

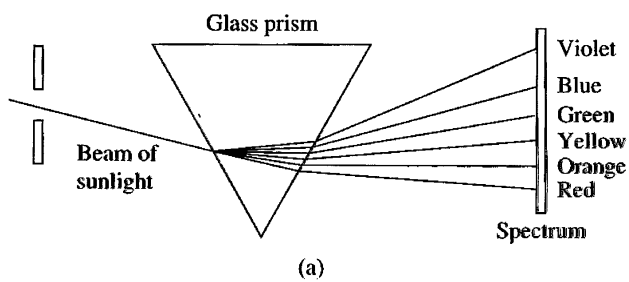
Σήματα και Συστήματα στο Πεδίο της Συχνότητας



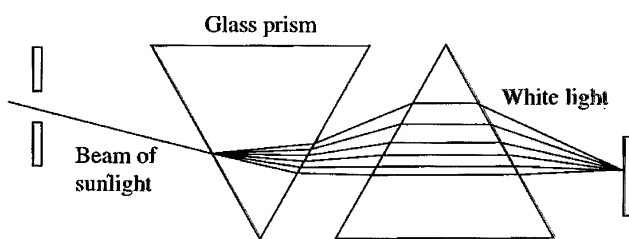
Sir Isaac Newton

Ανάλυση & Σύνθεση Συχνοτήτων

Frequency Analysis of Continuous-Time Signals



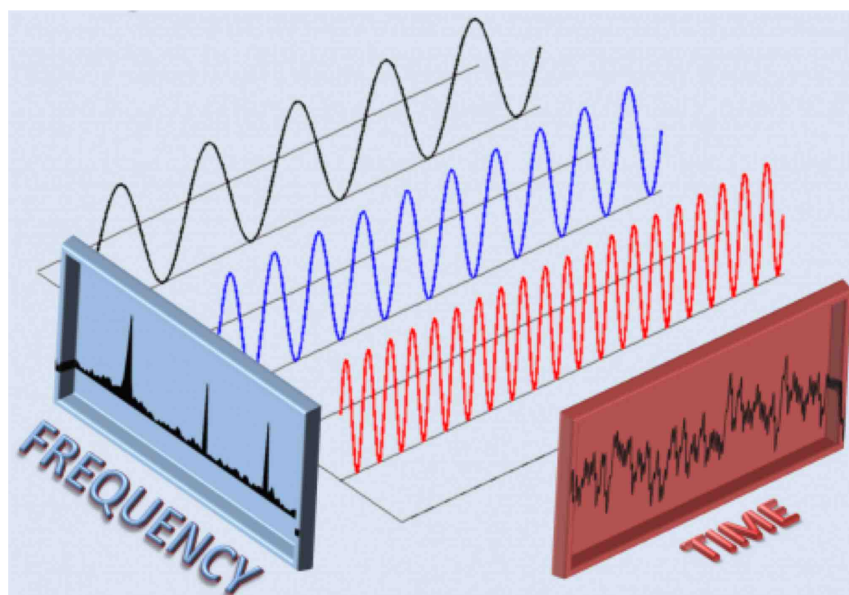
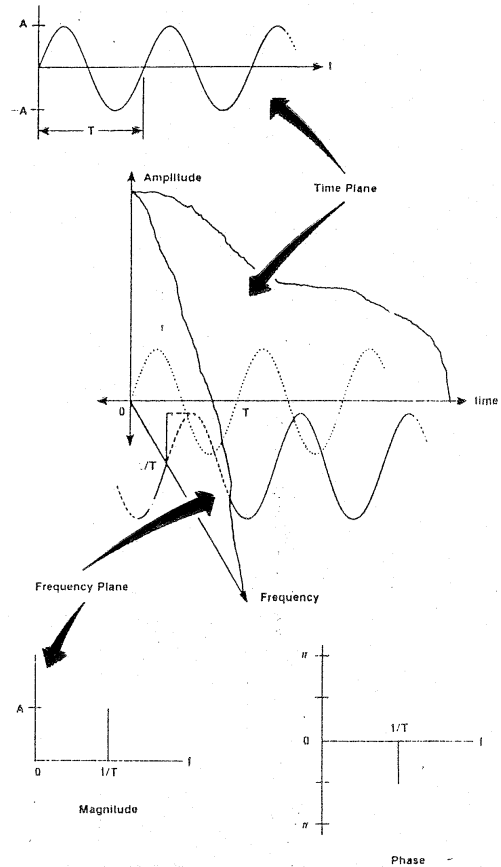
(a)



(b)

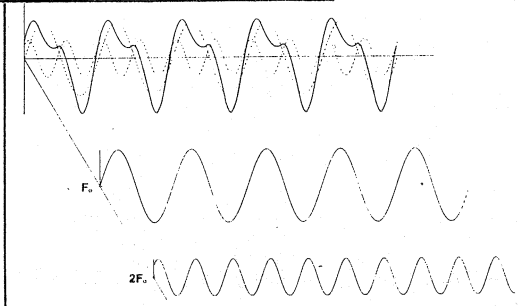
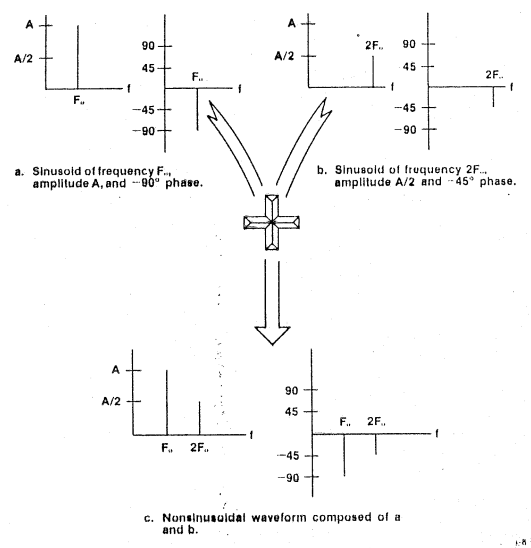
(a) Analysis and
(b) synthesis of the white light (sunlight)
using glass prisms.

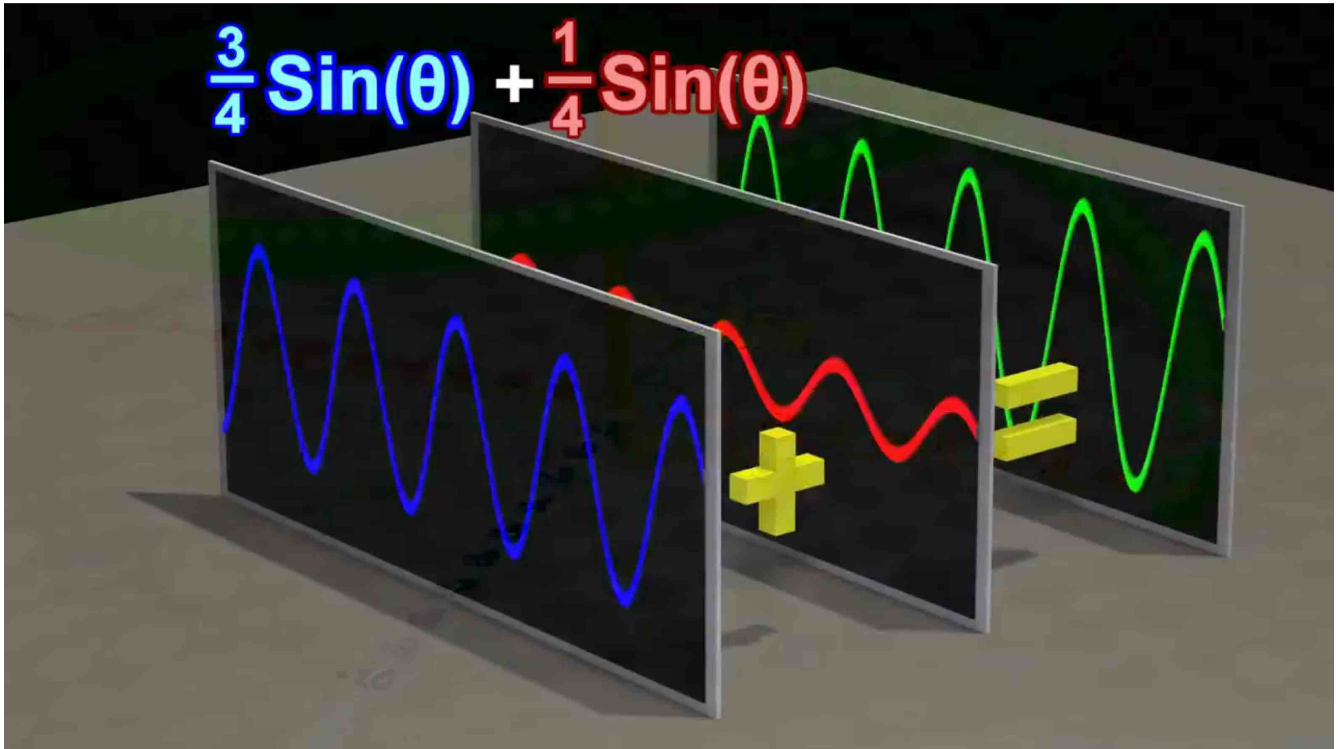
Χρόνος & Συχνότητα: δύο βάσεις περιγραφής !



