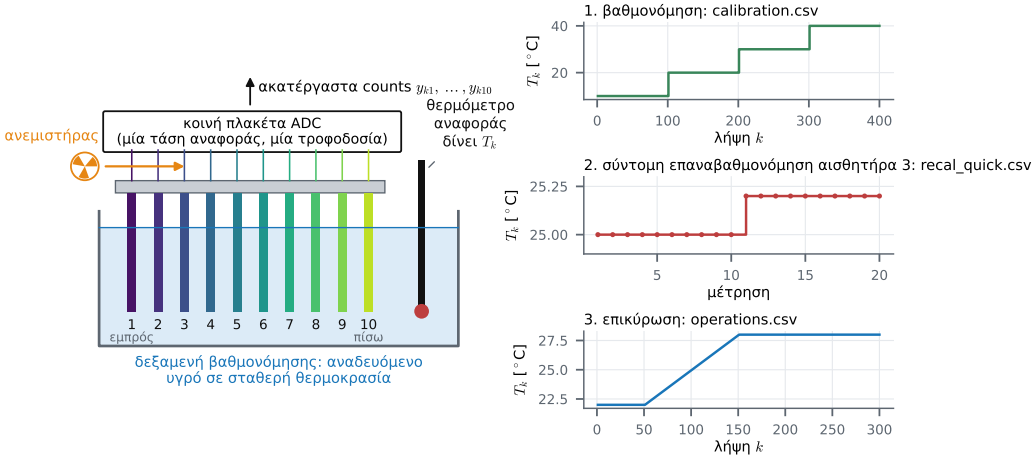
Hands-On 1: Βαθμονόμηση Συστοιχίας Αισθητήρων

Φυλλάδιο

Επεξεργασία Σημάτων (ECE-Y523) · Πανεπιστήμιο Πατρών
Κωνσταντίνος Χατζηλυγερούδης · 29 Οκτωβρίου 2026

Το πρόβλημα. Δέκα αισθητήρες θερμοκρασίας είναι τοποθετημένοι σε μια συστοιχία. Όλοι διαβάζονται από τον ίδιο μετατροπέα αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (ADC), τροφοδοτούνται από το ίδιο τροφοδοτικό και βρίσκονται στην ίδια ροή αέρα. Κάθε αισθητήρας δίνει μια ακατέργαστη ψηφιακή ένδειξη (counts) και έχει τη δική του μετατόπιση και το δικό του κέρδος, ενώ τα σφάλματα των αισθητήρων είναι συσχετισμένα μεταξύ τους. Θα βαθμονομήσουμε τους αισθητήρες, θα συνδυάσουμε τις ενδείξεις τους σε μία θερμοκρασία με αβεβαιότητα και θα διερευνήσουμε μια συστηματική διαφωνία.

Οι μετρήσεις. Μια δεξαμενή βαθμονόμησης με ανάδευση δίνει θερμοκρασία που γνωρίζουμε με ακρίβεια. Σε καθεμία από τις θερμοκρασίες 10, 20, 30 και 40 °C καταγράφουμε 100 λήψεις (snapshots)· κάθε λήψη περιέχει τις δέκα ταυτόχρονες ενδείξεις. Ο αισθητήρας 3 βαθμονομήθηκε αργότερα ξανά με δύο τρόπους: με μια σύντομη επαναβαθμονόμηση, μόνο στους 25.0 και 25.2 °C, και με μια πλήρη επαναβαθμονόμηση σε όλο το εύρος, για σύγκριση. Τέλος, τοποθετούμε τη συστοιχία σε θάλαμο ελεγχόμενης θερμοκρασίας, όπου η θερμοκρασία μεταβάλλεται με τον χρόνο, και καταγράφουμε άλλες 300 λήψεις. Το *πείραμα λειτουργίας* αυτό παίζει τον ρόλο της κανονικής λειτουργίας. Ένα θερμόμετρο αναφοράς καταγράφει και τη θερμοκρασία του θαλάμου, αλλά τις τιμές του τις κρατάμε κρυφές μέχρι την τελική επικύρωση.



Αριστερά: η συστοιχία, ο κοινός ADC, ο ανεμιστήρας και το θερμόμετρο αναφοράς στη δεξαμενή. Δεξιά: η πορεία της θερμοκρασίας στα τρία πειράματα.

Η πορεία. Το notebook έχει τις ίδιες έξι αριθμημένες ενότητες με το φυλλάδιο. Οι πίνακες γράφονται με έντονα κεφαλαία ($\boldsymbol{X}$), τα διανύσματα με έντονα πεζά ($\boldsymbol{w}$) και οι βαθμωτές ποσότητες με απλά σύμβολα (T_k).

