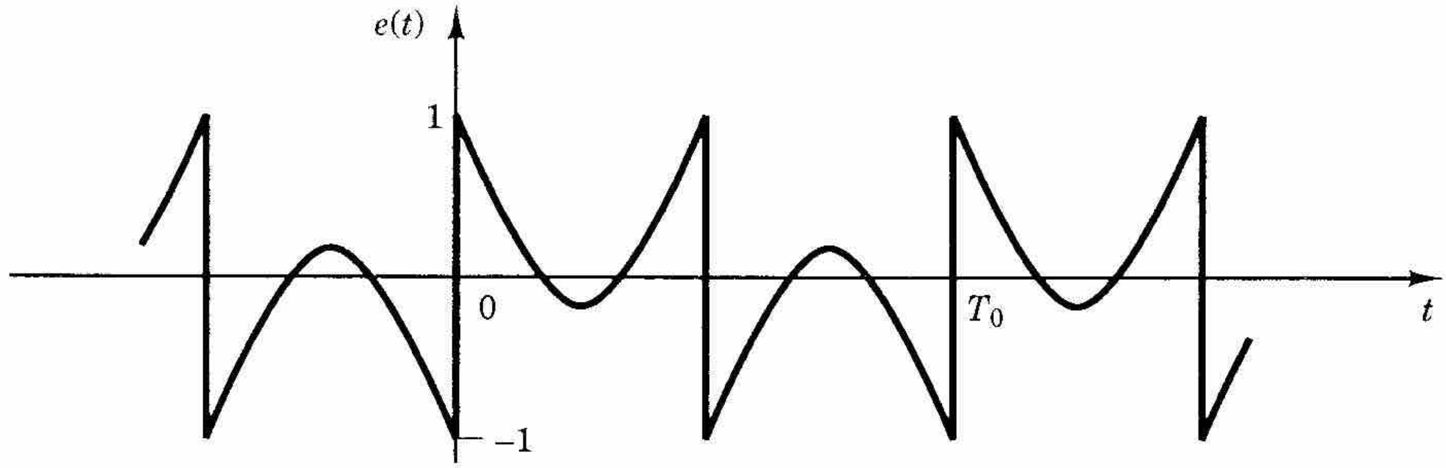
$x(t)$
1
$-T_0/2$
0
$T_0/2$
T_0
$3T_0/2$
t
-1

(a)



$x(t)$
$\frac{4}{\pi}\sin \Omega_0 t$
$x(t)$
1
$-T_0/2$
0
$T_0/2$
T_0
$3T_0/2$
t
-1

(b)



$e(t)$
1
0
T_0
t
-1

(c)

23 ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER

Ἡ σειρὰ Fourier ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ συνάρτηση $f(x)$ ὡρισμένη στὸ διάστημα $c \leqq x \leqq c+2L$, ὅπου c καὶ $L > 0$ εἶναι σταθερές, ὁρίζεται σὰν

23.1 $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

ὅπου

23.2 $$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases}$$

Ἐὰν οἱ $f(x)$ καὶ $f'(x)$ εἶναι τμηματικὰ συνεχεῖς καὶ ἡ $f(x)$ εἶναι περιοδικὴ μὲ περίοδο $2L$, δηλ. $f(x+2L) = f(x)$, τότε ἡ σειρὰ Fourier συγκλίνει στὴν $f(x)$, ἐὰν τὸ x εἶναι σημεῖο συνέχειας, ἢ στὴν $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$, ἐὰν τὸ x εἶναι σημεῖο ἀσυνέχειας.

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΑΣ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER

Ἂν ἡ σειρὰ 23.1 συγκλίνῃ στὴν $f(x)$, τότε

23.3 $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

ὅπου

23.4 $$c_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & n = 0 \end{cases}$$

Η ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ PARSEVAL

23.5 $$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} \{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ PARSEVAL

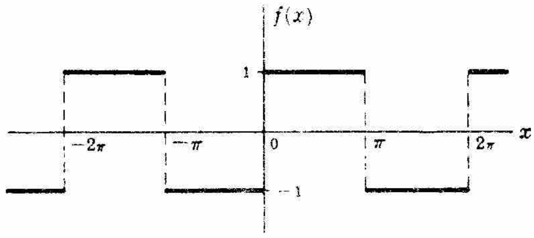
23.6 $$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n c_n + b_n d_n)$$

ὅπου a_n, b_n καὶ c_n, d_n εἶναι οἱ συντελεστὲς Fourier τῆς $f(x)$ καὶ τῆς $g(x)$ ἀντίστοιχα.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