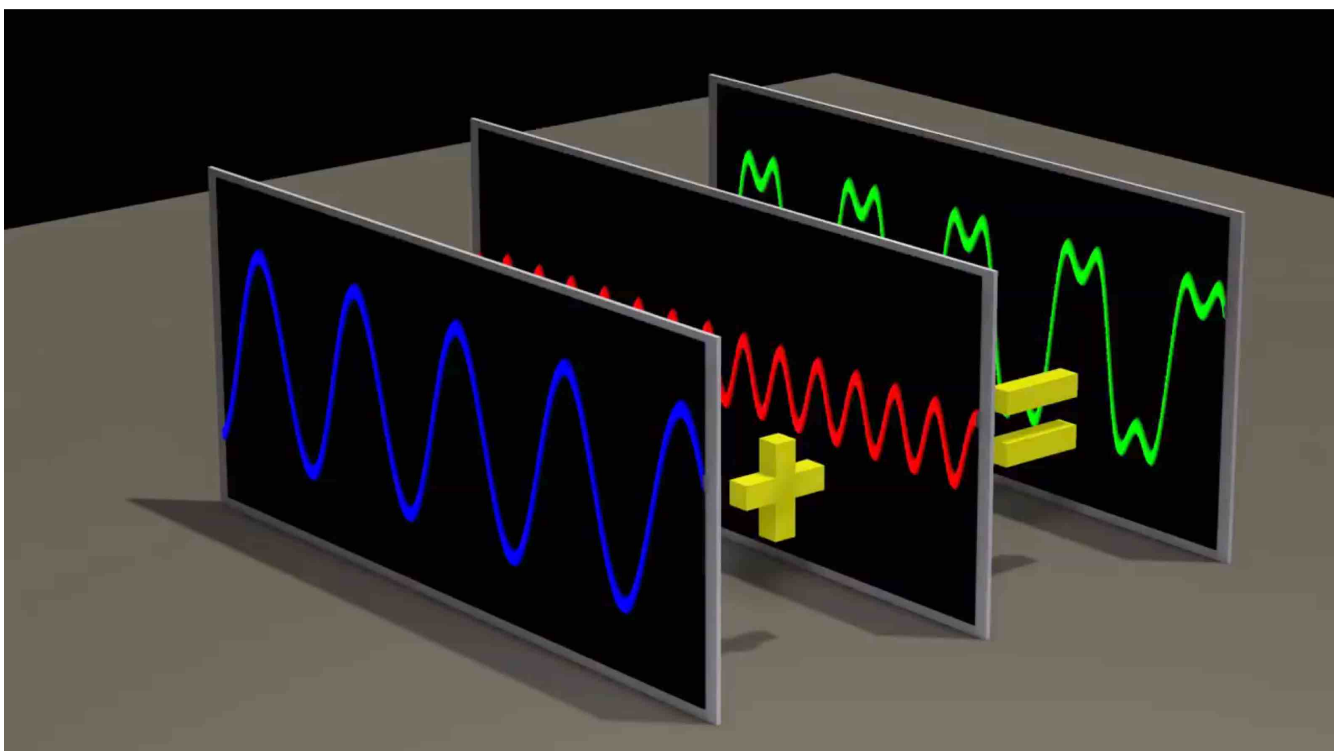


**Μη ημιτονοειδείς
κυματομορφές
συντίθενται από
ημιτονοειδείς !**

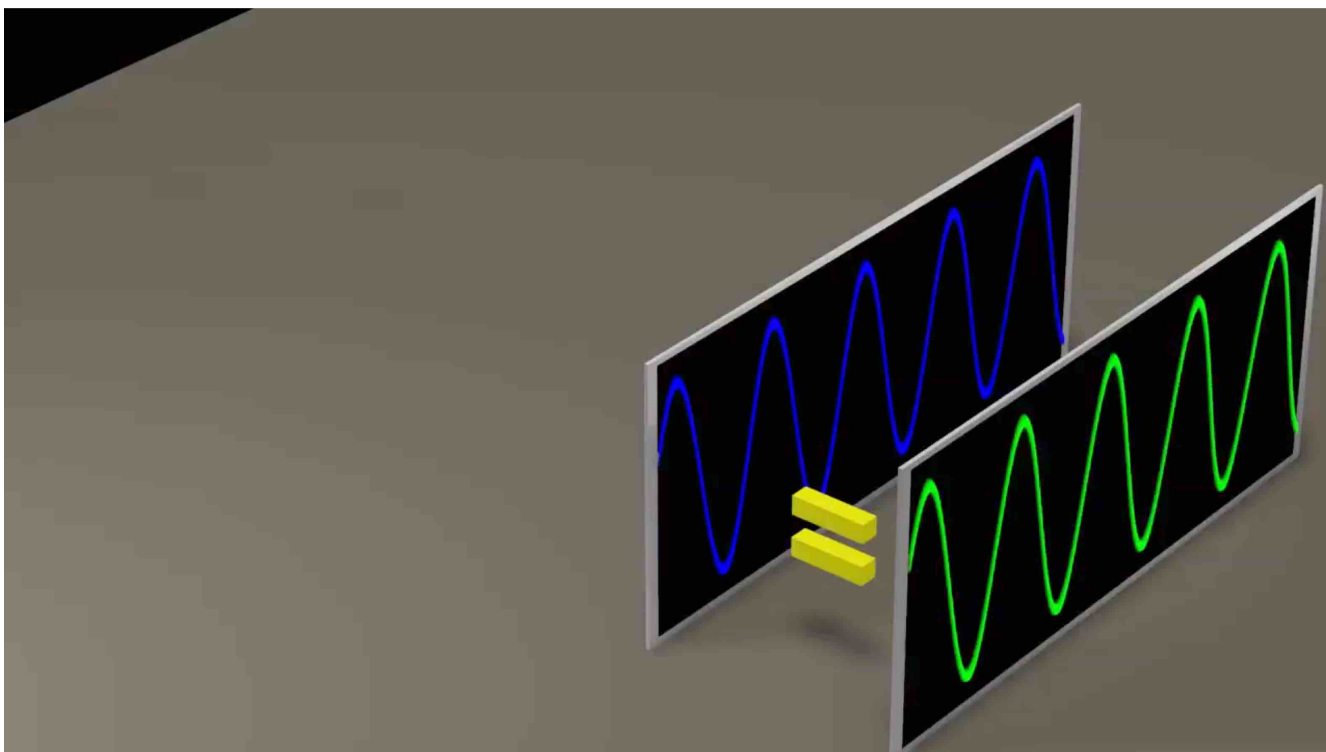




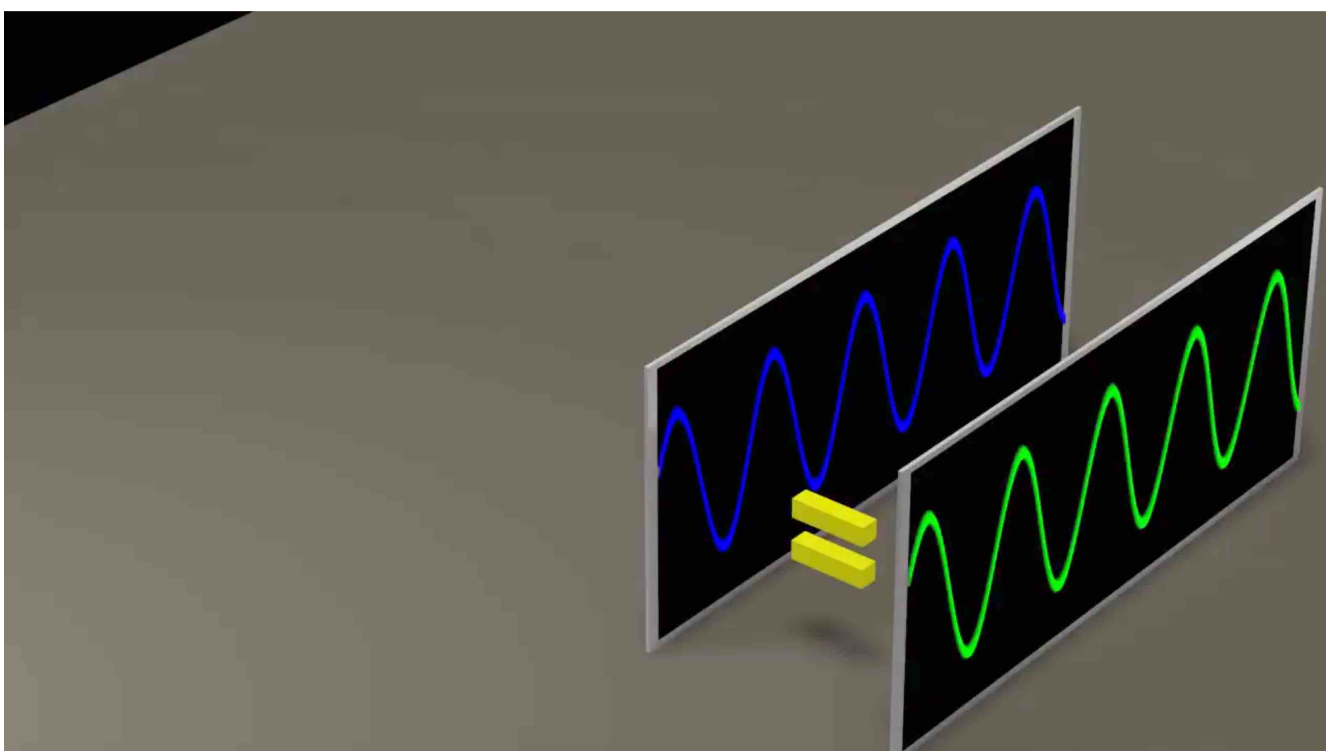
Source: Physics Videos by Eugene Khutoryansky (Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum)
<https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8ISkFM>



Source: Physics Videos by Eugene Khutoryansky (Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum)
<https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8ISkFM>



Source: Physics Videos by Eugene Khutoryansky (Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum)
<https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8ISkfM>



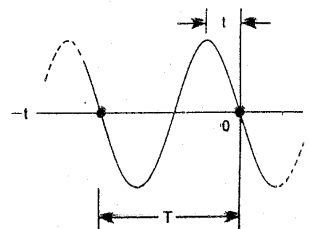
Source: Physics Videos by Eugene Khutoryansky (Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum)
<https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8ISkfM>

Εποπτική Προσέγγιση ...

Phase diagrams for sinusoids can be determined by looking at the positive peak closest to time zero.

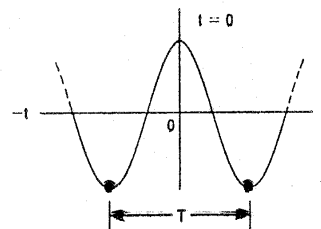
If positive peak occurs after time zero, the sinusoid is said to be delayed. As matter of convention, delay is denoted by negative phase.

If positive peak occurs before time zero, then the sinusoid is said to be advanced. An advance is denoted by positive phase.

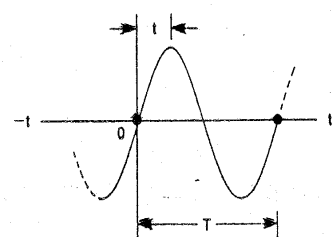


a. Advanced.

$$\theta = \frac{t}{T} 360^\circ$$

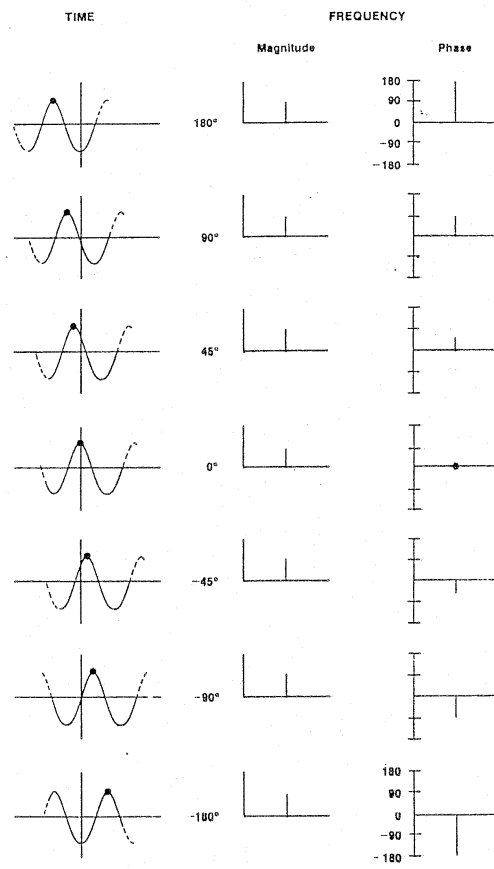


b. Zero.

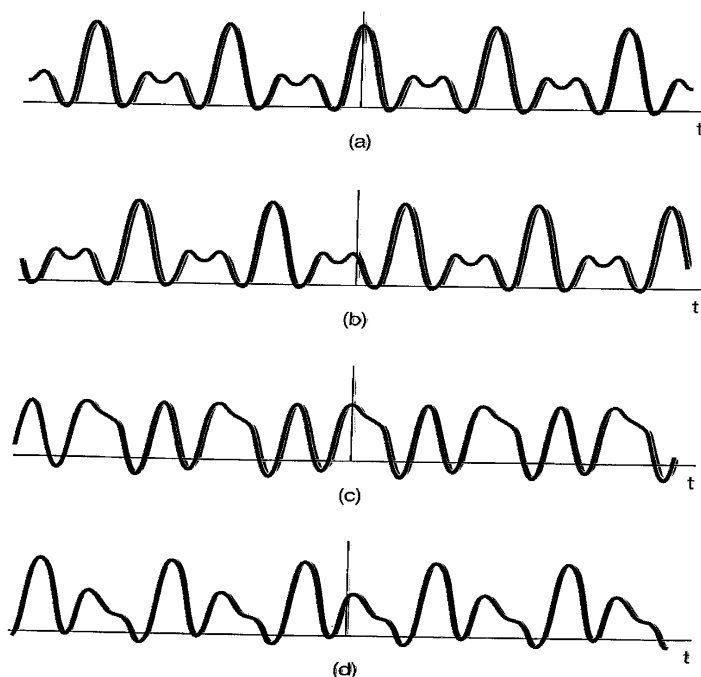


c. Delayed.

Η Φάση είναι απλά ένας δείκτης θέσης και όχι ένας δείκτης ενέργειας !



Ο σημαντικός ρόλος της Φάσης



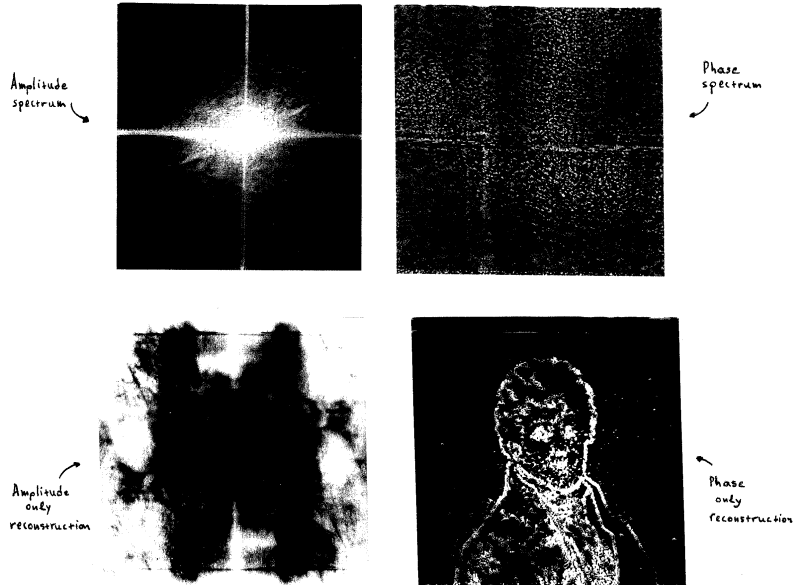
$$x(t) = 1 + (1/2)\cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + (2/3)\cos(6\pi t + \phi_3)$$

The signal $x(t)$ given in eq. (6.3) for several different choices of the phase angles ϕ_1 , ϕ_2 , and ϕ_3 :
 (a) $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$; (b) $\phi_1 = 4$ rad, $\phi_2 = 8$ rad, $\phi_3 = 12$ rad;
 (c) $\phi_1 = 6$ rad, $\phi_2 = -2.7$ rad, $\phi_3 = 0.93$ rad; (d) $\phi_1 = 1.2$ rad, $\phi_2 = 4.1$ rad, $\phi_3 = -7.02$ rad.