	Ενότητα	Τι αποκομίζουμε
1	Βαθμονόμηση	από counts σε °C
2	Διάσωση μιας κακής βαθμονόμησης	τι διορθώνουν η Ridge και η εκ των προτέρων κατανομή
3	Κατανόηση του θορύβου	συνδιακύμανση και κοινά μοτίβα
4	Μία θερμοκρασία	συνδυασμός και αβεβαιότητα
5	Διάγνωση βλάβης	συστηματικές αποκλίσεις και ένας ύποπτος
6	Επικύρωση	σύγκριση με τη θερμοκρασία αναφοράς

1 Βαθμονόμηση: από counts σε θερμοκρασία

Διαλέξεις 1 και 5

Ερώτημα. Ποια ευθεία μετατρέπει τις ενδείξεις κάθε αισθητήρα σε βαθμούς; Έστω $N = 400$ λήψεις και $C = 10$ αισθητήρες, με δείκτη k για τη λήψη και j για τον αισθητήρα. Έξοδος του μοντέλου είναι *τα counts*: η θερμοκρασία της δεξαμενής είναι γνωστή με ακρίβεια, ενώ ο θόρυβος βρίσκεται στην ένδειξη.

$$y_{kj} = a_j + b_j T_k + n_{kj}, \qquad \boldsymbol{X}_{k,:} = [1, T_k], \qquad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Theta} + \text{θόρυβος}.$$

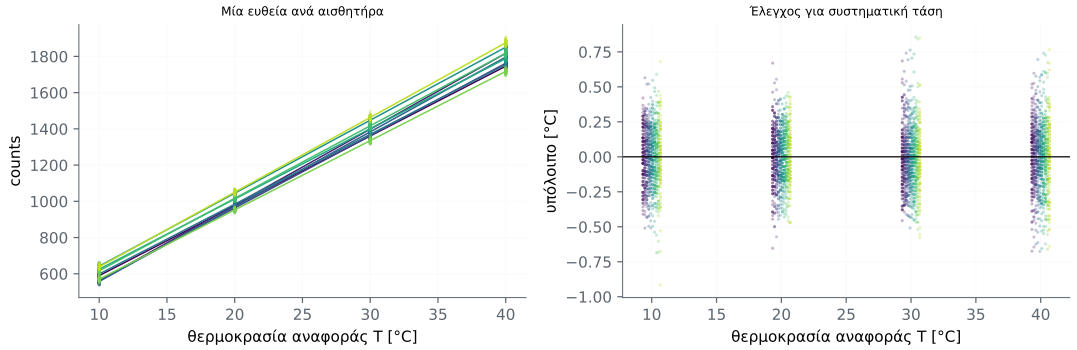
Ο $\boldsymbol{Y}$ έχει διαστάσεις $N \times C$, ο $\boldsymbol{X}$ $N \times 2$ και ο $\boldsymbol{\Theta}$ $2 \times C$. Η μετατόπιση a_j μετριέται σε counts και το κέρδος b_j σε counts/°C. Με μία κλήση ελαχίστων τετραγώνων προσαρμόζουμε και τις δέκα στήλες:

```
X = np.column_stack([np.ones(N), T_cal])
Theta = np.linalg.lstsq(X, Y, rcond=None)[0]
a, b = Theta
R = Y - X @ Theta
E = R / b
```

Για να πάρουμε θερμοκρασίες, αντιστρέφουμε κάθε προσαρμοσμένη ευθεία:

$$\hat{T}_{kj} = \frac{y_{kj} - \hat{a}_j}{\hat{b}_j}.$$

Τα υπόλοιπα $\boldsymbol{R}$ είναι σε counts και ο $\boldsymbol{E}$ σε °C· στο `R / b` κάθε στήλη διαιρείται με το κέρδος του αισθητήρα της.



Αριστερά: μία ξεχωριστή ευθεία για κάθε αισθητήρα. Δεξιά: τα σφάλματα που απομένουν σε κάθε θερμοκρασία της δεξαμενής.

Διαβάστε τα υπόλοιπα. Αν τα υπόλοιπα έδειχναν καμπυλότητα ή μετατοπίσεις που εξαρτώνται από τη θερμοκρασία της δεξαμενής, το αφινικό μοντέλο (affine model) δεν θα περιέγραφε πλήρως τα δεδομένα. Το μέγεθος του θορύβου κάθε αισθητήρα είναι $s_j = \sqrt{\sum_k R_{kj}^2/(N-2)}$ σε counts, ή $s_j/\hat{b}_j$ σε °C. Εδώ τέτοιες τάσεις είναι μικρές, άρα το μοντέλο είναι επαρκές για αυτά τα δεδομένα· αυτό όμως δεν αποδεικνύει ότι ο θόρυβος είναι Gaussian ή ανεξάρτητος.

Συζήτηση

Συγκρίνετε, για την ίδια λήψη, την ονομαστική βαθμονόμηση $(a, b) = (200, 40)$ με την προσαρμοσμένη. Τι αλλάζει: η συστηματική απόκλιση, η διασπορά ή και τα δύο;
Ελέγξτε την κατανόησή σας. Ποια σφάλματα αφαιρεί η βαθμονόμηση και πόσος θόρυβος απομένει περίπου σε κάθε αισθητήρα; Γιατί στη συνέχεια χρησιμοποιούμε παντού την πλήρη βαθμονόμηση; Το παράρτημα Α δίνει την αβεβαιότητα των συντελεστών και το επιχείρημα του κοινού πίνακα σχεδιασμού.

