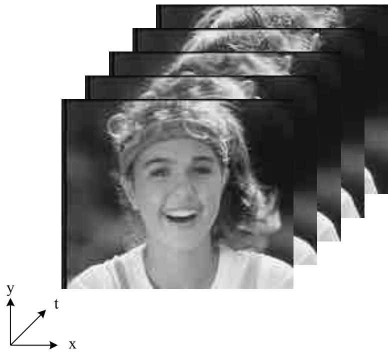
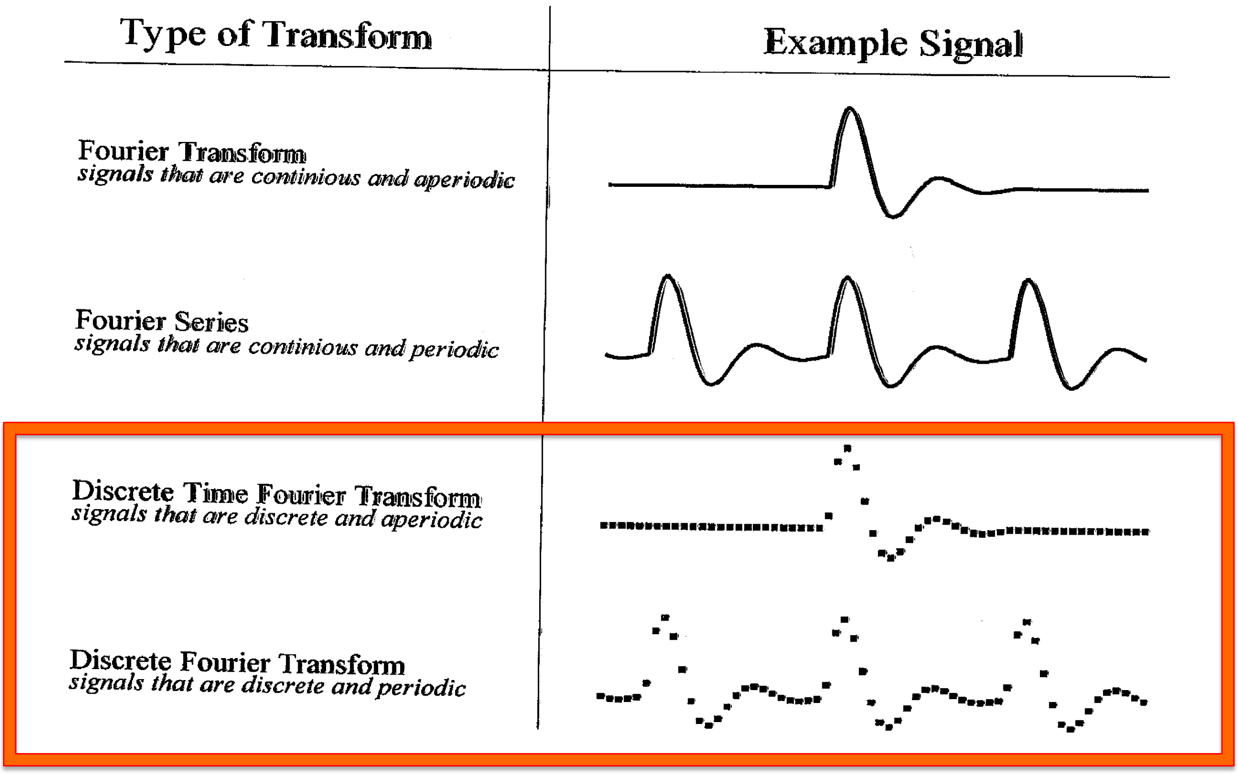
ΣΗΜΑΤΑ

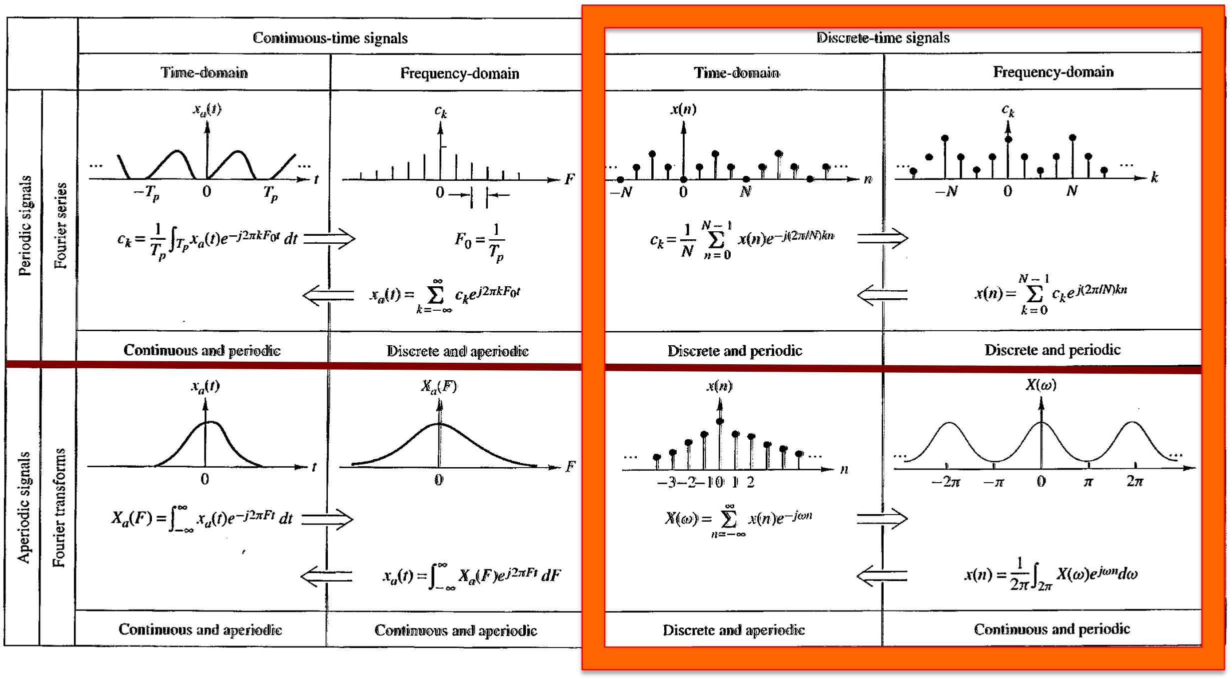
ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



Τύποι Μετασχηματισμού Fourier



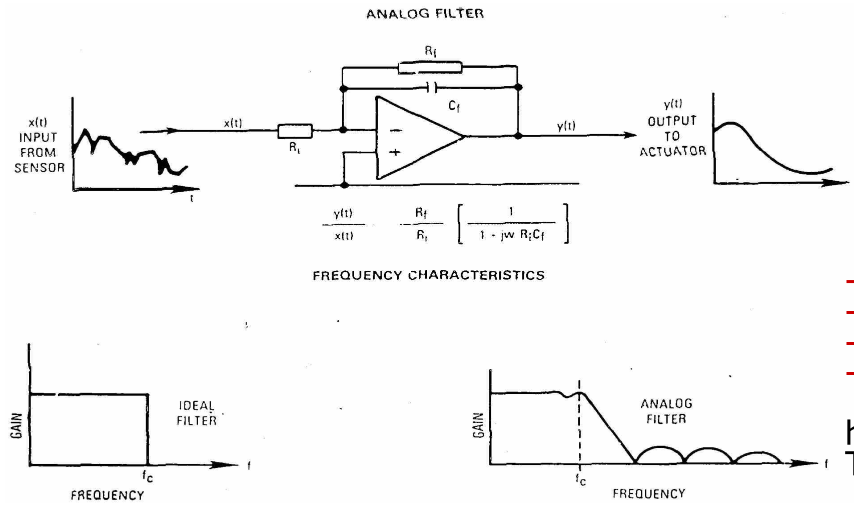
Πανόραμα Μετασχηματισμών Fourier



Σχέσεις Μετασχηματισμών Fourier

	ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Σειρά Fourier $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{jk\Omega_0 t}$ $\alpha_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt$	Σειρά Fourier $x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$ $X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$ $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
ΜΗ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Μετασχηματισμός Fourier $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega$ $X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}\,dt$	Μετασχηματισμός Fourier $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$

ANALOG SIGNAL PROCESSING



-Temperature variations
-Component aging
-Power-supply variations
-Component accuracy

have to be considered.
The resulting circuit:

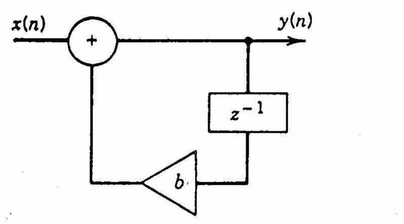
-Has low noise immunity
-Requires adjustments
-Is difficult to modify

BASIC DIGITAL SIGNAL PROCESSING ALGORITHMS

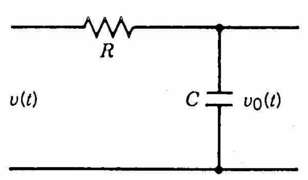
Digital Signal Processing is the arithmetic processing of real-time signals sampled at regular intervals and digitized.