While the **amplitude spectrum** specifies **how much** of each sinusoidal component is present, the **phase information** specifies **where** each of the sinusoidal component resides within the image.

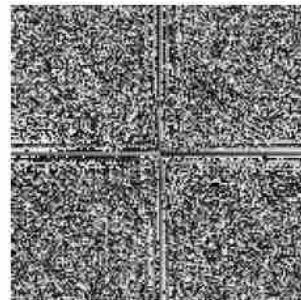


Jean Baptiste Joseph Fourier and his Fourier transform



Εικόνα **Μέτρο Fourier** **Φάση Fourier**

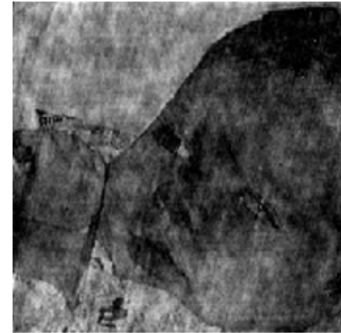
#1



#2



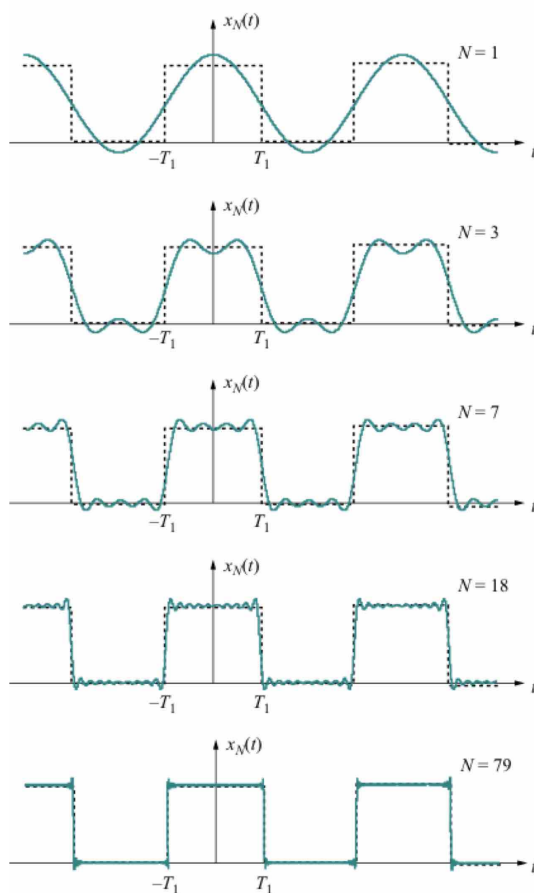
Μέτρο #2 + Φάση #1



Μέτρο #1 + Φάση #2



Εποπτικής Προσέγγισης Συνέχεια ...

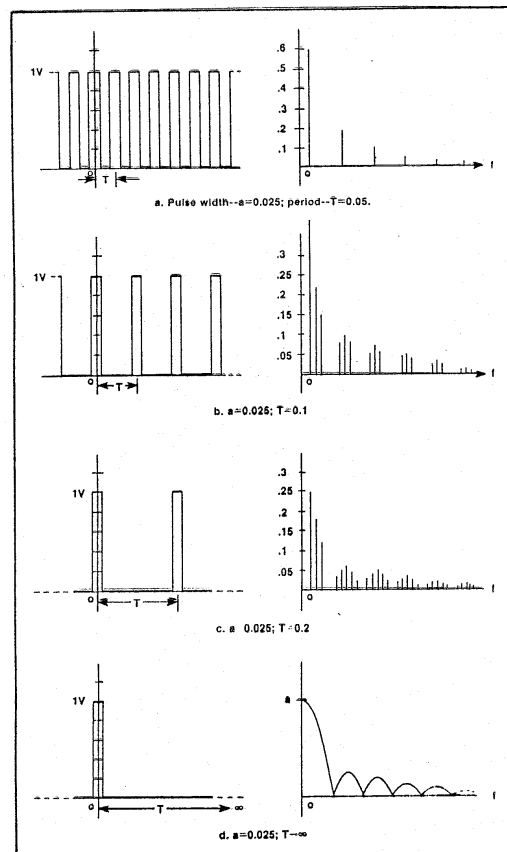


Καθώς η περίοδος T του σήματος τείνει στο άπειρο, οι γραμμές του διακριτού φάσματος πλησιάζουν.

Όταν η περίοδος T γίνει άπειρη, η απόσταση μεταξύ των γραμμών μηδενίζεται και το φάσμα γίνεται συνεχές.

Περιοδικό Σήμα $\xrightarrow{\text{Σειρά Fourier}}$ Γραμμικό Φάσμα

Μη Περιοδικό Σήμα $\xrightarrow{\text{Μετασχηματισμός Fourier}}$ Συνεχές Φάσμα



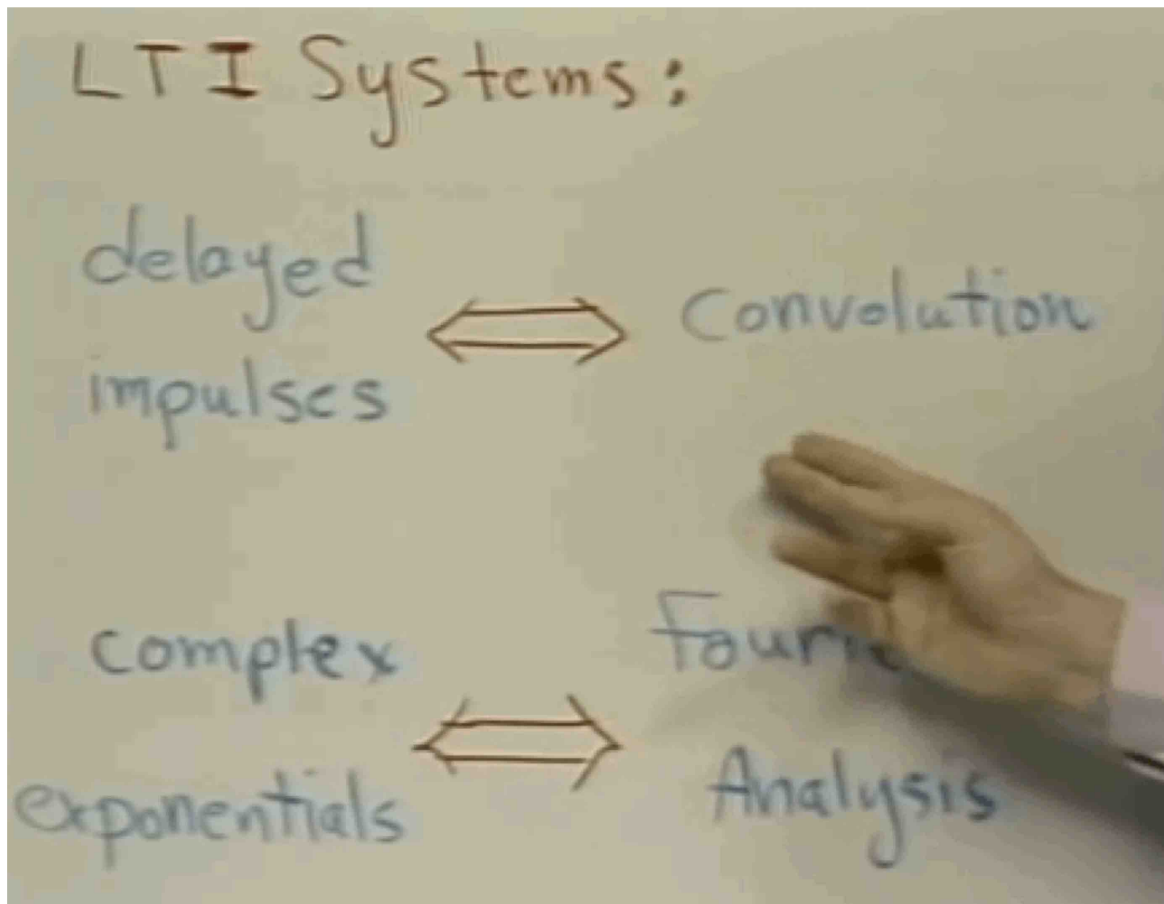
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ FOURIER

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform <i>signals that are continuous and aperiodic</i>	
Fourier Series <i>signals that are continuous and periodic</i>	
Discrete Time Fourier Transform <i>signals that are discrete and aperiodic</i>	
Discrete Fourier Transform <i>signals that are discrete and periodic</i>	

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ & ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

		CONTINUOUS-TIME SIGNALS		DISCRETE-TIME SIGNALS	
		TIME DOMAIN	FREQUENCY-DOMAIN	TIME-DOMAIN	FREQUENCY-DOMAIN
PERIODIC SIGNALS	FOURIER SERIES	$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$	$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$	$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$
		CONTINUOUS AND PERIODIC	DISCRETE AND APERIODIC	DISCRETE AND PERIODIC	DISCRETE AND PERIODIC
APERIODIC SIGNALS	FOURIER TRANSFORMS	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$
		CONTINUOUS AND APERIODIC	CONTINUOUS AND APERIODIC	DISCRETE AND APERIODIC	CONTINUOUS AND PERIODIC

Σημ.: 1. $\omega = \Omega T$
 2. $X(\omega) \triangleq X(e^{j\omega})$



Αναλυτική Προσέγγιση ...

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (MF)

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

Ευθύς MF
Ανάλυση

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

Αντίστροφος MF
Σύνθεση

- Ο MF $X(\Omega)$ ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$ συχνά αναφέρεται και φάσμα του $x(t)$, αφού παρέχει την πληροφορία που απαιτείται για την περιγραφή του $x(t)$ ως γραμμικού συνδυασμού (ως ολοκληρώματος) των ημιτονοειδών σήματων στις διάφορες συχνότητες.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

- Ο MF υπάρχει, δηλαδή το $X(\Omega)$ είναι πεπερασμένο / συγκλίνει, όταν το σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια (δηλαδή τετραγωνικά ολοκληρώσιμο):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Εναλλακτικά, η ύπαρξη του MF διασφαλίζεται όταν πληρούνται οι συνθήκες Dirichlet:

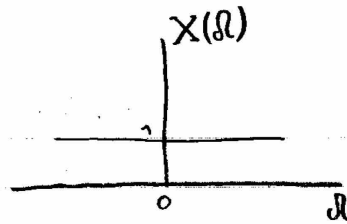
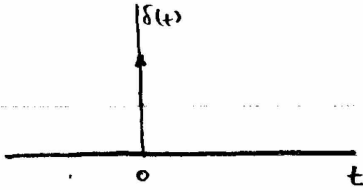
1. Το $x(t)$ να είναι ολοκληρώσιμο κατ' απόλυτη τιμή $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$
2. Το $x(t)$ να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε ένα πεπερασμένο διάστημα
3. Το $x(t)$ να έχει πεπερασμένο αριθμό συνεχών σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα και επιπλέον καθεμία από τις ασυνέχειες να είναι πεπερασμένου ύψους.

Συμπέρασμα: Συνεχή σήματα που είναι ολοκληρώσιμα κατ' απόλυτη τιμή ή που έχουν πεπερασμένο αριθμό συνεχών έχουν MF

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Παράδειγμα 3.1: Να υπολογιστεί ο ΜΦ του $x(t) = \delta(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

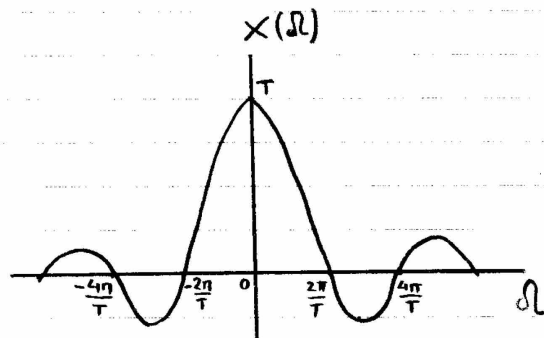
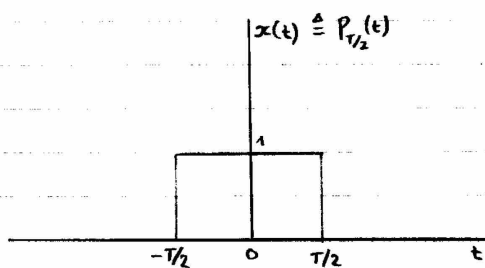


Η φρουκτιωδ έχει ΜΦ που αποτελείται από ίση συνεισφορά όλων των συχνοτήτων!