2 Διάσωση μιας κακής βαθμονόμησης

Διαλέξεις 2, 5 και 6

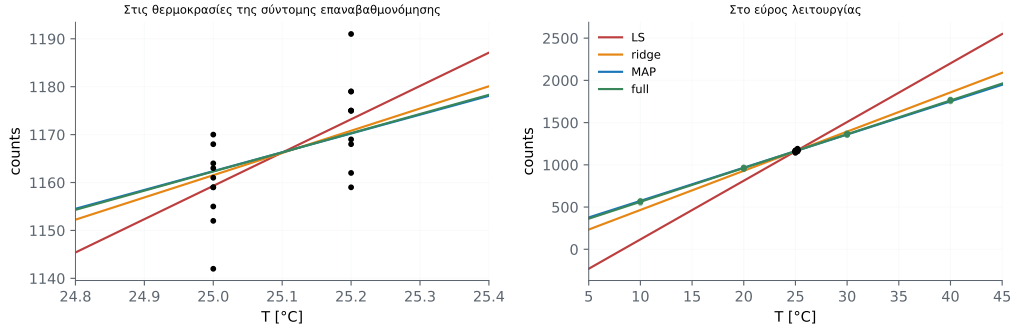
Ερώτημα. Πώς γίνεται μια προσαρμογή που ταιριάζει πειστικά στα δεδομένα της να είναι κακή βαθμονόμηση; Η σύντομη επαναβαθμονόμηση του αισθητήρα 3 έχει δέκα μετρήσεις στους 25.0 °C και δέκα στους 25.2 °C. Επειδή οι δύο θερμοκρασίες αναφοράς είναι σχεδόν ίδιες, οι μετρήσεις αυτές δίνουν ελάχιστη πληροφορία για το κέρδος. Ο αριθμός κατάστασης ανεβαίνει από περίπου 67 στην πλήρη βαθμονόμηση σε 6310 στη σύντομη επαναβαθμονόμηση. Η σύγκριση αυτή είναι μόνο ενδεικτική· στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την πλήρη προσαρμογή της ενότητας 1.

Συγκρίνουμε τρεις εκτιμήσεις: ελάχιστα τετράγωνα (LS), απλή κανονικοποίηση Ridge (ridge regularization) με $\lambda = 1$ και εκτίμηση MAP με μια εκ των προτέρων κατανομή (prior) που προκύπτει από τους υπόλοιπους αισθητήρες. Για Gaussian θόρυβο, τα ελάχιστα τετράγωνα δίνουν την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας. Η απλή Ridge είναι εκτίμηση MAP με ισοτροπική Gaussian εκ των προτέρων κατανομή γύρω από το μηδέν· μια τέτοια κατανομή δεν περιγράφει καλά τη μετατόπιση και το κέρδος, που έχουν διαφορετικές μονάδες.

Οι άλλοι εννέα αισθητήρες μάς δίνουν τη μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}_0$ της εκ των προτέρων κατανομής και μία τυπική απόκλιση για κάθε συντελεστή. Με $\boldsymbol{\Lambda}_0 = \mathrm{diag}(1/s_{0,a}^2, 1/s_{0,b}^2)$ και τυπική απόκλιση του θορύβου σε counts $\sigma = s_3$,

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{X}_q^\top \boldsymbol{X}_q}{\sigma^2} + \boldsymbol{\Lambda}_0, \qquad \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MAP}} = \frac{\boldsymbol{X}_q^\top \boldsymbol{y}_q}{\sigma^2} + \boldsymbol{\Lambda}_0 \boldsymbol{\mu}_0.$$

Λύνουμε το σύστημα χωρίς να υπολογίσουμε αντίστροφο πίνακα.



Κοντά στους 25 °C όλες οι προσαρμογές φαίνονται εύλογες. Σε όλο το εύρος λειτουργίας όμως συμπεριφέρονται πολύ διαφορετικά. Η πλήρης επαναβαθμονόμηση δίνει το μέτρο σύγκρισης.

Προσαρμογή	Μετατόπιση [counts]	Κέρδος [counts/°C]	Σφάλμα στους 40 °C
LS	−578.2	69.50	+10.99 °C
Απλή Ridge	1.7	46.40	+2.38 °C
MAP με εκ των προτέρων	180.5	39.28	−0.27 °C
Πλήρης επαναβαθμονόμηση	162.3	40.00	αναφορά

Το σφάλμα στους 40 °C είναι η διαφορά των counts που προβλέπει κάθε ευθεία από εκείνα της πλήρους επαναβαθμονόμησης, διαιρεμένη με το κέρδος της πλήρους επαναβαθμονόμησης: η διαφωνία των ευθειών εκφρασμένη σε βαθμούς.

Συζήτηση

Τι συμβαίνει αν πολλαπλασιάσουμε επί πέντε τις τυπικές αποκλίσεις της εκ των προτέρων κατανομής; Πώς μοιράζεται τότε το βάρος ανάμεσα στις μετρήσεις και στην εκ των προτέρων κατανομή;

Ελέγξτε την κατανόησή σας. Η Ridge κάνει τη λύση σταθερή· τι καθορίζει σε ποια τιμή καταλήγει; Μπορεί μια σταθερή απάντηση να είναι λανθασμένη; Δείτε επίσης το παράρτημα Β και τις ασκήσεις 2–3 του προαιρετικού notebook.