FILTERS

Example:



Digital lowpass filter



Analog lowpass filter

1. Discrete-time
2. Difference equation

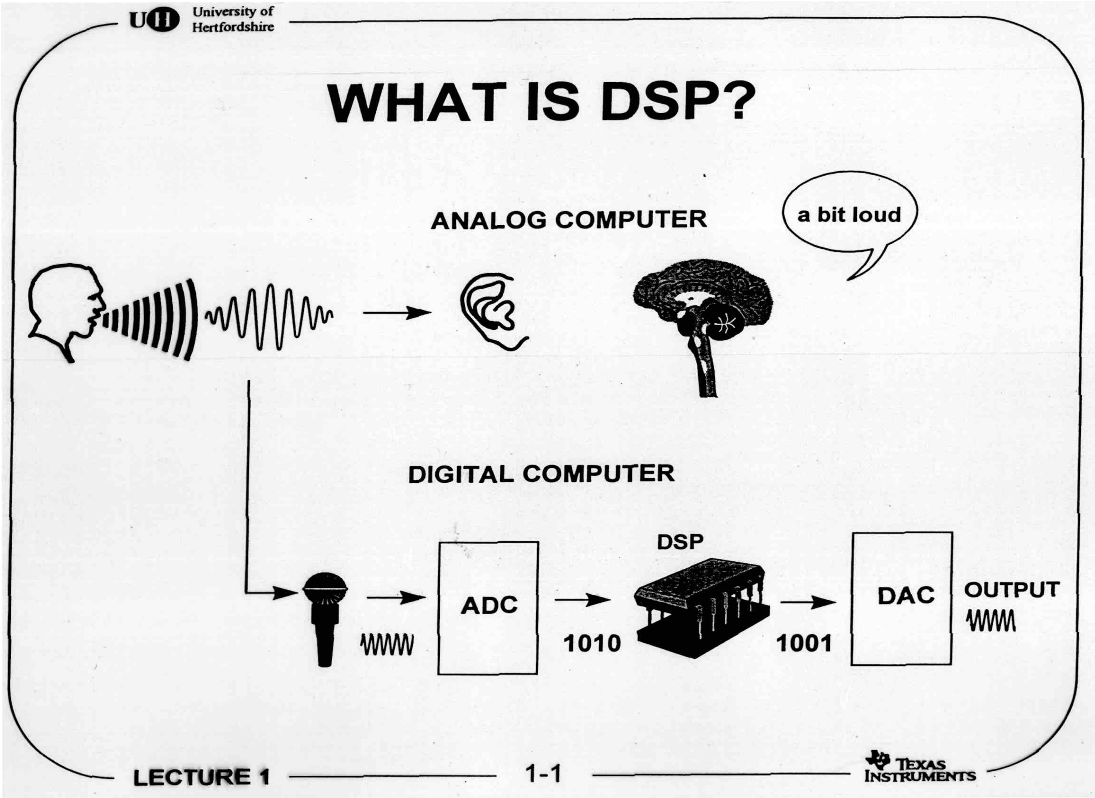
$$y(n) = by(n-1) + x(n)$$

3. z-plane (Z-transform used for analysis)

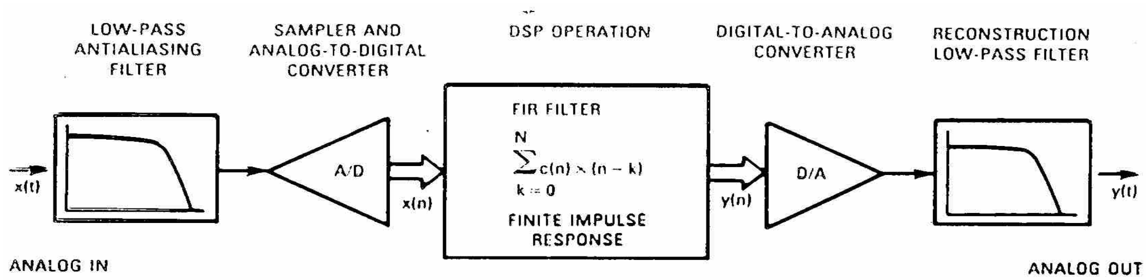
1. Continuous-time
2. Differential equation

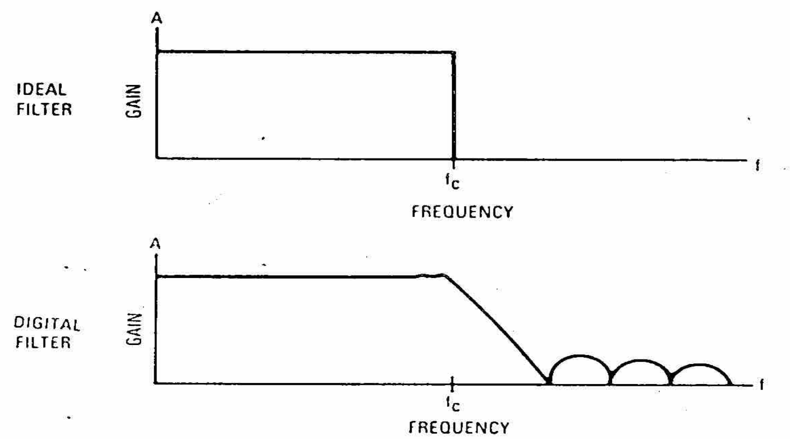
$$v(t) = RC\frac{dv_0(t)}{dt} + v_0(t)$$

3. s-plane (Laplace transform used for analysis)

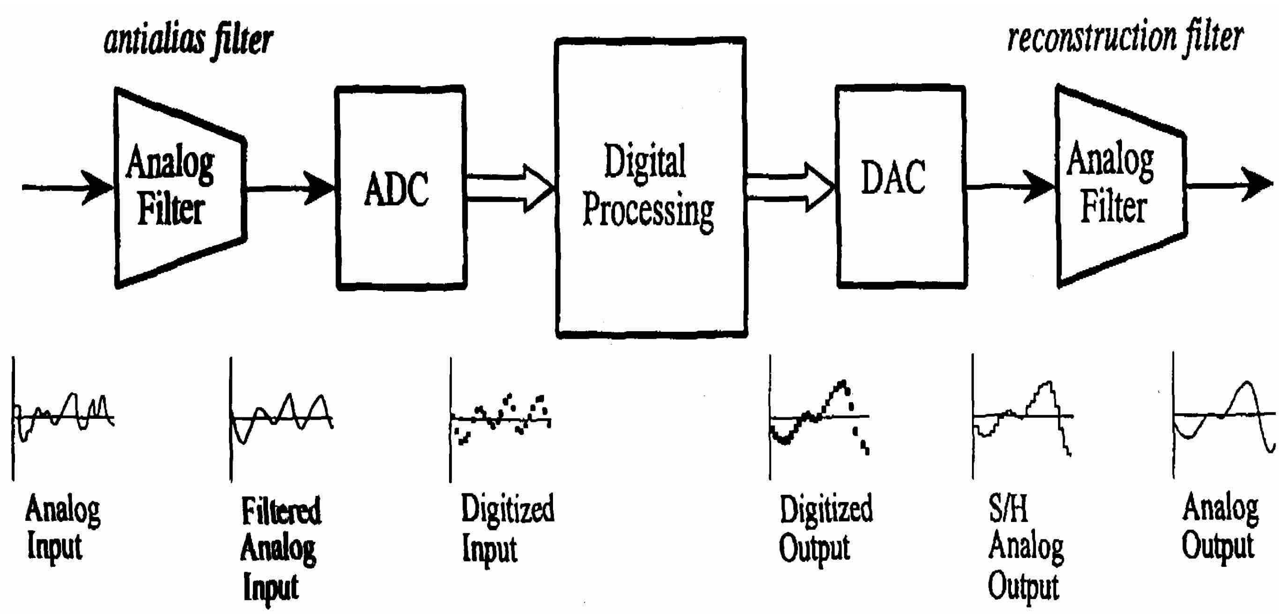


DIGITAL SIGNAL PROCESSING





Digital Signal Processing System



Why Digital Signal Processing?