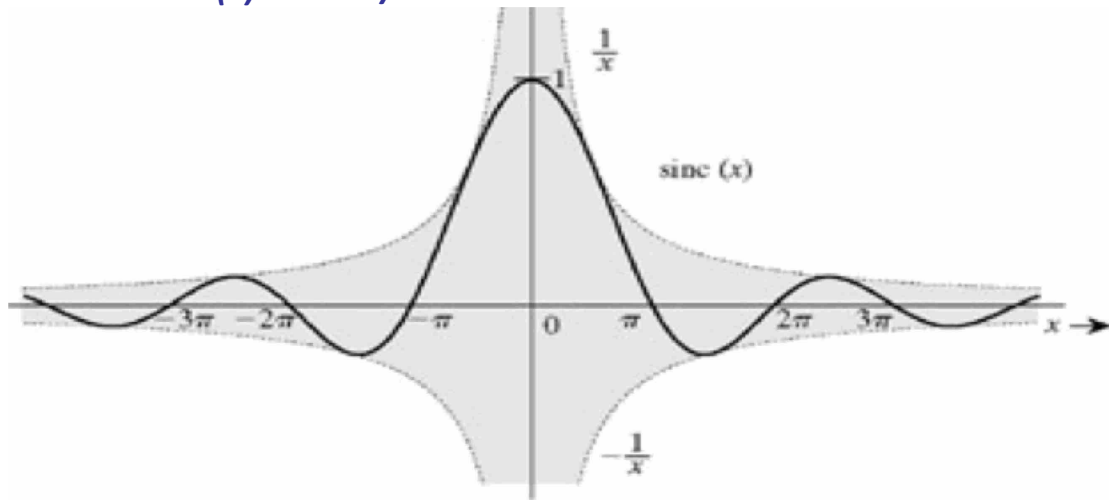
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Παράδειγμα 3.2: Να υπολογιστεί ο ΜΦ του τετραγωνικού παλμού $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$

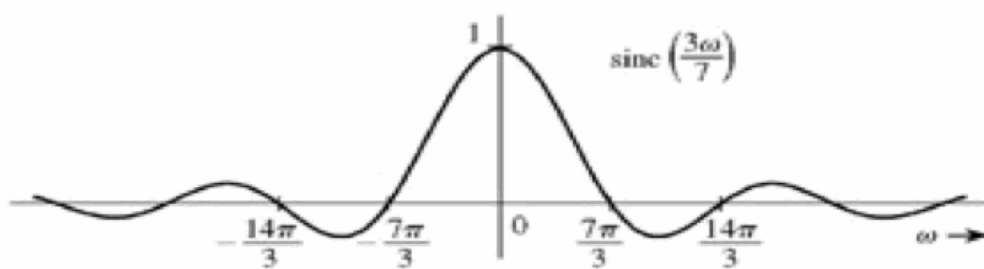
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \\ &= \frac{1}{-j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{j\omega \frac{T}{2}} \right) = \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{2j} \right) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \\ &= T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = T \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad \text{όπου } \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \end{aligned}$$



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\text{sinc}(x) = \sin \pi x / \pi x$

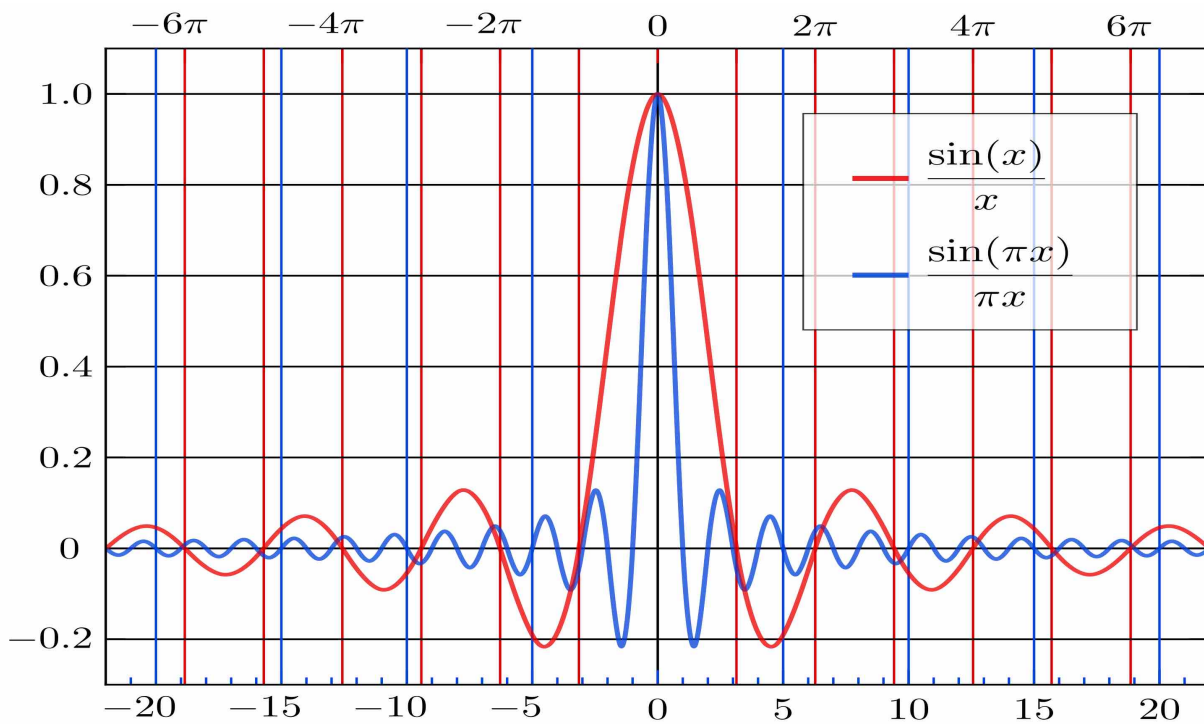


(a)



(b)

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\text{sinc}(x) = \sin \pi x / \pi x$



Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function

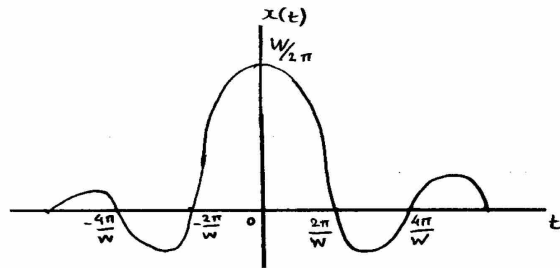
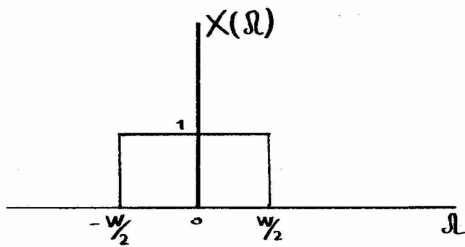
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Παράδειγμα 3.3: Να βρεθεί το σήμα $x(t)$ του οποίου ο ΜΦ ισούται με:

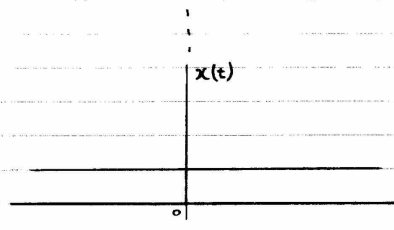
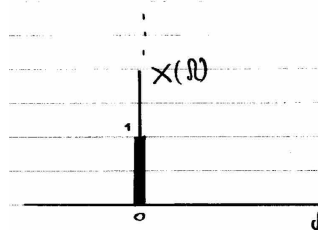
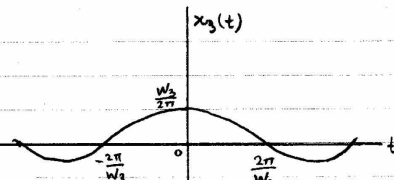
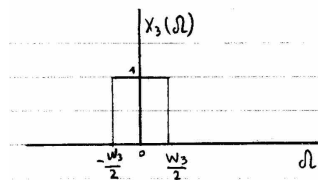
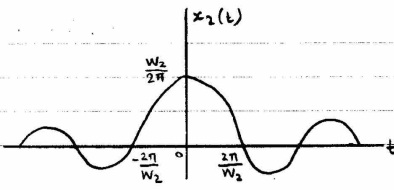
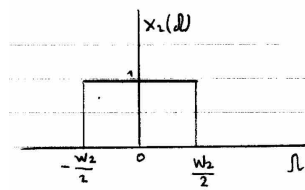
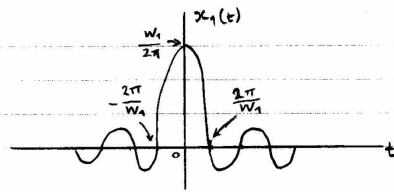
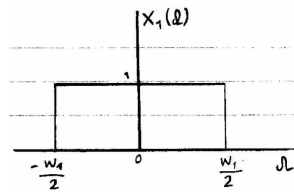
$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega/2 \\ 0, & |\omega| > \omega/2 \end{cases}$$

Από τον ορισμό του αντίστροφου ΜΦ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega/2}^{\omega/2} = \\ &= \frac{1}{2\pi jt} \left(e^{j\frac{\omega t}{2}} - e^{-j\frac{\omega t}{2}} \right) = \frac{1}{\pi t} \left(\frac{e^{j\frac{\omega t}{2}} - e^{-j\frac{\omega t}{2}}}{2j} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\frac{\omega t}{2}} = \frac{\omega}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega t}{2\pi}\right) \end{aligned}$$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER



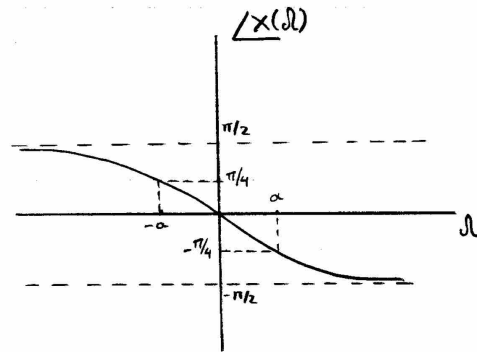
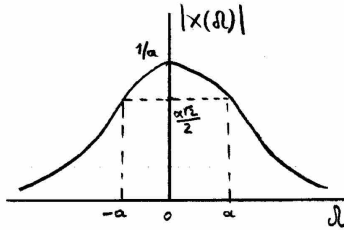
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Παράδειγμα 3.4: Να υπολογιστεί ο ΜF της $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \\ &= \frac{-1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}, \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

Ο ΜF έχει φασικές τιμές οπότε υπολογίζουμε το μέτρο και τη φάση του:

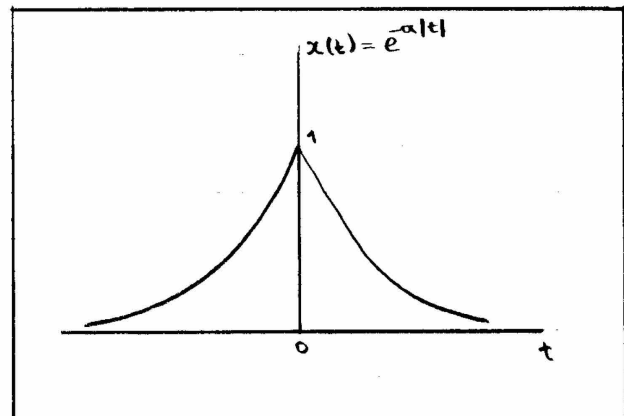
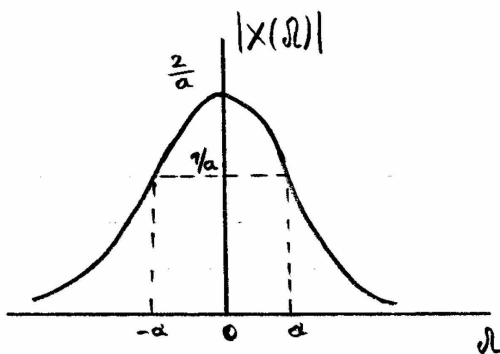
$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad \angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Παράδειγμα 3.5: Να υπολογιστεί ο ΜF της $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Γραμμικότητα: $\alpha x(t) + b y(t) \xrightarrow{F} \alpha X(\Omega) + b Y(\Omega)$

Ολιγόθυση στο χρόνο: $x(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$

Ολιγόθυση στη συχνότητα: $e^{j\Omega_0 t} x(t) \xrightarrow{F} X(\Omega - \Omega_0)$

Κλιμάκωση στο χρόνο: $x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right) \xrightarrow{a=-1} x(-t) \xrightarrow{F} X(-\Omega)$

Κλιμάκωση στη συχνότητα: $\frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{F} X(a\Omega)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Παράγωγιση: $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\Omega X(\Omega)$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{F} (j\Omega)^n X(\Omega)$$

Ολοκλήρωση: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0) \delta(\Omega)$

Δυσικότητα: $X(t) \xrightarrow{F} 2\pi x(-\Omega)$

Συνέλιξη: $y(t) = h(t) * x(t) \xrightarrow{F} Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega)$

Πολλαπλασιασμός: $y(t) = s(t) \cdot x(t) \xrightarrow{F} Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} [S(\Omega) * X(\Omega)]$

Θεώρημα Parseval:
(Διάρθρωση της Ενέργειας)
 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Ολισθήσει στο χρόνο: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$

Απόδειξη Α:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Αντικαθιστώντας όπου t το $t-t_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega(t-t_0)} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega \end{aligned}$$

Με βάση τον ορισμό συνάγεται ότι ο ΜΦ του $x(t-t_0)$ ισούται με $e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$,
ή $F\{x(t-t_0)\} = e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Απόδειξη Β:

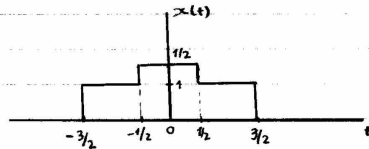
$$F\{x(t)\} = X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Ο ΜΦ του $x(t-t_0)$ είναι:

$$\begin{aligned} F\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \langle \text{δίδοντας } t-t_0 = \tau \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\Omega(\tau+t_0)} d(\tau+t_0) = \\ &= e^{-j\Omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau}_{X(\Omega)} = \\ &= e^{-j\Omega t_0} X(\Omega) \end{aligned}$$

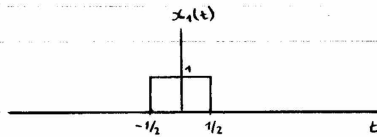
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Παράδειγμα 3.7: Να υπολογιστεί ο ΜΦ του $x(t)$ του κύματος.

