

Διαλέξεις 9 & 10: Μοντέλα Θορύβου & Γραμμικά Φίλτρα Σημειώσεις

Κωνσταντίνος Χατζηλυγερούδης
costashatz@upatras.gr

Δήμητρα Κουμούτσου
dkoumoutsou@upatras.gr

14 Νοεμβρίου, 2025

Contents

1	Μοντέλα Θορύβου	3
1.1	Τι είναι Θόρυβος;	3
1.2	Γιατί Μοντελοποιούμε τον Θόρυβο;	3
1.3	Επισκόπηση Μοντέλων Θορύβου	3
1.4	Λευκός Θόρυβος	3
1.5	Χρωματισμένος Θόρυβος	4
1.6	Ροζ Θόρυβος (1/f Noise)	4
1.7	Καφέ (Κόκκινος) Θόρυβος	5
1.8	Χρωματισμένος Θόρυβος μέσω Αυτοπαλίνδρομων (AR) Μοντέλων	5
1.9	Σύνοψη	6
2	Ψηφιακά Γραμμικά Φίλτρα	6
2.1	Εισαγωγή	6
2.2	Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (Finite Impulse Response - FIR)	7
2.3	Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)	8
2.4	Σύγκριση FIR και IIR Φίλτρων	9
2.5	Εφαρμογή Ψηφιακών Φίλτρων σε Διακριτά Σήματα	9
2.6	Φιλτράρισμα μηδενικής φάσης (Zero-Phase): Η μέθοδος <code>filtfilt</code>	11
3	Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)	12
3.1	Ορισμός	12
3.2	Φίλτρο Κινητού Μέσου Όρου (Moving Average - MA)	13
3.3	Ζωνοπερατά FIR Φίλτρα (Band-Pass)	16
3.4	Επίδραση του μήκους φίλτρου και της συχνότητας δειγματοληψίας	21
3.5	Πρακτική Υλοποίηση FIR Φίλτρων	22

3.6	Διδιάστατο FIR Φιλτράρισμα (Εικόνες)	24
3.6.1	Χαμηλοπερατό Φιλτράρισμα: Box Filter και Γκαουσιανά Φίλτρα	25
3.6.2	Υψηλοπερατό Φιλτράρισμα: Ανίχνευση Αχμών Sobel	27
3.6.3	High-Frequency Enhancement: Unsharp Masking	27
3.7	FIR Φίλτρα Αποκοπής Ζώνης/Εγχοπής (Band-Stop/Notch)	28
3.8	Περίληψη	29
4	Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)	30
4.1	Επισκόπηση και Ορισμός	30
4.2	Πόλοι, Μηδενικά και Επιλεκτικότητα ως προς τη Συχνότητα	30
4.3	Αναλογικά Πρωτότυπα και ο Διγραμμικός Μετασχηματισμός	30
4.4	Απόκριση Ψηφιακών IIR Φίλτρων	31
4.4.1	Απόκριση Ψηφιακών Φίλτρων από Αναλογικά Πρότυπα	31
4.4.2	Απλουστευμένες Ψηφιακές Μορφές (Κανονικοποιημένη Συχνότητα ω/ω_c)	32
4.5	Μετασχηματισμοί Πρωτοτύπων ($LP \rightarrow HP/BP/BS$)	32
4.5.1	Χαμηλοπερατό $\rightarrow$ Υψηλοπερατό ($LP \rightarrow HP$)	33
4.5.2	Χαμηλοπερατό $\rightarrow$ Ζωνοπερατό ($LP \rightarrow BP$)	33
4.5.3	Παρατηρήσεις	33
4.6	Biquads και Πρακτικές Υλοποιήσεις	34
4.7	Ψηφιακά Χαμηλοπερατά και Υψηλοπερατά Butterworth Φίλτρα	34
4.8	Ψηφιακά Φίλτρα Chebyshev Τύπου I (Χαμηλοπερατά και Υψιπερατά)	36
4.9	Ψηφιακά Φίλτρα Chebyshev Τύπου II (Χαμηλοπερατά και Υψιπερατά)	39
4.10	Φάση, Καθυστέρηση και Επιλογές Μηδενικής Φάσης	41
4.11	Υπολογισμός Συντελεστών Ψηφιακών IIR Φίλτρων	41
4.11.1	Πόλοι Αναλογικών Πρωτοτύπων	43
4.11.2	Αναλογικοί Μετασχηματισμοί Συχνότητας	44
4.11.3	Ο Διγραμμικός (Bilinear) Μετασχηματισμός	45
4.11.4	Υλοποίηση Ψηφιακών IIR Φίλτρων	45
4.12	IIR Φίλτρα Αποκοπής Ζώνης/Εγχοπής (Band-Stop/Notch)	46
4.13	Πρακτική Υλοποίηση IIR Φίλτρων	47
4.14	Παράδειγμα: Εκθετικό Χαμηλοπερατό Φίλτρο (Exponential Low-Pass) σε 1D	48
4.15	Υλοποίηση IIR Φίλτρων με Biquads	50
4.16	Διαχωρίσμο IIR Φιλτράρισμα σε Εικόνες	51
4.16.1	Python Implementation for 2D EMA	52
4.17	Περίληψη	52

1 Μοντέλα Θορύβου

1.1 Τι είναι Θόρυβος;

Στην επεξεργασία σήματος, ο **θόρυβος** είναι οποιοδήποτε ανεπιθύμητο ή απρόβλεπτο στοιχείο που προστίθεται σε ένα σήμα. Εκφράζει αβεβαιότητα ή τυχαιότητα που υποβαθμίζει την πραγματική υποκείμενη πληροφορία. Ο θόρυβος μπορεί να προκύψει από πολλές πηγές: θερμικές διακυμάνσεις σε ηλεκτρονικά κυκλώματα, κβαντοποίηση κατά τον μετασχηματισμό αναλογικού σε ψηφιακό, ατέλειες μετρήσεων αισθητήρων ή ακόμη και σφάλματα μοντελοποίησης.

Τυπικά, ο θόρυβος μοντελοποιείται ως μια **τυχαία διαδικασία**, δηλαδή κάθε δείγμα είναι μια τυχαία μεταβλητή με συγκεκριμένα στατιστικά χαρακτηριστικά όπως μέση τιμή, διακύμανση και συσχέτιση. Μέσω της αναπαράστασης του θορύβου ως στοχαστικής διαδικασίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πιθανοτικούς και στατιστικούς μηχανισμούς για να αναλύσουμε, να προβλέψουμε και να φιλτράρουμε σήματα που έχουν υποστεί αλλοίωση.

1.2 Γιατί Μοντελοποιούμε τον Θόρυβο;

Η μοντελοποίηση θορύβου είναι απαραίτητη σχεδόν σε κάθε εφαρμογή επεξεργασίας σήματος και ελέγχου. Ένα κατάλληλο μοντέλο θορύβου μας επιτρέπει να:

- **Προβλέψουμε** την επίδραση της τυχαιότητας σε μετρήσεις ή σήματα,
- **Φιλτράρουμε** ή **αφαιρέσουμε** τον θόρυβο μέσω βέλτιστων ή προσαρμοστικών φίλτρων,
- **Εκτιμήσουμε** το καθαρό σήμα όταν διαθέτουμε μόνο θορυβώδεις παρατηρήσεις.

Ενδεικτικές εφαρμογές:

- **Σχεδιασμός φίλτρων** (π.χ. Wiener ή Kalman), τα οποία βασίζονται άμεσα στα στατιστικά του θορύβου,
- **Αναγνώριση συστήματος**, όπου ο θόρυβος επηρεάζει την εκτίμηση παραμέτρων,
- **Συνένωση αισθητήρων και αποθορυβοποίηση**, όπου συνδυάζονται πολλαπλές θορυβώδεις μετρήσεις.

1.3 Επισκόπηση Μοντέλων Θορύβου

Ο θόρυβος μπορεί να λάβει πολλές μορφές, ανάλογα με την προέλευσή του και τα φασματικά του χαρακτηριστικά. Κάποιος θόρυβος είναι πλήρως μη συσχετισμένος και έχει ίση ισχύ σε όλες τις συχνότητες (**λευκός θόρυβος**), ενώ άλλοι τύποι εμφανίζουν συσχέτιση ή κατανομή ενέργειας που εξαρτάται από τη συχνότητα (**χρωματισμένος θόρυβος**). Αυτές οι κατηγορίες τυποποιούνται μέσω διαφορετικών **μοντέλων θορύβου**.

1.4 Λευκός Θόρυβος

Ένα δειγματοληπτημένο σήμα $x[n]$ ονομάζεται **λευκός θόρυβος** αν τα δείγματά του ικανοποιούν:

- **Μη συσχετιζόμενα δείγματα:** $\mathbb{E}[x[n]x[m]] = 0$ για $n \neq m$

- Μηδενική μέση τιμή: $\mathbb{E}[x[n]] = 0$
- Σταθερή διακύμανση: $\mathbb{E}[x^2[n]] = \sigma^2$

Η αυτοσυσχέτιση του λευκού θορύβου είναι:

$$R_{xx}[m] = \sigma^2 \delta[m]$$

και η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) είναι:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma^2,$$

η οποία είναι επίπεδη για όλες τις συχνότητες.

Ο λευκός θόρυβος αντιστοιχεί σε μια **πλήρως απρόβλεπτη** διαδικασία χωρίς συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων. Στην πράξη, χρησιμοποιείται ως βασικό δομικό στοιχείο για πιο σύνθετα μοντέλα θορύβου. Όταν η κατανομή του είναι Γκαουσιανή, τότε πρόκειται για **Γκαουσιανό λευκό θόρυβο**, γραφόμενο ως $x[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1.5 Χρωματισμένος Θόρυβος

Στην πραγματικότητα, θόρυβος σπάνια είναι λευκός. Η ισχύς του δεν κατανέμεται ομοιόμορφα στο φάσμα: ορισμένες ζώνες συχνότητων έχουν περισσότερη ενέργεια. Τέτοιος θόρυβος ονομάζεται **χρωματισμένος θόρυβος**, κατ' αναλογία με το φως όπου η «χρωματική» σύσταση εξαρτάται από το φάσμα.

Ο χρωματισμένος θόρυβος έχει μη επίπεδη PSD:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) \neq \text{σταθερή},$$

και δείγματα με χρονική συσχέτιση:

$$R_{xx}[m] \neq 0 \quad \text{για κάποιο } m \neq 0.$$

Ένα συνηθισμένο μοντέλο χρωματισμένου θορύβου προκύπτει φιλτράροντας λευκό θόρυβο $w[n]$ μέσω ενός σταθερού γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) φίλτρου $h[n]$:

$$x[n] = h[n] * w[n].$$

Η PSD εξόδου σχετίζεται με την PSD εισόδου ως:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{ww}(e^{j\omega}),$$

όπου $H(e^{j\omega})$ είναι η απόκριση συχνότητας του φίλτρου διαμόρφωσης. Αν ο $w[n]$ είναι λευκός με $S_{ww}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2$, τότε η $S_{xx}(e^{j\omega})$ καθορίζεται πλήρως από το $|H(e^{j\omega})|^2$.

1.6 Ροζ Θόρυβος (1/f Noise)

Ο **ροζ θόρυβος** (επίσης γνωστός ως *1/f noise*) έχει Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) που μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα της συχνότητας:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) \propto \frac{1}{|\omega|^\alpha}, \quad \alpha \approx 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε λογαριθμική ζώνη συχνοτήτων (π.χ. κάθε οκτάβα) περιέχει περίπου την ίδια ισχύ: οι χαμηλές συχνότητες κυριαρχούν περισσότερο από τις υψηλές.

Ο ροζ θόρυβος μπορεί να προσεγγιστεί φιλτράροντας λευκό θόρυβο μέσω ενός πρώτης τάξης χαμηλοπερατού φίλτρου:

$$H_{\text{pink}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}},$$

όπου ω_c είναι η **συχνότητα αποκοπής** (corner frequency) που σηματοδοτεί τη μετάβαση από επίπεδη σε συμπεριφορά τύπου $1/f$. Ο ροζ θόρυβος εμφανίζεται σε πολλά φυσικά και τεχνητά συστήματα, όπως βιολογικές διεργασίες, ημιαγωγούς και ακουστικά σήματα.

1.7 Καφέ (Κόκκινος) Θόρυβος

Ο **καφέ θόρυβος**, γνωστός και ως **κόκκινος θόρυβος**, προκύπτει από την ολοκλήρωση του λευκού θορύβου:

$$x_{\text{brown}}[n] = x_{\text{brown}}[n-1] + w[n].$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H_{\text{brown}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}},$$

και η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{|1 - e^{-j\omega}|^2} \approx \frac{\sigma_w^2}{\omega^2}.$$

Άρα ο καφέ θόρυβος έχει κλίση φάσματος $1/f^2$, δηλαδή συγκεντρώνει ακόμη περισσότερη ενέργεια στις χαμηλές συχνότητες σε σχέση με τον ροζ θόρυβο. Τέτοιος θόρυβος εμφανίζεται συχνά σε αθροιστικές ή ολοκληρωτικού τύπου διαδικασίες.

1.8 Χρωματισμένος Θόρυβος μέσω Αυτοπαλίνδρομων (AR) Μοντέλων

Ένας ευέλικτος τρόπος για να μοντελοποιήσουμε συσχετισμένο (χρωματισμένο) θόρυβο είναι μέσω **αυτοπαλίνδρομων (AR) μοντέλων**. Ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο τάξης p ($\text{AR}(p)$) ορίζεται ως:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + w[n],$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός θόρυβος με διακύμανση σ_w^2 .

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του $\text{AR}(p)$ μοντέλου είναι:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{|A(e^{j\omega})|^2} = \frac{\sigma_w^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}|^2}.$$

Οι πόλοι του $A(z)$ καθορίζουν το σχήμα του φάσματος:

- **Σταθερότητα:** Όλοι οι πόλοι πρέπει να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
- **Κορυφές φάσματος:** Η PSD παρουσιάζει κορυφές κοντά στις γωνίες των πόλων.
- **Εύρος ζώνης:** Όσο οι πόλοι πλησιάζουν τον μοναδιαίο κύκλο, το εύρος ζώνης στενεύει.

Παράδειγμα (AR(1)): Για το μοντέλο

$$x[n] = a x[n-1] + w[n],$$

η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι:

$$R_{xx}[m] = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} a^{|m|},$$

και η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) δίνεται από:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{|1 + a e^{-j\omega}|^2}.$$

Όταν το $|a|$ πλησιάζει το 1, το φάσμα συγκεντρώνεται όλο και περισσότερο γύρω από τις χαμηλές συχνότητες, παράγοντας ισχυρά συσχετισμένο θόρυβο.

1.9 Σύνοψη

Τύπος Θορύβου	Μέθοδος Παραγωγής	Σχήμα PSD	Κύριο Χαρακτηριστικό
Λευκός Ροζ	Καμία (βασική διαδικασία) Φιλτραρισμένος λευκός θόρυβος μέσω χαμηλοπερατού φίλτρου	Επίπεδο $\propto 1/f$	Ασυσχέτιστα δείγματα Ίση ισχύς ανά οκτάβα
Καφέ AR(p)	Ολοκλήρωση λευκού θορύβου Αναδρομική διαμόρφωση λευκού θορύβου	$\propto 1/f^2$ Εξαρτάται από τους πόλους	Κυριαρχία χαμηλών συχνοτήτων Ευέλικτη μοντελοποίηση

2 Ψηφιακά Γραμμικά Φίλτρα

2.1 Εισαγωγή

Στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος, ένα **γραμμικό φίλτρο** είναι ένα σύστημα που τροποποιεί ή εξάγει πληροφορία από ένα διακριτού χρόνου σήμα σύμφωνα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στο πεδίο της συχνότητας, ενώ υπακούει στις αρχές της **υπερθέσης** και της **αμεταβλητότητας στο χρόνο**.

Μαθηματικά, η έξοδος $y[n]$ ενός γραμμικού, αμετάβλητου στο χρόνο (LTI) συστήματος διακριτού χρόνου δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου $x[n]$ με την **κρουστική απόκριση** $h[n]$ του συστήματος:

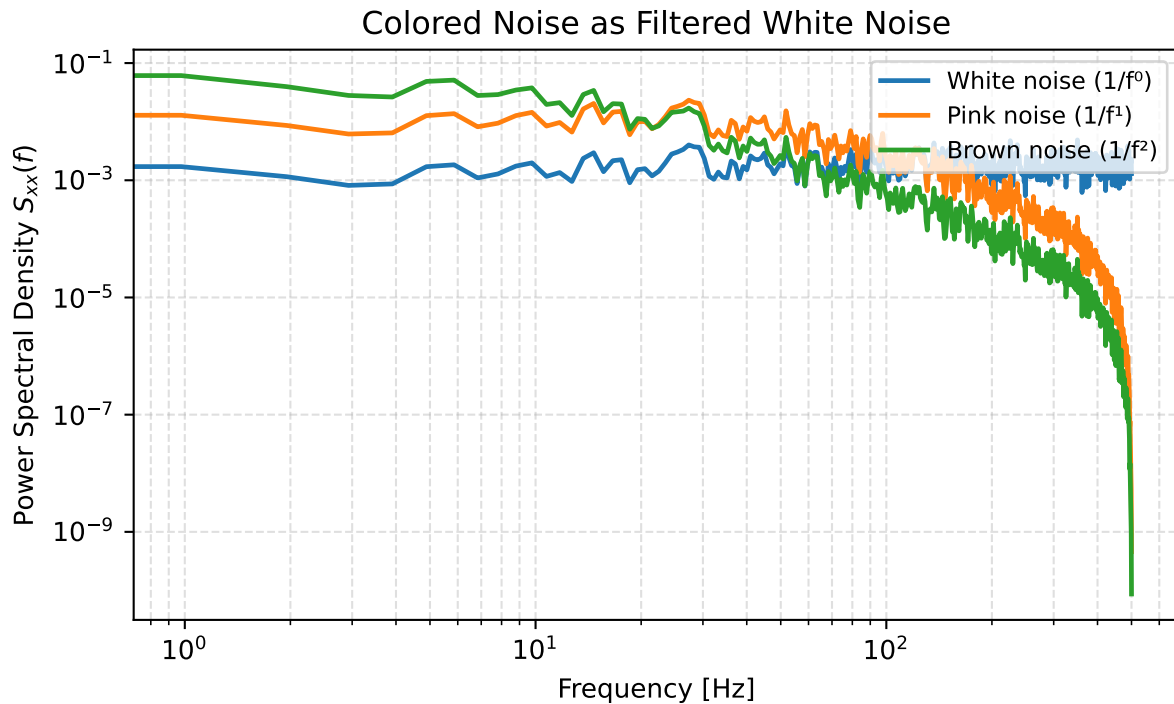
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k].$$

Η κρουστική απόκριση $h[n]$ χαρακτηρίζει πλήρως το σύστημα, και το μήκος και η δομή της καθορίζουν αν το φίλτρο είναι πεπερασμένης ή άπειρης διάρκειας.

Τα ψηφιακά γραμμικά φίλτρα χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες:

1. Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR),
2. Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR).

Κάθε κατηγορία έχει τα δικά της πλεονεκτήματα, συμβιβασμούς και πεδία εφαρμογής.



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα χρωματισμένου θορύβου.

2.2 Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (Finite Impulse Response - FIR)

Ένα FIR φίλτρο ορίζεται από μία πεπερασμένη κρουστική απόκριση:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k],$$

όπου τα $\{b_k\}$ είναι οι **συντελεστές του φίλτρου** (ή *taps*), και το M είναι η τάξη του φίλτρου.