23.7 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$

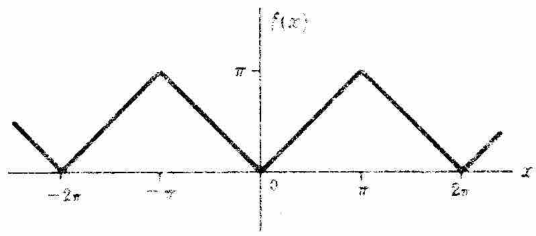
$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$



Σχ. 23-1

23.8 $f(x) = |x| = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases}$

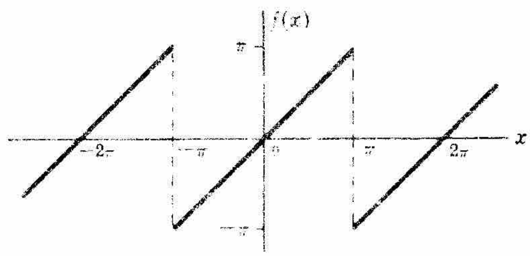
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$



Σχ. 23-2

23.9 $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

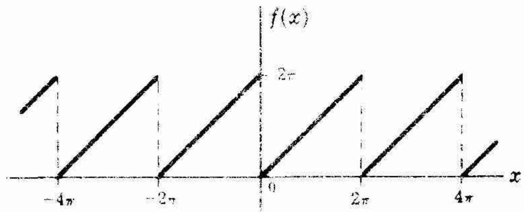
$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$



Σχ. 23-3

23.10 $f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$

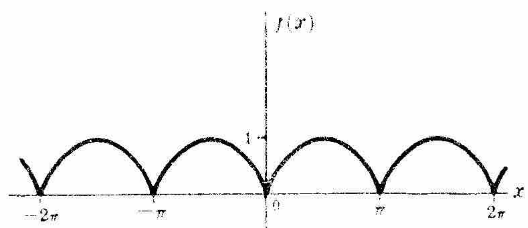
$$\pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right)$$



Σχ. 23-4

23.11 $f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$

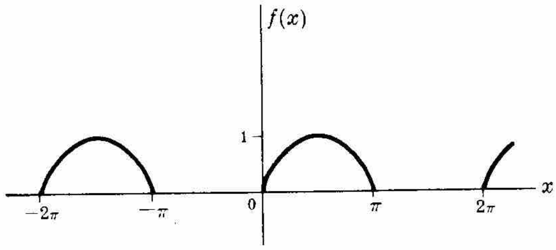
$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$



Σχ. 23-5

23.12 $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

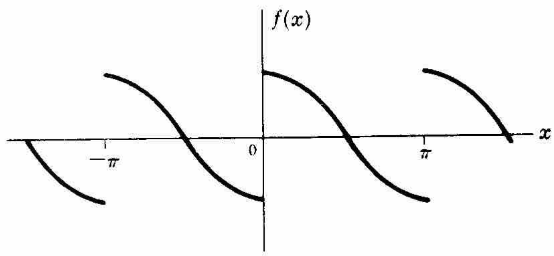
$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$



Σχ. 23-6

23.13 $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$

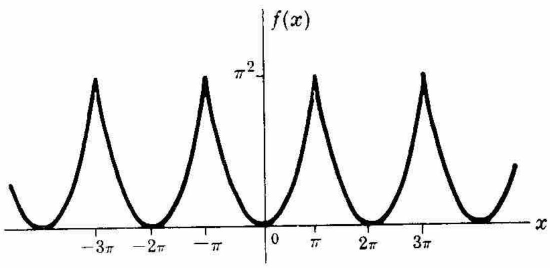
$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2\sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3\sin 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$



Σχ. 23-7

23.14 $f(x) = x^2, \ -\pi < x < \pi$

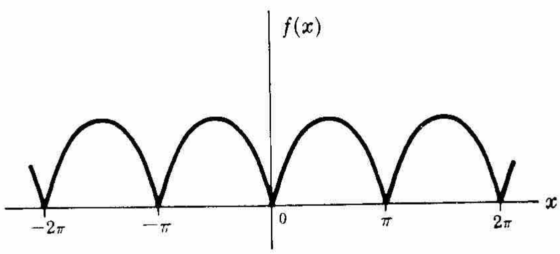
$$\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$



Σχ. 23-8

23.15 $f(x) = x(\pi - x), \ 0 < x < \pi$

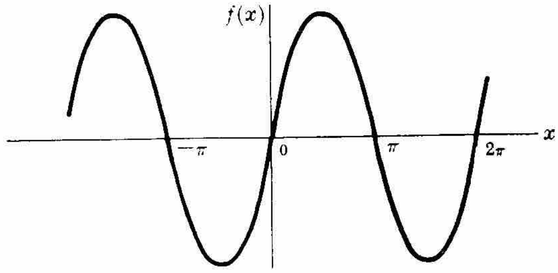
$$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right)$$



