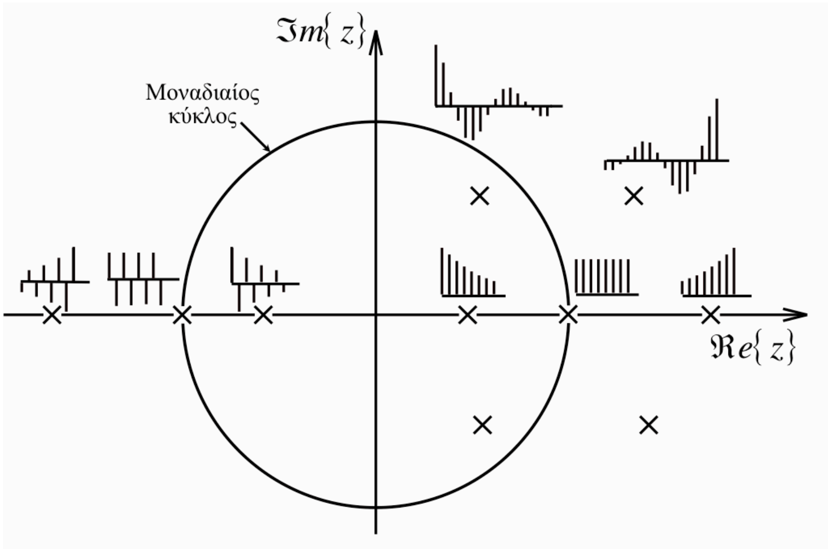
ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

- RESPONSE OF SYSTEMS -



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Ή ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$

$y(n) = h(n) * x(n)$ $\qquad$ $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$

$h(n)$: χαρακτηρίζει το σύστημα στο πεδίο του χρόνου

$H(z)$: χαρακτηρίζει το σύστημα στο πεδίο -z

$h(n)$: απόκριση μοναδιαίου δείγματος ή μοναδιαία κρουστική απόκριση

$H(z)$: συνάρτηση συστήματος ή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}$$

$H(z)$ και $h(n)$ είναι δύο ισοδύναμες περιγραφές ενός συστήματος σε δύο διαφορετικά πεδία.

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την γραμμική σταθερών συντελεστών εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών και αξιοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης στον χρόνο έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k} Y(z) \Rightarrow$$

$$Y(z)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k}\right] = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Συνεπώς ένα ΓΧΑ το οποίο περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών (difference equation) με σταθερούς συντελεστές, έχει μια ρητή (rational) συνάρτηση συστήματος.

Περίπτωση 1: $\alpha_k = 0 \rightsquigarrow H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}$

Η $H(z)$ έχει M μηδενικά (zeros) και ένα πόλο (pole) πολλαπλότητας M στην αρχή των αξόνων $z=0$.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-μηδενικά (all-zero system).

Επίσης, το σύστημα αυτό έχει πεπερασμένη κρουστική απόκριση γι' αυτό και ονομάζεται FIR σύστημα. (FIR: Finite Impulse Response)

Τέλος ονομάζεται και σύστημα κινούμενου μέσου όρου (MA: Moving Average).

Περίπτωση 2: $b_k = 0 \rightsquigarrow H(z) = \dfrac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \dfrac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$ $\quad a_0 \equiv 1$

Η $H(z)$ έχει N πόλους και ένα μηδενικό πολλαπλότητας N στην αρχή των αξόνων $z=0$.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-πόλους (<u>all-pole system</u>).

Η ύπαρξη των πόλων οδηγεί με μια απόκριση του συστήματος άπειρης διάρκειας γι'αυτό και ονομάζεται <u>IIR</u> σύστημα (IIR: Infinite Impulse Response)

Περίπτωση 3. $a_k \neq 0,\ b_k \neq 0 \rightsquigarrow H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$

Πρόκειται για τη γενική περίπτωση. Η $H(z)$ έχει N πόλους και M μηδενικά. Οι πόλοι και τα μηδενικά στο $z=0$ και $z=\infty$ δεν προσμετρώνται.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα πόλων-μηδενικών (<u>pole-zero system</u>).