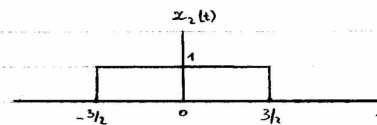


Το $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως αθροισμα δύο ενφύτων $x_1(t), x_2(t)$
 δηλ. $x(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + x_2(t)$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ



$$\leadsto X_1(\Omega) = \frac{\sin(\frac{\Omega}{2})}{\frac{\Omega}{2}}$$



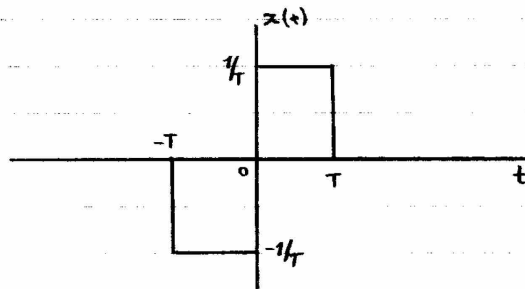
$$\leadsto X_2(\Omega) = 3 \frac{\sin(\frac{3\Omega}{2})}{\frac{3\Omega}{2}}$$

Τελικά, λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας ο ΜΦ του $x(t)$ θα ισούται με:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2}X_1(\Omega) + X_2(\Omega) = \frac{\sin(\frac{\Omega}{2}) + 2\sin(\frac{3\Omega}{2})}{\Omega}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Παράδειγμα 3.8: Να υπολογιστεί ο ΜΦ του $x(t)$ του κύματος.



Παρατηρούμε ότι το $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά δύο ημιτόνων

$$x(t) = \frac{1}{T} \left[p_{T/2}(t - \frac{T}{2}) - p_{T/2}(t + \frac{T}{2}) \right]$$

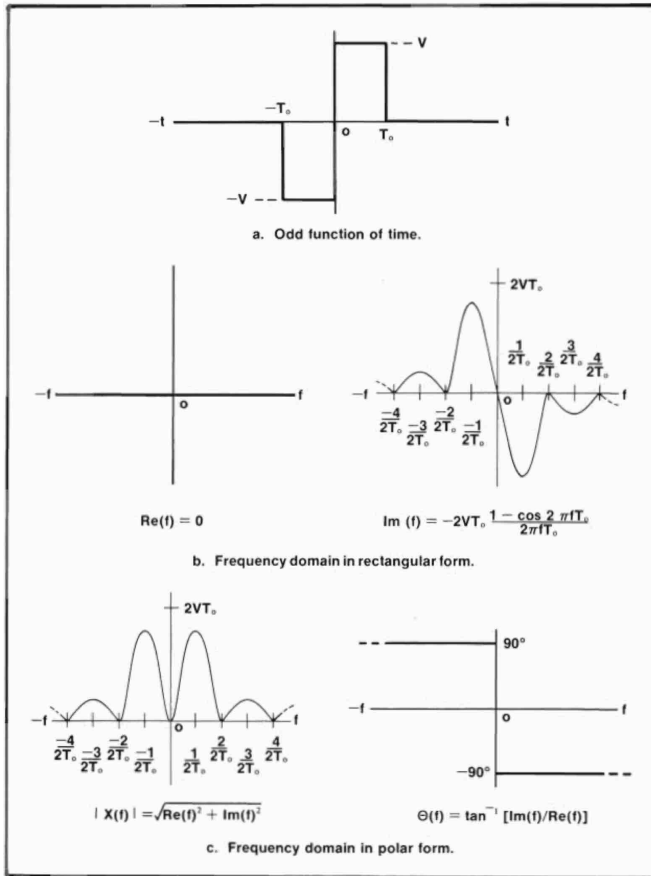
$$X(\Omega) = \frac{1}{T} \left[T \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{\frac{\Omega T}{2}} e^{-j\Omega \frac{T}{2}} - T \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{\frac{\Omega T}{2}} e^{+j\Omega \frac{T}{2}} \right]$$

$$= 2 \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{\Omega T} \left[e^{-j\Omega \frac{T}{2}} - e^{j\Omega \frac{T}{2}} \right] = -4j \frac{\sin^2(\frac{\Omega T}{2})}{\Omega T}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Ω ΟΛΙΘΗΣΗ

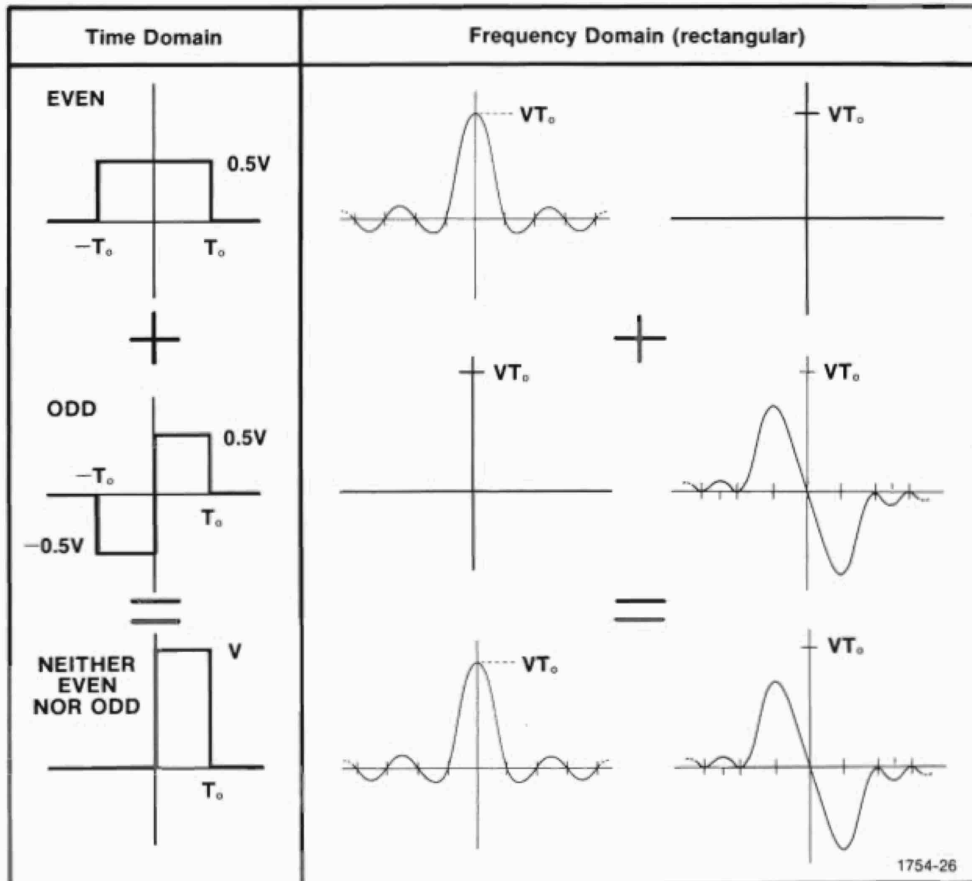
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER



ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ & ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ

ΜΕΤΡΟ & ΦΑΣΗ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

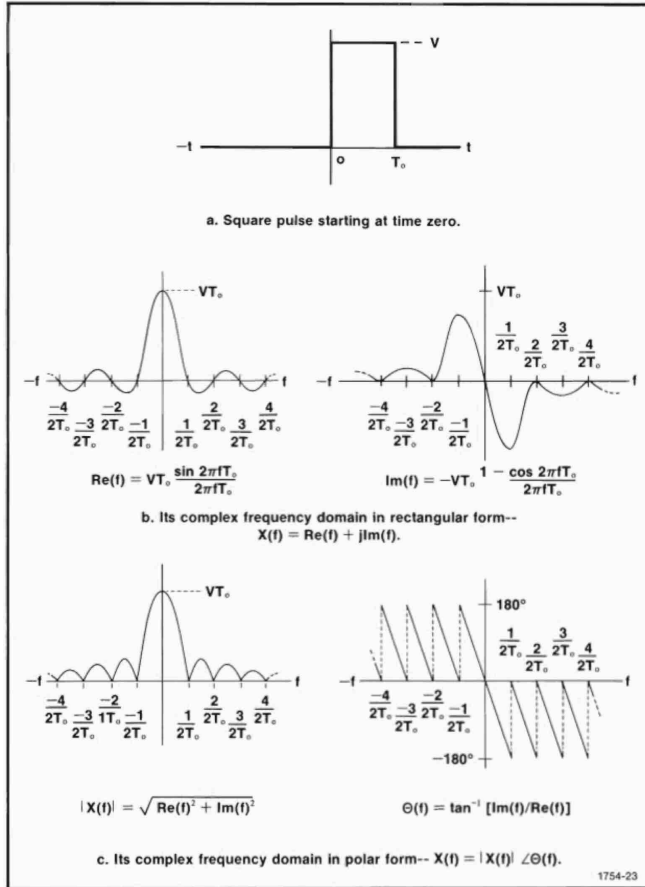


ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ & ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ & ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ & ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

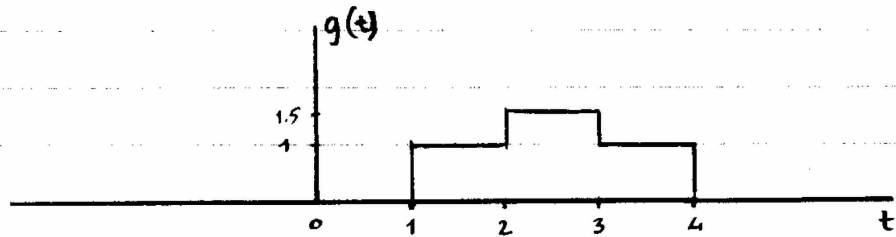


ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ & ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ

ΜΕΤΡΟ & ΦΑΣΗ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Παράδειγμα 3.9: Να υπολογιστεί ο ΜΦ του $g(t)$ που εκτίθεται



Η
Σ
Τ
Η
Θ
Σ
Ι
Ν
Ο

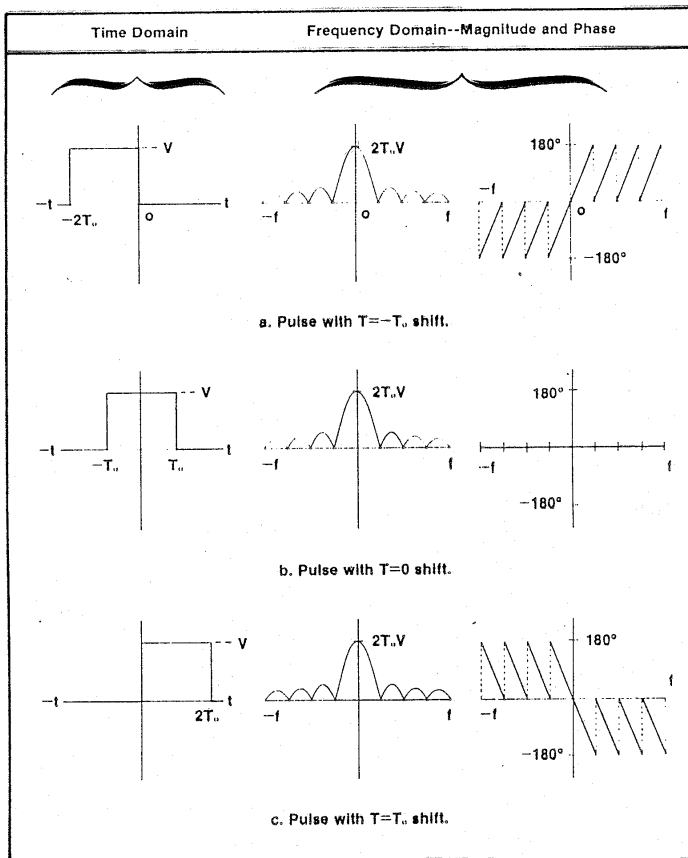
Παρατηρούμε ότι $g(t) = x(t - 2.5) = x(t - \frac{5}{2})$

$$\text{Άρα } G(\omega) = e^{-j\omega \frac{5}{2}} X(\omega) = e^{-j\omega \frac{5}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega}{2}) + 2\sin(\frac{3\omega}{2})}{\omega}$$

κλπ παράδειγμα 3.7

Η ολίσθηση στον χρόνο επηρεάζει μόνον την Φάση !