Σχ. 23-9

23.16 $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x), \ -\pi < x < \pi$

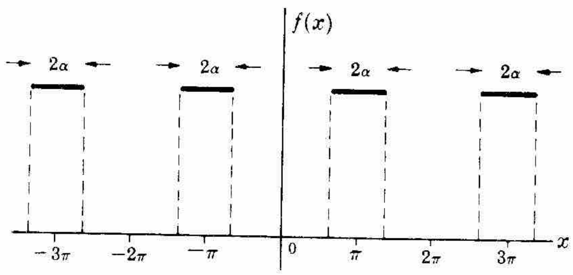
$$12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \cdots\right)$$



Σχ. 23-10

23.17 $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi - \alpha \\ 1 & \pi - \alpha < x < \pi + \alpha \\ 0 & \pi + \alpha < x < 2\pi \end{cases}$

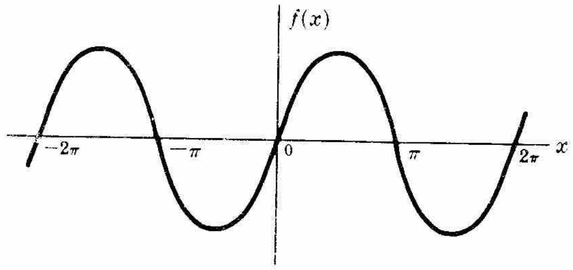
$$\frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\cos x}{1} - \frac{\sin 2\alpha\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3\alpha\cos 3x}{3} - \cdots\right)$$



Σχ. 23-11

23.18 $f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & 0 < x < \pi \\ -x(\pi - x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \cdots\right)$$



Σχ. 23-12

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

23.19 $f(x) = \sin\mu x, \quad -\pi < x < \pi, \quad \mu \neq$ ἀκέραιος

$$\frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 - \mu^2} - \cdots\right)$$

23.20 $f(x) = \cos\mu x, \quad -\pi < x < \pi, \quad \mu \neq$ ἀκέραιος

$$\frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1^2 - \mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - \mu^2} - \cdots\right)$$

23.21 $f(x) = \tan^{-1}[(a\sin x)/(1 - a\cos x)], \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$a\sin x + \frac{a^2}{2}\sin 2x + \frac{a^3}{3}\sin 3x + \cdots$$

23.22 $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2), \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$-2\left(a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \cdots\right)$$

23.23 $f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}[(2a\sin x)/(1 - a^2)], \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$a\sin x + \frac{a^3}{3}\sin 3x + \frac{a^5}{5}\sin 5x + \cdots$$

23.24	$f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}[(2a\cos x)/(1-a^2)], \quad -\pi < x < \pi, \quad a < 1$	$a\cos x - \frac{a^3}{3}\cos 3x + \frac{a^5}{5}\cos 5x - \cdots$
23.25	$f(x) = e^{\mu x}, \quad -\pi < x < \pi$	$\frac{2\sinh \mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mu\cos nx - n\sin nx)}{\mu^2+n^2}\right)$
23.26	$f(x) = \sinh \mu x, \quad -\pi < x < \pi$	$\frac{2\sinh \mu\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2+\mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2+\mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2+\mu^2} - \cdots\right)$
23.27	$f(x) = \cosh \mu x, \quad -\pi < x < \pi$	$\frac{2\mu\sinh \mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{1^2+\mu^2} + \frac{\cos 2x}{2^2+\mu^2} - \frac{\cos 3x}{3^2+\mu^2} + \cdots\right)$
23.28	$f(x) = \ln\lvert\sin \tfrac{1}{2}x\rvert, \quad 0 < x < \pi$	$-\left(\ln 2 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots\right)$
23.29	$f(x) = \ln\lvert\cos \tfrac{1}{2}x\rvert, \quad -\pi < x < \pi$	$-\left(\ln 2 - \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + \cdots\right)$
23.30	$f(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \tfrac{1}{2}\pi x + \tfrac{1}{4}x^2, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$	$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots$
23.31	$f(x) = \tfrac{1}{12}x(x-\pi)(x-2\pi), \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$	$\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \cdots$
23.32	$f(x) = \tfrac{1}{90}\pi^4 - \tfrac{1}{12}\pi^2x^2 + \tfrac{1}{12}\pi x^3 - \tfrac{1}{48}x^4, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$	$\frac{\cos x}{1^4} + \frac{\cos 2x}{2^4} + \frac{\cos 3x}{3^4} + \cdots$