Βασικά Χαρακτηριστικά:

- **Μη αναδρομικό:** Η έξοδος εξαρτάται μόνο από τα τρέχοντα και παρελθοντικά δείγματα της εισόδου, όχι από προηγούμενες εξόδους.
- **Πάντα σταθερό:** Εφόσον δεν υπάρχει ανατροφοδότηση, τα FIR φίλτρα είναι σταθερά για οποιεσδήποτε τιμές συντελεστών.
- **Γραμμική φάση:** Αν η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική ($h[n] = h[M - n]$) ή αντισυμμετρική, το φίλτρο είναι γραμμικής φάσης. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι συχνοτικές συνιστώσες της εισόδου υφίστανται την ίδια καθυστέρηση: αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε εφαρμογές που απαιτούν διατήρηση του σχήματος κύματος (π.χ. ήχος, βιοϊατρικές εφαρμογές, επεξεργασία εικόνων).
- **Υψηλή τάξη για απότομες μεταβάσεις:** Η επίτευξη στενών ζωνών μετάβασης ή ισχυρής απόσβεσης συχνά απαιτεί μεγάλο αριθμό συντελεστών.

Εφαρμογές: Τα FIR φίλτρα είναι ιδανικά όταν η γραμμική φάση ή η εγγυημένη σταθερότητα είναι κρίσιμες. Τυπικές χρήσεις περιλαμβάνουν:

- Εξομάλυνση δεδομένων και φίλτρα κινούμενου μέσου,
- Γραμμές καθυστέρησης και παρεμβολή,
- Ανακατασκευή σήματος και anti-aliasing,
- Φιλτράρισμα γραμμικής φάσης σε τηλεπικοινωνίες και επεξεργασία εικόνας.

Ερμηνεία στο πεδίο της συχνότητας: Η φασματική απόκριση ενός FIR φίλτρου δίνεται από:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}.$$

Με κατάλληλη επιλογή των $\{b_k\}$ μπορούμε να σχεδιάσουμε φίλτρα με επιθυμητά χαρακτηριστικά μέτρου και φάσης—χαμηλοπερατά, υψηλοπερατά, ζωνοπερατά ή ζωνοφρακτικά.

2.3 Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)

Σε αντίθεση με τα FIR, ένα IIR φίλτρο έχει κρουστική απόκριση που θεωρητικά εκτείνεται στο άπειρο λόγω όρων ανάδρασης στη διαφορική εξίσωση:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k].$$

Εδώ, τα $\{b_k\}$ είναι οι συντελεστές τροφοδότησης προς τα εμπρός (feedforward), και τα $\{a_k\}$ οι συντελεστές ανάδρασης (feedback).

Βασικά Χαρακτηριστικά:

- **Αναδρομικό:** Η ύπαρξη ανάδρασης καθιστά το σύστημα αναδρομικό, και άρα η κρουστική απόκριση μπορεί να απειριστεί.
- **Αποδοτικό:** Για παρόμοια συχνοτική επιλεκτικότητα, τα IIR φίλτρα απαιτούν πολύ μικρότερη τάξη σε σχέση με τα FIR.
- **Μη γραμμική φάση (συνήθως):** Η απόκριση φάσης είναι συνήθως μη γραμμική, κάτι που μπορεί να αλλοιώσει το σχήμα κυματομορφών εκτός αν υπάρξει αντιστάθμιση.
- **Ενδεχόμενη αστάθεια:** Η σταθερότητα εξαρτάται από τη θέση των πόλων στο επίπεδο z : το φίλτρο είναι σταθερό μόνο αν όλοι οι πόλοι βρίσκονται αυστηρά εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Αναλογικά πρωτότυπα: Τα περισσότερα ψηφιακά IIR φίλτρα σχεδιάζονται μετασχηματίζοντας αναλογικά πρωτότυπα χαμηλοπερατών (Butterworth, Chebyshev, Elliptic) σε διακριτού χρόνου ισοδύναμα μέσω του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear transform) ή της μεθόδου διατήρησης κρουστικής απόκρισης (impulse invariance). Αυτή η προσέγγιση διατηρεί τα επιθυμητά χαρακτηριστικά πλάτους του αναλογικού φίλτρου στο ψηφιακό πεδίο.

Εφαρμογές: Τα IIR φίλτρα προτιμώνται όταν απαιτείται υψηλή υπολογιστική αποδοτικότητα και απότομη συχνотική επιλεκτικότητα, για παράδειγμα:

- Φιλτράρισμα σε πραγματικό χρόνο με χαμηλή καθυστέρηση,
- Ισοστάθμιση ήχου και φιλτράρισμα καναλιών,
- Ανατροφοδοτούμενος έλεγχος και μοντελοποίηση συστημάτων,
- Φασματική διαμόρφωση σε συστήματα επικοινωνιών.

2.4 Σύγκριση FIR και IIR Φίλτρων

Ιδιότητα	FIR Φίλτρο	IIR Φίλτρο
Τύπος συστήματος	Μη αναδρομικό	Αναδρομικό
Χρουστική απόκριση	Πεπερασμένη ($M+1$ δείγματα)	Άπειρη (λόγω ανάδρασης)
Σταθερότητα	Πάντα σταθερό	Εξαρτάται από τη θέση των πόλων
Φασική απόκριση	Μπορεί να είναι ακριβώς γραμμική	Συνήθως μη γραμμική
Ευελιξία σχεδίασης	Εύκολη (windows, Parks–McClellan, κ.λπ.)	Προκύπτει από αναλογικά πρωτότυπα
Υπολογιστικό κόστος	Υψηλότερο για απότομες μεταβάσεις	Χαμηλότερο για αντίστοιχη επιλεκτικότητα
Εφαρμογές	Γραμμική φάση, εξομάλυνση δεδομένων	Αποδοτικό φιλτράρισμα, προσομοίωση αναλογικών φίλτρων

Σύνοψη:

- **FIR φίλτρα:** σταθερά, γραμμικής φάσης, απαιτούν υψηλή τάξη για απότομες συχνотικές μεταβάσεις.
- **IIR φίλτρα:** αποδοτικά και αναδρομικά, επιτυγχάνουν μεγάλη επιλεκτικότητα με χαμηλή τάξη αλλά μπορεί να προκαλέσουν φασική παραμόρφωση και θέματα σταθερότητας.

2.5 Εφαρμογή Ψηφιακών Φίλτρων σε Διακριτά Σήματα

Κίνητρο. Το ψηφιακό φιλτράρισμα είναι βασική διαδικασία στην επεξεργασία σήματος, χρησιμοποιούμενη για αφαίρεση θορύβου, διαμόρφωση φάσματος, εξαγωγή χαρακτηριστικών ή απομόνωση συγκεκριμένων ζωνών συχνотήτων. Πριν προχωρήσουμε σε πιο προχωρημένες τεχνικές, όπως το φιλτράρισμα μηδενικής φάσης (zero-phase), είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τον βασικό μηχανισμό με τον οποίο ένα ψηφιακό φίλτρο δρα πάνω σε ένα διακριτό σήμα.

Διαφορική εξίσωση. Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) ψηφιακό φίλτρο περιγράφεται συνήθως από μια **διαφορική εξίσωση σταθερών συντελεστών**:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k],$$

όπου:

- $x[n]$: το σήμα εισόδου,
- $y[n]$: το σήμα εξόδου,
- b_k : συντελεστές τροφοδότησης προς τα εμπρός (feedforward),
- a_k : συντελεστές ανάδρασης (feedback),
- M και N : η τάξη του φίλτρου.

Αναπαράσταση μέσω συνάρτησης μεταφοράς. Λαμβάνοντας τον z -μετασχηματισμό της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει η ρητή συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}.$$

Η μορφή αυτή περιγράφει τη συμπεριφορά του φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας και παρέχει άμεση πληροφόρηση για το μέτρο και τη φασική του απόκριση.

Ερμηνεία μέσω συνέλιξης (FIR περίπτωση). Για FIR φίλτρα (δηλ. $a_k = 0$ για $k \geq 1$), η σχέση εισόδου-εξόδου απλοποιείται σε:

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n - k],$$

όπου $h[n]$ είναι η πεπερασμένη κρουστική απόκριση. Άρα, το φιλτράρισμα ισοδυναμεί με διακριτή συνέλιξη με την κρουστική απόκριση.

Αρχικές συνθήκες και παροδικά φαινόμενα. Στην πράξη, τα πρώτα δείγματα της εξόδου επηρεάζονται από **παροδικά φαινόμενα** λόγω:

- άρρητων αρχικών συνθηκών (συχνά λαμβάνονται μηδενικές),
- έλλειψης επαρκών παρελθοντικών δειγμάτων στα άκρα,
- της αναδρομής (feedback) σε IIR φίλτρα.

Λογισμικά (π.χ. MATLAB, SciPy) επιτρέπουν τον καθορισμό αρχικών καταστάσεων ή χρησιμοποιούν τεχνικές επέκτασης σήματος ώστε να περιοριστούν τα start-up artifacts.

Πρακτική υλοποίηση. Τα ψηφιακά φίλτρα εφαρμόζονται συνήθως μέσω βελτιστοποιημένων ρουτινών όπως `lfilter` σε MATLAB ή SciPy:

$$y = \text{lfilter}(b, a, x),$$

που υλοποιεί τη χρονικά αιτιατή διαφορική εξίσωση δείγμα προς δείγμα.

Βασικές ιδιότητες.

- **Αιτιατότητα:** Η έξοδος εξαρτάται μόνο από τρέχοντα και παρελθοντικά δείγματα εισόδου — κατάλληλο για πραγματικού χρόνου εφαρμογές.
- **Παραμόρφωση φάσης:** Τα IIR φίλτρα παρουσιάζουν συνήθως μη γραμμική φάση, προκαλώντας παραμόρφωση στο χρονισμό κυματομορφών.
- **Οριακά φαινόμενα:** Παροδικά μπορεί να εμφανιστούν στην αρχή και στο τέλος του φιλτραρισμένου σήματος.

2.6 Φιλτράρισμα μηδενικής φάσης (Zero-Phase): Η μέθοδος `filtfilt`

Κίνητρο. Τα αιτιατά ψηφιακά φίλτρα—είτε FIR είτε IIR—εισάγουν φασικές μετατοπίσεις που παραμορφώνουν τον χρονισμό της κυματομορφής. Για FIR φίλτρα με γραμμική φάση, η παραμόρφωση ισοδυναμεί με μια σταθερή καθυστέρηση $\tau_g = (M - 1)/2$, αλλά στα IIR φίλτρα η φασική απόκριση είναι μη γραμμική και μπορεί να αλλοιώσει σημαντικά το σχήμα της κυματομορφής. Όταν δεν απαιτείται λειτουργία σε πραγματικό χρόνο (π.χ. σε offline ανάλυση), η φασική παραμόρφωση μπορεί να εξαλειφθεί πλήρως μέσω **φιλτραρίσματος εμπρός–πίσω** (forward–backward), όπως υλοποιείται στην `filtfilt` σε SciPy και MATLAB.

Μαθηματική ανάλυση. Έστω $H(z)$ η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού, σταθερού ψηφιακού φίλτρου. Το φιλτραρισμένο σήμα μηδενικής φάσης $y_{zp}[n]$ προκύπτει ως:

$$y_{zp}[n] = \text{filtfilt}(b, a, x[n]) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{H(z)H(z^{-1})X(z)\right\},$$

όπου b και a είναι τα πολυώνυμα αριθμητή και παρονομαστή, και $X(z)$ ο z -μετασχηματισμός της εισόδου.

Ιδιότητα μηδενικής φάσης. Η συνδυασμένη συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H_{zp}(z) = H(z)H(z^{-1}),$$

οπότε στο πεδίο της συχνότητας:

$$H_{zp}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2.$$

Άρα οι φασικοί όροι ακυρώνονται πλήρως:

$$\angle H_{zp}(e^{j\omega}) = 0,$$

δίνοντας μια καθαρά πραγματική, μη αρνητική συχνотική απόκριση—δηλαδή ένα **φίλτρο μηδενικής φάσης**. Το μέτρο της απόκρισης είναι το τετράγωνο του αρχικού φίλτρου, κάτι που διπλασιάζει αποτελεσματικά τη τάξη του αλλά διατηρεί τα passband/stopband χαρακτηριστικά.

Πρακτικές λεπτομέρειες υλοποίησης. Η διαδικασία εκτελείται ως εξής:

1. Εφαρμογή του φίλτρου προς τα εμπρός (αιτιατή φορά).
2. Αντιστροφή του φιλτραρισμένου σήματος στον χρόνο.
3. Εκ νέου εφαρμογή του ίδιου φίλτρου στο αντιστραμμένο σήμα.
4. Τελική αντιστροφή ώστε να επανέλθει η αρχική χρονοσειρά.

Με αυτόν τον τρόπο υλοποιείται έμμεσα το $H_{zp}(z)$. Για την ελαχιστοποίηση των παροδικών φαινομένων, η `filtfilt` επεκτείνει το σήμα στα άκρα μέσω ανάκλασης και επιλέγει κατάλληλες αρχικές καταστάσεις ώστε τα transients να αποσβένονται εκτός του έγκυρου εύρους δεδομένων.

Ιδιότητες.

- **Μηδενική φάση:** Καμία φασική παραμόρφωση—όλα τα συχνοτικά συστατικά ευθυγραμμισμένα στον χρόνο.
- **Αποτελεσματική τάξη:** Διπλάσια από την τάξη του αρχικού φίλτρου.
- **Μη αιτιατό:** Απαιτεί γνώση ολόκληρου του σήματος, άρα ακατάλληλο για πραγματικό χρόνο.
- **Απόκριση πλάτους:** $|H_{zp}(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|^2$.

3 Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)

3.1 Ορισμός

Ένα φίλτρο **FIR (Finite Impulse Response)** είναι ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση $h[n]$ έχει πεπερασμένη διάρκεια:

$$h[n] = 0 \quad \text{για } n < 0 \text{ ή } n > M.$$

Η έξοδος $y[n]$ δίνεται από την συνέλιξη της $h[n]$ με την είσοδο $x[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

όπου $\{b_k\}$ είναι οι συντελεστές του φίλτρου (taps) και M η τάξη του φίλτρου.

Η συχνοτική απόκριση προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της $h[n]$:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}.$$

Κύριες ιδιότητες.

- **Πάντα σταθερό:** Εφόσον η $h[n]$ είναι πεπερασμένη, το σύστημα δεν μπορεί να αποκλίνει.
- **Γραμμική φάση:** Αν η $h[n]$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική, το φίλτρο έχει γραμμική φασική απόκριση και διατηρεί το σχήμα της κυματομορφής.
- **Αιτιατό ή μη αιτιατό:** Ανάλογα με την εφαρμογή, η $h[n]$ μπορεί να μετατοπιστεί για επίτευξη αιτιότητας σε πραγματικό χρόνο.
- **Ευέλικτο:** Τα FIR φίλτρα μπορούν να σχεδιαστούν για πλήθος χρήσεων: εξομάλυνση, αποθορυβοποίηση, φιλτράρισμα συγκεκριμένων ζωνών συχνοτήτων.

Συνήθεις εφαρμογές.

- Καταστολή θορύβου και εξομάλυνση (π.χ. φίλτρα κινητού μέσου όρου)
- Φιλτράρισμα συχνοτήτων (low-pass, high-pass, band-pass)
- Υλοποίηση προσαρμοσμένων αποκρίσεων πλάτους μέσω μεθόδων σχεδίασης (windowing, frequency sampling, least squares)

3.2 Φίλτρο Κινητού Μέσου Όρου (Moving Average - MA)

Ορισμός. Το M -σημείων φίλτρο Κινητού Μέσου Όρου δίνεται από

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k], \quad h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Συχνотική απόκριση. Ο DTFT της $h[n]$ δίνει την κλειστή μορφή:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\omega k} = \frac{1}{M} e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \frac{\sin(\frac{M\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}.$$

Άρα:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M} \left| \frac{\sin(\frac{M\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right|, \quad \angle H(e^{j\omega}) = -\omega \frac{M-1}{2}.$$

Συνέπειες:

- κέρδος στη DC ίσο με 1,
- μηδενικά στις συχνότητες $\omega = 2\pi r/M$, $r = 1, \dots, M-1$,
- γραμμική φάση με καθυστέρηση $\tau_g = \frac{M-1}{2}$ δείγματα.

Καταστολή θορύβου / κέρδος SNR. Για λευκό θόρυβο $w[n] \sim (0, \sigma^2)$ στην είσοδο:

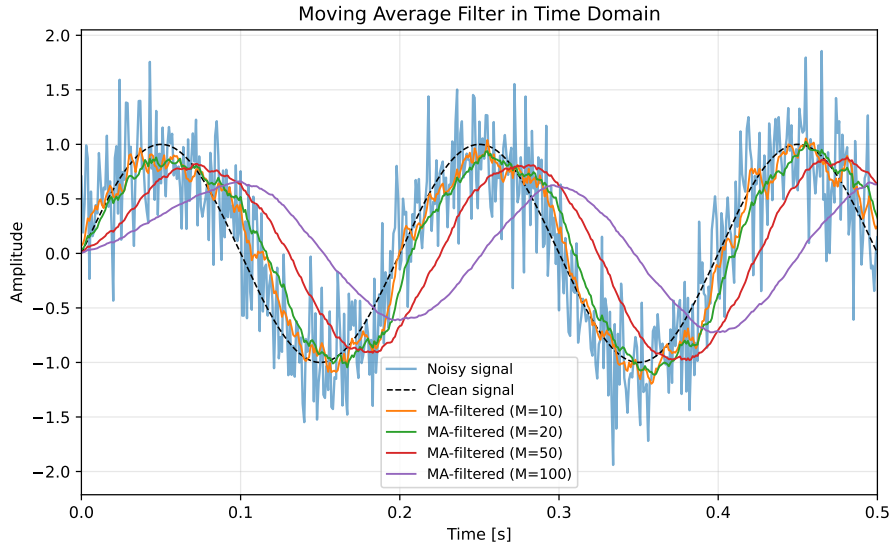
$$\text{Var}\{y[n]\} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{1}{M}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{M}.$$

Άρα το θεωρητικό κέρδος SNR είναι

$$\text{SNR gain} \approx 10 \log_{10} M \text{ dB}.$$

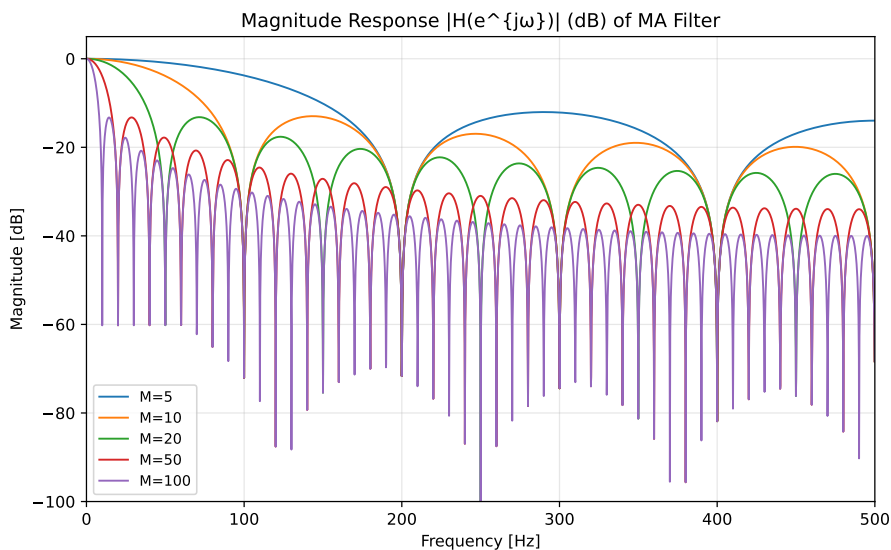
Καθυστέρηση και μηδενική φάση. Ένα αιτιατό MA φίλτρο εισάγει καθυστέρηση $\tau_g = (M - 1)/2$. Για offline επεξεργασία, το φιλτράρισμα μηδενικής φάσης με forward-backward εφαρμογή (π.χ. `filtfilt`) αφαιρεί τη φασική παραμόρφωση και την καθυστέρηση, διατηρώντας τη συχνοτική απόκριση κατά μέτρο.