Because:

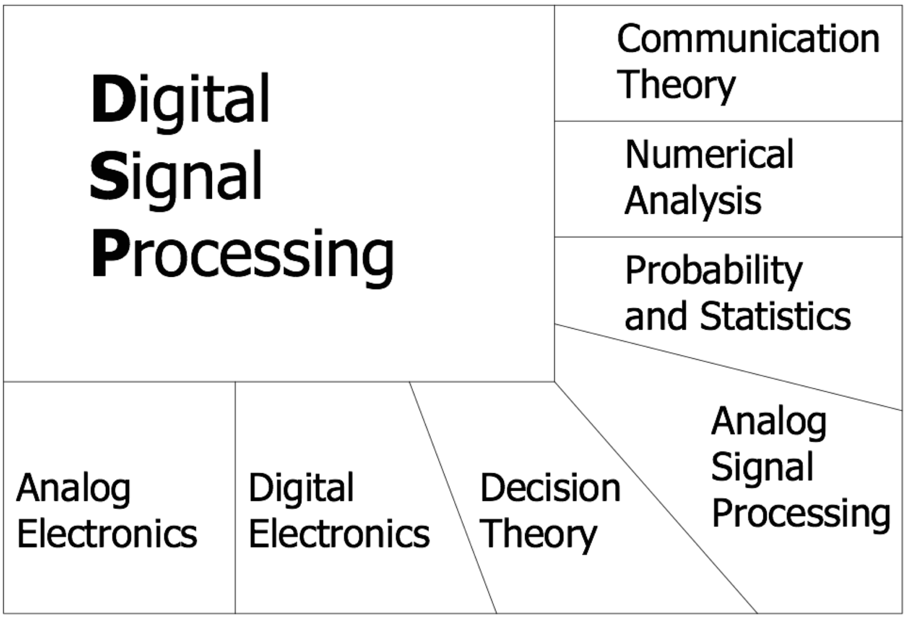
Digital computers are inexpensive

Advantages:
- Greater flexibility (adaptive filters easily implemented)
- Self-test can be built-in
- Perfect reproducibility
- Guaranteed accuracy
- High noise immunity and power supply rejection
- No drift
- Superior performance
- Time-sharing possibility

Disadvantages:
- Speed

Digital Signal Processing

is related to many other areas of science, engineering and mathematics:



Summary of key DSP operations

(1) Convolution: Given two finite length sequences, x(n) and h(n), of lengths N_1 and N_2 ,respectively, their linear convolution is

$$y(n) = h(n) \otimes x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) x(n-k), \quad n = 0,1,\ldots,M-1$$

where $M=N_1+N_2-1$

(2) Correlation:

Given two N- length sequences, x(k) and y(k), with zero means an estimate of their cross-correlation is given by

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\left[r_{xx}(0) r_{yy}(0)\right]^{1/2}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

where $r_{xy}(n)$ is an estimate of the cross-covariance and defined as

$$r_{xy}(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x(k) y(k+n) & n = 0,1,2,\ldots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N+n-1} x(k-n) y(k) & n = 0,-1,-2,\ldots \end{cases}$$

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k)]^2, \; r_{yy}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(k)]^2$$

(3) Filtering: The equation for finite impulse response (FIR) filtering is

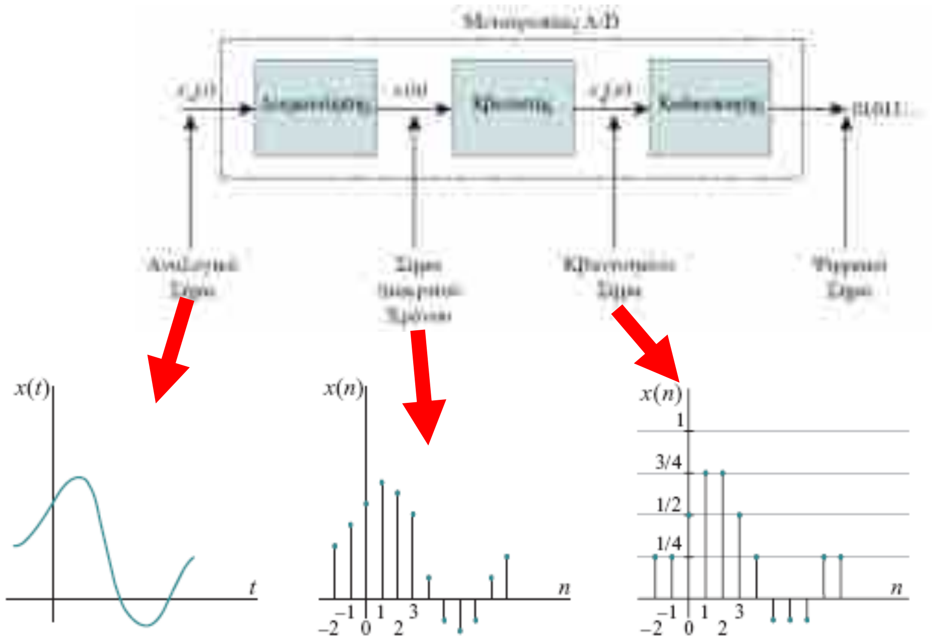
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

where x(k) and y(k) are the input and output of the filter, respectively, and h(k), k=0,1,…,N-1, are the filter coefficients.

(4) Discrete Fourier transform:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{kn} \quad W = \exp(-j2\pi / N)$$

ΤΥΠΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

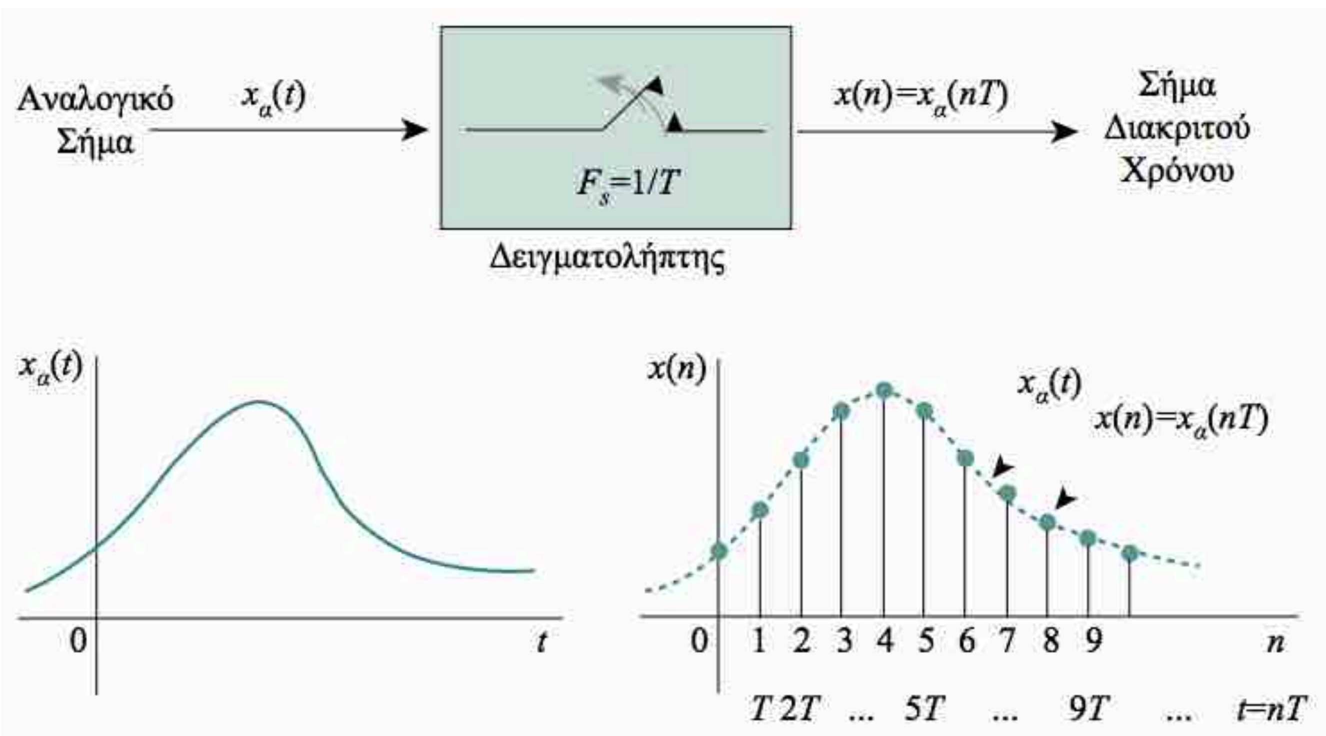


Analog: Continuous Time & Continuous Amplitude

Sampled: Discrete Time & Continuous Amplitude

Digital: Discrete Time & Discrete Amplitude

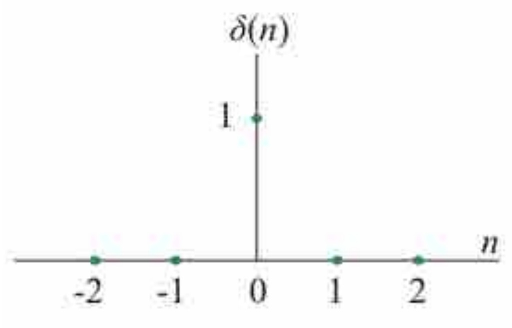
Δειγματοληψία ➔ Ακολουθίες (Sequences)