Λόγω της ύπαρξης των πόλων, το σύστημα αυτό είναι <u>IIR</u>.

ΑΣΚΗΣΗ Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών (difference equation)

$$y(n) = 2x(n) + \frac{1}{2} y(n-1)$$

να υπολογιστούν η συνάρτηση του συστήματος (sytem function), καθώς και η απόκριση μοναδιαίου δείγματος (unit sample response), δηλαδή η κρουστική απόκριση.

Λύση Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών της εξίσωσης έχουμε:

$$Z\{y(n)\} = Z\left\{2x(n) + \frac{1}{2} y(n-1)\right\} \Rightarrow$$

$$Y(z) = 2X(z) + \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} X(z) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Το σύστημα έχει έναν πόλο στο $z=\frac{1}{2}$ και ένα μηδενικό στην αρχή των αξόνων ($z=0$).

[Διευκρινίζεται ότι για να υπολογίσω τους πόλους και τα μηδενικά, εκφράζω τη σχέση συναρτήσει του z και όχι του z^{-1} που είναι τώρα. Στην προηγούμενη περίπτωση πολλαπλασίασα αριθμητή και παρονομαστή επί z.]

Ο αντίστροφος ΜΖ μας δίνει την $h(n)$, δηλαδή

$$y(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{2\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΕ ΗΡΕΜΙΑ

$$\underbrace{H(z)=\frac{B(z)}{A(z)} \qquad X(z)=\frac{N(z)}{Q(z)} \; (*)}$$

$$Y(z)=H(z)\,X(z)=\frac{B(z)\,N(z)}{A(z)\,Q(z)}$$

$$\downarrow$$

$$Y(z)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}}_{\substack{\text{φυσική}\\ \text{απόκριση}\\ \text{(natural}\\ \text{response)}}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}}_{\substack{\text{εξαναγκασμένη}\\ \text{απόκριση}\\ \text{(forced}\\ \text{response)}}}$$

$$\Big\downarrow Z^{-1}$$

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}A_k\,(p_k)^n\,u(n)+\sum_{k=1}^{L}Q_k\,(q_k)^n\,u(n)$$

Σημειώσεις: (*) Θεωρήσαμε ότι $X(z)=N(z)/Q(z)$. Πράγματι τα περισσότερα σήματα που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον, έχουν ρητούς ΜΖ.

(**) Θεωρήσαμε ότι οι πόλοι του συστήματος $p_1, p_2, \dots, p_N$ καθώς και οι πόλοι του σήματος εισόδου $q_1, q_2, \dots, q_L$ είναι απλοί και διάφοροι μεταξύ τους, δηλ. $p_k \neq q_m$, όπου $k=1,2,\dots,N$ και $m=1,2,\dots,L$.

(***) Θεωρήσαμε ότι το σύστημα, πριν την εφαρμογή του σήματος εισόδου, ήταν σε ηρεμία, δηλαδή $y(-1)=y(-2)=\dots=y(-N)=0$.

(**) Επίσης θεωρήσαμε ότι τα μηδενικά είναι διαφορετικά από τους πόλους, ώστε να μην έχουμε απαλοιφή κάποιων πόλων.

Στην περίπτωση ύπαρξης πόλων πολλαπλότητας l, όπου $l \neq 1$, η ανάλυση της $Y(z)$ σε μερικά κλάσματα θα περιέχει όρους της μορφής $1/(1-p_k)^l$ και συνεπώς η $y(n)$ θα περιέχει όρους της μορφής $n^{l-1}p^n$.