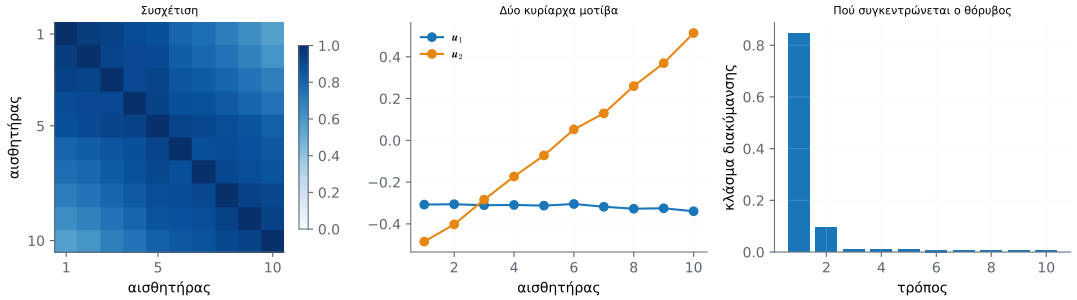
3 Κατανόηση του θορύβου

Διαλέξεις 4 και 5

Ερώτημα. Πώς συσχετίζονται μεταξύ τους τα σφάλματα των αισθητήρων; Κάθε γραμμή του $\boldsymbol{E}$ περιέχει τα υπόλοιπα και των δέκα αισθητήρων για μία λήψη, σε °C. Η βαθμονόμηση χρησιμοποίησε δύο παραμέτρους ανά αισθητήρα, οπότε εκτιμούμε τη συνδιακύμανση ως

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{E}^{\top}\boldsymbol{E}}{N-2}, \qquad \rho_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}}.$$

Ο $\boldsymbol{S}$ έχει διαστάσεις $C \times C$ και μονάδες $^{\circ}\mathrm{C}^2$. Τα στοιχεία εκτός διαγωνίου δεν είναι αμελητέα: όλοι οι αισθητήρες μετρούν την ίδια στιγμή, διαβάζονται από τον ίδιο ADC και βρίσκονται στην ίδια ροή αέρα, οπότε μια διαταραχή σε κάποιο από αυτά επηρεάζει ταυτόχρονα πολλές ενδείξεις.



Ο πίνακας συσχέτισης, τα δύο κυρίαρχα ιδιοδιανύσματα και το ποσοστό της διακύμανσης που εξηγεί το καθένα. Τα πρόσημα των ιδιοδιανυσμάτων είναι αυθαίρετα.

Διαβάστε τα μοτίβα. Στην ιδιοανάλυση (eigendecomposition) $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\top}$, κάθε ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{u}_i$ είναι ένα μοτίβο σφάλματος που εκτείνεται σε όλους τους αισθητήρες, και η λ_i είναι η διακύμανση των σφαλμάτων στην κατεύθυνση αυτού του μοτίβου. Ένα σχεδόν ομοιόμορφο μοτίβο παραπέμπει σε μια κοινή ηλεκτρονική διαταραχή. Ένα μοτίβο που αλλάζει από την μπροστινή προς την πίσω πλευρά της συστοιχίας είναι συμβατό με τη ροή του αέρα. Τα δύο αυτά μοτίβα εξηγούν περίπου το 94% της διακύμανσης· η συνδιακύμανση από μόνη της, όμως, δεν αποδεικνύει ποιες είναι οι φυσικές τους αιτίες.

Λευκοποίηση. Η παραγοντοποίηση Cholesky δίνει $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\top}$. Τη λευκοποίηση (whitening) ενός διανύσματος σφάλματος $\boldsymbol{e}$ την κάνουμε λύνοντας το $\boldsymbol{L}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}$. Για όλες τις γραμμές μαζί:

```
L = np.linalg.cholesky(S)
Q = np.linalg.solve(L, E.T).T
```

Η λευκοποίηση αλλάζει την κλίμακα των συντεταγμένων και τις αναμειγνύει. Στο Gaussian μοντέλο με την αληθινή συνδιακύμανση, οι λευκοποιημένες συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες Gaussian μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία διακύμανση, $\mathcal{N}(0,1)$. Με τον εκτιμημένο πίνακα, στα δεδομένα βαθμονόμησης ισχύει εξ ορισμού $Q^{\top}Q/(N-2) = \boldsymbol{I}$. Εδώ ελέγχουμε μόνο ότι ο υπολογισμός είναι σωστός· την ανεξάρτητη επικύρωση την κάνουμε αργότερα, σε νέα δεδομένα.

Συζήτηση

Ποιο μοτίβο είναι ομοιόμορφο και ποιο αλλάζει από μπροστά προς τα πίσω; Τι σημαίνει ένα αρνητικό στοιχείο σε ένα ιδιοδιάνυσμα;
Ελέγξτε την κατανόησή σας. Από εδώ και πέρα, το ίδιο μοντέλο συνδιακύμανσης χρησιμοποιείται τόσο για τον συνδυασμό όσο και για τη διάγνωση. Σε ποιες δύο υποθέσεις για τα σφάλματα στηρίζεται; Το παράρτημα C αποδεικνύει την εκτίμηση και η άσκηση 4 του προαιρετικού notebook συγκρίνει διαφορετικούς πίνακες λευκοποίησης.