BASIC SEQUENCES

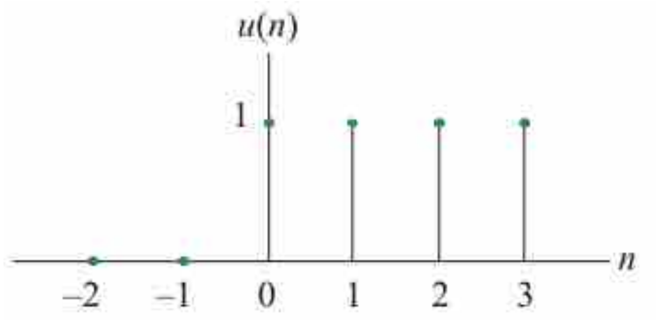
- Unit sample of Unit impulse sequence

$$\delta(n)=\begin{Bmatrix}1\ , & n=0\\ 0\ , & n\neq 0\end{Bmatrix}$$



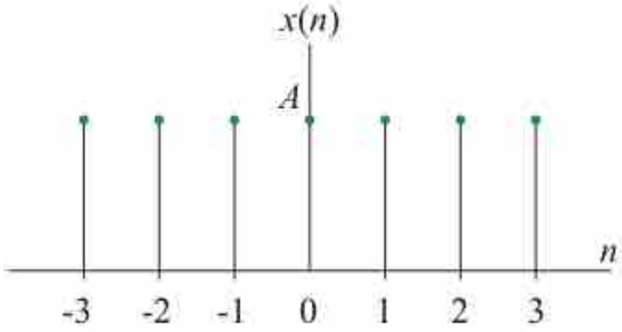
- Unit step sequence

$$u(n)=\begin{Bmatrix}1\ , & n\geq 0\\ 0\ , & n<0\end{Bmatrix}$$



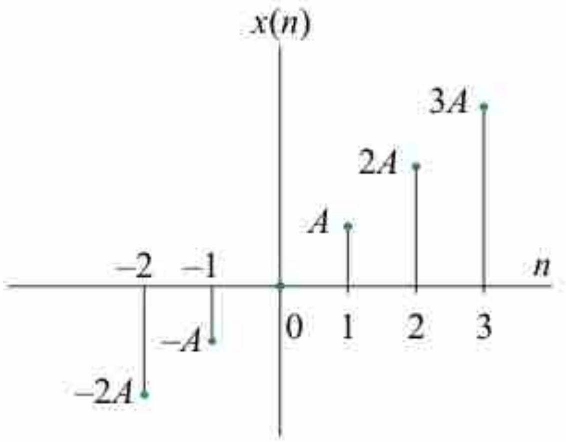
- Constant sequence

$$x(n)=A$$



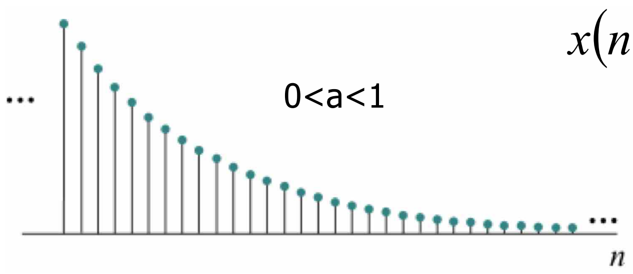
- Linear sequence

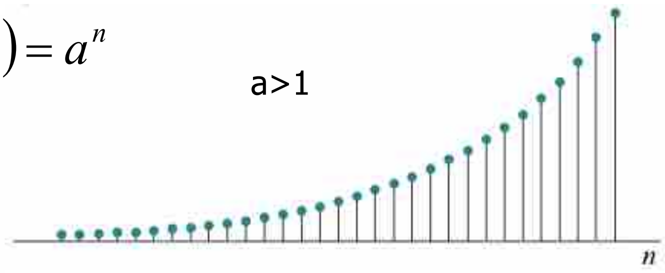
$$x(n)=An$$

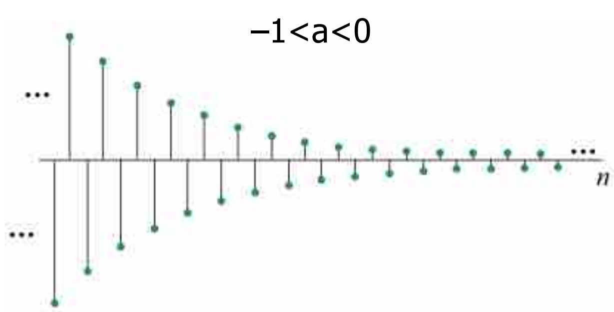


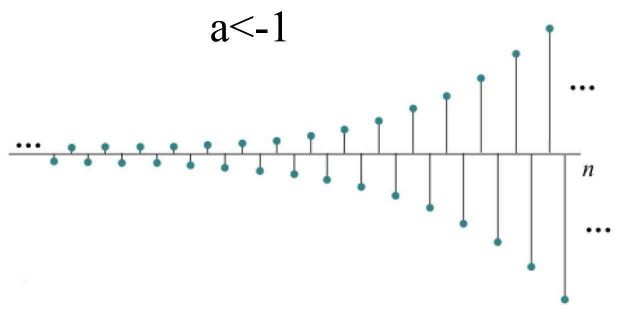
Exponential

$$x(n) = a^n$$



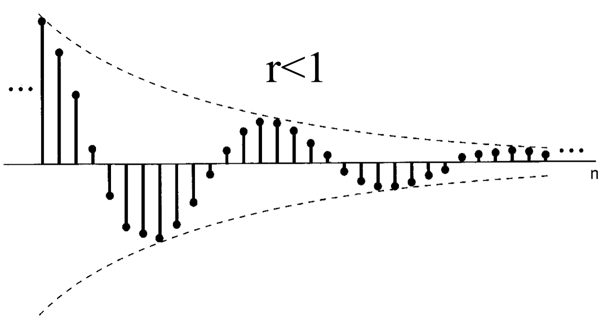


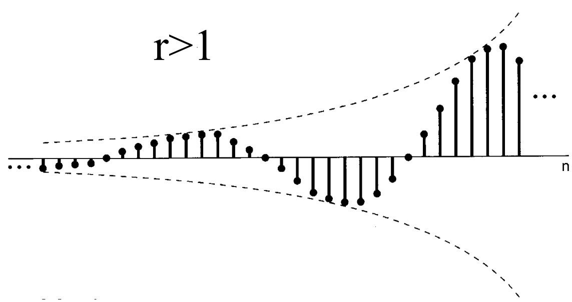


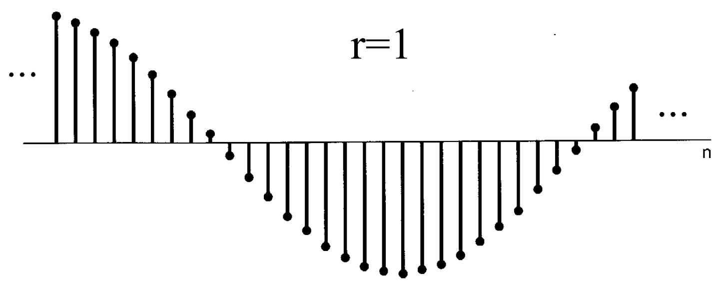


$$x(n) = a^n$$

$$a = re^{j\omega}$$







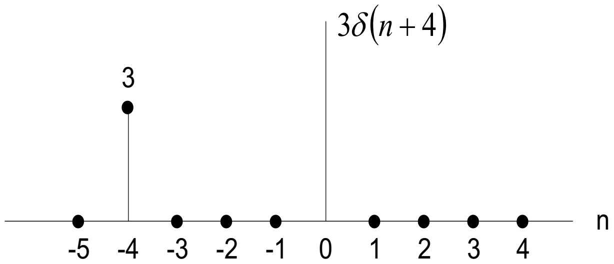
SHIFTED SEQUENCES

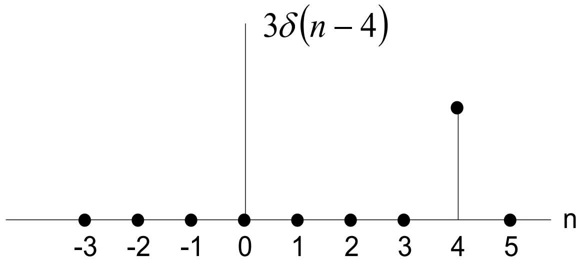
- Shifted sample sequence:

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1\ ,\ \ \mathrm{n}=\mathrm{n}_0\\0\ ,\ \ \mathrm{n}\neq\mathrm{n}_0\end{cases}$$

i.e. where the argument of δ( ) is zero.