Β. ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Έστω ότι η είσοδος $x(n)$ εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n=0$ σε σύστημα το οποίο δεν βρίσκεται σε ηρεμία, δηλ. κάποιες από τις τιμές $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$ είναι διάφορες του μηδενός.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

$$\Big\downarrow Z^{+}$$

$$Y^{+}(z) = -\sum \alpha_k z^{-k}\left[Y^{+}(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n)\, z^{n}\right] + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X^{+}(z)$$

$$\Big\downarrow$$

$$Y^{+}(z) = \underbrace{\frac{\sum b_k z^{-k}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k z^{-k}}}_{H(z)} X(z) - \underbrace{\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k z^{-k}\sum\limits_{n=1}^{k} y(-n)\, z^{n}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k z^{-k}}}_{\frac{N_0(z)}{A(z)}}$$

$$\Big\downarrow$$

$$Y^{+}(z) = \underbrace{H(z)\cdot X(z)}_{Y_{zs}(z)} + \underbrace{\frac{N_0(z)}{A(z)}}_{Y^{+}_{zi}(z)}$$

$$\Big\downarrow Z^{-1}$$

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

$$y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k\,(p_k)^n\, u(n)$$

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k\,(p_k)^n\, u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k\,(q_k)^n\, u(n)$$

$$\Big\downarrow \oplus$$

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A'_k\,(p_k)^n\, u(n)}_{\text{φυσική απόκριση}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k\,(q_k)^n\, u(n)}_{\text{εξαναγκασμένη απόκριση}} \qquad \text{όπου } A'_k = A_k + D_k$$

Σημειώσεις: Η ύπαρξη αρχικών συνθηκών επηρεάζει τη φυσική απόκριση του συστήματος. Δεν εισάγονται νέοι πόλοι και δεν επηρεάζεται η εξαναγκασμένη απόκριση.

Μεταβατική / Μόνιμη Κατάσταση

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A'_k (p_k)^n u(n)}_{\substack{y_{nr}(n) \\ \text{φυσική απόκριση}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)}_{\substack{y_{fr}(n) \\ \text{εξαναγκασμένη απόκριση}}}$$

- Φυσική απόκριση: $y_{nr}(n)$
  - → $\{p_k\}$, $k=1,2,\dots,N$ είναι οι πόλοι του συστήματος
  - → $\{A'_k\}$ είναι οι παράγοντες κλιμάκωσης που προκύπτουν από την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα.

    Εξαρτώνται τόσο από τις αρχικές συνθήκες, όσο και από τα χαρακτηριστικά της εισόδου: $A'_k = A_k + D_k$
  - → Εάν $|p_k|<1$ για όλα τα k, τότε η $y_{nr}(n)$ φθίνει προς το μηδέν καθώς $n \to \infty$

    (μεταβατική απόκριση – transient response).

    Για μικρά μεγέθη των πόλων, ο ρυθμός εξασθένησης της απόκρισης είναι μεγάλος.

- Εξαναγκασμένη απόκριση: $y_{fr}(n)$
  - → $\{q_k\}$, $k=1,2,\dots,L$ είναι οι πόλοι του σήματος που εφαρμόζεται στο σύστημα.
  - → $\{Q_k\}$ είναι οι παράγοντες κλιμάκωσης που προκύπτουν από την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

    Εξαρτώνται τόσο από το σήμα εισόδου, όσο και από τα χαρακτηριστικά του συστήματος.
  - → Εάν όλοι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η $y_{fr}(n)$ θα φθίνει προς το μηδέν καθώς $n \to \infty$.
  - → Εάν οι πόλοι βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο (γεγονός που συμβαίνει για ημιτονοειδή είσοδο), τότε η εξαναγκασμένη απόκριση θα είναι επίσης ημιτονοειδής για κάθε $n \geq 0$ (απόκριση μόνιμης κατάστασης - steady-state response).

Παράδειγμα απόκρισης μόνιμης (σταθερής) κατάστασης

Να υπολογιστεί η μεταβατική και η μόνιμη απόκριση του συστήματος

$y(n) = 0.5\, y(n-1) + x(n)$ στο οποίο βρίσκεται σε ηρεμία και στο οποίο εφαρμόζεται

η είσοδος $x(n) = 10 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) u(n)$.