Απεικόνιση στον χρόνο. Εξομαλύνουμε ένα θορυβώδες ημιτονοειδές σήμα και μεταβάλλουμε το M ώστε να φανεί ο συμβιβασμός θορύβου-καθυστέρησης-οξύτητας.



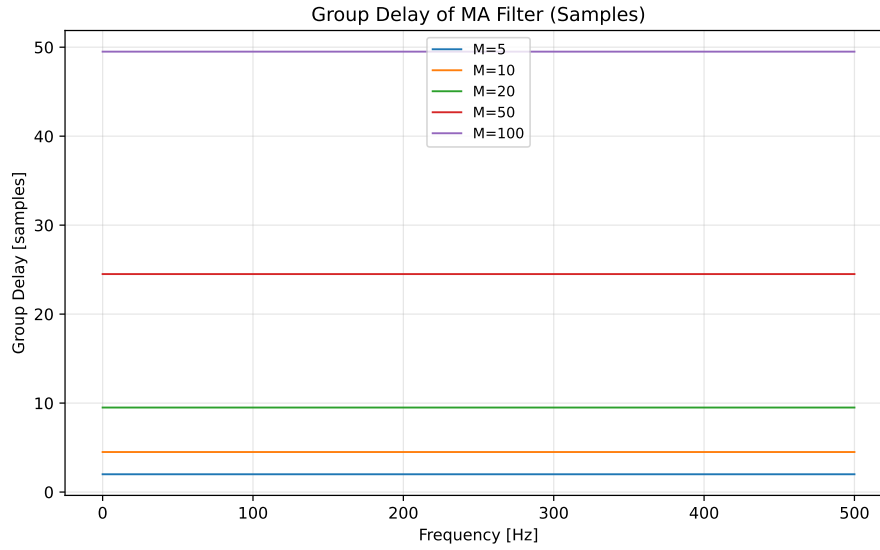
Σχήμα 3.1: Φιλτράρισμα MA στον χρόνο για $M \in \{10, 20, 50, 100\}$: μεγαλύτερο M δίνει ισχυρότερη αποθορυβοποίηση αλλά μεγαλύτερη καθυστέρηση.

Χαρακτηριστικά στη συχνότητα. Τα διαγράμματα μέτρου για διάφορα M δείχνουν καθαρά τη στένωση του κύριου λοβού και βαθύτερες εγχοπές όσο αυξάνεται το M .



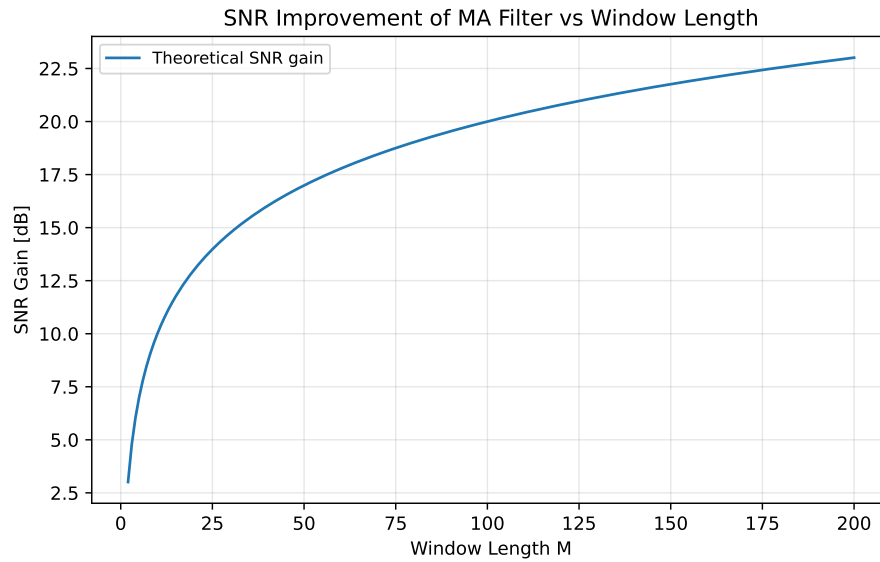
Σχήμα 3.2: Απόκριση κατά μέτρο $|H(e^{j\omega})|$ (dB) του MA φίλτρου M σημείων για πολλαπλές τιμές M .

Καθυστέρηση. Η καθυστέρηση αυξάνεται με το M , όπως αναμένεται.



Σχήμα 3.3: Η καθυστέρηση του MA φίλτρου είναι σταθερή και ίση με $(M - 1)/2$ δείγματα (γραμμική φάση).

Βελτίωση SNR ως προς το μήκος παραθύρου. Επαληθεύουμε το θεωρητικό κέρδος SNR των $10 \log_{10} M$ dB για λευκό θόρυβο.



Σχήμα 3.4: Θεωρητικό κέρδος SNR $10 \log_{10} M$ dB για λευκό θόρυβο ως προς το μήκος παραθύρου M .

3.3 Ζωνοπερατά FIR Φίλτρα (Band-Pass)

Ένα **ζωνοπερατό** FIR φίλτρο επιτρέπει συχνότητες μέσα σε ένα εύρος $[\omega_1, \omega_2]$ και απορρίπτει όλες τις υπόλοιπες. Η ιδανική συχνοτική απόκριση είναι:

$$H_{\text{ideal}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Ωστόσο, αυτή η ιδανική απόκριση είναι μη-αιτιατή και άπειρης διάρκειας. Για να προκύψει υλοποιήσιμο FIR φίλτρο, το $H_{\text{ideal}}(e^{j\omega})$ διαμορφώνεται με ένα παράθυρο $w[n]$:

$$h[n] = h_{\text{ideal}}[n] w[n].$$

Τυπικά παράθυρα: Hamming, Hann, Blackman.

Ιδανικό ζωνοπερατό και σχεδίαση με παράθυρο. Η αντίστοιχη ιδανική κρουστική απόκριση δίνεται από τον αντίστροφο DTFT:

$$h_{\text{ideal}}[n] = \frac{1}{\pi n} (\sin(\omega_2 n) - \sin(\omega_1 n)), \quad n \neq 0,$$

και

$$h_{\text{ideal}}[0] = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi}.$$

Επειδή αυτή η ακολουθία είναι άπειρης διάρκειας και μη-αιτιατή, μετατοπίζεται κατά $n_0 = M/2$ και πολλαπλασιάζεται με παράθυρο:

$$h[n] = h_{\text{ideal}}[n - M/2] w[n], \quad 0 \leq n \leq M.$$

Παράδειγμα παραθύρου Hamming:

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right).$$

Παράδειγμα: απομόνωση 15 Hz. Θέλουμε να απομονώσουμε την συνιστώσα των 15 Hz από το σήμα:

$$x[n] = \sin(2\pi 5t) + 0.5 \sin(2\pi 15t) + 0.4 \sin(2\pi 40t) + 0.2w[n],$$

με $f_s = 1000$ Hz. Η επιθυμητή ζώνη διέλευσης: $[13, 17]$ Hz, τάξη φίλτρου $M = 400$.
Με `firwin`:

$$b = \text{firwin}(401, [13, 17], \text{pass_zero}=\text{False}, \text{fs} = 1000, \text{window}=\text{'hamming'}),$$

και το φίλτρο:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k].$$

Τι κάνει η firwin (windowed-sinc design). Η firwin υλοποιεί FIR σχεδίαση μέσω της μεθόδου παραθύρου:

1. Ορίζεται ιδανική συχνοτική απόκριση $H_d(e^{j\omega})$.
2. Υπολογίζεται η άπειρης διάρκειας $h_d[n]$ μέσω inverse DTFT:

$$h_d[n] = \frac{1}{\pi n}(\sin(\omega_2 n) - \sin(\omega_1 n)), \quad n \neq 0, \quad h_d[0] = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi}.$$

3. Μετατοπίζεται ώστε να έχει γραμμική φάση:

$$h_d[n] \rightarrow h_d[n - M/2],$$

και πολλαπλασιάζεται με παράθυρο:

$$h[n] = h_d[n - M/2] w[n].$$

Για παράθυρο Hamming:

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right).$$

Μονάδες συχνότητας και ο ρόλος του fs. Όταν δίνεται η παράμετρος fs, οι συχνότητες αποκοπής που περνάμε στη firwin (εδώ $f_1=13$ Hz, $f_2=17$ Hz) ερμηνεύονται ως Hz και μετατρέπονται εσωτερικά σε κανονικοποιημένες ψηφιακές (αχτινικές) συχνότητες:

$$\omega_1 = 2\pi \frac{f_1}{f_s}, \quad \omega_2 = 2\pi \frac{f_2}{f_s}.$$

Οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται στη διαμόρφωση της ιδανικής συχνοτικής απόκρισης $H_d(e^{j\omega})$.

Ιδιότητα γραμμικής φάσης. Κατασκευάζοντας την κρουστική απόκριση ως συμμετρική γύρω από το $n = M/2$,

$$h[n] = h[M - n],$$

η firwin εξασφαλίζει **γραμμική φάση**. Έτσι όλα τα συχνοτικά συστατικά υφίστανται την ίδια σταθερή ομαδική καθυστέρηση:

$$\tau_g = \frac{M}{2},$$

που σημαίνει καθυστέρηση χωρίς παραμόρφωση κυματομορφής.

Σύνδεση με το παράδειγμα. Στην εντολή:

$$b = \text{firwin}(401, [13, 17], \text{pass_zero}=\text{False}, \text{fs} = 1000, \text{window}=\text{'hamming'}),$$

η firwin:

- ερμηνεύει τα [13, 17] Hz ως ζωνοπερατό εύρος,

- υπολογίζει $\omega_1 = 2\pi(13/1000)$ και $\omega_2 = 2\pi(17/1000)$,
- κατασκευάζει την ιδανική $H_d(e^{j\omega})$,
- υπολογίζει την ιδανική $h_d[n]$,
- την κεντράρει στο $n = M/2 = 200$ και την πολλαπλασιάζει με το παράθυρο Hamming.

Οι συντελεστές $b_k = h[k]$ χρησιμοποιούνται στο:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

Αναλυτικό παράδειγμα για $M = 4$. Χρησιμοποιούμε την ίδια ζώνη $[13, 17]$ Hz, αλλά με πολύ μικρή τάξη $M = 4$ (μήκος φίλτρου 5) για λόγους πράξεων.

Βήμα 1: ψηφιακές συχνότητες.

$$f_s = 1000 \text{ Hz}, \quad f_1 = 13 \text{ Hz}, \quad f_2 = 17 \text{ Hz}.$$

$$\omega_1 = 2\pi \frac{13}{1000} \approx 0.08168 \text{ rad}, \quad \omega_2 = 2\pi \frac{17}{1000} \approx 0.10681 \text{ rad}.$$

Βήμα 2: ιδανική (άπειρου μήκους) κρουστική απόκριση ζωνοπερατού φίλτρου. Για ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο, η (άπειρου μήκους) κρουστική απόκριση είναι

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{1}{\pi n} (\sin(\omega_2 n) - \sin(\omega_1 n)), & n \neq 0, \\ \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi}, & n = 0. \end{cases}$$

Για ένα πεπερασμένο FIR μήκους $M+1 = 5$, η `firwin` κεντράρει την $h_d[n]$ γύρω από

$$n_0 = \frac{M}{2} = 2.$$

Ορίζουμε

$$m = n - \frac{M}{2} = n - 2, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4,$$

οπότε $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Υπολογίζουμε τα $h_d[m]$:

$$h_d[-2] = \frac{1}{\pi(-2)} (\sin(-2\omega_2) - \sin(-2\omega_1)) \approx 0.00785747,$$

$$h_d[-1] = \frac{1}{\pi(-1)} (\sin(-\omega_2) - \sin(-\omega_1)) \approx 0.00796429,$$

$$h_d[0] = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi} \approx 0.00800000,$$

$$h_d[1] = \frac{1}{\pi(1)} (\sin(\omega_2) - \sin(\omega_1)) \approx 0.00796429,$$

$$h_d[2] = \frac{1}{\pi(2)} (\sin(2\omega_2) - \sin(2\omega_1)) \approx 0.00785747.$$

Βήμα 3: Παράθυρο Hamming για $M = 4$. Το παράθυρο Hamming μήκους 5 είναι

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), \quad n = 0, \dots, 4.$$

Αριθμητικά:

$$\begin{aligned} w[0] &= 0.08, \\ w[1] &= 0.54, \\ w[2] &= 1.0, \\ w[3] &= 0.54, \\ w[4] &= 0.08. \end{aligned}$$

Βήμα 4: τελικοί συντελεστές FIR $b[n]$. Οι συντελεστές της firwin είναι:

$$b[n] = h[n] = h_d(n - M/2) w[n], \quad n = 0, \dots, 4.$$

Άρα:

$$\begin{aligned} b[0] &= h_d[-2] w[0] \approx 0.00785747 \cdot 0.08 \approx 0.00062860, \\ b[1] &= h_d[-1] w[1] \approx 0.00796429 \cdot 0.54 \approx 0.00430071, \\ b[2] &= h_d[0] w[2] \approx 0.00800000 \cdot 1.0 = 0.00800000, \\ b[3] &= h_d[1] w[3] \approx 0.00796429 \cdot 0.54 \approx 0.00430071, \\ b[4] &= h_d[2] w[4] \approx 0.00785747 \cdot 0.08 \approx 0.00062860. \end{aligned}$$

Τελικό αποτέλεσμα. Το FIR ζωνοπερατό φίλτρο μήκους 5 που προκύπτει από τη firwin έχει:

$$b \approx [0.0006286 \quad 0.0043007 \quad 0.0080000 \quad 0.0043007 \quad 0.0006286].$$

Όπως αναμένεται για γραμμικής φάσης FIR, οι συντελεστές είναι συμμετρικοί.

Χρονική απόκριση. Το ζωνοπερατό φίλτρο απομακρύνει αποτελεσματικά τα χαμηλά και υψηλά φασματικά στοιχεία, απομονώνοντας τη συνιστώσα των 15 Hz (Σχ. 3.5).

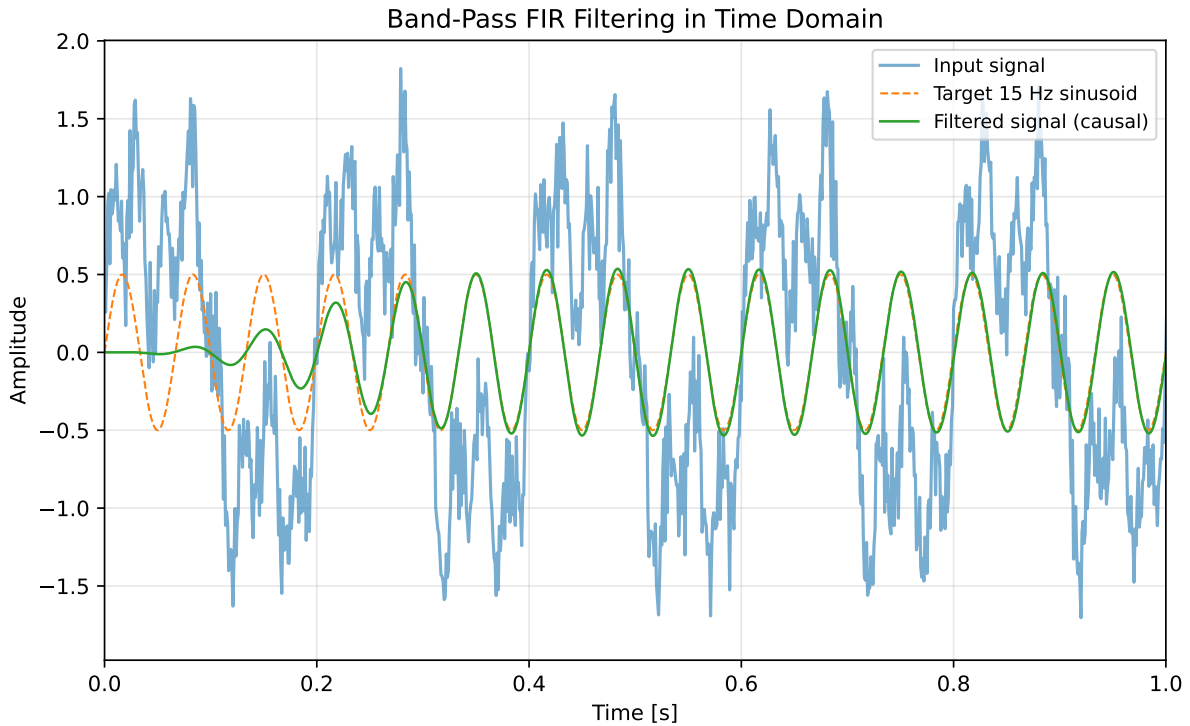
Απόκριση μέτρου φίλτρου. Το ιδανικό ορθογώνιο φάσμα εξομαλύνεται από το παράθυρο, εισάγοντας πεπερασμένες μεταβατικές ζώνες και μειωμένα πλευρικά λοβία. Η απόκριση συχνότητας δίνεται από:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n] e^{-j\omega n}.$$

Το παράθυρο Hamming προσφέρει περίπου -53 dB απόσβεση πλευρικών λοβών με μέτριο εύρος μετάβασης (Σχ. 3.6).

Φασματική ανάλυση εισόδου και εξόδου. Το φίλτρο καταστέλλει απότομα όλα τα φασματικά στοιχεία εκτός της ζώνης διέλευσης. Αυτό επιβεβαιώνεται συγκρίνοντας τα πλάτη φάσματος εισόδου και εξόδου (μέσω FFT, Σχ. 3.7):

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f n / f_s}, \quad Y(f) = H(f) X(f).$$



Σχήμα 3.5: Χρονική απόκριση του ζωνοπερατού FIR φίλτρου με παράθυρο Hamming (ζώνη διέλευσης 13–17 Hz). Η συνιστώσα των 15 Hz διατηρείται ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες και ο θόρυβος αποσιωπούνται.

Αιτιατό vs. μηδενικής φάσης φιλτράρισμα. Σε αιτιατή υλοποίηση (π.χ. με `lfilter`), το γραμμικής φάσης FIR εισάγει σταθερή καθυστέρηση $\tau_g = (M - 1)/2$ δειγμάτων. Για επεξεργασία εκτός πραγματικού χρόνου, η καθυστέρηση αυτή αφαιρείται με φιλτράρισμα μηδενικής φάσης, όπως `filtfilt`, που εφαρμόζει το φίλτρο προς τα εμπρός και προς τα πίσω:

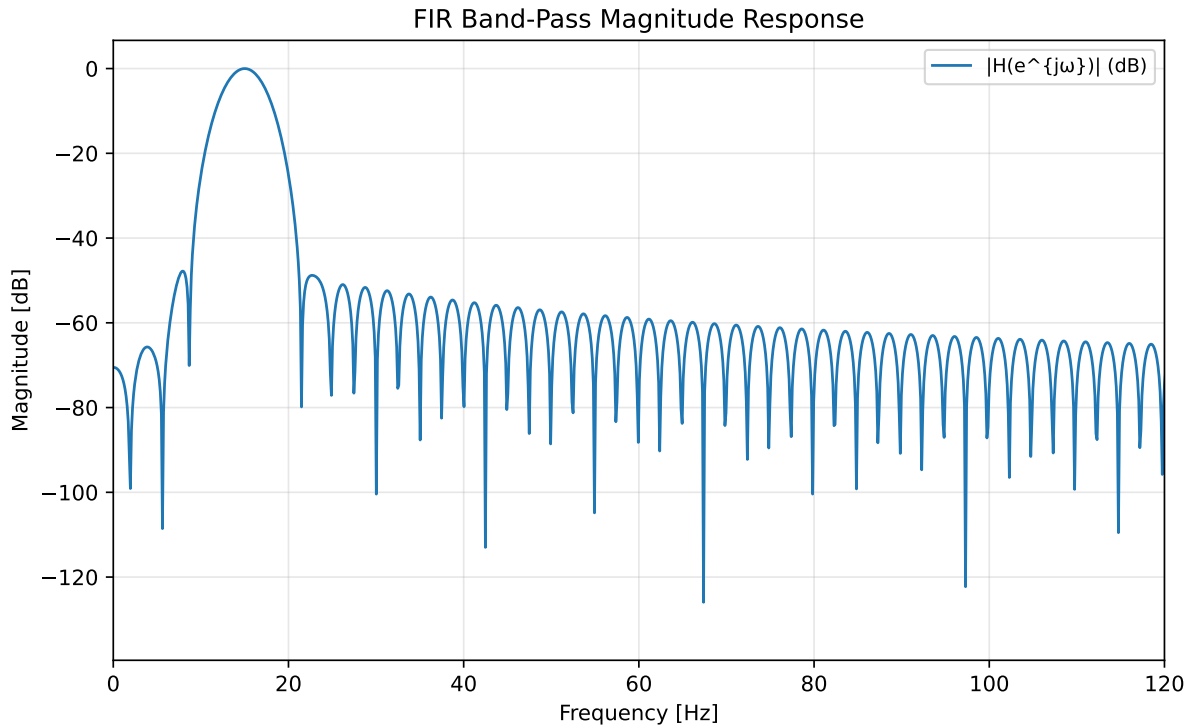
$$y_{zp}[n] = \text{filtfilt}(b, [1], x[n]).$$

Αυτό διπλασιάζει το πλάτος της απόκρισης μέτρου, αλλά καταργεί πλήρως τη μετατόπιση της φάσης (Σχ. 3.8).