Examples:



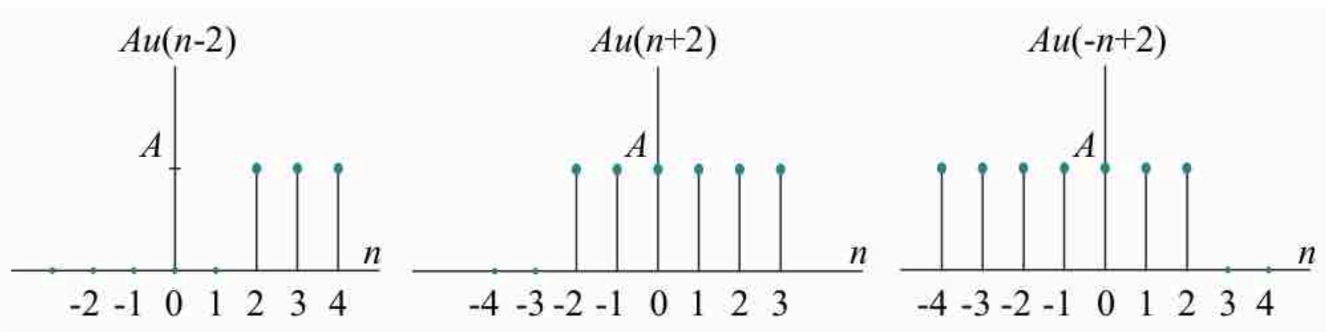


- Shifted Unit Step sequence:

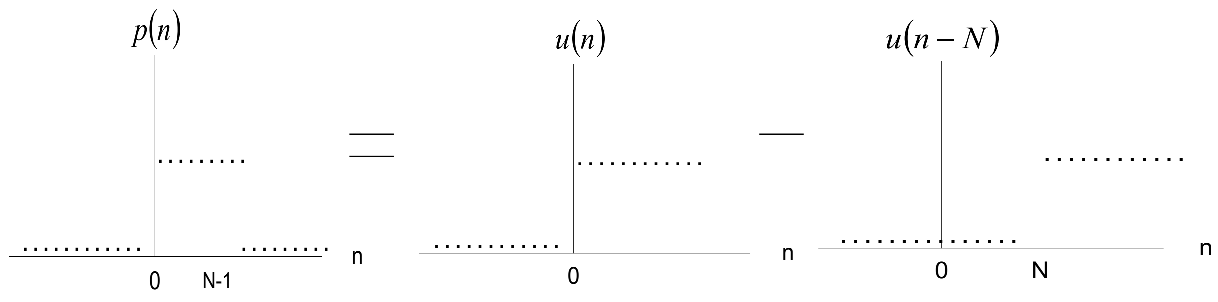
$$u(n-n_0)=\begin{cases}1\ ,\ \ \mathrm{n}\geq\mathrm{n}_0\\0\ ,\ \ \mathrm{n}<\mathrm{n}_0\end{cases}$$

i.e. where the argument of u( ) is zero or positive.

Examples:



- Pulse: $p(n)=u(n)-u(n-N)$



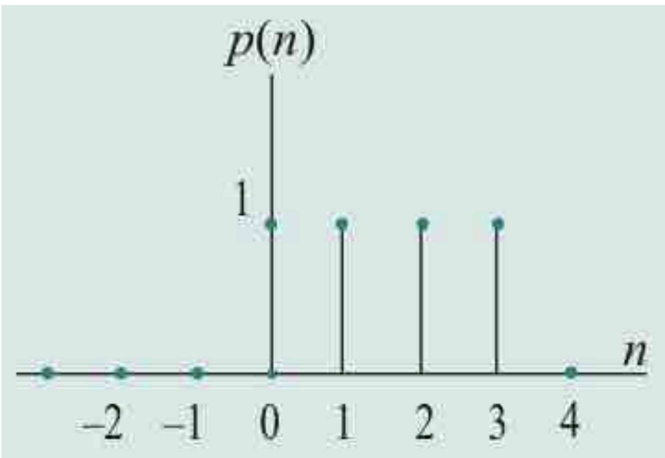
- Unit sample (impulse):

$$\boxed{\delta(n)=u(n)-u(n-1)}$$

i.e. δ(n) is referred to as the first-order difference of u(n).

Άσκηση

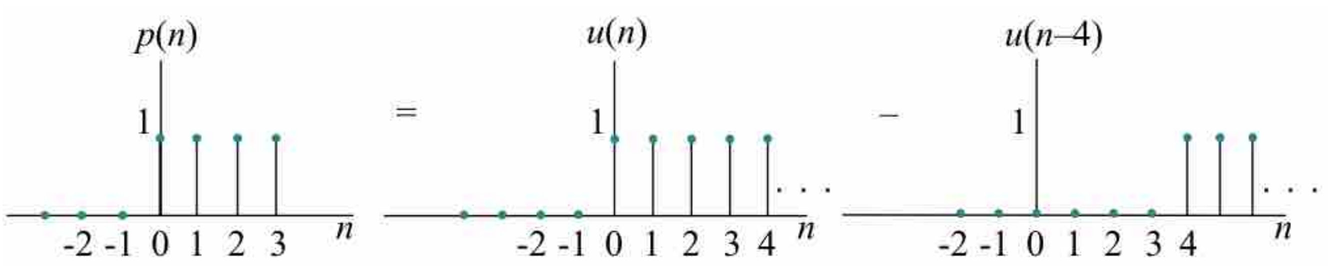
Να εκφράσετε τον παλμό διακριτού χρόνου p(n) ως συνδυασμό βηματικών ακολουθιών



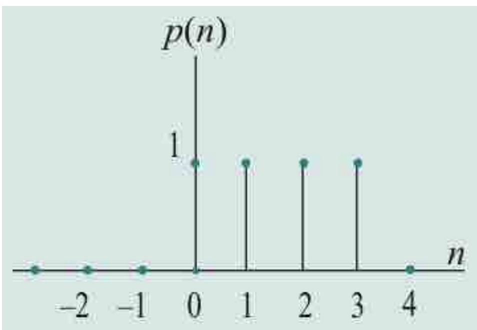
Λύση 1

Η ακολουθία p(n) μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά δύο βηματικών ακολουθιών, από τις οποίες η μία είναι ολισθημένη ως προς την άλλη κατά 4 μονάδες (δείγματα). Έχουμε, δηλαδή,

$p(n) = u(n) – u(n–4)$



Λύση 2

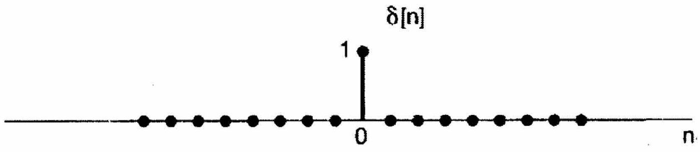


$p(n) = δ(n) + δ(n–1) + δ(n–2) + δ(n–3)$

$δ(n) = u(n) – u(n–1)$
$δ(n–1) = u(n–1) – u(n–2)$
$δ(n–2) = u(n–2) – u(n–3)$
$δ(n–3) = u(n–3) – u(n–4)$

Προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα $p(n) = u(n) – u(n–4)$.