4 Μία θερμοκρασία με αβεβαιότητα

Διάλεξη 5

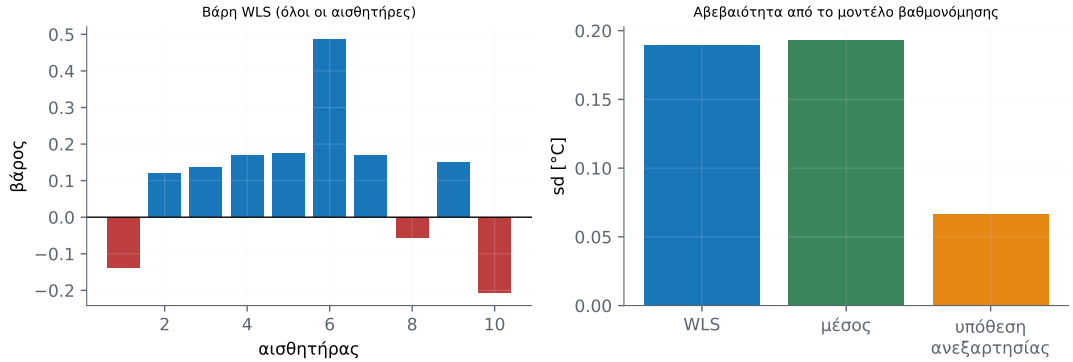
Ερώτημα. Πόσο κερδίζουμε συνδυάζοντας δέκα συσχετισμένους αισθητήρες; Για μία λήψη, έστω $\boldsymbol{t}$ το διάνυσμα με τις βαθμονομημένες θερμοκρασίες των αισθητήρων: $\boldsymbol{t} = T\mathbf{1} + \boldsymbol{e}$, με $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{S}$. Τα σταθμισμένα ελάχιστα τετράγωνα (WLS) δίνουν

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{S}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\mathbf{1}}, \qquad \hat{T} = \boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{t}, \qquad \mathrm{sd}(\hat{T}) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\mathbf{1}}}.$$

Τα βάρη αθροίζουν στη μονάδα. Στο μοντέλο αυτό, τα βάρη αυτά δίνουν την ελάχιστη διακύμανση ανάμεσα σε όλους τους αμερόληπτους γραμμικούς συνδυασμούς. Τα υπολογίζουμε λύνοντας ένα σύστημα:

```
Si1 = np.linalg.solve(S, np.ones(C))
w = Si1 / Si1.sum()
T_all = T_probes @ w
sd_all = 1 / np.sqrt(Si1.sum())
```

Η `combine` του notebook επιστρέφει επίσης το μέγεθος d^2 των υπολοίπων, που θα χρειαστούμε στην επόμενη ενότητα, και τη χρησιμοποιούμε ξανά μετά τη διάγνωση.



Κάποια βάρη WLS είναι αρνητικά. Τα WLS και ο απλός μέσος όρος έχουν πολύ μεγαλύτερη αβεβαιότητα από όση προβλέπει η υπόθεση ανεξάρτητων αισθητήρων. Εδώ συμμετέχουν όλοι οι αισθητήρες.

Συγκρίνετε τις αβεβαιότητες. Ο απλός μέσος όρος έχει διακύμανση $\mathbf{1}^{\top}\boldsymbol{S}\mathbf{1}/C^2$. Αν οι αισθητήρες ήταν ανεξάρτητοι, η διακύμανση θα ήταν $\sum_j S_{jj}/C^2$. Οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις είναι εδώ περίπου $0.193\,^{\circ}\mathrm{C}$ και $0.066\,^{\circ}\mathrm{C}$, ενώ τα WLS δίνουν $0.190\,^{\circ}\mathrm{C}$. Το κοινό μέρος του θορύβου δεν εξαφανίζεται με τον μέσο όρο. Τα αρνητικά βάρη μπορούν να ακυρώσουν ορισμένες συσχετισμένες διαταραχές, όχι όμως μια διαταραχή που μοιάζει ακριβώς με πραγματική αλλαγή της θερμοκρασίας.

Οι αβεβαιότητες αυτές προκύπτουν από το μοντέλο υγιών αισθητήρων. Ένας ελαττωματικός αισθητήρας μπορεί να αλλοιώσει συστηματικά τη συνδυασμένη ένδειξη. Η αβεβαιότητα των συντελεστών της πλήρους βαθμονόμησης είναι εδώ μικρή και την παραλείπουμε (παράρτημα F)· με τη σύντομη επαναβαθμονόμηση θα χρειαζόταν περισσότερη προσοχή.

Συζήτηση

Πώς αλλάζει η αβεβαιότητα αν αγνοήσουμε τα στοιχεία εκτός διαγωνίου του $\boldsymbol{S}$; Ποια υπόθεση αλλάξαμε;

Ελέγξτε την κατανόησή σας. Γιατί η αβεβαιότητα που αναφέρουμε πρέπει να περιλαμβάνει τη συνδιακύμανση μεταξύ των αισθητήρων; Γιατί η θερμοκρασία αναφοράς του θαλάμου μένει κρυφή μέχρι την ενότητα 6; Το παράρτημα F αποδεικνύει τον τύπο του συνδυασμού και το κατώτατο όριο λόγω του κοινού θορύβου.