Συζήτηση. Το παράδειγμα καταδεικνύει τις βασικές αρχές σχεδίασης FIR ζωνοπερατών φίλτρων:

- Η αύξηση του μήκους M μειώνει το εύρος μετάβασης και τον κυματισμό, με κόστος μεγαλύτερης καθυστέρησης και υπολογιστικού φορτίου.
- Η επιλογή παραθύρου καθορίζει το επίπεδο πλευρικών λοβών και την απότομη μετάβαση.
- Οι αιτιατές υλοποιήσεις ενδείκνυνται για πραγματικό χρόνο, ενώ οι μηδενικής φάσης για offline ανάλυση.

Ο συνδυασμός των παραπάνω καθορίζει τον συμβιβασμό μεταξύ επιλεκτικότητας συχνοτήτων, γραμμικότητας φάσης και υπολογιστικού κόστους.



Σχήμα 3.6: Απόκριση μέτρου (σε dB) του ζωνοπερατού FIR φίλτρου με παράθυρο Hamming. Η ζώνη διέλευσης είναι κεντραρισμένη γύρω από τα 15 Hz με απότομη μετάβαση και χαμηλό κυματισμό.

3.4 Επίδραση του μήκους φίλτρου και της συχνότητας δειγματοληψίας

Το μήκος φίλτρου M και η συχνότητα δειγματοληψίας f_s καθορίζουν από κοινού την ανάλυση συχνότητας, το εύρος μετάβασης, την καθυστέρηση και την υπολογιστική πολυπλοκότητα ενός FIR φίλτρου.

1. Ανάλυση συχνότητας και εύρος μετάβασης.

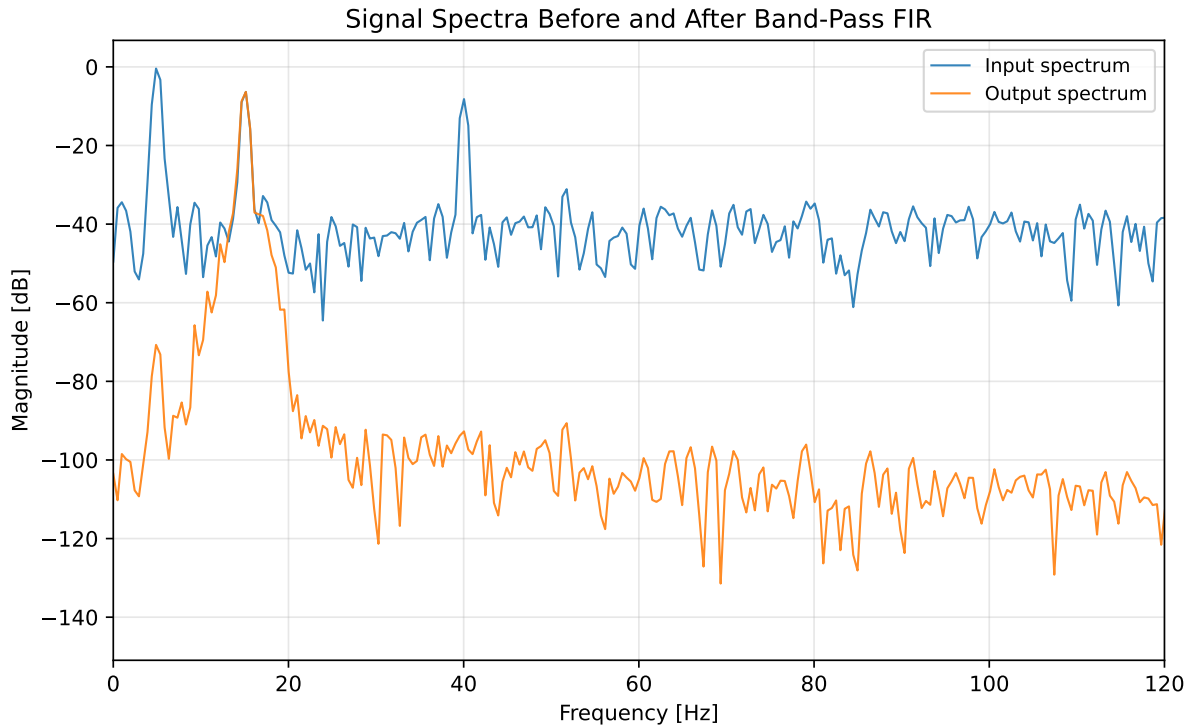
$$\text{Μεταβατική ζώνη } \Delta f \approx \frac{f_s}{M}.$$

- Αύξηση του M (με σταθερό f_s) στενεύει το Δf , προσφέροντας πιο απότομες μεταβάσεις.
- Αύξηση του f_s (με σταθερό M) πλαταίνει το Δf , οδηγώντας σε ηπιότερο φιλτράρισμα.

2. Καθυστέρηση και υπολογιστική πολυπλοκότητα. Για FIR φίλτρα γραμμικής φάσης, η καθυστέρηση προσεγγίζεται από:

$$\tau_g \approx \frac{M-1}{2f_s}.$$

- Μεγαλύτερα φίλτρα (M μεγάλο) εισάγουν μεγαλύτερη καθυστέρηση.
- Φίλτρα υψηλής τάξης απαιτούν περισσότερες πράξεις ανά δείγμα (πολυπλοκότητα $O(M)$).



Σχήμα 3.7: Φάσματα σήματος πριν και μετά το φιλτράρισμα. Το ζωνοπερατό FIR φίλτρο διατηρεί ενέργεια μόνο γύρω από 13–17 Hz, απομακρύνοντας χαμηλόσυχνη ολίσθηση και υψηλόσυχνο θόρυβο.

3. Συμβιβασμοί σχεδίασης. Η επιλογή των M και f_s απαιτεί ισορροπία μεταξύ επιλεκτικότητας, καθυστέρησης και απαιτήσεων πραγματικού χρόνου:

Συνθήκη	Επίδραση στο φίλτρο	Ερμηνεία
Μικρό M , υψηλό f_s	Πλατιά μεταβατική ζώνη	Γρήγορο, χαμηλής επιλεκτικότητας φίλτρο
Μεγάλο M , υψηλό f_s	Απότομη μετάβαση, μικρή κανονικοποιημένη καθυστέρηση	Ακριβές αλλά υπολογιστικά ακριβό
Μικρό M , χαμηλό f_s	Ευρείες μεταβάσεις, πιθανότητα aliasing	Αδύναμος έλεγχος φάσματος
Μεγάλο M , χαμηλό f_s	Απότομη μετάβαση αλλά μεγάλη απόλυτη καθυστέρηση	Ακατάλληλο για πραγματικό χρόνο

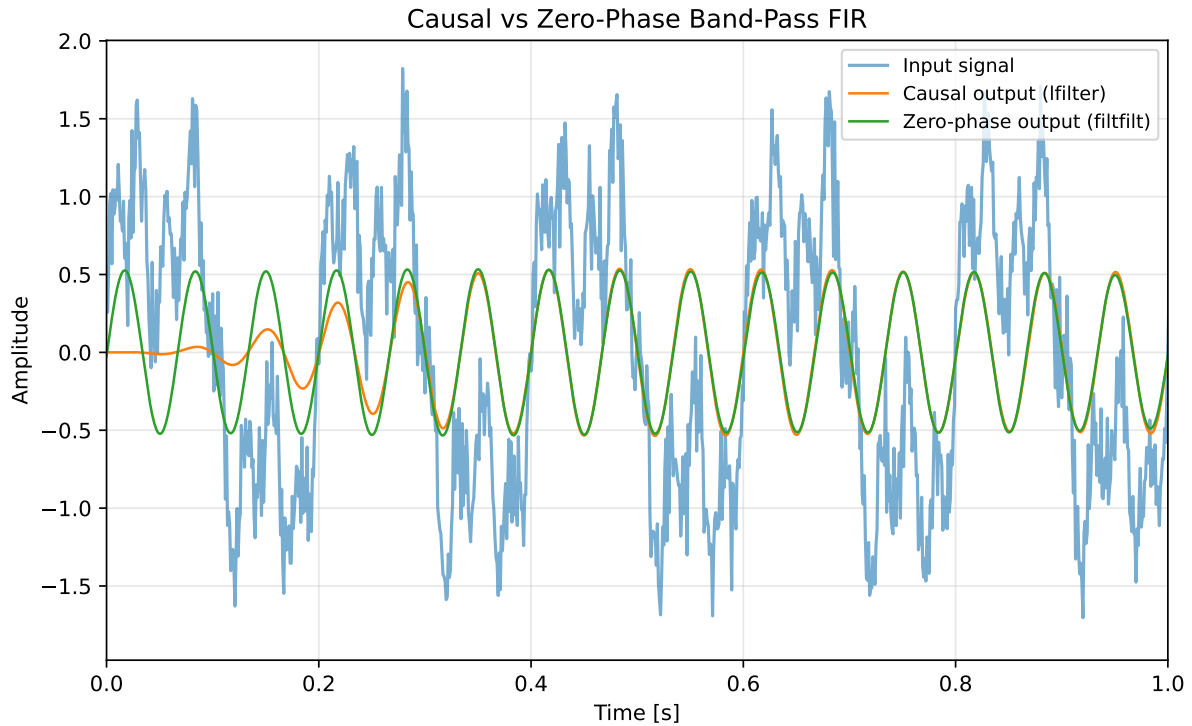
3.5 Πρακτική Υλοποίηση FIR Φίλτρων

Τα FIR φίλτρα είναι μη αναδρομικά και επομένως εγγενώς σταθερά. Συνήθως υλοποιούνται μέσω άμεσης υλοποίησης της συνέλιξης:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n - k].$$

Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί αποδοτικά με χρήση **κυκλικού buffer** που αποθηκεύει τα πιο πρόσφατα $M+1$ δείγματα εισόδου.

Αλγόριθμος (streaming υλοποίηση).



Σχήμα 3.8: Σύγκριση αιτιατού φιλτραρίσματος (`lfilter`) και φιλτραρίσματος μηδενικής φάσης (`filtfilt`). Η αιτιατή υλοποίηση εισάγει καθυστέρηση, ενώ η μηδενικής φάσης ευθυγραμμίζεται πλήρως με το αρχικό σήμα.

1. Αποθήκευσε τα τελευταία $M+1$ δείγματα σε κυκλικό buffer.
2. Για κάθε νέο δείγμα $x[n]$, υπολόγισε:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n - k].$$

3. Προχώρησε τον δείκτη του buffer για την επόμενη επανάληψη.

Για πολύ μεγάλα FIR φίλτρα, τεχνικές **γρήγορης συνέλιξης** (π.χ. *overlap-add* ή *overlap-save*) με χρήση FFT μπορούν να μειώσουν σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

Python Example (Manual Implementation).

```

1 M = len(b) - 1
2 y = np.zeros_like(x, dtype=float)
3 X = np.zeros(M+1, dtype=float)
4 idx = 0
5 for n, xn in enumerate(x):
6     X[idx] = xn
7     acc = 0.0
8     j = idx
9     for k in range(M+1):
10         acc += b[k] * X[j]
11         j = (j - 1) % (M+1)
12     y[n] = acc

```

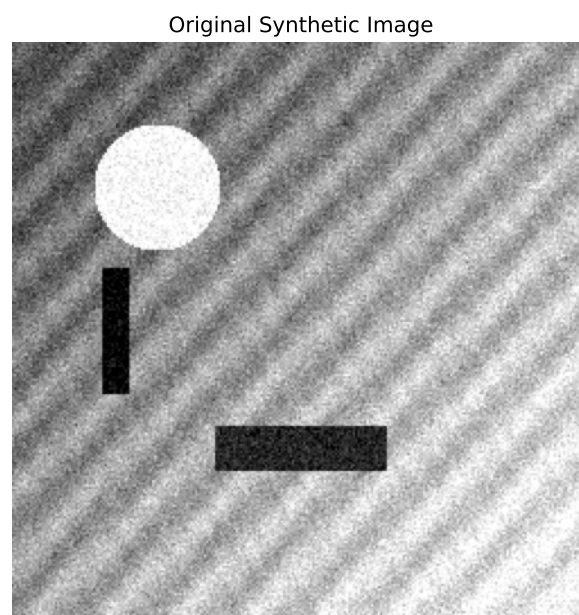
```
13 idx = (idx + 1) % (M+1)
```

Listing 1: Manual FIR filter implementation using a circular buffer.

Python Example (Using SciPy).

```
1 import scipy.signal
2
3 a = np.array([1.0]) # FIR filter => denominator is 1
4 y = scipy.signal.lfilter(b, a, x)
```

Listing 2: FIR filtering using SciPy's lfilter.



Σχήμα 3.9: Συνθετική εικόνα δοκιμής που περιέχει βαθμίδες φωτεινότητας, υφές, σχήματα και θόρυβο.

3.6 Διδιάστατο FIR Φιλτράρισμα (Εικόνες)

Κίνητρο. Τα διδιάστατα (2D) FIR φίλτρα είναι θεμελιώδη στην επεξεργασία εικόνας, για εργασίες όπως εξομάλυνση, αποθορυβοποίηση, ανίχνευση ακμών και όξυνση. Μια εικόνα μπορεί να θεωρηθεί ως διακριτό σήμα $x[i, j]$ πάνω σε διδιάστατο πλέγμα, ενώ ένα 2D FIR φίλτρο είναι ένας πυρήνας (kernel) πεπερασμένης στήριξης $h[m, n]$.

2D συνέλιξη. Η διακριτή διδιάστατη συνέλιξη δίνεται από

$$y[i, j] = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N h[m, n] x[i - m, j - n],$$

όπου $h[m, n]$ είναι ο πυρήνας του φίλτρου. Η πράξη ισοδυναμεί με ζυγισμένο τοπικό μέσο όρο γύρω από κάθε εικονοστοιχείο.

Ερμηνεία στο πεδίο Fourier. Στο διδιάστατο πεδίο συχνοτήτων, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο:

$$Y(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) X(\omega_x, \omega_y),$$

με

$$H(\omega_x, \omega_y) = \sum_m \sum_n h[m, n] e^{-j(\omega_x m + \omega_y n)}.$$

Έτσι, ένας χαμηλοπερατός πυρήνας καταστέλλει τις υψηλές χωρικές συχνότητες (λεπτομέρειες, θόρυβο), ενώ ένας υψηλοπερατός τις ενισχύει (ακμές, ασυνέχειες).

Διαχωρίσιμα φίλτρα. Πολλά 2D FIR φίλτρα είναι διαχωρίσιμα:

$$h[m, n] = h_x[m] h_y[n].$$

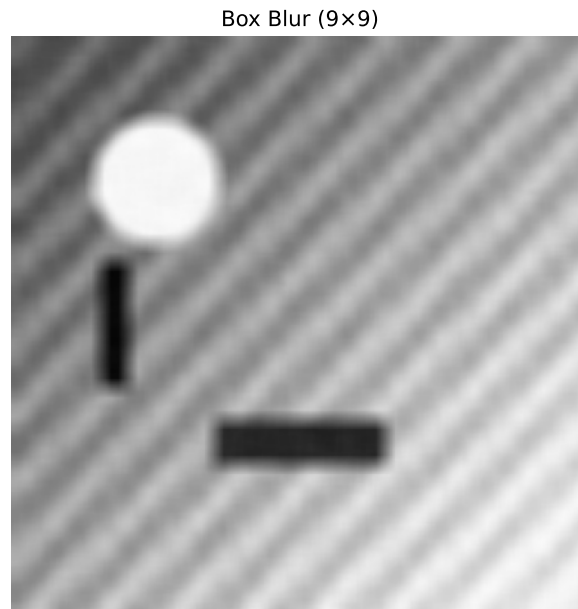
Αυτό επιτρέπει συνέλιξη σε δύο 1D περάσματα—οριζόντιο και κάθετο—μειώνοντας το κόστος από $O(K^2)$ σε $O(2K)$ πράξεις ανά pixel.

3.6.1 Χαμηλοπερατό Φιλτράρισμα: Box Filter και Γκαουσιανά Φίλτρα

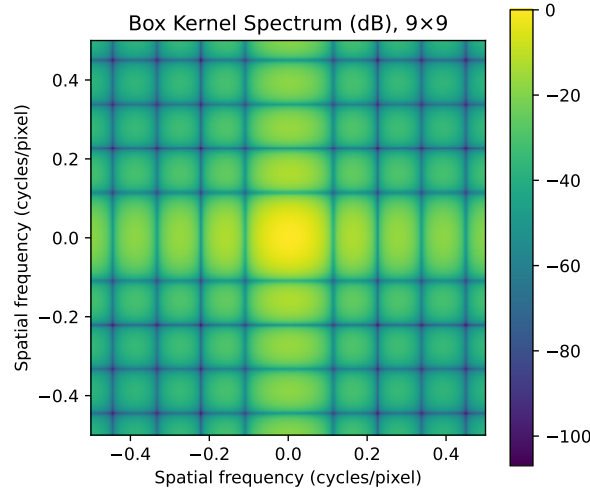
Box filter. Ένα απλό φίλτρο μέσου όρου χρησιμοποιεί έναν σταθερό πυρήνα:

$$h_{\text{box}}[m, n] = \frac{1}{K^2}, \quad 0 \leq m, n < K.$$

Πραγματοποιεί ομοιόμορφο τοπικό μέσο όρο, μειώνοντας αποτελεσματικά τον θόρυβο (Σχ. 3.9, 3.10), αλλά προκαλεί θόλωση ακμών και «δαχτυλίδια» (ringing) λόγω της sinc μορφής που έχει η φασματική του κυματομορφή (Σχ. 3.11).



Σχήμα 3.10: Θόλωση τύπου box (9×9). Αφαιρεί αποτελεσματικά θόρυβο αλλά προκαλεί ringing γύρω από ακμές.



Σχήμα 3.11: Φασματικό μέτρο (dB) πυρήνα box. Η περιοδική sinc μορφή οδηγεί σε έντονες πλευρικές λοβές (aliasing).