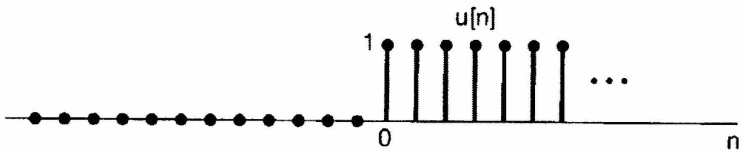
Μοναδιαία Κρουστική ή Μοναδιαίο Δείγμα



$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\delta[n] = u[n] - u[n-1]}$$ ← Πρώτη διαφορά (first difference)

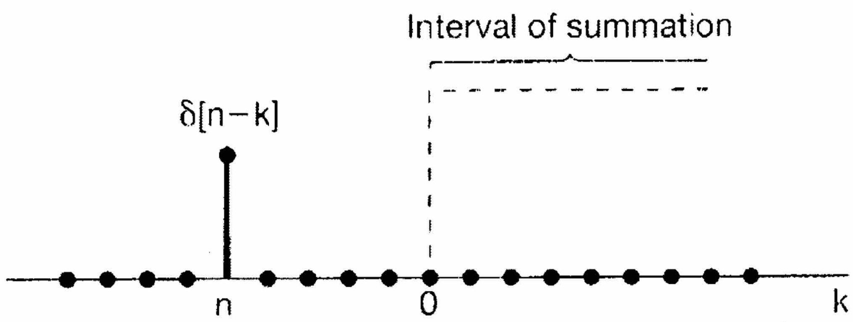
Μοναδιαία Βηματική



$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]} \quad ή \quad u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

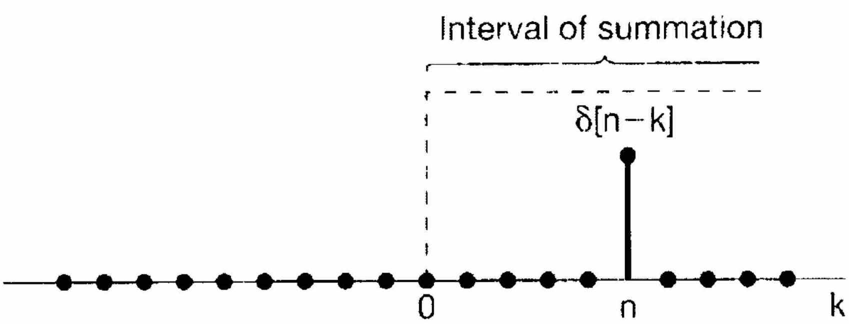
↑ Τρέχον άθροισμα (running sum)



(a)

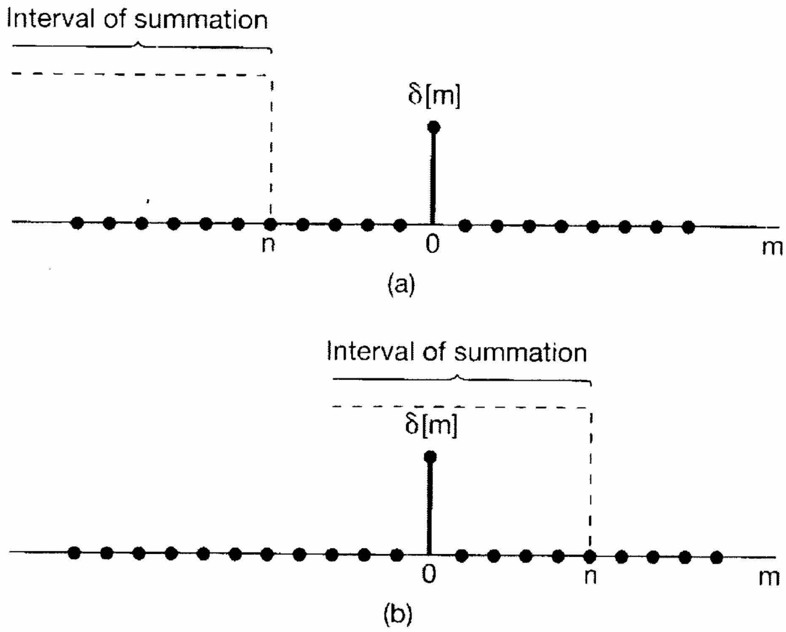
← $n < 0$

$$\boxed{u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]}$$



(b)

← $n > 0$

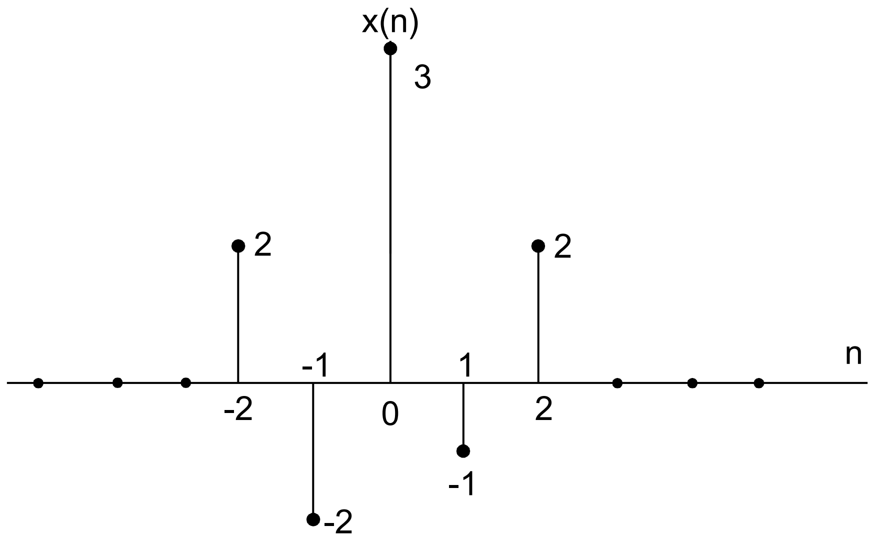


← n<0

$$\boxed{u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]}$$

← n>0

Απόδειξη: $u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k] \xrightarrow[\text{οπότε}]{\text{Θέτω } n-k=m} \xrightarrow[\text{για } k=0 \to m=n]{} \xrightarrow[\text{για } k=\infty \to m=-\infty]{} u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$



$$x(n)=2\delta(n+2)-2\delta(n+1)+3\delta(n)-\delta(n-1)+2\delta(n-2)$$

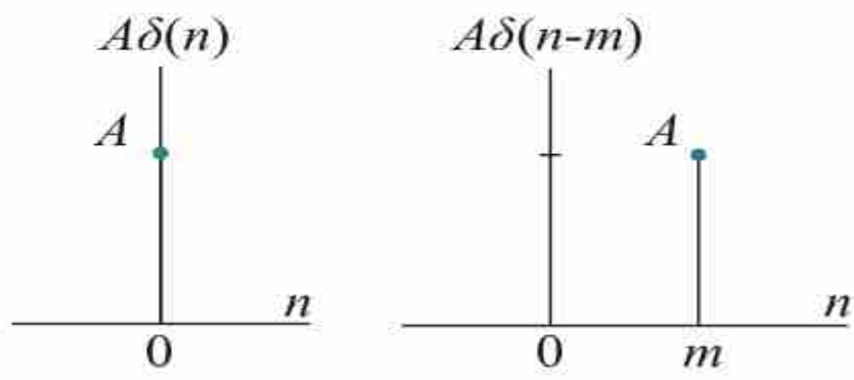
Δεδομένου ότι ***x(n) δ(n) = x(0) δ(n)*** και γενικά ***x(n) δ(n-n₀) = x(n₀) δ(n-n₀)***

Η σχέση αυτή γίνεται:

x(n) = x(-2) δ(n+2) + x(-1) δ(n+1) + x(0) δ(n) + x(1) δ(n-1) + x(2) δ(n-2)

Κάθε ακολουθία μπορεί να εκφραστεί ως σταθμισμένο άθροισμα ολισθημένων μοναδιαίων κρουστικών.

$$\boxed{x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,\delta(n-m)}$$

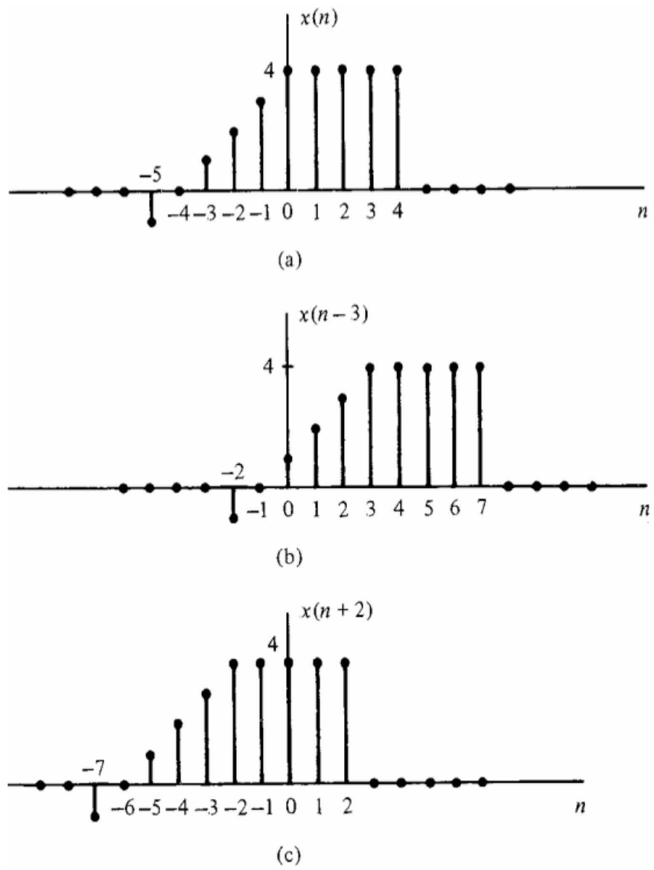


TRANSFORMATION OF THE INDEPENDENT VARIABLE (TIME)