5 Διάγνωση συστηματικής διαφωνίας

Διάλεξη 4, με μια σύντομη εισαγωγή στην κατανομή χ^2

Ερώτημα. Είναι η διαφωνία των αισθητήρων υπερβολικά μεγάλη, και ποιος αισθητήρας την εξηγεί; Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο γύρω από την εκτιμημένη θερμοκρασία, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t} - \hat{T}\mathbf{1}$, από το οποίο απαλείφεται η άγνωστη αληθινή θερμοκρασία. Στο Gaussian μοντέλο με γνωστή συνδιακύμανση,

$$d^2 = \boldsymbol{r}^\top \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{r} \sim \chi^2_{C-1}.$$

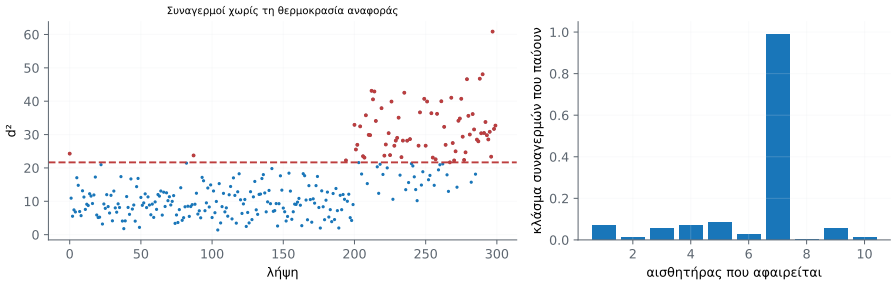
Μια μεταβλητή χ^2_ν είναι άθροισμα των τετραγώνων ν ανεξάρτητων μεταβλητών $\mathcal{N}(0,1)$. Η εκτίμηση μίας θερμοκρασίας «καταναλώνει» μία διεύθυνση, οπότε μένουν $C-1$ βαθμοί ελευθερίας. Για δέκα αισθητήρες το ποσοστημόριο 99% είναι 21.67. Επειδή ο $\boldsymbol{S}$ είναι εκτιμημένος, το ονομαστικό ποσοστό 1% συναγερμών σε υγιείς λήψεις (ψευδείς συναγερμοί, false alarms) ισχύει μόνο κατά προσέγγιση.

Ένας συναγερμός αφορά μία λήψη. Ακόμη και σε 300 υγιείς λήψεις περιμένουμε περίπου τρεις συναγερμούς· πριν αποκλείσουμε αισθητήρα, ελέγχουμε αν είναι πάρα πολλοί. Αν έχουμε συναγερμό σε m από τις n λήψεις, η `stats.binom.sf(m-1, n, 0.01)` δίνει την πιθανότητα τουλάχιστον m συναγερμών σε ανεξάρτητες υγιείς λήψεις με ποσοστό 1%. Θεωρούμε τους συναγερμούς υπερβολικά πολλούς όταν η πιθανότητα αυτή είναι κάτω από 0.01.

Ένας συντηρητικός κανόνας για μία βλάβη.

1. Αν οι συναγερμοί δεν είναι υπερβολικά πολλοί, κρατάμε όλους τους αισθητήρες.
2. Διαφορετικά, αφαιρούμε κάθε φορά έναν αισθητήρα, εκτιμούμε ξανά το T και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο με $C-2$ βαθμούς ελευθερίας.
3. Αποκλείουμε έναν αισθητήρα μόνο αν είναι ο μοναδικός του οποίου η αφαίρεση εξαφανίζει πάνω από τους μισούς αρχικούς συναγερμούς, και η υπόλοιπη συστοιχία δεν δίνει πια υπερβολικά πολλούς.
4. Αν τα στοιχεία είναι αμφίσημα, κρατάμε τους αισθητήρες και αναφέρουμε ότι η αιτία μένει ανεξακρίβωτη.

Το notebook υλοποιεί τον κανόνα στη `diagnose`: είναι μια εκ των υστέρων διερεύνηση του πειράματος με την υπόθεση μίας μόνιμης βλάβης. Επειδή ψάχνουμε σε όλους τους αισθητήρες και η συνδιακύμανση είναι εκτιμημένη, δεν έχει εγγυημένη επίδοση ταξινόμησης βλαβών.



Ο κώδικας δεν γνωρίζει τη χρονική στιγμή της βλάβης, τον αισθητήρα ή τη θερμοκρασία αναφοράς. Μελετήστε τη χρονική εξέλιξη πριν δείτε τις ετικέτες επικύρωσης.

Συζήτηση

Από πότε γίνεται η διαφωνία συστηματική; Δικαιολογούν οι συναγερμοί των πρώτων 100 λήψεων τον αποκλεισμό ενός αισθητήρα;
Ελέγξτε την κατανόησή σας. Γιατί ένας μεμονωμένος συναγερμός δεν αρκεί για να εντοπίσουμε τον ελαττωματικό αισθητήρα; Το παράρτημα G εξηγεί τους βαθμούς ελευθερίας.