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \qquad X(z) = \frac{10\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}\right)}{1-\sqrt{2}\,z^{-1}+z^{-2}}$$

$$Y(z) = H(z)\,X(z) = \frac{10\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}\right)}{(1-0.5z^{-1})\left(1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)} =$$

$$= \underbrace{\frac{6.3}{1-0.5z^{-1}}}_{Y_{nr}(z)} + \underbrace{\frac{6.78\,e^{-j28.7^\circ}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{6.78\,e^{j28.7^\circ}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}}_{Y_{fr}(z)}$$

$$Y_{nr}(z) \xrightarrow{Z^{-1}} y_{nr}(n) \qquad Y_{fr}(z) \xrightarrow{Z^{-1}} y_{fr}(n)$$

$y_{nr}(n) = 6.3\,(0.5)^n\,u(n)$ ← φυσική ή μεταβατική απόκριση

$$y_{fr}(n) = \left[6.78\,e^{-j28.7}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n}\right) + 6.78\,e^{j28.7}\left(e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)\right]u(n) =$$

$= 13.56 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^\circ\right) u(n)$ ← μόνιμη (σταθερή) απόκριση

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y(n) = 0.9\,y(n-1) - 0.81\,y(n-2) + x(n)$ όταν αυτό βρίσκεται σε ηρεμία και όταν $y(-1) = y(-2) = 1$.

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9 z^{-1} + 0.81 z^{-2}} \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$p_1 = 0.9 e^{j\pi/3}$$
$$p_2 = 0.9 e^{-j\pi/3}$$

- Όταν το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία, τότε

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{(1-0.9 e^{j\pi/3} z^{-1})(1-0.9 e^{-j\pi/3} z^{-1})(1 - z^{-1})} =$$

$$= \frac{0.542 - j0.049}{1 - 0.9 e^{j\pi/3} z^{-1}} + \frac{0.542 + j0.049}{1 - 0.9 e^{-j\pi/3} z^{-1}} + \frac{1.099}{1 - z^{-1}}$$

Z^{-1}

$$y_{zs}(n) = \left[1.099 + 1.088\,(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3} n - 5.2^\circ\right)\right] u(n)$$

- Όταν το σύστημα δεν βρίσκεται σε ηρεμία κατά την εφαρμογή της βηματικής εισόδου, αλλά $y(-1)=y(-2)=1$, τότε θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την απόκριση μηδενικής εισόδου, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0.9-0.81-0.81z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}} = \frac{0.026+j0.4936}{1-0.9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.026-j0.4936}{1-0.9e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} \quad y_{zi}(n) = 0.988\,(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 87^\circ\right) u(n)$$

Η τελική απόκριση έχει ΜΖ

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) = \frac{1.099}{1-z^{-1}} + \frac{0.568+j0.445}{1-0.9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.568-j0.445}{1-0.9e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} \quad y(n) = 1.099\,u(n) + 1.44\,(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 38^\circ\right) u(n)$$

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ

Αιτιατό είναι το σύστημα για το οποίο ισχύει $h(n)=0$ για $n<0$.

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ

Όπως γνωρίζουμε, η ΠΣ του ΜΖ των αιτιατών ακολουθιών είναι το εξωτερικό ενός κύκλου.

Άρα, ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό εάν και μόνον εάν η ΠΣ της συνάρτησης του συστήματος είναι το εξωτερικό ενός κύκλου ακτίνας $r<\infty$, συμπεριλαμβανομένου του σημείου $z=\infty$. (*)

(*) Ένα ΓΧΑ διακριτού χρόνου σύστημα με $H(z)$ εκφρασμένη ως λόγο πολυωνύμων του z, είναι αιτιατό εάν και μόνον εάν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή.

Για παράδειγμα, για το σύστημα $H(z) = (z^3-2z^2+z)/(z^2+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8})$ μπορούμε αμέσως να αποφανθούμε ότι είναι μη αιτιατό, χωρίς να χρειαστεί να βρούμε την ΠΣ.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, δηλ. Φραγμένης Εισόδου Φραγμένης Εξόδου, είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Η σχέση αυτή αποτελεί και την ικανή συνθήκη για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Άρα ο MF συγκλίνει (υπάρχει) και συνεπώς η ΠΣ της $H(z)$ πρέπει να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