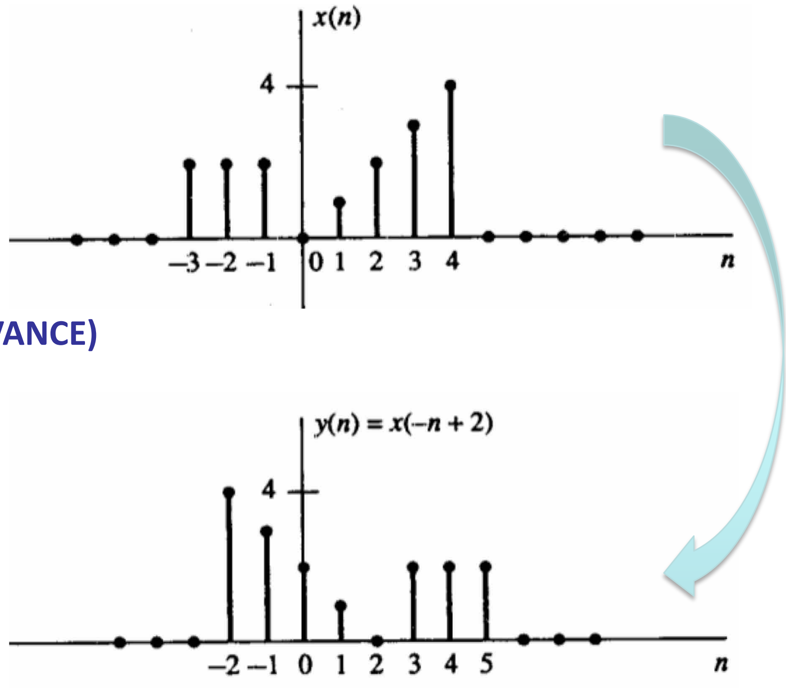
SHIFTED SEQUENCES

DELAYED

ADVANCED



SHIFTING & FOLDING



STEP 1: SHIFT (DELAY or ADVANCE)

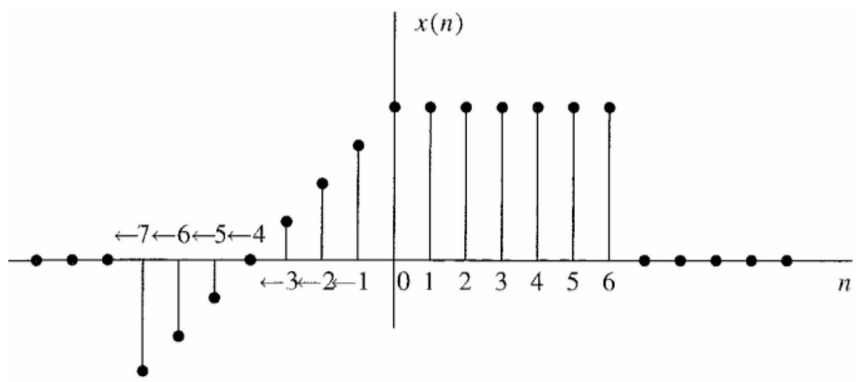
STEP 2: FOLD (or REFLECT)

Important: The operations of folding and shifting are NOT commutative !

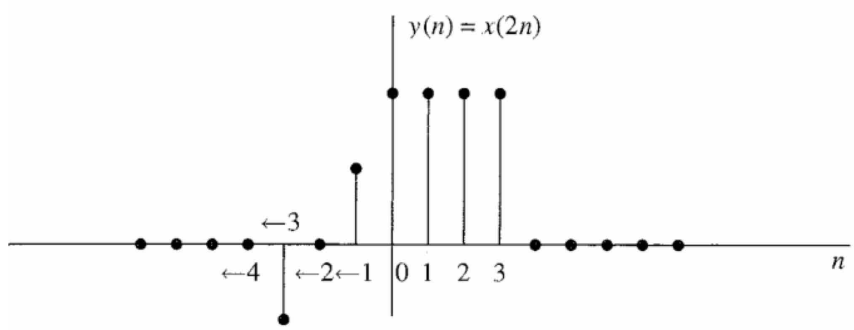
TMESCALING

or

DOWN-SAMPLING

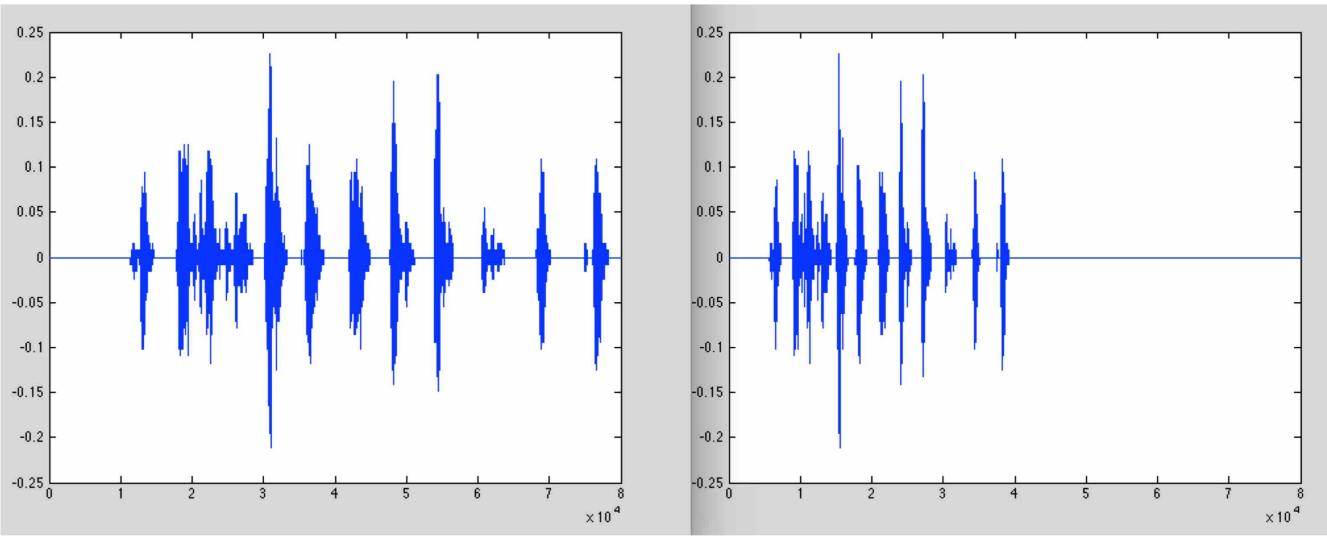


(a)



TRANSFORMATION OF THE INDEPENDENT VARIABLE (TIME)

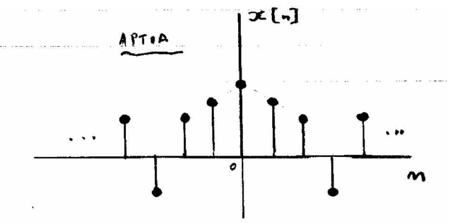
TMESCALING
or
DOWN-SAMPLING



(Matlab demo)

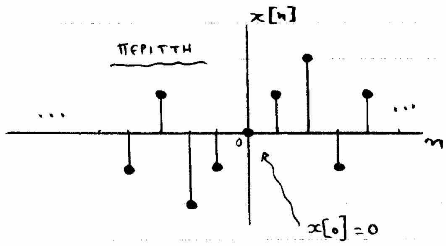
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Α. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΧ



Άρτια συμμετρία: $x[n] = x[-n]$

Περιττή συμμετρία: $x[n] = -x[-n]$



Κάθε πραγματικό ΣΔΧ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνιστώσας:

$$\boxed{x[n] = x_e[n] + x_o[n]}$$

όπου $x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

Σημείωση 1: Τα <u>άρτια (even)</u> σήματα παρουσιάζουν συμμετρία ως προς τον <u>κάθετο</u> άξονα, ενώ τα <u>περιττά (odd)</u> ως προς την <u>αρχή</u> των αξόνων. Συνέπεια του τελευταίου είναι ότι στα περιττά σήματα ισχύει πάντοτε <u>$x[0] = 0$</u>.