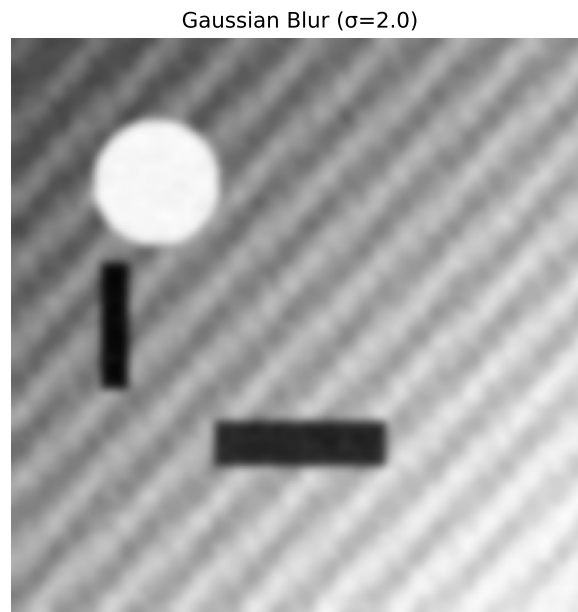
Gaussian filter. Ένας Γκαουσιανός πυρήνας επιτυγχάνει πιο ομαλή αποκοπή των υψηλών συχνοτήτων:

$$h_{\text{Gauss}}[m, n] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{m^2+n^2}{2\sigma^2}}.$$

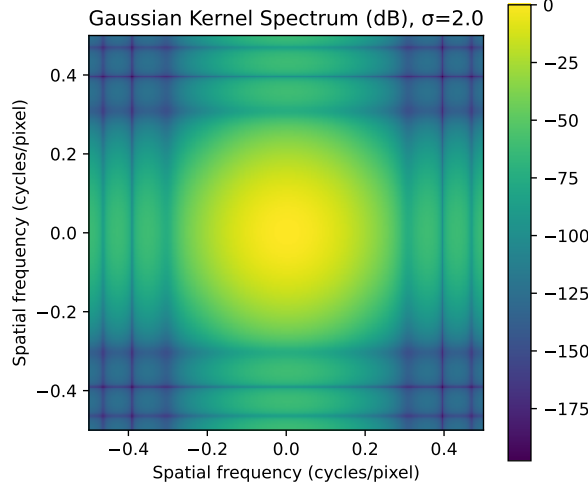
Η φασματική του απόκριση είναι επίσης Γκαουσιανή:

$$H_{\text{Gauss}}(\omega_x, \omega_y) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}.$$

Αυτό εξασφαλίζει ισοτροπική εξομάλυνση χωρίς τεχνητά «δαχτυλίδια» (ringing), όπως φαίνεται στα Σχ. 3.12, 3.13.



Σχήμα 3.12: Γκαουσιανή θόλωση με $\sigma = 2.0$: ομαλή μείωση θορύβου με ελάχιστα τεχνητά artefacts στις ακμές.



Σχήμα 3.13: Φάσμα πυρήνα Gaussian (dB): ομαλή ακτινική απόσβεση και αμελητέοι πλευρικοί λοβοί.

3.6.2 Υψηλοπερατό Φιλτράρισμα: Ανίχνευση Ακμών Sobel

Φιλτράρισμα βασισμένο σε παραγώγους. Οι ακμές αντιστοιχούν σε απότομες χωρικές μεταβολές της φωτεινότητας—δηλαδή σε υψηλές συχνότητες. Οι τελεστές Sobel προσεγγίζουν τις χωρικές παραγώγους της εικόνας στις διευθύνσεις x και y (Σχ. 3.14):

$$s_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad s_y = s_x^\top.$$

Η συνέλιξη της εικόνας με s_x και s_y δίνει τα συστατικά του διανύσματος κλίσης: g_x και g_y . Το μέτρο της ακμής υπολογίζεται ως:

$$\|g\| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}.$$

3.6.3 High-Frequency Enhancement: Unsharp Masking

Το **unsharp masking** ενισχύει τις υψηλές συχνότητες συνδυάζοντας μια χαμηλοπερατή εκδοχή της εικόνας με την αρχική. Αν $x_{LP} = x * h_{LP}$ είναι η θολωμένη (χαμηλοπερατή) εικόνα, τότε η οξυμένη εικόνα δίνεται από (Σχ. 3.15):

$$y = x + \lambda(x - x_{LP}) = (1 + \lambda)x - \lambda(x * h_{LP}),$$

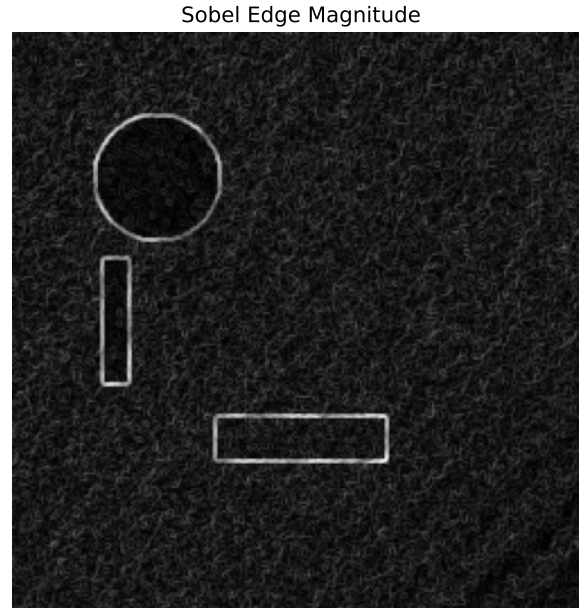
όπου $\lambda > 0$ ρυθμίζει την ένταση της οξύνσης.

Η αντίστοιχη συχνотική απόκριση είναι:

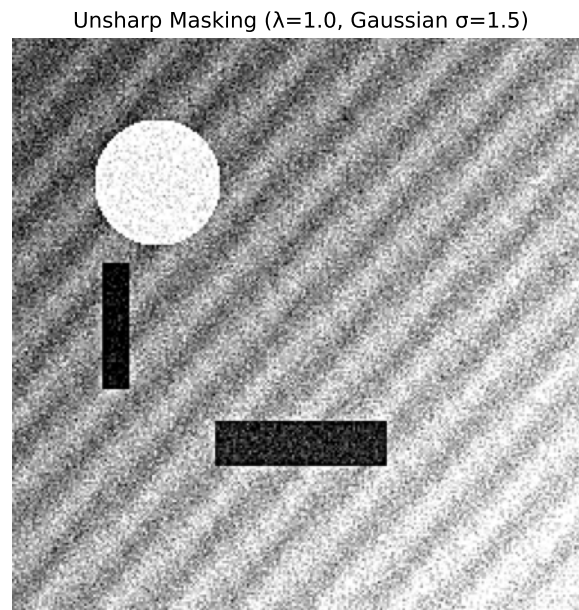
$$H_{USM}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = 1 + \lambda(1 - H_{LP}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})),$$

η οποία ενισχύει τις υψηλές χωρικές συχνότητες ενώ διατηρεί ενιαίο DC κέρδος—κατάλληλο για οξύνση χωρίς μεταβολή της συνολικής φωτεινότητας.

Σχόλια. Το διδιάστατο FIR φιλτράρισμα γενικεύει όλες τις βασικές έννοιες του μονοδιάστατου χώρου. Τα box και Gaussian φίλτρα μειώνουν θόρυβο μέσω χαμηλοπερατού εξομαλυντικού φιλτραρίσματος, τα φίλτρα Sobel ανιχνεύουν ακμές μέσω χωρικών παραγώγων, ενώ το unsharp masking ενισχύει λεπτομέρειες μέσω ελεγχόμενης ενίσχυσης υψηλών συχνοτήτων.



Σχήμα 3.14: Μέτρο ακμών Sobel: υψηλοπερατή FIR απόκριση που αναδεικνύει περιγράμματα και ασυνέχειες.



Σχήμα 3.15: Unsharp masking ($\lambda = 1.0$, Γκαουσιανό h_{LP} με $\sigma = 1.5$). Οι ακμές ενισχύονται ενώ οι χαμηλές συχνότητες παραμένουν σχεδόν αμετάβλητες.

3.7 FIR Φίλτρα Αποκοπής Ζώνης/Εγκοπής (Band-Stop/Notch)

Ένας απλός και ιδιαίτερα δημοφιλής τρόπος για την αποκοπή μιας συγκεκριμένης συχνότητας είναι ο σχεδιασμός ενός **FIR notch** φίλτρου τοποθετώντας δύο συζυγείς ρίζες πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Για δειγματοληπτική συχνότητα f_s και συχνότητα Αποκοπής f_0 , η αντίστοιχη ψηφιακή ακτινική συχνότητα είναι

$$\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s}.$$

Τοποθετώντας συζυγείς μηδενιστές στο $z = e^{\pm j\Omega_0}$ λαμβάνουμε το δεύτερης τάξης FIR:

$$H_{\text{FIR}}(z) = (1 - e^{j\Omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\Omega_0} z^{-1}) = 1 - 2 \cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2}.$$

Εφόσον $H_{\text{FIR}}(e^{j\Omega_0}) = 0$, η συχνότητα f_0 αποκόπτεται πλήρως. Το πλάτος της εγκοπής καθορίζεται από τη θέση των μηδενιστών: ένα δεύτερης τάξης FIR notch έχει στενή, εντοπισμένη απόσβεση. Για ακόμη στενότερη ζώνη αποκοπής απαιτούνται περισσότερες ρίζες και μεγαλύτερη τάξη.

Οι συντελεστές είναι συμμετρικοί, οπότε το φίλτρο έχει **γραμμική φάση**. Επιπλέον, όλα τα FIR φίλτρα με πραγματικούς συντελεστές είναι εν γένει σταθερά, κάτι που τα κάνει ιδιαίτερα ελκυστικά για offline επεξεργασία ή εφαρμογές όπου η φασική γραμμικότητα είναι κρίσιμη.

Το κύριο μειονέκτημα είναι η απόδοση: πολύ στενές εγκοπές (ειδικά σε χαμηλές συχνότητες) απαιτούν μεγάλες τάξεις FIR, αυξάνοντας υπολογιστικό κόστος και την καθυστέρηση. Παρόλα αυτά, η απλότητα και η εγγυημένη σταθερότητα τα καθιστούν ιδανικά για εφαρμογές όπως: αφαίρεση ημιτονοειδών παρεμβολών, καταστολή συγκεκριμένων μηχανικών συντονισμών, ή εξάλειψη narrowband «βουητού» χωρίς παραμόρφωση των γειτονικών συχνοτήτων.

Python Implementation.

```
1 # === Parameters ===
2 fs = 1000.0           # Sampling frequency [Hz]
3 f0 = 60.0             # Notch frequency [Hz]
4 Omega0 = 2 * np.pi * f0 / fs
5
6 # === FIR notch filter ===
7 # Zeros exactly on the unit circle at ±Omega0
8 b_fir = np.array([1, -2 * np.cos(Omega0), 1], dtype=float)
9 a_fir = np.array([1.0], dtype=float)
```

Listing 3: FIR Notch Filter Implementation

3.8 Περίληψη

Τα FIR φίλτρα αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Είναι:

- **Σταθερά** και εύκολα στην υλοποίηση,
- **Ικανά για απολύτως γραμμική φάση**,
- **Ευρέως εφαρμόσιμα** σε μονοδιάστατα (ήχος, αισθητήρες) και διδιάστατα (εικόνες) σήματα.

Παρά το αυξημένο υπολογιστικό κόστος για πολύ απότομες μεταβάσεις συχνοτήτων, η προβλεψιμότητα, η σταθερότητα και η ευελιξία τους τα καθιστούν ιδανική επιλογή για εφαρμογές υψηλής ακρίβειας.

4 Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)

4.1 Επισκόπηση και Ορισμός

Ένα **Φίλτρο Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)** είναι ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση έχει (θεωρητικά) άπειρη διάρκεια λόγω *ανάδρασης*. Ένα αιτιατό IIR φίλτρο περιγράφεται από την αναδρομική εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k],$$

με μετασχηματισμό z :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \quad H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}.$$

Αιτιότητα και σταθερότητα. Ένα IIR φίλτρο είναι *αιτιατό* αν μπορεί να υλοποιηθεί σε πραγματικό χρόνο (χωρίς εξάρτηση από μελλοντικές τιμές του σήματος). Είναι **BIBO-σταθερό** αν και μόνο αν **όλοι οι πόλοι** του $H(z)$ βρίσκονται **αυστηρά μέσα** στον μοναδιαίο κύκλο. Οι μηδενιστές μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε χωρίς να επηρεάζουν την BIBO σταθερότητα.

Γιατί IIR; Τα IIR φίλτρα προσφέρουν **πολύ υψηλή επιλεκτικότητα συχνοτήτων με χαμηλή τάξη** (λίγους συντελεστές), καθιστώντας τα υπολογιστικά αποδοτικά. Τα μειονεκτήματα είναι η **μη γραμμική φάση**, η ευαισθησία στη σταθερότητα και τα προβλήματα **πεπερασμένης ακρίβειας** (ποσοτικοποίηση, limit cycles).

4.2 Πόλοι, Μηδενικά και Επιλεκτικότητα ως προς τη Συχνότητα

Το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης $|H(e^{j\omega})|$ καθορίζεται από την **απόσταση** του $e^{j\omega}$ από τους μηδενιστές και τους πόλους του φίλτρου στο z -επίπεδο:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\prod_m (1 - z_m e^{-j\omega})}{\prod_\ell (1 - p_\ell e^{-j\omega})}.$$

- Πόλοι κοντά στον μοναδιαίο κύκλο **ενισχύουν** γειτονικές συχνότητες (συντονισμός).
- Μηδενιστές κοντά στον μοναδιαίο κύκλο **εξασθενούν** γειτονικές συχνότητες (εγχοπές).
- Απότομες μεταβάσεις προκύπτουν από τοποθέτηση πόλων/μηδενιστών πολύ κοντά στο $|z| = 1$.

4.3 Αναλογικά Πρωτότυπα και ο Διγραμμικός Μετασχηματισμός

Οι περισσότερες IIR σχεδιάσεις ξεκινούν από ένα **αναλογικό πρωτότυπο** $H_c(s)$ (Butterworth, Chebyshev, Elliptic), και μετατρέπονται στο ψηφιακό πεδίο μέσω του **διγραμμικού μετασχηματισμού** (bilinear transform, BLT):

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \iff z = \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}},$$

ο οποίος προβάλλει τον άξονα $j\Omega$ στον μοναδιαίο κύκλο, διατηρώντας τη σταθερότητα. Επειδή ο BLT εισάγει παραμόρφωση συχνότητας (frequency warping), κάνουμε pre-warping των αναλογικών συχνοτικών ορίων Ω_k στα αντίστοιχα ψηφιακά ω_k μέσω:

$$\Omega_k = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_k}{2}\right).$$

Κατόπιν, σχεδιάζουμε το αναλογικό πρωτότυπο στα Ω_k και εφαρμόζουμε τον BLT.

4.4 Απόκριση Ψηφιακών IIR Φίλτρων

Τα ψηφιακά IIR φίλτρα που προκύπτουν από τον διγραμμικό μετασχηματισμό κληρονομούν το σχήμα του αναλογικού πρωτοτύπου χαμηλοπερατής απόκρισης. Δοθέντος ενός αναλογικού πρωτοτύπου $|H(j\Omega)|$, η αντίστοιχη ψηφιακή απόκριση λαμβάνεται υπολογίζοντας το αναλογικό πρωτότυπο στις prewarped συχνότητες:

$$\Omega(\omega) = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega \in [0, \pi], \quad T = \frac{1}{f_s}.$$

Παρουσιάζουμε τις τρεις κλασικές οικογένειες σε δύο μορφές:

1. Πρωτότυπη μορφή (με pre-warping):

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |H(j\Omega(\omega))|^2.$$

2. Απλουστευμένη μορφή DSP (κανονικοποιημένη): αντικαθιστούμε $\Omega(\omega)/\Omega_c$ με ω/ω_c , όπως γίνεται συχνά στην πράξη των ψηφιακών φίλτρων.

4.4.1 Απόκριση Ψηφιακών Φίλτρων από Αναλογικά Πρότυπα

Butterworth (επίπεδη ζώνη διέλευσης).

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega(\omega)}{\Omega_c}\right)^{2N}}, \quad \Omega(\omega) = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Chebyshev Type I (ομοκυματική ζώνη διέλευσης).

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega(\omega)}{\Omega_c}\right)},$$

όπου

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| \leq 1, \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & |x| > 1. \end{cases}$$

Chebyshev Type II (ομοκυματική ζώνη αποκοπής).

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_c}{\Omega(\omega)}\right)}{1}}.$$

4.4.2 Απλουστευμένες Ψηφιακές Μορφές (Κανονικοποιημένη Συχνότητα ω/ω_c)

Για εκπαιδευτικούς σκοπούς (και σε πολλές DSP βιβλιοθήκες), τα ίδια σχήματα εκφράζονται απευθείας ως προς την ψηφιακή συχνότητα σε ακτίνια/δείγμα (*radian/sample*) ω .

Butterworth (επίπεδη ζώνη διέλευσης).

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}.$$

Chebyshev Type I (ομοκυματική ζώνη διέλευσης).

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}.$$

Chebyshev Type II (ομοκυματική ζώνη αποκοπής).

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}}.$$

Σχόλια.

- Οι δύο μορφές περιγράφουν τα ίδια ψηφιακά φίλτρα.
- Οι κανονικοποιημένες μορφές είναι πρακτικές για διαίσθηση, συγκρίσεις και σχεδίαση, και αντιστοιχούν στο πώς τα περισσότερα DSP toolboxes προβάλλουν τις συναρτήσεις απόκρισης.
- Η συνάρτηση $C_N(\cdot)$ είναι το πολυώνυμο Chebyshev πρώτου είδους.

4.5 Μετασχηματισμοί Πρωτοτύπων ($LP \rightarrow HP/BP/BS$)

Στον αναλογικό σχεδιασμό IIR, ένα πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο $H_{LP}(s)$ μετατρέπεται σε υψηλοπερατό, ζωνοπερατό ή ζωνοαποκοπής με την αντικατάσταση $s \mapsto F(s)$ και στη συνέχεια με εφαρμογή του διγραμμικού μετασχηματισμού (BLT).

Στο ψηφιακό πεδίο, η ίδια ιδέα υλοποιείται αντικαθιστώντας το z^{-1} στο χαμηλοπερατό φίλτρο $H_{LP}(z)$ με μία κατάλληλη *all-pass* απεικόνιση

$$A(z^{-1}) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})},$$

η οποία μετακινεί πόλους και μηδενικά πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, διατηρώντας τη σταθερότητα. Το νέο φίλτρο προκύπτει ως

$$H_{\text{new}}(z) = H_{LP}(A(z^{-1})).$$

Παραθέτουμε τους τρεις κλασικούς ψηφιακούς μετασχηματισμούς συχνότητας.

4.5.1 Χαμηλοπερατό $\rightarrow$ Υψηλοπερατό (LP $\rightarrow$ HP)

Το ψηφιακό υψηλοπερατό φίλτρο προκύπτει με την αντικατάσταση

$$z^{-1} \longrightarrow -z^{-1}.$$

Ισοδύναμα,

$$A_{HP}(z^{-1}) = -z^{-1}.$$

Αυτή η απεικόνιση αναστρέφει τον ψηφιακό άξονα συχνότητας:

$$\omega' = \pi - \omega,$$

στέλνοντας τη $\omega \approx 0$ (DC) στη $\omega \approx \pi$ (Nyquist). Τα μηδενικά στο $z = 1$ μεταφέρονται στο $z = -1$, επιβάλλοντας υψηλοπερατή συμπεριφορά.

4.5.2 Χαμηλοπερατό $\rightarrow$ Ζωνοπερατό (LP $\rightarrow$ BP)

Ένα χαμηλοπερατό πρωτότυπο μετατρέπεται σε ζωνοπερατό με την αντικατάσταση

$$z^{-1} \longrightarrow A_{BP}(z^{-1}) = \frac{z^{-2} - 2 \cos \Omega_0 z^{-1} + 1}{1 - 2r \cos \Omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

Όπου

$$\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s}, \quad f_0 = \sqrt{f_1 f_2}, \quad B = f_2 - f_1, \quad r = 1 - \frac{\pi B}{f_s}.$$

Ερμηνεία.

- Ο αριθμητής δημιουργεί δύο μηδενικά στο $z = e^{\pm j\Omega_0}$, εξασφαλίζοντας απόρριψη εκτός ζώνης.
- Ο παρονομαστής τοποθετεί ένα ζεύγος πόλων κοντά στον μοναδιαίο κύκλο με ακτίνα r , ελέγχοντας το εύρος ζώνης.
- Η αντικατάσταση στον $H_{LP}(z)$ παράγει ένα ψηφιακό ζωνοπερατό φίλτρο κεντραρισμένο στη συχνότητα f_0 .