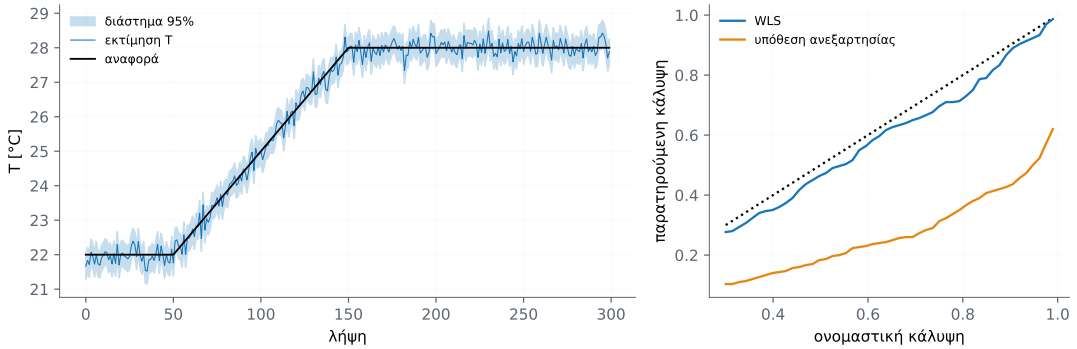
6 Επικύρωση της τελικής αναφοράς

Διαλέξεις 4 και 5

Ερώτημα. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με την πληροφορία που κρατήσαμε έξω από τη διάγνωση; Συνδυάζουμε ξανά τους αισθητήρες που διατηρήσαμε, χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο υποπίνακα συνδιακύμανσης. Τώρα, και μόνο τώρα, χρησιμοποιούμε την `T_ref`. Ελέγχουμε τα σφάλματα θερμοκρασίας και την κάλυψη των διαστημάτων, καθώς και τη λευκοποίηση στο ανεξάρτητο, υγιές τμήμα αυτού του πειράματος.

```
keep = np.ones(C, dtype=bool)
if suspect is not None:
    keep[suspect] = False
T_final, sd_final, _ = combine(
    T_probes[:, keep], S[np.ix_(keep, keep)])
T_ref = ops[:, 1]
coverage = np.mean(abs(T_final - T_ref) <= 1.96*sd_final)
```

Οι ετικέτες επικύρωσης. Στα συνθετικά δεδομένα ο αισθητήρας 7 έχει μετατόπιση $+0.30\,^{\circ}\mathrm{C}$ από τη λήψη 200 και μετά· οι 200 προηγούμενες λήψεις είναι υγιείς. Τις ετικέτες αυτές τις χρησιμοποιούμε μόνο τώρα, για να συγκρίνουμε τα ποσοστά συναγερμών σε υγιείς και ελαττωματικές λήψεις και για να ελέγξουμε τον πίνακα λευκοποίησης της βαθμονόμησης σε νέα, υγιή σφάλματα. Μια βλάβη $0.30\,^{\circ}\mathrm{C}$ είναι περίπου 1.5 φορές η τυπική απόκλιση του ίδιου του αισθητήρα 7· λόγω του κοινού θορύβου, κάθε ένδειξη χωριστά δίνει λιγότερη πληροφορία από το μοτίβο όλων των ενδείξεων μαζί.



Η τελική θερμοκρασία με το ονομαστικό διάστημα 95%, και η παρατηρούμενη κάλυψη σε σύγκριση με την ονομαστική. Η θερμοκρασία αναφοράς χρησιμοποιείται μόνο για επικύρωση.

Αποτέλεσμα επικύρωσης	Τιμή
Ύποπτος με βάση όλο το πείραμα λειτουργίας	αισθητήρας 7
Ποσοστό συναγερμών σε υγιείς λήψεις	1.5%
Ποσοστό συναγερμών σε ελαττωματικές λήψεις	70%
Τελική τυπική απόκλιση θερμοκρασίας	$0.190\,^{\circ}\mathrm{C}$
Παρατηρούμενη κάλυψη του ονομαστικού διαστήματος 95%	92.3%
Αποκλεισμοί όταν επεξεργαζόμαστε μόνο υγιή δεδομένα	κανένας

Τα όρια της επικύρωσης. Η συνδιακύμανση των λευκοποιημένων νέων δεδομένων είναι κοντά στον μοναδιαίο πίνακα, όχι ακριβώς ίση με αυτόν. Η συνδιακύμανση εκτιμήθηκε από 400 λήψεις βαθμονόμησης, οπότε η κάλυψη δεν είναι απαραίτητα ίση με την ονομαστική. Επιπλέον, τον ύποπτο τον επιλέξαμε από το ίδιο πείραμα. Πρόκειται λοιπόν για την επικύρωση ενός λυμένου παραδείγματος, όχι για ανεξάρτητη αξιολόγηση της ταξινόμησης βλαβών. Αν άλλαζε ο ανεμιστήρας, αν τα σφάλματα ήταν συσχετισμένα στον χρόνο ή αν χαλούσαν περισσότεροι αισθητήρες, θα έπρεπε να ξαναεξετάσουμε τις υποθέσεις και να ελέγξουμε τη μέθοδο σε νέα δεδομένα.