Σημείωση 2: Τα <u>άρτια</u> σήματα ονομάζονται και <u>συμμετρικά</u>, ενώ τα <u>περιττά</u> σήματα ονομάζονται και <u>αντισυμμετρικά</u>.

Β. Μιγαδικά Σήματα ΔΧ

Συζυγής-συμμετρία: $\boxed{x[n] = x^*[-n]}$

Συζυγής-αντισυμμετρία: $\boxed{x[n] = -x^*[-n]}$

Κάθε μιγαδικό ΣΔΧ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιας συζυγούς-συμμετρικής $x_{cs}[n]$ και μιας συζυγούς-αντισυμμετρικής $x_{ca}[n]$ συνιστώσας:

$$\boxed{x[n] = x_{cs}[n] + x_{ca}[n]}$$

όπου

$$x_{cs}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*[-n]\right)$$

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x^*[-n]\right)$$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ & ΙΣΧΥΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ενέργεια: $\boxed{E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}$

Μέση ισχύς: $\boxed{P = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2\right)}$

Μέση ισχύς περιοδικού σήματος με περίοδο N: $\boxed{P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2}$

- Η ενέργεια ενός σήματος μπορεί να έχει πεπερασμένη ή άπειρη τιμή.

Η ενέργεια ενός σήματος με πεπερασμένο μήκος και πεπερασμένο πλάτος τιμών είναι πάντοτε πεπερασμένη.

Η ενέργεια ενός σήματος με άπειρο μήκος και πεπερασμένο πλάτος τιμών μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη.

Ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια $(0 < E < \infty)$ ονομάζεται σήμα ενέργειας.

- Η μέση ισχύς ενός σήματος με πεπερασμένο μήκος είναι πάντοτε πεπερασμένη.

  Η μέση ισχύς ενός σήματος με άπειρο μήκος μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη.

  Ένα σήμα πεπερασμένης μέσης ισχύος ονομάζεται <u>σήμα ισχύος</u>.

- Εάν η ενέργεια ενός σήματος είναι πεπερασμένη, τότε η μέση ισχύς αυτού είναι μηδέν.

  Εάν η ενέργεια ενός σήματος είναι άπειρη, η μέση ισχύς μπορεί να έχει πεπερασμένη ή άπειρη τιμή.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ορισμός: Ένα ΣΔΧ $x[n]$ ονομάζεται <u>περιοδικό</u> με <u>περίοδο N</u> $(N>0)$ εάν και μόνον εάν

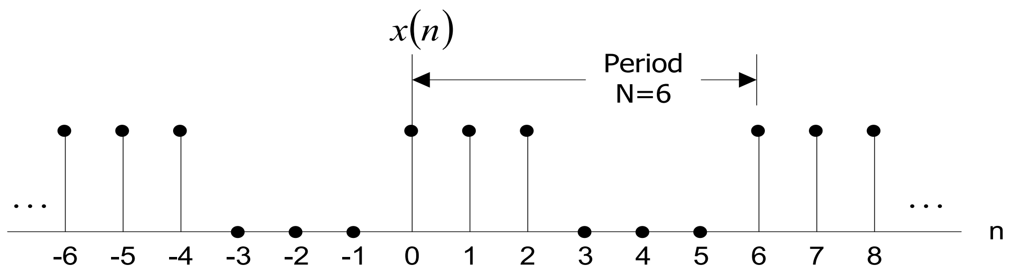
$$x[n+N] = x[n] \qquad \forall n$$

- Η μικρότερη τιμή του N για την οποία ικανοποιείται η σχέση, ονομάζεται <u>θεμελιώδης περίοδος</u>.
- Εάν δεν υπάρχει τιμή του N που να ικανοποιεί τη σχέση, τότε το σήμα ονομάζεται <u>μη περιοδικό</u> ή <u>απεριοδικό</u>.
- Τα περιοδικά σήματα είναι <u>σήματα ισχύος</u>.
- Ένα περιοδικό σήμα με περίοδο N έχει ως περιόδους και τις ποσότητες mN, $m=1,2,3,\dots$, δηλαδή $x[n+mN]=x[n]$. Για $m=1$ έχουμε τη θεμελιώδη περίοδο.
- Έστω τα περιοδικά σήματα $x_1[n]$, $x_2[n]$ με περιόδους N_1, N_2 αντίστοιχα. Τα σήματα $x_1[n]+x_2[n]$ και $x_1[n]\cdot x_2[n]$ θα είναι επίσης περιοδικά με περίοδο $N=\dfrac{N_1\cdot N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1,N_2)}$

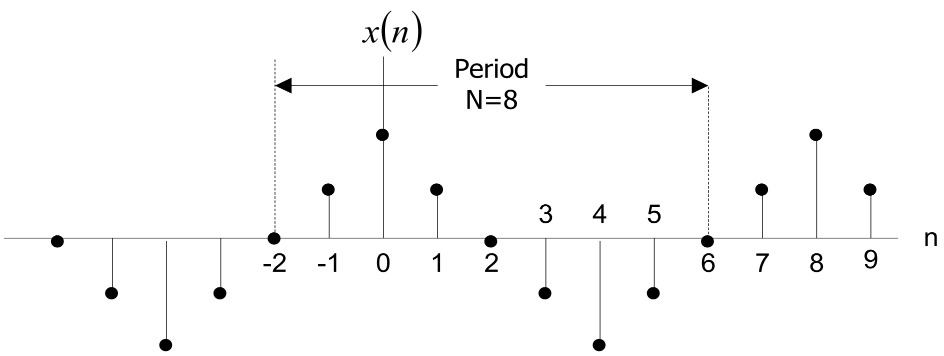
  όπου $\text{ΜΚΔ}(N_1,N_2)$ ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των ακεραίων N_1 και N_2.

Περιοδικές ακολουθίες

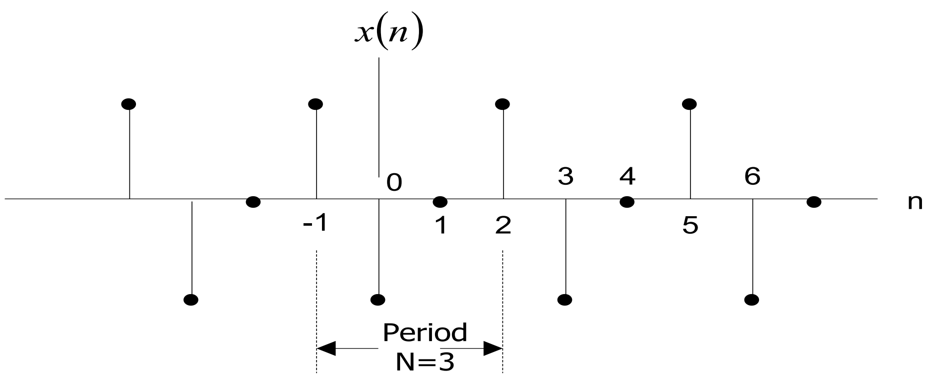
$$x(n+N)=x(n) \qquad \forall n$$



(a) Sequence of period 6



(b) Sequence of period 8



(c) Sequence of period 3

https://www.youtube.com/watch?v=AhoeYb6Qq2c

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ Σ.Δ.Χ. & ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

Ορισμός: Ένα διακριτού χρόνου ημιτονοειδές είναι περιοδικό μόνον εάν η συχνότητά του f είναι ρητός αριθμός.

Απόδειξη: Ένα διακριτού χρόνου ημιτονοειδές σήμα εκφράζεται ως

$$x[n]=\cos(\omega n+\theta)=\cos(2\pi f n+\theta) \qquad -\infty<n<\infty$$

Για να είναι περιοδικό με περίοδο N $(N>0)$ πρέπει να ισχύει

$$x[n+N]=x[n] \Rightarrow \cos[2\pi f(n+N)+\theta]=\cos(2\pi f n+\theta)$$

Για να αληθής η σχέση αυτή πρέπει να υπάρχει ένας ακέραιος k τέτοιος ώστε

$$2\pi f N = 2k\pi$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{f=\frac{k}{N}}$$

Συνεπώς η συχνότητα f πρέπει να είναι λόγος δύο ακεραίων, δηλαδή ρητός αριθμός.