ΜΕΤΡΟ & ΦΑΣΗ



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Παράδειγμα 3.10 : Να υπολογιστεί ο MF της σταθεράς 1

Γνωρίζουμε ότι $\delta(\omega) \xleftrightarrow{F} 1$

Με βάση την ιδιότητα της δuality (duality property)

$$X(\omega) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(t)$$

ΔΥΝΑΜΗ

έχουμε

$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi \delta(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

Επαλήθευση: Υπολογίζουμε τον αντίστροφο MF της $2\pi \delta(\omega)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \langle \text{λόγω της ιδιότητας αλιείας της} \\ &\quad \text{κρουστικής} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \rangle = \\ &= e^{j0t} = 1 \end{aligned}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Παράδειγμα 3.11: Να υπολογιστεί ο ΜΦ της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$

- Τρόπος Α

$$\text{Έστω } x(t) = u(t) \quad \text{και} \quad g(t) = \delta(t)$$

Γνωρίζουμε ότι ο ΜΦ της $\delta(t)$ ισούται με 1, δηλαδή

$$g(t) = \delta(t) \xrightarrow{F} G(\omega) = 1$$

Η βηματική μπορεί να εκφραστεί ως ολοκλήρωμα της κρουστικής

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

Λαμβάνοντας τον ΜΦ και των δύο μελών και με βάση την ιδιότητα ολοκλήρωσης

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} G(\omega) + \pi G(\omega) \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

Σημείωση: Θεωρούμε ότι η $\delta(t)$ προκύπτει ως η πρώτη παράγωγος της βηματικής $u(t)$. Με βάση αυτό και την ιδιότητα της διαφορίσεως προκύπτει να επαληθεύσουμε ότι $\delta(t) \xrightarrow{F} 1$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\omega \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] = 1 \quad \text{αφού } \omega \cdot \delta(\omega) = 0$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

- Τρόπος Β

Εκφράζουμε την $u(t)$ ως άθροισμα συναρτήσεων

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad \text{όπου } \operatorname{sgn}(t) \text{ η συνάρτηση πρόσημου}$$

$$\text{Έχουμε} \quad \frac{1}{2} \xrightarrow{F} \pi \delta(\omega)$$

$$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

$$u(t) \xrightarrow{F} \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Δυσικότητα: $X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\Omega)$

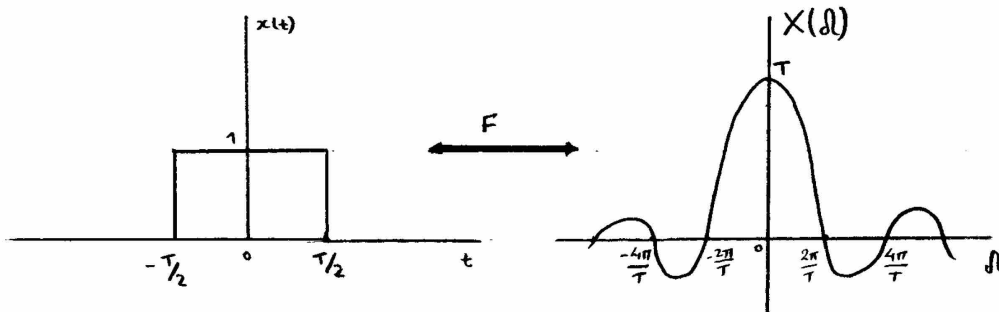
Με βάση την ιδιότητα της δυσικότητας μπορούμε να εξηγήσουμε κάποιες από τις γνωστές και ιδιότητες, όπως αυτή της ολιθισης στη συχνότητα, ή να εξάγουμε άλλες ιδιότητες, όπως εκείνες της παραγωγισισης και ολοκλήρωσης στη συχνότητα:

Ολιθισμός στη συχνότητα: $e^{j\Omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega - \Omega_0)$

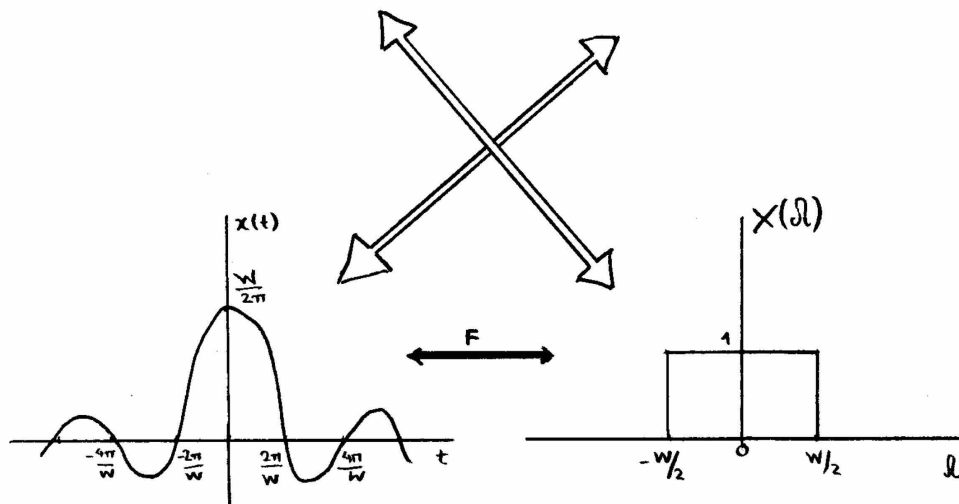
Παραγωγισιση στη συχνότητα: $-jt x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

Ολοκλήρωση στη συχνότητα: $-\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0) \delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\Omega} x(\omega) d\omega$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER



ΔΥΣΙΚΟΤΗΤΑ



Ολιγόθυνη στη συχνότητα: $e^{j\Omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega - \Omega_0)$

Παράδειγμα 3.12: Να υπολογιστεί ο ΜΦ της $x(t) \cdot \cos \Omega_0 t$

$$\text{Έχουμε } \cos \Omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}]$$

$$\text{Άρα } x(t) \cdot \cos \Omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\Omega_0 t} x(t) + e^{-j\Omega_0 t} x(t)]$$

Και λαμβάνοντας τον ΜΦ και των δύο μελών έχουμε:

$$x(t) \cos \Omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)]$$

↑
Διαμόρφωση πλάτους

Παράδειγμα 3.13: Να υπολογιστεί ο ΜΦ της $x(t) \cdot \sin \Omega_0 t$

$$\text{Έχουμε } \sin \Omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}]$$

$$\text{Άρα } x(t) \cdot \sin \Omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\Omega_0 t} x(t) - e^{-j\Omega_0 t} x(t)]$$

και τελικά ο ΜΦ και των δύο μελών δίνει:

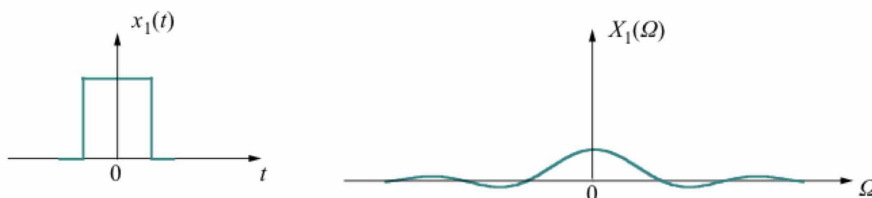
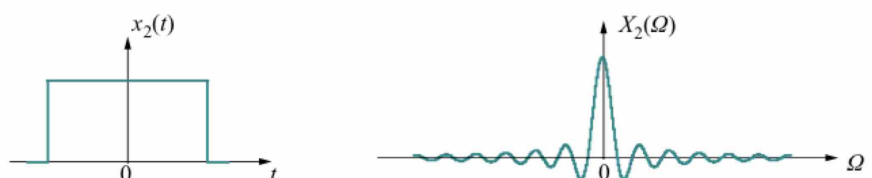
$$x(t) \sin \Omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j} [X(\Omega - \Omega_0) - X(\Omega + \Omega_0)]$$

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Fourier	
Σήμα $x(t)$	MF $X(\Omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos \Omega_0 t$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sin \Omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\begin{cases} 1, & t < T/2 \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$	$T \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{\frac{\Omega T}{2}}$
$\frac{\sin \Omega_0 t}{\pi t}$	$\begin{cases} 1, & \Omega < \Omega_0 \\ 0, & \Omega > \Omega_0 \end{cases}$
$e^{-at}u(t), \text{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{j\Omega + a}$
$te^{-at}u(t), \text{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j\Omega + a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \text{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j\Omega + a)^n}$

Αλλαγή κλίμακας

 $x(at)$

$$\frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

(α) Σήμα $x(t)$ και το φάσμα του $X(\Omega)$.(β) Σήμα $x_1(t) = x(at)$ με $a > 1$ και το φάσμα του $X_1(\Omega)$.(γ) Σήμα $x_2(t) = x(at)$ με $0 < a < 1$ και το φάσμα του $X_2(\Omega)$.

Θεώρημα Συνέλιξης: $h(t) * x(t) \xrightarrow{F} H(\Omega) \cdot X(\Omega)$

Απόδειξη: Συνέλιξη ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$

$$\text{MF } y(t): Y(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\Omega t} dt$$

= <εναλλάσσοντας τη σειρά ολοκλήρωσης> =

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j\Omega t} dt \right] d\tau$$

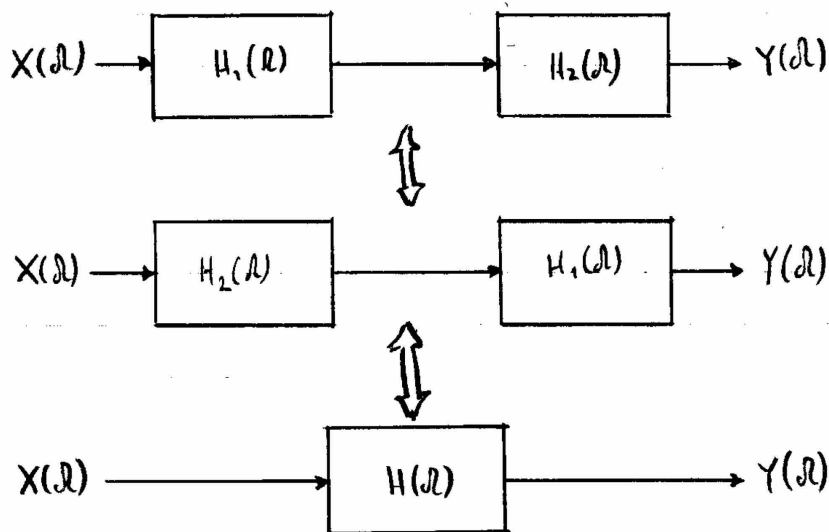
= <θίτοντας $t' = t - \tau$ > =

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega \tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\Omega t'} dt' \right] d\tau$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\Omega t'} dt' \right]$$

$$= H(\Omega) \cdot X(\Omega)$$

Παράδειγμα 4.4: Διασύνδεση ΓΧΑ συστημάτων σε σειρά (cascade connection)



$$H(\Omega) = H_1(\Omega) H_2(\Omega) = H_2(\Omega) H_1(\Omega)$$

Παράδειγμα 4.2: Να υπολογιστεί ο ΜΦ της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση ισούται με $\delta(t-t_0)$.

$$h(t) = \delta(t-t_0) \quad \rightarrow \quad H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

$$\text{Άρα } Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, αφού για $h(t) = \delta(t-t_0)$ η είσοδος $x(t)$ παράγει έξοδο $y(t) = x(t-t_0)$ και με βάση την ιδιότητα της ολισθητικής θεσης κρόνου, ο ΜΦ της $y(t)$ είναι: $Y(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

Παραγωγή: $\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{F} j\omega X(\omega)$! (επίσκεψη των υψηλών συχνοτήτων)

Απόδειξη: Από τον ορισμό του ΜΦ έχουμε:

$$F\left\{\frac{d}{dt} x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt = \left\langle \begin{array}{l} \text{τε χρήση της ολοκλήρωσης} \\ \text{κατά παράγοντες, δηλαδή} \end{array} \right.$$

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow$$

$$u dv = d(uv) - v du \Rightarrow$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \rangle$$

$$= x(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d(e^{-j\omega t})}{dt} dt$$

$$= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ x(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-l}^l \right\} + j\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}_{X(\omega)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{l \rightarrow \infty} \{x(l) e^{-j\omega l}\}}_0 - \underbrace{\lim_{l \rightarrow \infty} \{x(-l) e^{j\omega l}\}}_0 + j\omega X(\omega) = j\omega X(\omega)$$

θεωρώντας ότι για $l \rightarrow \pm\infty$, $x(l) \rightarrow 0$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο ΜΦ της συνάρτησης πρόσημου (signum).