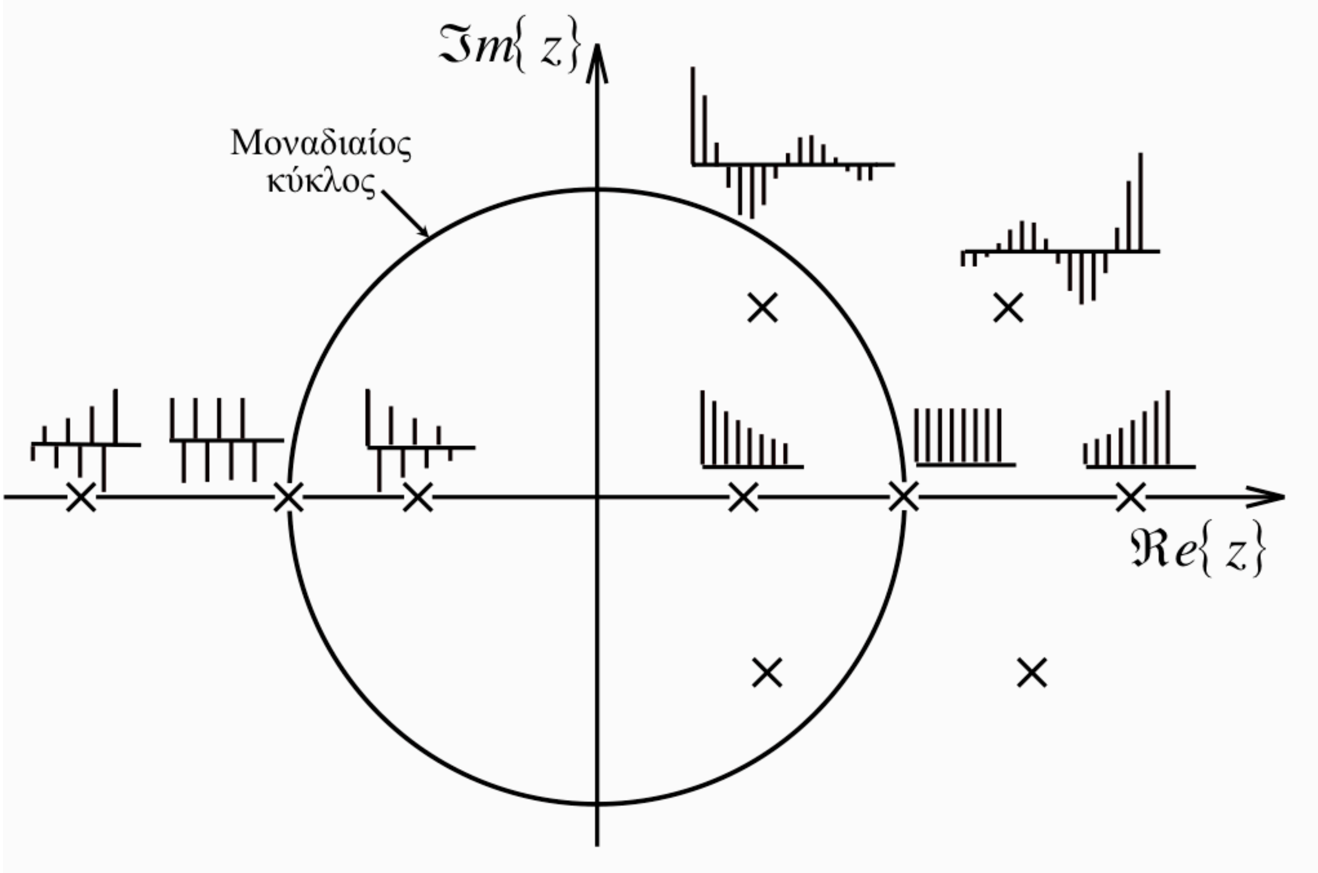
Άρα, ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, εάν και μόνον εάν η ΠΣ της συνάρτησης του συστήματος περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο ($|z|=1$).

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ & ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ & ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Συνδυάζοντας το γεγονός ότι η ΠΣ ενός αιτιατού συστήματος είναι το εξωτερικό ενός κύκλου που ορίζεται από τον πόλο εκείνον που βρίσκεται πιο μακριά από το κέντρο του κύκλου, και ότι για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η ΠΣ να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, καταλήγουμε στο εξής:

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, εάν και μόνον εάν όλοι οι πόλοι της $H(z)$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.