4.5.3 Παρατηρήσεις

- Οι απεικονίσεις all-pass διατηρούν τη σταθερότητα επειδή ισχύει $|A(z)| = 1$ όταν $|z| = 1$.
- Με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, ένα και μόνο πρωτότυπο χαμηλοπερατό φίλτρο $H_{LP}(z)$ μπορεί να παράγει όλους τους άλλους τύπους φίλτρων.
- Οι απεικονίσεις αυτές αντιστοιχούν ακριβώς στους αναλογικούς μετασχηματισμούς μετά τον bilinear transform, αλλά εφαρμόζονται απευθείας στο z -πεδίο.

4.6 Biquads και Πρακτικές Υλοποιήσεις

Οι (direct) υλοποιήσεις IIR φίλτρων με υψηλή τάξη, παρουσιάζουν ευαισθησία στους συντελεστές και σφάλματα στρογγυλοποίησης. Στην πράξη τα ψηφιακά φίλτρα IIR υλοποιούνται ως διαδοχικά φίλτρα δεύτερης τάξης (Second-Order Sections, SOS ή αλλιώς “biquads”):

$$H(z) = \prod_{i=1}^L \frac{b_{0,i} + b_{1,i}z^{-1} + b_{2,i}z^{-2}}{1 + a_{1,i}z^{-1} + a_{2,i}z^{-2}}, \quad L = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil.$$

Γιατί Biquads;

- Αριθμητική σταθερότητα: πόλοι και μηδενικά ομαδοποιούνται ανά ζεύγη και κάθε τμήμα είναι καλά ορισμένο.
- Ευέλικτη κλιμάκωση: υπολογισμοί ανά φίλτρο με μικρή τάξη για αποφυγή αριθμητικών σφαλμάτων.

Διάταξη biquads. Συνήθως τοποθετούμε τα χαμηλού κέρδους biquads πρώτα (ή εναλλάξ) ώστε να μειωθεί η πιθανότητα εσωτερικής υπερχείλισης και ενίσχυσης θορύβου. Στην πράξη συνήθως εμπιστευόμαστε τη διάταξη και κλιμάκωση που δίνουν τα εργαλεία σχεδίασης φίλτρων/επεξεργασίας σημάτων.

4.7 Ψηφιακά Χαμηλοπερατά και Υψηλοπερατά Butterworth Φίλτρα

Τα φίλτρα Butterworth είναι μια κλασική επιλογή για IIR σχεδίαση επειδή το μέτρο της απόκρισής τους είναι επίπεδο στη ζώνη διέλευσης (καμία κυμάτωση) και μονοτονικό στη ζώνη αποκοπής. Το τίμημα αυτής της ομαλότητας είναι ότι η ζώνη μετάβασης δεν είναι τόσο απότομη όσο σε Chebyshev ή ελλειπτικά φίλτρα της ίδιας τάξης.

Χαμηλοπερατό Butterworth. Ένα ψηφιακό χαμηλοπερατό Butterworth φίλτρο τάξης N και συχνότητας αποκοπής f_c (Hz) προκύπτει συνήθως με bilinear transform από το αντίστοιχο αναλογικό πρωτότυπο. Η συχνотική απόκριση είναι

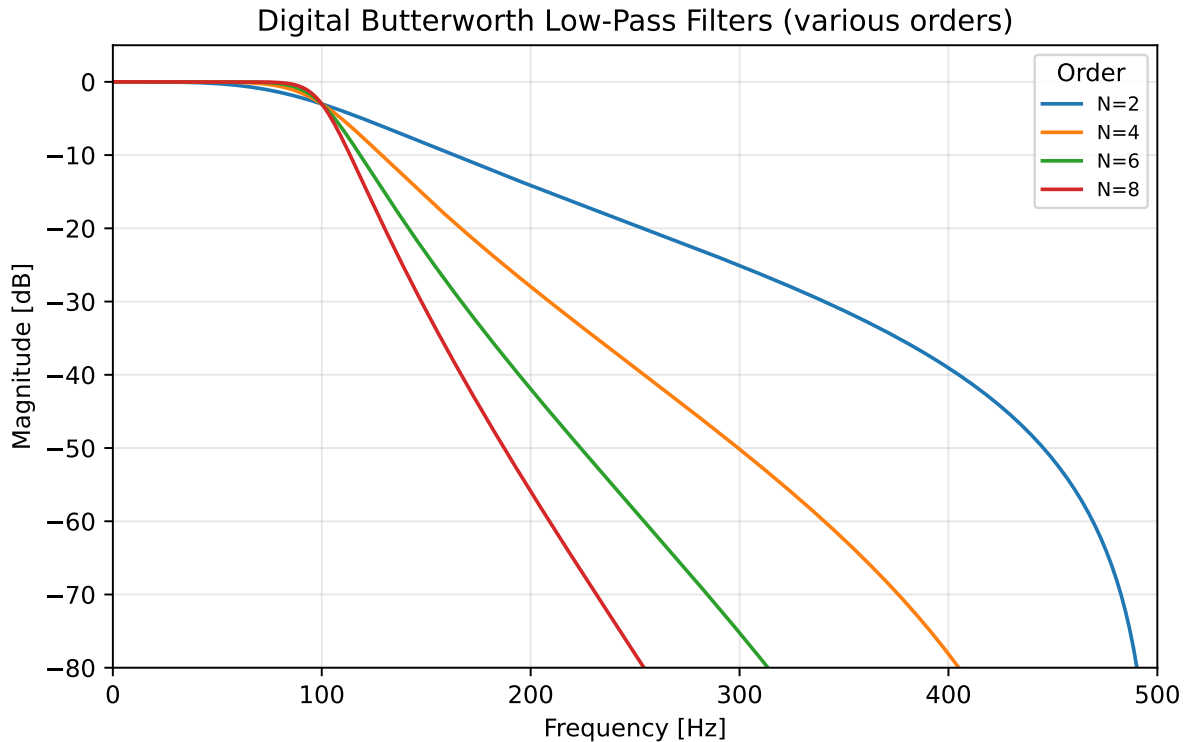
$$H_{LP}(e^{j\omega}), \quad \omega \in [0, \pi].$$

Το σχήμα της απρόκρισης μοιάζει με αυτό του πρωτοτύπου

$$|H_{LP}(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega(\omega)}{\Omega_c} \right)^{2N}},$$

όπου $\Omega(\omega)$ είναι η προ-μεταμορφωμένη αναλογική συχνότητα και Ω_c η προ-μεταμορφωμένη συχνότητα αποκοπής. Αυξάνοντας την τάξη N γίνεται η μετάβαση από την ζώνη διέλευσης στην ζώνη αποκοπής πιο απότομη.

Το Σχ. 4.1 δείχνει το μέτρο (σε dB) ψηφιακών χαμηλοπερατών Butterworth φίλτρων για διάφορες τάξεις N , όλα με συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz.



Σχήμα 4.1: Μέτρο απόκρισης ψηφιακών χαμηλοπερατών Butterworth φίλτρων (τάξεις $N = 2, 4, 6, 8$, αποκοπή $f_c = 100$ Hz). Μεγαλύτερη τάξη $\Rightarrow$ πιο απότομη μετάβαση και στενότερη ζώνη μετάβασης, με μέγιστα επίπεδη ζώνη διέλευσης.

Python Implementation.

```

1  fs = 1000.0 # sampling frequency in Hz
2  lp_fc = 100.0 # low-pass cutoff in Hz
3
4  N = 4 # filter order
5  b, a = scipy.signal.butter(N, lp_fc, btype='lowpass', fs=fs)

```

Listing 4: Butterworth Low-Pass via SciPy

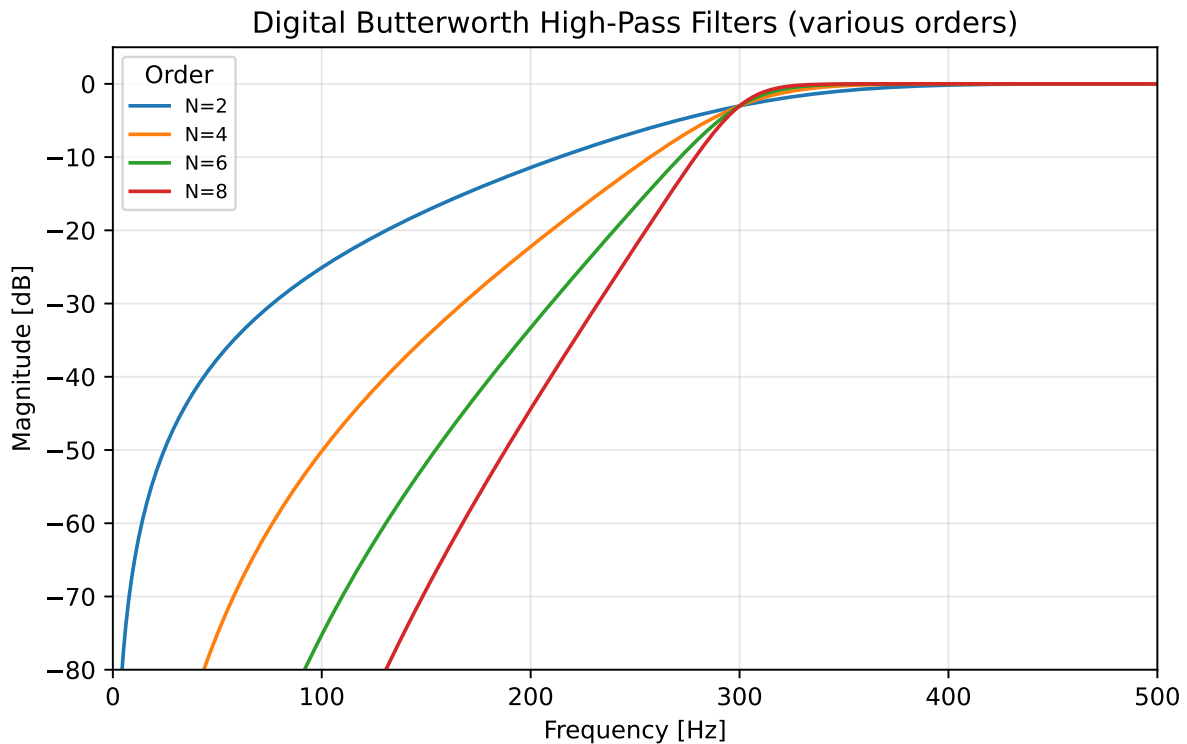
Υψιπερατό Butterworth. Ένα ψηφιακό υψιπερατό φίλτρο Butterworth μπορεί να προκύψει είτε μέσω μετασχηματισμού του χαμηλοπερατού πρωτοτύπου (low-pass $\rightarrow$ high-pass), είτε απευθείας μέσω συναρτήσεων σχεδίασης (π.χ. `butter` με `btype='highpass'`).

Η ιδεατή μορφή του μεγέθους είναι

$$|H_{HP}(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega_c(\omega)}{\Omega(\omega)} \right)^{2N}},$$

ώστε οι χαμηλές συχνότητες (κοντά στο DC) να καταστέλλονται έντονα, ενώ οι συχνότητες πάνω από τη συχνότητα αποκοπής f_c να διέρχονται με σχεδόν μοναδιαίο κέρδος.

Στο Σχ. 4.2 φαίνεται το μέτρο απόκρισης ψηφιακών υψιπερατών Butterworth φίλτρων για διάφορες τάξεις N , όλα με συχνότητα αποκοπής $f_c = 300$ Hz.



Σχήμα 4.2: Μέτρο απόκρισης ψηφιακών υψιπερατών Butterworth φίλτρων (τάξεις $N = 2, 4, 6, 8$, αποκοπή $f_c = 300$ Hz). Μεγαλύτερη τάξη $\Rightarrow$ πιο απότομη καταστολή κάτω από την αποκοπή, ενώ η ζώνη διέλευσης στις υψηλές συχνότητες παραμένει μέγιστα επίπεδη.

Python Implementation.

```

1  fs = 1000.0 # sampling frequency in Hz
2  hp_fc = 300.0 # high-pass cutoff in Hz
3  N = 4 # filter order
4
5  b, a = scipy.signal.butter(N, hp_fc, btype='highpass', fs=fs)

```

Listing 5: Butterworth High-Pass via SciPy

Παρατηρήσεις.

- Τα φίλτρα Butterworth αποτελούν μια ασφαλή προεπιλογή όταν η ομαλή, χωρίς κυματώσεις απόκριση μεγέθους είναι σημαντικότερη από την όσο το δυνατό στενότερη ζώνη μετάβασης.
- Όσο αυξάνει η τάξη N , η φασική απόκριση γίνεται πιο μη-γραμμική και η ομαδική καθυστέρηση πιο εξαρτώμενη από τη συχνότητα, ιδιαίτερα κοντά στη συχνότητα αποκοπής.

4.8 Ψηφιακά Φίλτρα Chebyshev Τύπου I (Χαμηλοπερατά και Υψιπερατά)

Τα φίλτρα Chebyshev Τύπου I παρέχουν πιο απότομη μετάβαση από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής σε σχέση με τα Butterworth της ίδιας τάξης, με κόστος κυματώσεις

στη ζώνη διέλευσης. Η ζώνη αποκοπής παραμένει μονότονη. Το μέγεθος της κυμάτωσης καθορίζεται από μια παράμετρο (συνήθως σε dB), ενώ η τάξη N καθορίζει την απότομη πτώση στην περιοχή μετάβασης.

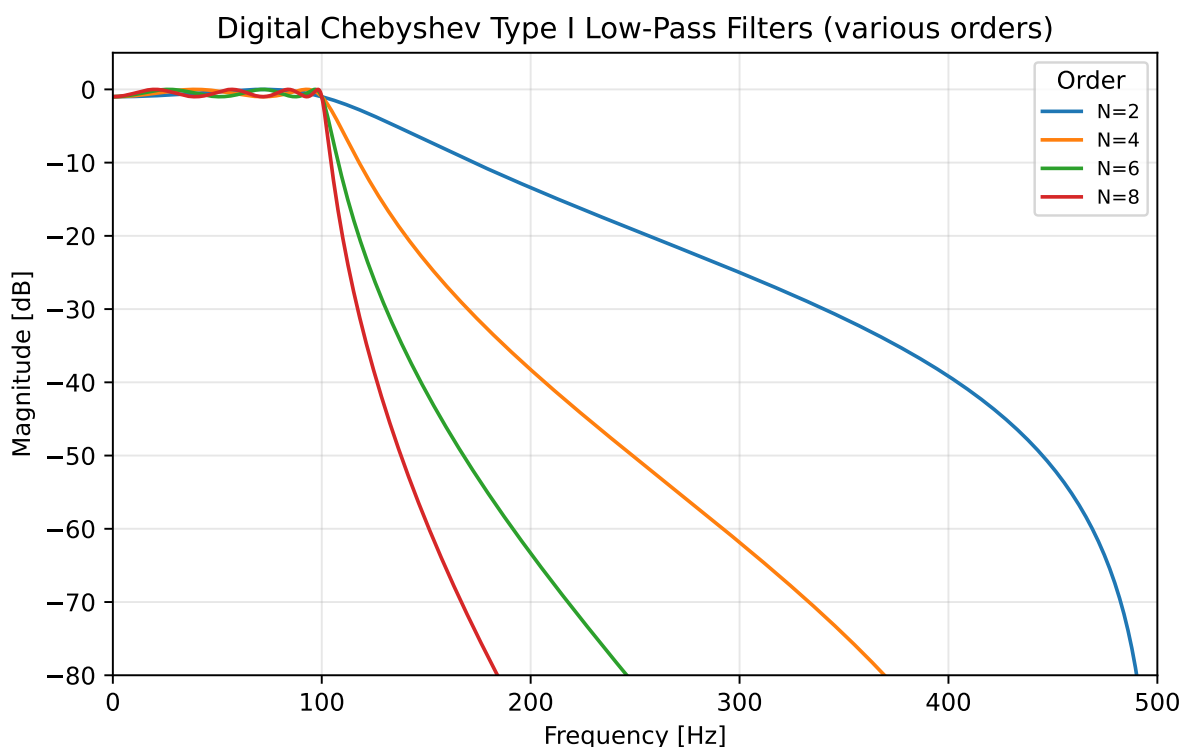
Χαμηλοπερατό Chebyshev Τύπου I. Ένα ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο Chebyshev Τύπου I τάξης N και συχνότητας αποκοπής f_c (Hz) προκύπτει μέσω του bilinear transform από το ανάλογο αναλογικό πρωτότυπο. Η απόκριση συχνότητας επάνω στον μοναδιαίο κύκλο είναι $H_{LP}(e^{j\omega})$, με $\omega \in [0, \pi]$. Η ποιοτική μορφή του μεγέθους ακολουθεί τη σχέση

$$|H_{LP}(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega(\omega)}{\Omega_c}\right)},$$

όπου $C_N(\cdot)$ είναι το πολυώνυμο Chebyshev πρώτου τύπου, $\Omega(\omega)$ η αναλογική συχνότητα (prewarped analog frequency) και Ω_c η συχνότητα αποκοπής.

Σε αντίθεση με το Butterworth, η ζώνη διέλευσης δεν είναι επίπεδη: εμφανίζει μικρές ταλαντώσεις (κυματώσεις) των οποίων το εύρος καθορίζεται από την παράμετρο ripple. Σε αντάλλαγμα, η ζώνη μετάβασης είναι στενότερη για την ίδια τάξη φίλτρου.

Στο Σχ. 4.3 φαίνονται τα διαγράμματα μέτρου (σε dB) για χαμηλοπερατά ψηφιακά φίλτρα Chebyshev Τύπου I διαφορετικών τάξεων, σχεδιασμένα με την ίδια συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz και κυμάτωση ζώνης διέλευσης περίπου 1 dB.



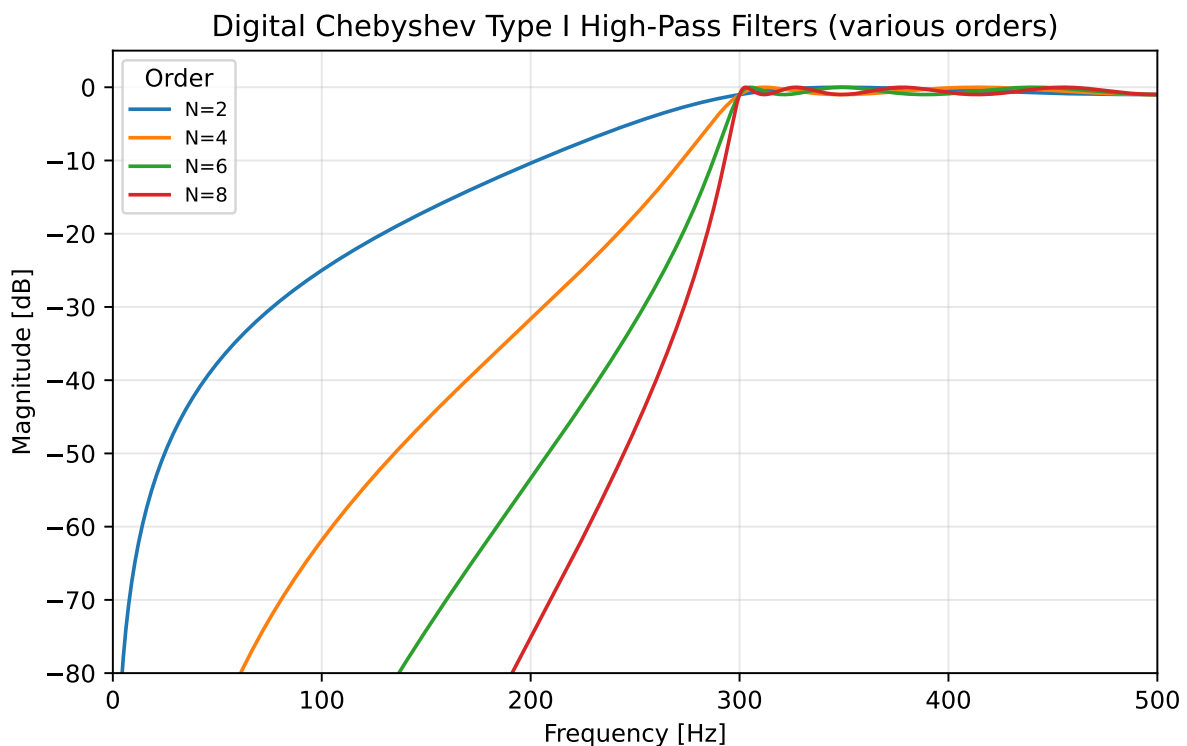
Σχήμα 4.3: Μέτρο απόκρισης ψηφιακών χαμηλοπερατών Chebyshev Τύπου I (τάξεις $N = 2, 4, 6, 8$, αποκοπή $f_c = 100$ Hz, κυμάτωση ζώνης διέλευσης ≈ 1 dB). Μεγαλύτερη τάξη $\Rightarrow$ πιο απότομη μετάβαση· η ζώνη διέλευσης παρουσιάζει συμπεριφορά ίσων κυματώσεων (equiripple).