Η συνάρτηση πρόσημου ορίζεται ως
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Αυτή μπορεί να εκφραστεί ως
$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

και κατά συνέπεια
$$\frac{d}{dt}(\text{sgn}(t)) = 2\delta(t)$$

Λαμβάνοντας τον ΜΦ και των δύο φ.π.ω.ν έχουμε:

$$F\left\{\frac{d}{dt}\text{sgn}(t)\right\} = F\{2\delta(t)\} \Rightarrow$$

$$j\Omega F\{\text{sgn}(t)\} = 2 \Rightarrow F\{\text{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\Omega}$$

Με βάση την τελευταία σχέση, μπορούμε να υπολογίσουμε τον ΜΦ της λειτουργίας $u(t)$, ως εξής:

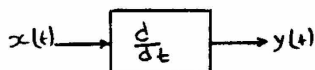
$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \Rightarrow F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{2}F\{\text{sgn}(t)\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

Παραγωγή: $\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{F} j\Omega X(\Omega)$! (επίκεση των υψηλών συχνοτήτων)

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η $H(\Omega)$ ενός συστήματος διαφοράς (διαφοριστή).

Η είσοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος διαφοράς του οποίου η είσοδος είναι $x(t)$, δίνεται από τη σχέση



$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Από την ιδιότητα της διαφοράς έχουμε

$$Y(\Omega) = j\Omega X(\Omega)$$

και συνεπώς

$$H(\Omega) = j\Omega$$

Ολοκλήρωση: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0) \delta(\Omega)$! (Σαδίνου των υψηλών συχνοτήτων)

Απόδειξη: $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau \hat{=} x(t) * u(t)$

Λαμβάνοντας τον ΜΦ και τον δύο μελών και με βάση το θεωρήμα της συνέλιξης έχουμε:

$$\begin{aligned} F\{y(t)\} &= F\{x(t) * u(t)\} \Rightarrow \\ Y(\Omega) &= X(\Omega) \cdot U(\Omega) = \\ &= X(\Omega) \cdot \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi \delta(\Omega) \right] = \\ &= \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(\Omega) \delta(\Omega) \end{aligned}$$

Λόγω της $\delta(\Omega)$ η φόρμα της $X(\Omega)$ που υπερέχει είναι η $X(0)$, οπότε

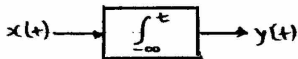
$$Y(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0) \delta(\Omega)$$

Ολοκλήρωση: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0) \delta(\Omega)$! (Σαδίνου των υψηλών συχνοτήτων)

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η $H(\Omega)$ ενός συστήματος ολοκλήρωσης (ολοκληρωτή)

Η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος ολοκλήρωσης του οποίου η είσοδος είναι $x(t)$, δίνεται από τη σχέση



$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0) \delta(\Omega) = \\ &= \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(\Omega) \delta(\Omega) = \\ &= \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi \delta(\Omega) \right] X(\Omega) \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$H(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi \delta(\Omega)$$

που δεν είναι άλλο από τον ΜΦ της βηματικής συνάρτησης. $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$
Σημειώστε ότι στο πεδίο του χρόνου δε έχουμε η συνέλιξη με τη βηματική, δηλ. $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

Ολισθητή στη συχνότητα: $e^{j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$

Παράδειγμα 3.12: Να υπολογιστεί ο ΜΦ της $x(t) \cdot \cos \omega_0 t$

Έχουμε $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$

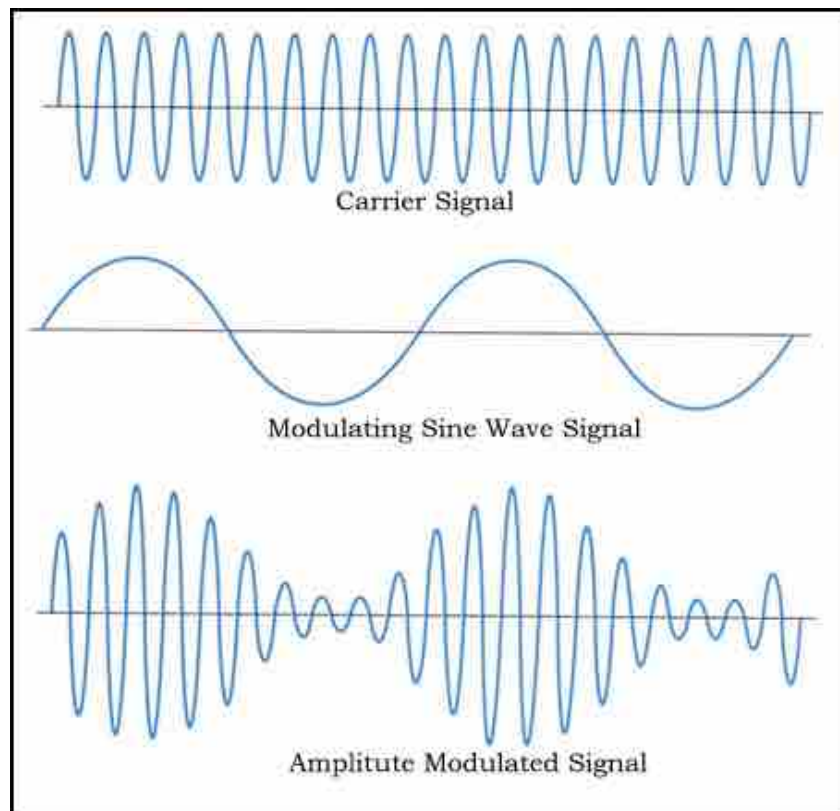
Άρα $x(t) \cdot \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} x(t) + e^{-j\omega_0 t} x(t)]$

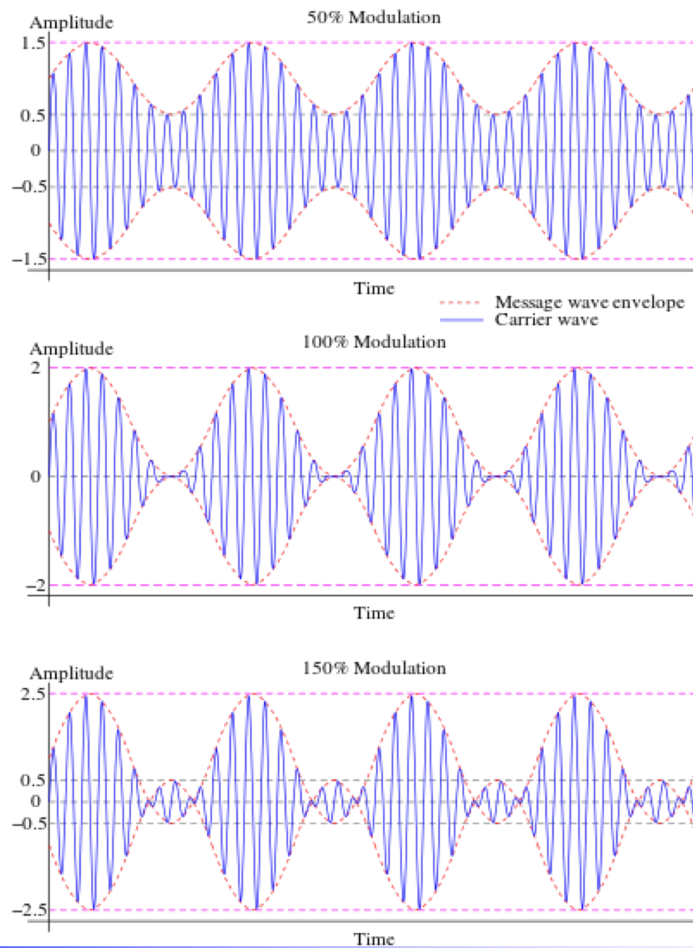
Και λαμβάνοντας τον ΜΦ και των δύο μελών έχουμε:

$$x(t) \cos \omega_0 t \xrightarrow{F} \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

↑
Διαμόρφωση πλάτους

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ (AMPLITUDE MODULATION – AM)





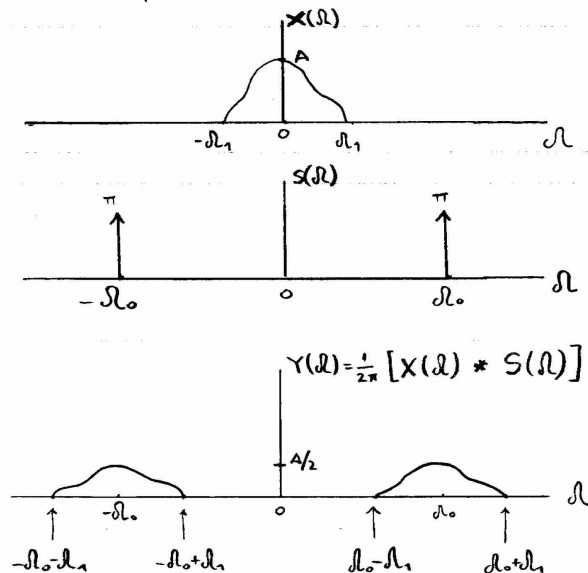
Source - <https://www.youtube.com/watch?v=R04yEKqgGPC>

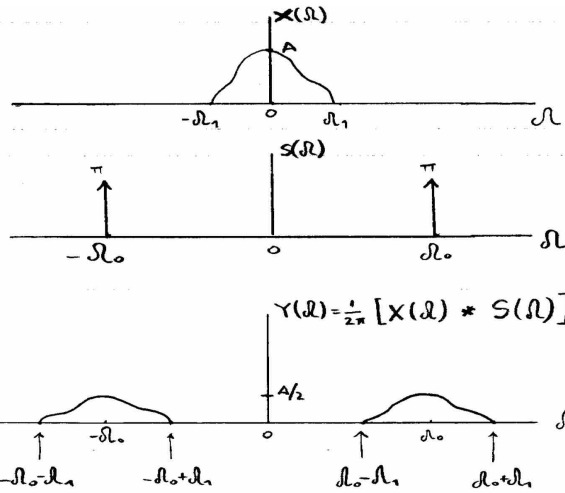


Πολλπλασιασμός
 ή
 Διαμόρφωση Πλάτους

$$s(t) \cdot x(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} [S(\omega) * X(\omega)]$$

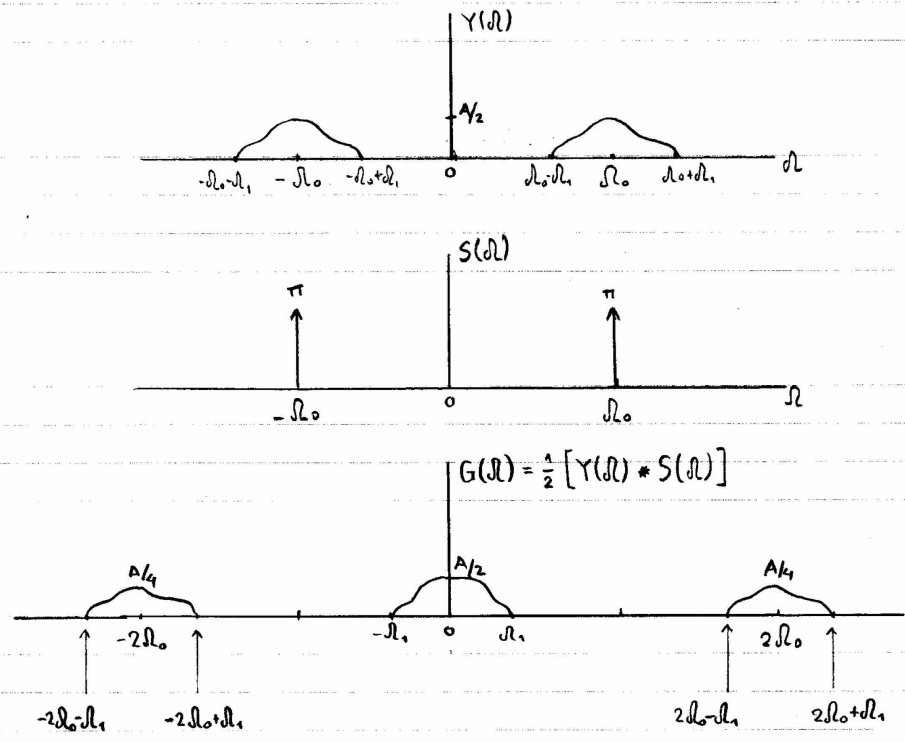
Παράδειγμα 4.5: Να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $y(t) = s(t)x(t)$, όπου $s(t) = \cos \omega_0 t$ και $x(t)$ είναι το φάσμα του οποίου είναι αυτό του σήματος