Παράδειγμα

Για το ΓΧΑ σύστημα $H(z)=\dfrac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{2}{1-3z^{-1}}$

να προσδιοριστεί η ΠΣ και να υπολογιστεί η $h(n)$ όταν:

α. το σύστημα είναι ευσταθές

β. το σύστημα είναι αιτιατό

γ. το σύστημα είναι αντιαιτιατό.

Λύση

Οι πόλοι του συστήματος είναι $z=\frac{1}{2}$ και $z=3$.

α. Αφού το σύστημα είναι ευσταθές, η ΠΣ θα πρέπει να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή $\frac{1}{2}<|z|<3$. Συνεπώς η $h(n)$ είναι μη αιτιατή.

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\,(3)^n\, u(-n-1)$$

β. Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, η ΠΣ θα είναι $|z|>3$, και συνεπώς

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2\,(3)^n\, u(n)$$

Το σύστημα αυτό είναι ασταθές αφού η ΠΣ δεν περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο. Παρατηρείστε ότι η αστάθεια προέρχεται από τον πόλο $z=3$ ο οποίος βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου και ο οποίος δημιουργεί την απόκριση $(3)^n u(n)$.

γ. Αφού το σύστημα είναι αντιαιτιατό, η ΠΣ είναι $|z|<0.5$, και συνεπώς

$$h(n) = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2(3)^n\right] u(-n-1)$$

Το σύστημα είναι ασταθές αφού η ΠΣ δεν περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

ΑΠΑΛΟΙΦΕΣ ΠΟΛΩΝ-ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ

- Όταν η θέση ενός πόλου συμπίπτει με εκείνη ενός μηδενικού, τότε ο πόλος αναιρείται από το μηδενικό.

  Αναιρέσεις πόλων-μηδενικών μπορεί να υπάρξουν είτε στη συνάρτηση του συστήματος αυτή καθαυτή, είτε στο γινόμενό της με τον ΜΖ του σήματος εισόδου.

- Όταν ένα μηδενικό βρίσκεται πολύ κοντά σε έναν πόλο, αλλά δεν συμπίπτει, τότε ο όρος της απόκρισης έχει πολύ μικρό πλάτος.

  Η περίπτωση αυτή μπορεί να εμφανιστεί και ως αποτέλεσμα της πεπερασμένης ακρίβειας αναπαράστασης των συντελεστών του συστήματος.

Παράδειγμα Να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

για είσοδο $x(n) = \delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1)$.

Λύση

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$ με πόλους $z=\frac{1}{2}$ και $z=\frac{1}{3}$

$X(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1}$ με μηδενικό στο σημείο $z=\frac{1}{3}$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{\cancel{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})\cancel{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Συνεπώς η απόκριση του συστήματος ισούται με

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Ο όρος $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ που αρχικά υπήρχε, 'εξαφανίστηκε' λόγω της απαλοιφής του πόλου $z=\frac{1}{3}$ από το μηδενικό στην ίδια θέση $z=\frac{1}{3}$.

Άσκηση Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y(n) = 2.5\,y(n-1) - y(n-2) + x(n) - 5\,x(n-1) + 6\,x(n-2)$$

Λύση

$$H(z) = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$ με πόλους στο $z=\frac{1}{2}$ και $z=2$.

Υπολογίζοντας τις ρίζες του αριθμητή (τα μηδενικά) βρίσκουμε ότι αυτές είναι στις θέσεις $z=3$ και $z=2$. Συνεπώς η $H(z)$ γίνεται:

$$H(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z-3}{z-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2.5z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Ο αντίστροφος ΜΖ της $H(z)$ μας δίνει την $h(n)$:

$$h(n) = \delta(n) - 2.5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Η εξίσωση διαφορών του συστήματος, όπως προκύπτει εύκολα από τη σχέση $H(z) = (1-3z^{-1})/(1-\frac{1}{2}z^{-1})$ ισούται με: $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) - 3x(n-1)$

(*) Εκφράζοντας την $H(z)$ ως $H(z)=\dfrac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-3z^{-1}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