Υψιπερατό Chebyshev Τύπου Ι. Αντίστοιχα, ένα ψηφιακό υψιπερατό φίλτρο Chebyshev Τύπου Ι μπορεί να σχεδιαστεί είτε μέσω μετασχηματισμού χαμηλοπερατού–σε–υψιπερατό, είτε άμεσα από υψιπερατές προδιαγραφές. Η ιδανική μορφή μέτρου της συχνοτικής απόκρισης είναι

$$|H_{HP}(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_c}{\Omega(\omega)}\right)},$$

όπου οι χαμηλές συχνότητες (κοντά στο DC) καταστέλλονται, ενώ οι συχνότητες πάνω από το f_c διέρχονται με ομοιόμορφη κυμάτωση (equiripple) στην περιοχή διέλευσης.

Το Σχ. 4.4 παρουσιάζει τις αποκρίσεις μέτρου για διάφορες τάξεις, όλες με την ίδια συχνότητα αποκοπής $f_c = 300$ Hz και την ίδια κυμάτωση στην περιοχή διέλευσης.



Σχήμα 4.4: Απόκριση μέτρου ψηφιακών υψιπερατών φίλτρων Chebyshev Τύπου Ι (τάξεις $N = 2, 4, 6, 8$, αποκοπή $f_c = 300$ Hz, κυμάτωση ≈ 1 dB στην περιοχή διέλευσης). Η περιοχή διέλευσης στις υψηλές συχνότητες έχει ομοιόμορφη κυμάτωση, ενώ η περιοχή αποκοπής στις χαμηλές συχνότητες είναι μονοτονική.

Python Implementation.

```

1  fs = 1000.0          # sampling frequency [Hz]
2  lp_fc = 100.0        # LP cutoff [Hz]
3  hp_fc = 300.0        # HP cutoff [Hz]
4
5  N = 4                # filter order
6  rp = 1.0             # passband ripple in dB (Chebyshev I)
7
8  b, a = scipy.signal.cheby1(N, rp, lp_fc, btype='lowpass', fs=fs) #
    Low-pass

```

```
b, a = scipy.signal.cheby1(N, rp, hp_fc, btype='highpass', fs=fs) #
High-pass
```

Listing 6: Chebyshev Type I via SciPy

Παρατηρήσεις.

- Για σταθερή τάξη N , τα φίλτρα Chebyshev Τύπου I επιτυγχάνουν στενότερη ζώνη μετάβασης σε σχέση με τα Butterworth.
- Η παράμετρος ε (ή η κυμάτωση της περιοχής διέλευσης σε dB) ρυθμίζει το συμβιβασμό μεταξύ παραμόρφωσης στην περιοχή διέλευσης και οξύτητας της μετάβασης.
- Όπως σε όλα τα IIR φίλτρα, η φάση είναι μη γραμμική και γίνεται πιο παραμορφωμένη καθώς αυξάνεται η τάξη.

4.9 Ψηφιακά Φίλτρα Chebyshev Τύπου II (Χαμηλοπερατά και Υψιπερατά)

Τα φίλτρα Chebyshev Τύπου II (γνωστά και ως *αντίστροφα Chebyshev*) έχουν επίπεδη περιοχή διέλευσης και περιοχή αποκοπής με ομοιόμορφη κυμάτωση. Αυτό τα καθιστά ελκυστικά όταν απαιτείται καθαρή περιοχή διέλευσης, ενώ επιτρέπεται ελεγχόμενη κυμάτωση στην περιοχή αποκοπής για απόκτηση πιο απότομης μετάβασης.

Χαμηλοπερατό Chebyshev Τύπου II. Ένα ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο Chebyshev Τύπου II τάξης N και συχνότητας αποκοπής f_c (Hz) προκύπτει από το αντίστοιχο αναλογικό πρωτότυπο Τύπου II. Η κατά προσέγγιση τετραγωνική απόκριση μέτρου είναι

$$|H_{LP}(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_c}{\Omega(\omega)}\right)}},$$

όπου $C_N(\cdot)$ είναι το πολυώνυμο Chebyshev πρώτου είδους και η παράμετρος ε ρυθμίζει την ελάχιστη εξασθένηση στην περιοχή αποκοπής (π.χ. 60 dB).

Η περιοχή διέλευσης είναι επίπεδη (όπως στα Butterworth), ενώ η περιοχή αποκοπής έχει ομοιόμορφη κυμάτωση.

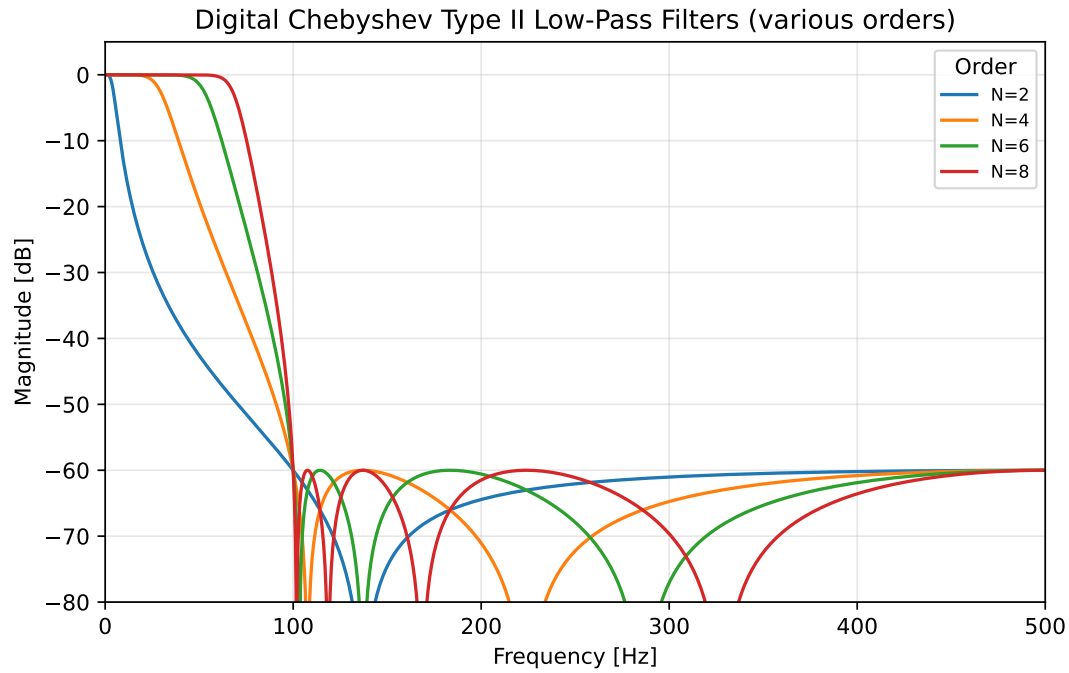
Στο Σχ. 4.5 φαίνονται οι αποκρίσεις μέτρου (σε dB) ψηφιακών χαμηλοπερατών Chebyshev Τύπου II για διάφορες τάξεις, με συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz και καθορισμένη εξασθένηση περιοχής αποκοπής (π.χ. 60 dB).

Υψιπερατό Chebyshev Τύπου II. Στην υψιπερατή περίπτωση, οι ρόλοι των χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων αντιστρέφονται. Μία προσεγγιστική έκφραση για την τετραγωνική απόκριση μέτρου είναι

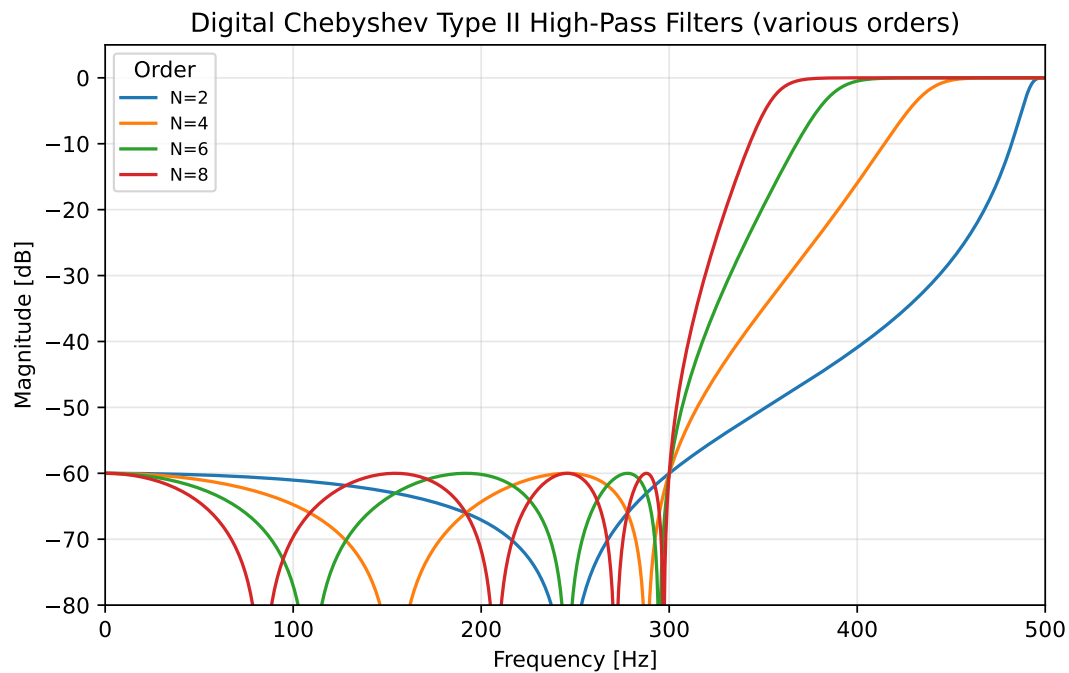
$$|H_{HP}(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega(\omega)}{\Omega_c}\right)}},$$

έτσι ώστε η περιοχή διέλευσης στις υψηλές συχνότητες να παραμένει επίπεδη, ενώ η περιοχή αποκοπής στις χαμηλές συχνότητες έχει ομοιόμορφη κυμάτωση.

Στο Σχ. 4.6 φαίνονται οι αποκρίσεις για διάφορες τάξεις, με συχνότητα αποκοπής $f_c = 300$ Hz και την ίδια απαίτηση εξασθένησης στην περιοχή αποκοπής.



Σχήμα 4.5: Απόκριση μέτρου ψηφιακών χαμηλοπερατών φίλτρων Chebyshev Τύπου II (τάξεις $N = 2, 4, 6, 8$, αποκοπή $f_c = 100$ Hz, εξασθένιση περιοχής αποκοπής ≈ 60 dB). Η περιοχή διέλευσης είναι επίπεδη, ενώ η περιοχή αποκοπής έχει ομοιόμορφη κυμάτωση.



Σχήμα 4.6: Απόκριση μέτρου ψηφιακών υψιπερατών φίλτρων Chebyshev Τύπου II (τάξεις $N = 2, 4, 6, 8$, αποκοπή $f_c = 300$ Hz, εξασθένιση περιοχής αποκοπής ≈ 60 dB). Η περιοχή διέλευσης στις υψηλές συχνότητες είναι επίπεδη, ενώ η περιοχή αποκοπής στις χαμηλές έχει ομοιόμορφη κυμάτωση.

Python Implementation.

```

1  fs = 1000.0          # sampling frequency [Hz]
2  lp_fc = 100.0        # LP cutoff [Hz]
3  hp_fc = 300.0        # HP cutoff [Hz]
4
5  N = 4                # filter order
6  rs = 60.0            # stopband attenuation in dB (Chebyshev II)
7
8  b, a = scipy.signal.cheby2(N, rs, lp_fc, btype='lowpass', fs=fs) #
   Low-pass
9  b, a = scipy.signal.cheby2(N, rs, hp_fc, btype='highpass', fs=fs) #
   High-pass

```

Listing 7: Chebyshev Type II via SciPy

Παρατηρήσεις.

- Τα φίλτρα Τύπου II είναι χρήσιμα όταν απαιτείται επίπεδη περιοχή διέλευσης, αλλά θέλουμε πιο απότομη μετάβαση σε σχέση με Butterworth χωρίς κυμάτωση στην περιοχή διέλευσης.
- Η περιοχή αποκοπής με ομοιόμορφη κυμάτωση ελέγχεται μέσω της προδιαγραφής εξασθένισης (π.χ. 60 dB).
- Όπως και στον Τύπο I, η αύξηση της τάξης N οδηγεί σε πιο απότομες μεταβάσεις, αλλά και σε εντονότερη μη γραμμική φάση.

4.10 Φάση, Καθυστέρηση και Επιλογές Μηδενικής Φάσης

Τα IIR φίλτρα έχουν **μη γραμμική φάση**. Η φάση

$$\phi(\omega) = \arg H(e^{j\omega})$$

παρουσιάζει τη μεγαλύτερη καμπυλότητα στη ζώνη μετάβασης, ενώ η καθυστέρηση

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

εξαρτάται από τη συχνότητα και συχνά εμφανίζει αιχμές κοντά στη συχνότητα αποκοπής (βλ. Fig. 4.7, 4.8, 4.9).

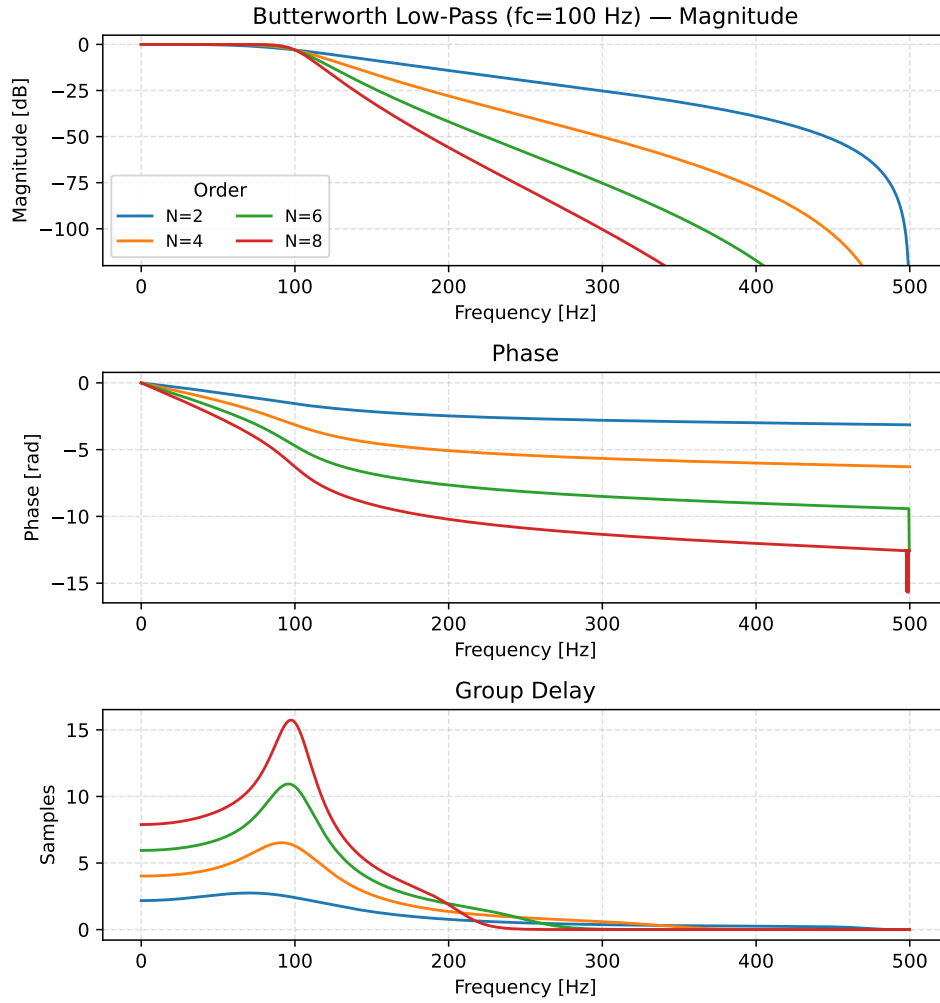
Για offline επεξεργασία, το αμφίδρομο φιλτράρισμα (`filtfilt`) εξαλείφει πλήρως την παραμόρφωση φάσης:

$$H_{zp}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2,$$

άρα, έχουμε μηδενική φάση και μέτρο υψωμένο στο τετράγωνο (διπλασιασμός τάξης).

4.11 Υπολογισμός Συντελεστών Ψηφιακών IIR Φίλτρων

Τα ψηφιακά IIR φίλτρα σχεδιάζονται σχεδόν πάντα μετασχηματίζοντας ένα αναλογικό πρωτότυπο σε διακριτό φίλτρο. Η διαδικασία είναι κοινή για Butterworth, Chebyshev I και Chebyshev II: διαφέρουν μόνο οι θέσεις των πόλων (και των μηδενικών στα Type II) του αναλογικού πρωτοτύπου. Η πλήρης διαδικασία είναι:



Σχήμα 4.7: Απόκριση μέτρου (επάνω), φάσης (μεσαία) και καθυστέρηση (κάτω) ενός χαμηλοπερατού Butterworth. Διακρίνεται η μη γραμμική φάση και η συχνοεξαρτώμενη καθυστέρηση, ιδιαίτερα κοντά στη συχνότητα αποκοπής.