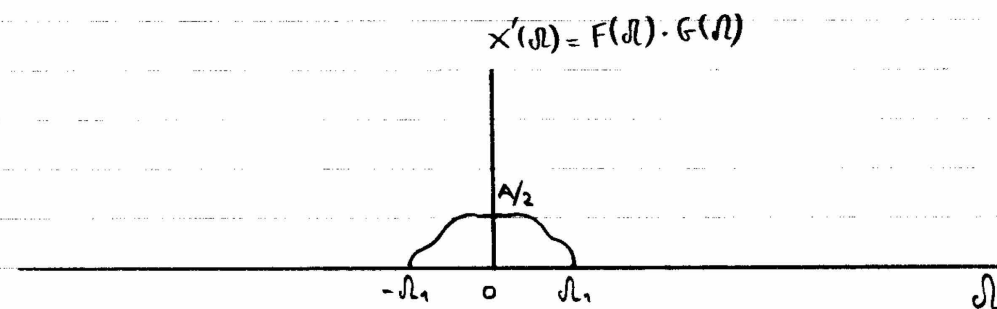
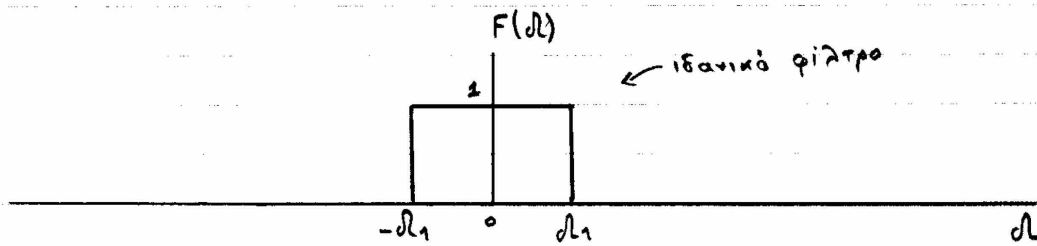


- Ο πολλαπλασιασμός δύο σήματων εν-φέρεται ως διαμόρφωση πλάτους
- Από την ιδιότητα της ολισθίσεως στη συχνότητα (βλ. παράδειγμα 3.12) έχουμε κατάλληλα στο ίδιο κεντροθέτο: $Y(\Omega) = \frac{1}{2} [X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)]$
- Έχουμε υποθέσει ότι $\Delta_0 > \Delta_1$ ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη φάσματος
- Παρατηρούμε ότι με τον πολλαπλασιασμό του σήματος $x(t)$ με ένα κηφονοσθεές σήμα, όλη η πληροφορία του σήματος $x(t)$ διασπράττει, αν και η πληροφορία αυτή έχει ολισθήσει σε υψηλότερες συχνότητες.

Παράδειγμα 4.6: Να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $g(t) = s(t)y(t)$, όπου $s(t), y(t)$ τα σήματα του προηγούμενου παραδείγματος.



ο Εφαρμόζοντας ένα βαθύτερο φίλτρο (lowpass), όπως αυτό του παρακάτω σχήματος, μπορείτε να πάρετε ένα σταθμισμένο (scaled) αντίγραφο του αρχικού φαινομένου $x(\Omega)$.



Amplitude Modulation Demo (by Alan Oppenheim, MIT)



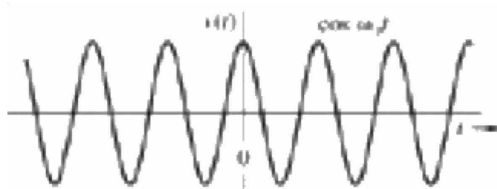
Source - https://www.youtube.com/watch?v=KT3yNuY_FPM

Amplitude Modulation Radio Demo (by Alan Oppenheim, MIT)

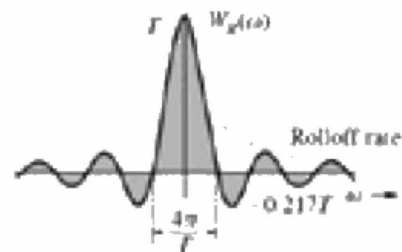
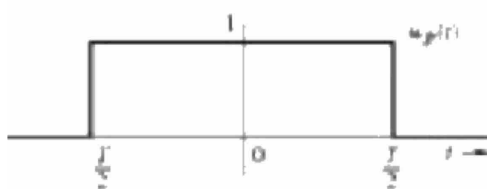


Source - https://www.youtube.com/watch?v=KT3yNuY_FPM

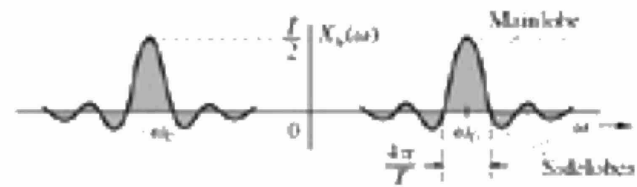
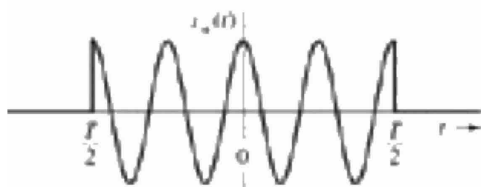
Πεδίο Χρόνου



(a)



(b)



(c)

$$\text{Θεώρημα του Parseval: } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη: } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \langle \text{αναστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{X(\omega)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

$$\text{Θεώρημα του Parseval: } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- Η συνολική ενέργεια του σήματος $x(t)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε από την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου $|x(t)|^2$ και ολοκλήρωση σε όλο τον χρόνο, είτε από την ενέργεια ανά μονάδα συχνότητας $|X(\omega)|^2/2\pi$ και ολοκλήρωση σε όλες τις συχνότητες.
- Η $|X(\omega)|^2$ ονομάζεται και φάσμα πυκνότητας της ενέργειας ή φασματική πυκνότητα ενέργειας (energy-density spectrum).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εύρος συχνοτήτων (frequency bandwidth ή bandwidth) ενός μη περιοδικού σήματος ορίζεται ως η περιοχή των δεικνυών συχνοτήτων για την οποία το σήμα έχει ενέργεια.

Σηφειώνεται ότι οι αρνητικές και θετικές συχνότητες ενός διηλεκτικού φάσματος συνδυάζονται για να δώσουν τα χαρακτηριστικά του σήματος σε κάποια συχνότητα. Συνεπώς, οι αρνητικές συχνότητες δεν ασκούν επηρεάζον εύρος συχνοτήτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εύρος συχνοτήτων (bandwidth) ενός περιοδικού σήματος ορίζεται ως η περιοχή των δεικνυών συχνοτήτων για την οποία το σήμα έχει ισχύ (power).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Περιορισμένου-χρόνου (time-limited) σήμα είναι εκείνο το οποίο έχει μη μηδενικές τιμές για πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Παράδειγμα τέτοιου σήματος αποτελεί ο τετραγωνικός παλμός

ΟΡΙΣΜΟΣ: Περιορισμένου-εύρους συχνοτήτων (band-limited) σήμα είναι εκείνο το οποίο έχει μη μηδενικό φάσμα για πεπερασμένη περιοχή συχνοτήτων.

Παράδειγμα τέτοιου σήματος αποτελεί το $x(t) = \sin(\omega t)$

Ιδιότητα I: Ένα σήμα το οποίο είναι περιορισμένου-χρόνου δεν μπορεί να είναι περιορισμένου-εύρους συχνοτήτων και ένα σήμα περιορισμένου-εύρους συχνοτήτων δεν μπορεί να είναι περιορισμένου-χρόνου.

Ιδιότητα II: Ο αντίστροφος ΜΦ ενός τμήματος του άξονα φάσματος (truncated spectrum) παρουσιάζει το φαινόμενο Gibbs στις αβυθείες του σήματος.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ III: Πραγματικά και άρτια σήματα έχουν πραγματικούς και άρτιους MF.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ IV: Πραγματικά και περιττά σήματα έχουν φανταστικούς και περιττούς MF.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ V: Τα φασίματα πλάτους και φάσης ενός πραγματικού σήματος είναι αντίστοιχα άρτια και περιττές συναρτήσεις.

ΣΗΜΑΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Energy signals)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Τέτοια σήματα είναι γενικά ήμι-περιοδικά σήματα πεπερασμένης χρονικής διάρκειας, όπως για παράδειγμα ο τετραγωνικός παλμός, καθώς και σήματα που τείνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν για $t \rightarrow \infty$.

Τα σήματα ενέργειας είναι και ολοκλιρωσίμα κατ' ένδειξη της, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, οπότε ικανοποιείται η ικανή συνθήκη για την ύπαρξη των μετασχηματισμών Fourier.

ΣΗΜΑΤΑ ΙΣΧΥΟΣ (Power signals)

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Τέτοια σήματα δεν είναι σήματα ενέργειας και συνεπώς δεν είναι ολοκληρωσίμα κατ' απόλυτη τιμή. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα πολύ γνωστά σήματα της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης, της συνάρτησης παλμού, καθώς και όλες οι περιοδικές συναρτήσεις. Τα σήματα αυτά που έχουν πεπερασμένη ισχύ και ικανοποιούν τις άλλες συνθήκες Dirichlet (όχι αυτή της ολοκληρωσιμότητας κατ' απόλυτη τιμή) έχουν φασματικούς Fourier.

Ο φασματικός Fourier των σήματων ισχύος περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στη συχνότητα!

Σημείωση: Πρακτικά, για τα σήματα που καλούμαστε να αναλύσουμε ως μηχανικοί, μπορούμε να πούμε ότι, εφόσον μπορούμε να εκδηλώσουμε την κατατοπισμένη του σήματος, το σήμα αυτό έχει φασματικό Fourier.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier:

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\Omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\Omega)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\Omega)$
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
Άρτιο μέρος σήματος Πραγματικό μέρος φάσματος	$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$	$\Re\{X(\Omega)\}$
Περιττό μέρος σήματος Φανταστικό μέρος φάσματος	$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$	$j\Im\{X(\Omega)\}$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t} x(t)$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(\Omega) \delta(\Omega)$
Πραγματικό σήμα	$x(t) = x^*(t)$	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$ $\Re\{X(\Omega)\} = \Re\{X(-\Omega)\}$ $\Im\{X(\Omega)\} = -\Im\{X(-\Omega)\}$ $ X(\Omega) = X(-\Omega) $ $\arg X(\Omega) = -\arg X(-\Omega)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(\Omega)H(\Omega)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} [X(\Omega) * Y(\Omega)]$

Παραγωγή στο πεδίο του χρόνου	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\Omega X(\Omega)$
Παραγωγή στο πεδίο συχνοτήτων	$tx(t)$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$
Δυσίμπος αν $x(t) \xrightarrow{F} X(\Omega)$	$y(t) = X(t)$	$Y(\Omega) = 2\pi x(-\Omega)$
Θεώρημα Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) ^2 d\Omega$

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\delta(t)$	1
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\Omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sin(\Omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$

$$\Pi\left(\frac{t}{2T_1}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2 \sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

$$\frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$

$$\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_1}, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$T_1 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Omega T_1}{2\pi}\right)$$

$$\left(\frac{W}{\pi}\right) \left(\frac{\sin(Wt)}{Wt}\right)^2$$

$$\Lambda\left(\frac{W}{2W}\right)$$

$$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$$

$$\frac{1}{a + j\Omega}$$

$$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$$

$$\frac{1}{(a + j\Omega)^2}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$$

$$\frac{1}{(a + j\Omega)^n}$$

$$\cos(\Omega_0 t)u(t)$$

$$\frac{\pi}{2} \left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0) \right] + \frac{j\Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\sin(\Omega_0 t)u(t)$$

$$\frac{\pi}{2j} \left[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0) \right] + \frac{\Omega_0}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$e^{-a|t|}, \Re\{a\} > 0$$

$$\frac{2a}{a^2 + \Omega^2}$$

ΣΗΜΑ Στο Πεδίο του Χρόνου	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER
$x(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$A \delta(t-t_0)$	$A e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi \delta(\omega)$
K	$2\pi K \delta(\omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Παρατηρούμε ότι ο ΜΕ των εν λόγω ισχίως περιέχει εφουςτιμίες συναρτήσεων.