Συζήτηση και περαιτέρω μελέτη

Στο τέλος της συνεδρίας. Το τελικό διάγραμμα θερμοκρασίας και η χρονική εξέλιξη των συναγερμών συγκεντρώνουν τη βαθμονόμηση, τον συσχετισμένο θόρυβο, την εκτίμηση και την ανίχνευση βλαβών. Τα παρακάτω ερωτήματα συνδέουν τα αποτελέσματα με τα μαθηματικά εργαλεία της συνεδρίας.

Ερωτήματα.

1. Γιατί προσαρμόζουμε τα counts ως συνάρτηση της θερμοκρασίας και μετά αντιστρέφουμε την ευθεία;
2. Γιατί μετράει περισσότερο το εύρος των θερμοκρασιών αναφοράς παρά οι ίδιες οι τιμές τους;
3. Γιατί ο μέσος όρος δεν αφαιρεί τον κοινό θόρυβο;
4. Γιατί το κατώφλι έχει $C-1$ βαθμούς ελευθερίας, και $C-2$ μετά την αφαίρεση ενός αισθητήρα;
5. Γιατί τρεις συναγερμοί σε 300 λήψεις δεν αρκούν για να καταδικάσουμε έναν αισθητήρα;
6. Γιατί ο μοναδιαίος πίνακας συνδιακύμανσης στα δεδομένα βαθμονόμησης είναι αδύναμος έλεγχος της λευκοποίησης;

Σύντομες απαντήσεις. (1) Ο θόρυβος βρίσκεται κυρίως στα counts, ενώ τη θερμοκρασία αναφοράς τη γνωρίζουμε με ακρίβεια. (2) Όσο πιο απλωμένες είναι οι θερμοκρασίες, τόσο καλύτερα προσδιορίζεται η κλίση, δηλαδή το κέρδος. (3) Μια κοινή διαταραχή εμφανίζεται ταυτόχρονα σε όλες τις ενδείξεις. (4) Η εκτίμηση της κοινής θερμοκρασίας «καταναλώνει» έναν βαθμό ελευθερίας· το ίδιο ισχύει και αφού αφαιρέσουμε έναν αισθητήρα. (5) Ένας έλεγχος 1% ανά λήψη δίνει περίπου τρεις συναγερμούς σε 300 υγιείς λήψεις. (6) Τα ίδια δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστεί ο πίνακας λευκοποίησης.

Αρχεία δεδομένων. Όλα βρίσκονται στο `data/`.

Αρχείο στο `data/`	Περιεχόμενο
`calibration.csv`	400 λήψεις· στήλες: αριθμός λήψης, θερμοκρασία αναφοράς, δέκα αισθητήρες
`recal_quick.csv`	Σύντομη επαναβαθμονόμηση του αισθητήρα 3 στους 25.0 και 25.2 °C· θερμοκρασία αναφοράς και counts
`recal_full.csv`	Πλήρης επαναβαθμονόμηση του αισθητήρα 3 σε όλο το εύρος· το μέτρο σύγκρισης για τη σύντομη
`operations.csv`	300 νέες λήψεις· ίδιες στήλες με τη βαθμονόμηση

Επιπλέον υλικό. Μετά τη συνεδρία μπορείτε να μελετήσετε τα μαθηματικά παραρτήματα, με τις πλήρεις αποδείξεις και περαιτέρω ανάλυση, ή να εκτελέσετε τις ασκήσεις του προαιρετικού notebook, που εξετάζουν τις ίδιες ιδέες αριθμητικά.

Παράρτημα	Θέμα
A	Αβεβαιότητα αφινικών συντελεστών· υπόλοιπα· LS και WLS με κοινό πίνακα σχεδιασμού
B	Κακή αριθμητική κατάσταση· Ridge μέσω SVD· MAP και αντιστάθμιση μεροληψίας–διακύμανσης
C	Εκτίμηση συνδιακύμανσης και διόγκωση του αντίστροφου πίνακα συνδιακύμανσης
D	Ιδιότητες της χ^2, ποσοστημόρια και διάσταση
E	Ελλείψεις, λευκοποίηση και ισχύς ανίχνευσης όταν η αναφορά είναι γνωστή
F	Συνδυασμός συσχετισμένων αισθητήρων και αβεβαιότητα βαθμονόμησης
G	Υπόλοιπα χωρίς θερμοκρασία αναφοράς και ο χαμένος βαθμός ελευθερίας

Άσκηση	Ερώτημα
1	Γιατί μία επίλυση πίνακα ισοδυναμεί με δέκα ανεξάρτητες προσαρμογές;
2	Πώς φαίνεται πειστική η τοπική προσαρμογή ενώ το κέρδος είναι αναξιόπιστο;
3	Τι προσφέρουν η εκ των προτέρων κατανομή και η πιθανοφάνεια;
4	Γιατί η διδιάστατη «έλλειψη 2 σίγμα» περιέχει μόνο 86%;
5	Γιατί η συσχέτιση διευκολύνει την ανίχνευση μικρής βλάβης ενός αισθητήρα;