καταλήγουμε σε μια εναλλακτική μορφή για την $h(n)$, την εξής:

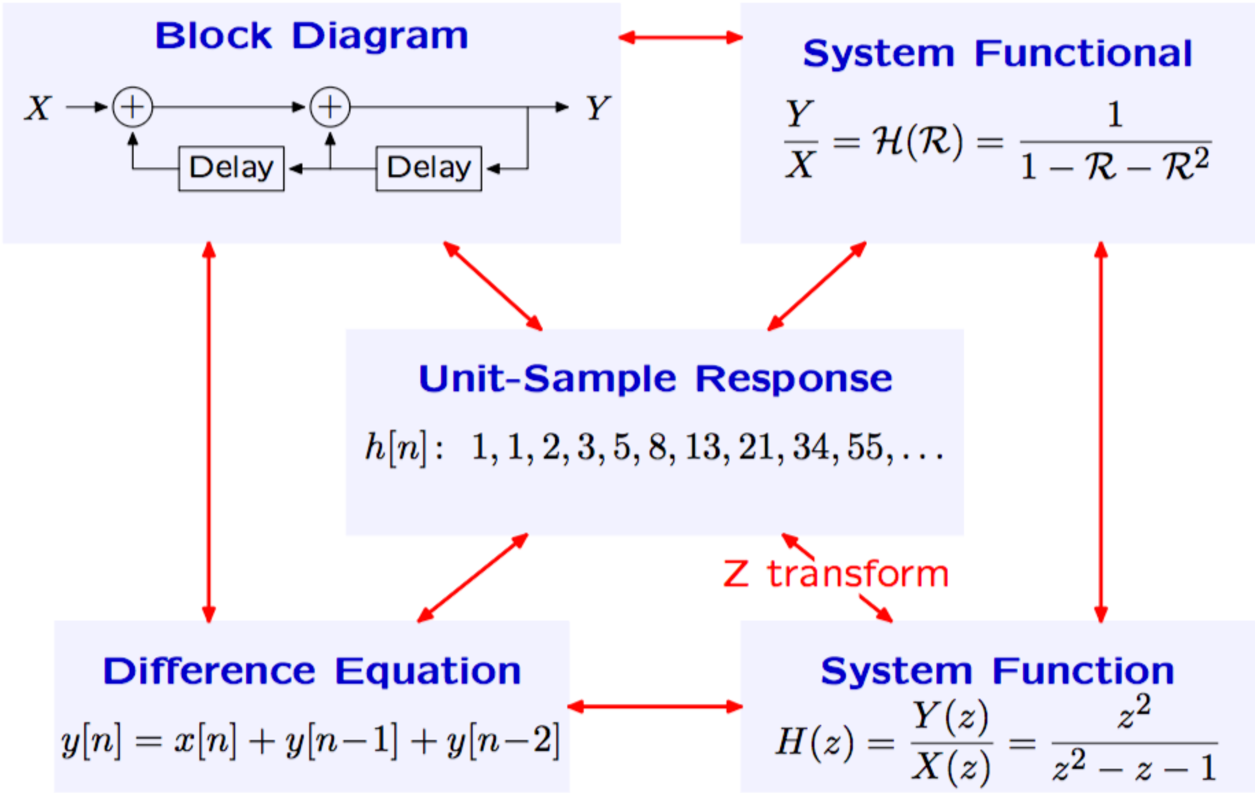
$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

Σημείωση: Το σύστημα είναι ευσταθές αφού ο μοναδικός πόλος που έχει $(z=\frac{1}{2})$ βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Υπάρχει περίπτωση όμως, κατά την υλοποίηση του αρχικού 2ης τάξης συστήματος, να παρουσιαστούν προβλήματα αστάθειας λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας των συντελεστών, η οποία τελικά μπορεί να οδηγήσει στην μη πλήρη απαλοιφή του πόλου από το αντίστοιχο μηδενικό!

Concept Map: Discrete-Time Systems

Relations among representations.



Πηγή: MIT OpenCourseWare http://ocw.mit.edu (6.003 Signals and SystemsFall 2011)