1. Επιλογή αναλογικού χαμηλοπερατού πρωτοτύπου $H_{LP}(s)$ τάξης N .
2. Υπολογισμός των πόλων του (και μηδενικών για Chebyshev II).
3. Εφαρμογή αναλογικού μετασχηματισμού συχνότητας ($LP \rightarrow LP/HP/BP/BS$).
4. Εφαρμογή του διγραμμικού μετασχηματισμού

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}},$$

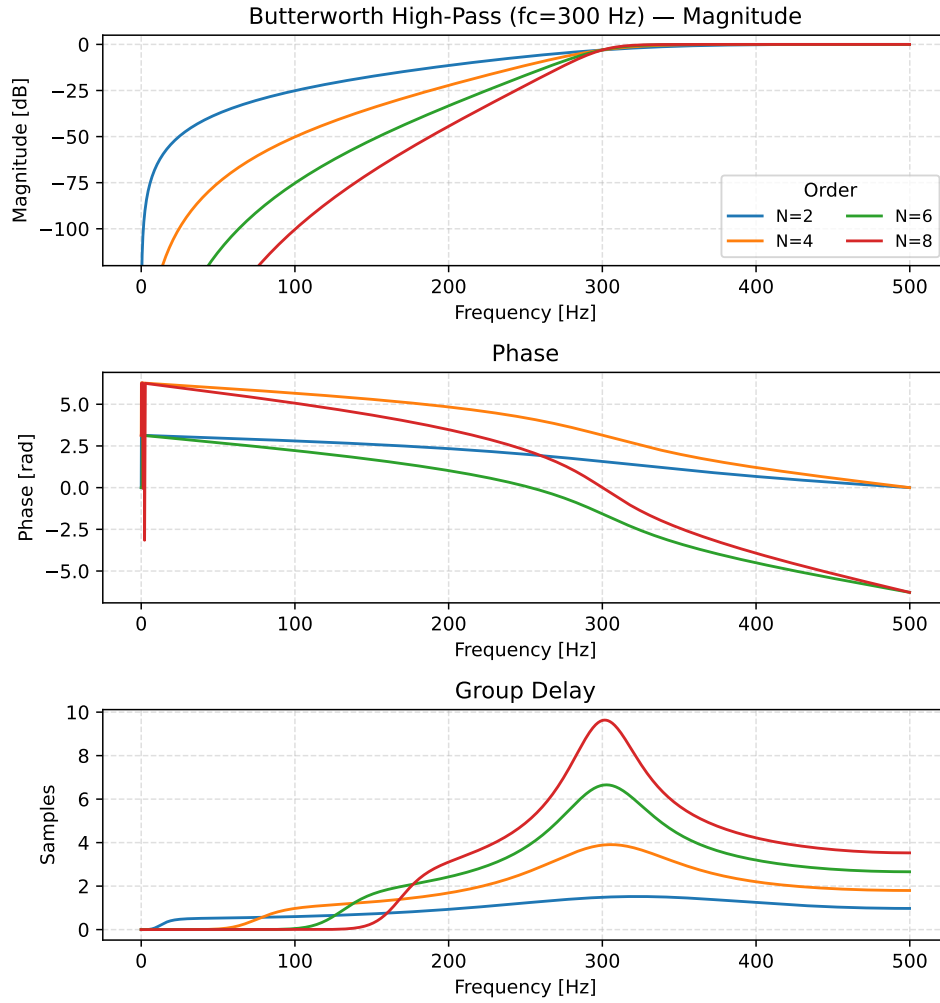
ο οποίος χαρτογραφεί το επίπεδο- s στο επίπεδο- z .

5. Μετατροπή του προκύπτοντος $H(z)$ σε ρητή μορφή

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}},$$

και υλοποίησή του με άμεση μορφή ή με biquads.

Στη συνέχεια αναλύουμε κάθε βήμα για τα τρία βασικά αναλογικά πρωτότυπα και δείχνουμε πώς μπορεί να υλοποιηθεί το ψηφιακό φίλτρο χωρίς τη χρήση *SciPy*.



Σχήμα 4.8: Απόκριση μέτρου (επάνω), φάσης (μεσαία) και καθυστέρηση (κάτω) ενός υψιπερατού Butterworth. Η φάση είναι μη γραμμική και η καθυστέρηση αλλάζει με τη συχνότητα, κυρίως κοντά στη συχνότητα αποκοπής.

4.11.1 Πόλοι Αναλογικών Πρωτοτύπων

Butterworth. Το αναλογικό χαμηλοπερατό πρωτότυπο Butterworth έχει πόλους ομοίμορφα κατανομημένους σε κύκλο στο αριστερό ημιεπίπεδο:

$$p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Chebyshev Τύπου I. Οι πόλοι βρίσκονται πάνω σε έλλειψη καθοριζόμενη από την παράμετρο κυμάτωσης της ζώνης διέλευσης ε :

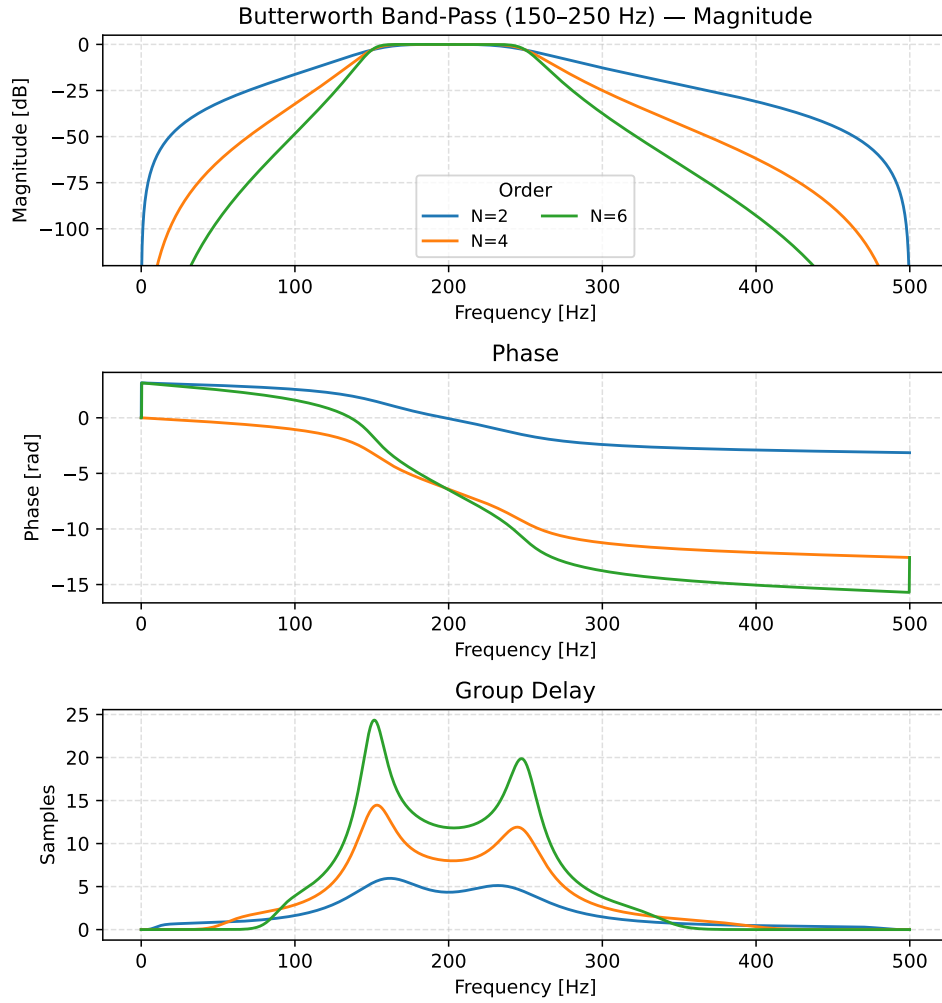
$$p_k = \Omega_c (-\sinh \alpha \sin \theta_k + j \cosh \alpha \cos \theta_k), \quad \alpha = \frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\varepsilon},$$

όπου

$$\theta_k = \frac{\pi}{2N}(2k+1).$$

Chebyshev Τύπου II. Οι Type II (inverse Chebyshev) έχουν:

- πόλους όμοιας μορφής με το Type I πρωτότυπο (με προσαρμοσμένες παραμέτρους),



Σχήμα 4.9: Απόκριση μέτρου (επάνω), φάσης (μεσαία) και καθυστέρηση (κάτω) ενός ζωνοπερατού Butterworth. Η μη γραμμικότητα της φάσης και η μεταβολή της καθυστέρησης είναι πιο έντονες κοντά στα άκρα της ζώνης διέλευσης.

- μηδενικά τοποθετημένα στον φανταστικό άξονα:

$$z_k = \frac{\Omega_c}{\cos \theta_k}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Τα μηδενικά των Type II επιβάλλουν ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής.

4.11.2 Αναλογικοί Μετασχηματισμοί Συχνότητας

Δεδομένου ενός χαμηλοπερατού αναλογικού πρωτοτύπου $H_{LP}(s)$ με συχνότητα αποκοπής Ω_c :

Χαμηλοπερατό (LP). Καμία μετατροπή: $s \rightarrow s$.

Υψιπερατό (HP).

$$s \rightarrow \frac{\Omega_c^2}{s}.$$

Ζωνοπερατό (BP).

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}, \quad B = \Omega_2 - \Omega_1, \quad \Omega_0 = \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}.$$

Ζωνοαποκοπής (BS).

$$s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \Omega_0^2}.$$

4.11.3 Ο Διγραμμικός (Bilinear) Μετασχηματισμός

Ο μετασχηματισμός δίνεται από:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad T = 1/f_s.$$

Με αυτή την αντικατάσταση, κάθε αναλογικός πόλος p_i αντιστοιχίζεται σε έναν ψηφιακό πόλο:

$$z_i = \frac{1 + p_i T/2}{1 - p_i T/2}.$$

Αντίστοιχα και για τα μηδενικά.

Αφού αντιστοιχιστούν όλοι οι πόλοι/μηδενικά, η ψηφιακή συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = K \prod_{i=1}^M \frac{1 - z_{z,i} z^{-1}}{1 - z_{p,i} z^{-1}},$$

η οποία στη συνέχεια αναπτύσσεται σε τυπικούς IIR συντελεστές.

4.11.4 Υλοποίηση Ψηφιακών IIR Φίλτρων

Αφού υπολογιστούν οι συντελεστές b_k και a_k , το IIR φίλτρο υλοποιείται μέσω της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k], \quad a_0 = 1.$$

Python Implementation

```
1 def butterworth_analog_poles(N, Omega_c):
2     """
3     Return the N analog Butterworth poles for a low-pass prototype
4     with cutoff Omega_c (rad/s).
5     """
6     k = np.arange(N)
7     # angles in the left half-plane
8     theta = np.pi * (2*k + 1 + N) / (2*N)
9     poles = Omega_c * np.exp(1j * theta)
10    return poles
11
12
13 def butterworth_digital_manual(N, fc, fs):
14     """
```

```

15 Manual Butterworth LOW-PASS design (z-domain) via:
16 - analog prototype poles
17 - bilinear transform
18 - zeros at z=-1
19 - unity DC gain normalization
20
21 Returns: b_manual, a_manual, z_manual, p_manual
22 """
23 # 1) Prewarp cutoff
24 wc = 2*np.pi * fc / fs          # digital rad/sample
25 Omega_c = 2*fs * np.tan(wc / 2.0) # prewarped analog cutoff (rad/
    s)
26
27 # 2) Analog poles
28 p_analog = butterworth_analog_poles(N, Omega_c)
29
30 # 3) Bilinear transform: s -> (2fs(1 - z^-1))/(1 + z^-1)
31 #    => z = (2fs + s) / (2fs - s)
32 p_digital = (2*fs + p_analog) / (2*fs - p_analog)
33
34 # 4) Digital zeros: N zeros at z = -1 (for low-pass)
35 z_digital = -np.ones(N, dtype=complex)
36
37 # 5) Form denominator (a) and numerator (b) polynomials
38 #    poly() returns coefficients of product (z - root_i)
39 a = np.poly(p_digital)          # denominator (a[0]=1)
40 b = np.poly(z_digital)          # numerator
41
42 # 6) Normalize for unity gain at DC: H(1) = 1
43 H1 = np.sum(b) / np.sum(a)
44 b = b / H1
45
46 # Make real (numerical imag parts ~ 1e-16)
47 a = np.real_if_close(a)
48 b = np.real_if_close(b)
49
50 return b, a, z_digital, p_digital

```

Listing 8: Manual Butterworth Low-Pass Design via Bilinear Transform

4.12 IIR Φίλτρα Αποκοπής Ζώνης/Εγκοπής (Band-Stop/Notch)

Παρόλο που τα FIR φίλτρα αποκοπής είναι εννοιολογικά απλά, η επίτευξη πολύ στενής ζώνης αποκοπής απαιτεί συνήθως υψηλή τάξη. Τα IIR φίλτρα αποκοπής αντιμετωπίζουν αυτό το μειονέκτημα εισάγοντας όχι μόνο μηδενισμούς αλλά και πόλους κοντά στον μοναδιαίο κύκλο, στην ίδια γωνιακή θέση. Ξεκινώντας από τον FIR αριθμητή που μηδενίζει την ανεπιθύμητη συχνότητα,

$$1 - 2 \cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2},$$

το IIR φίλτρο αποκοπής εισάγει πόλους ακτίνας r και γωνίας $\pm \Omega_0$, παράγοντας τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H_{\text{IIR}}(z) = \frac{1 - 2 \cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos(\Omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad 0 < r < 1.$$

Οι μηδενισμοί του αριθμητή αναγκάζουν το κέρδος να μηδενίζεται στη συχνότητα αποκοπής, ενώ οι πόλοι του παρονομαστή οξύνουν την απόκριση δημιουργώντας μια ισχυρή τοπική

«αντήχηση» ακριβώς έξω από τη ζώνη αποκοπής. Όσο πιο κοντά βρίσκονται οι πόλοι στον μοναδιαίο κύκλο (δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το r), τόσο πιο στενή και βαθιά γίνεται η ζώνη αποκοπής. Μια χρήσιμη προσέγγιση για το εύρος ζώνης στα -3 dB είναι

$$\Delta f \approx \frac{(1-r)f_s}{\pi},$$

που δείχνει άμεσα πώς το r ελέγχει την επιλεκτικότητα.

Εφόσον οι πόλοι βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, το φίλτρο παραμένει σταθερό για κάθε $0 < r < 1$. Ωστόσο, καθώς $r \rightarrow 1$, η χροστική απόκριση επιμηκύνεται, παράγοντας πιο αργές μεταβατικές αποκρίσεις και αυξημένη ευαισθησία σε αριθμητικά σφάλματα. Τα IIR φίλτρα αποκοπής είναι επομένως κατάλληλα για πραγματικού χρόνου καταστολή στενών ζωνών διαταραχής (π.χ. βόμβος δικτύου, μηχανικές δονήσεις ή ιδιοσυχνότητες αισθητήρων), όταν απαιτείται έντονη αποκοπή και χαμηλό υπολογιστικό κόστος, παρόλο που η φασική απόκριση είναι μη γραμμική και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε εφαρμογές που απαιτούν πιστότητα κυματομορφής.

Python Implementation.

```

1 # === Parameters ===
2 fs = 1000.0           # Sampling frequency [Hz]
3 f0 = 60.0             # Notch frequency [Hz]
4 Omega0 = 2 * np.pi * f0 / fs
5 r = 0.98              # Pole radius for IIR (controls notch sharpness)
6
7 # === IIR notch filter ===
8 #Zeros exactly on the unit circle at ±Omega0, plus poles slightly
   inside the unit circle
9 b_iir = np.array([1, -2 * np.cos(Omega0), 1], dtype=float)
10 a_iir = np.array([1, -2 * r * np.cos(Omega0), r**2], dtype=float)

```

Listing 9: FIR Notch Filter Implementation

4.13 Πρακτική Υλοποίηση IIR Φίλτρων

Direct Form I, αιτιοκρατική, συνεχούς ροής υλοποίηση (streaming). Ένα γενικό αιτιοκρατικό IIR φίλτρο τάξης (P, Q) περιγράφεται από:

$$y[n] = \sum_{k=0}^Q b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^P a_k y[n-k], \quad a_0 = 1.$$

Στην πράξη, η υλοποίηση γίνεται αναδρομικά μέσω buffer εισόδων/εξόδων. Μία εύκολη υλοποίηση είναι η **Direct Form I** με κυκλικούς buffers για τα προηγούμενα δείγματα εισόδου και εξόδου.

Pseudocode (Direct Form I, streaming).

Input : $x[n]$ stream; coeffs $b[0..Q]$, $a[1..P]$ with $a_0=1$
Init : Circular buffers: $X[0..Q] \leftarrow 0$, $Y[0..P] \leftarrow 0$; indices $ix \leftarrow 0$, $iy \leftarrow 0$

```
1 foreach new sample  $x$  do
2    $X[ix] \leftarrow x$ 
3    $acc \leftarrow 0$ 
4   // Feedforward (inputs)
5    $jx \leftarrow ix$ 
6   for  $k = 0$  to  $Q$  do
7      $acc \leftarrow acc + b[k] \cdot X[jx]$ 
8      $jx \leftarrow (jx - 1) \bmod (Q+1)$ 
9   // Feedback (previous outputs)
10   $jy \leftarrow iy$ 
11  for  $k = 1$  to  $P$  do
12     $acc \leftarrow acc - a[k] \cdot Y[jy]$ 
13     $jy \leftarrow (jy - 1) \bmod (P+1)$ 
14   $y \leftarrow acc$ 
15   $iy \leftarrow (iy + 1) \bmod (P+1)$ 
16   $Y[iy] \leftarrow y$ 
17   $ix \leftarrow (ix + 1) \bmod (Q+1)$ 
18  yield( $y$ )
```

4.14 Παράδειγμα: Εκθετικό Χαμηλοπερατό Φίλτρο (Exponential Low-Pass) σε 1D

Εξίσωση διαφορών. Ο εκθετικός κινητός μέσος (Exponential Moving Average - EMA) είναι ένα πρώτης τάξης IIR χαμηλοπερατό φίλτρο:

$$y[n] = \alpha x[n] + (1 - \alpha) y[n - 1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Κρουστική απόκριση. Η αντίστοιχη κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = \alpha(1 - \alpha)^n u[n],$$

η οποία έχει άπειρη (αλλά εκθετικά φθίνουσα) διάρκεια.

Συνάρτηση μεταφοράς. Ο z -μετασχηματισμός δίνει:

$$H(z) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}},$$

με έναν μόνο πόλο στο $z = 1 - \alpha$. Αφού $|1 - \alpha| < 1$ για $0 < \alpha < 1$, το φίλτρο είναι σταθερό.

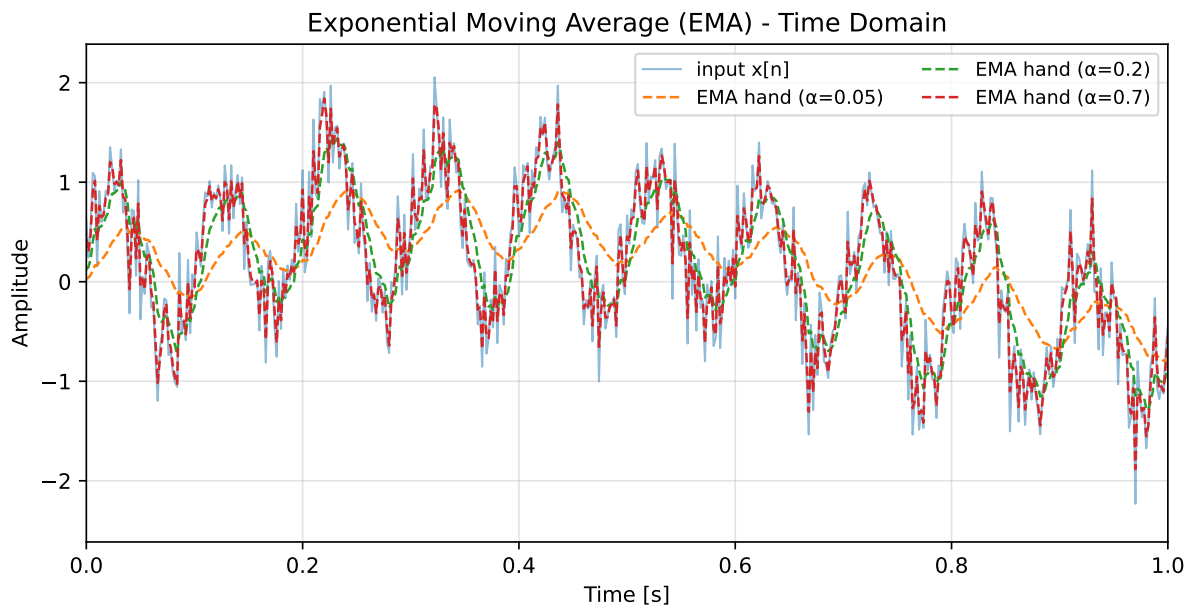
Ερμηνεία.

- Μικρό $\alpha \Rightarrow$ έντονη εξομάλυνση (αργή απόκριση, ισχυρή εξομάλυνση).
- Μεγάλο $\alpha \Rightarrow$ η έξοδος ακολουθεί πιο κοντά το σήμα εισόδου (ασθενής εξομάλυνση).

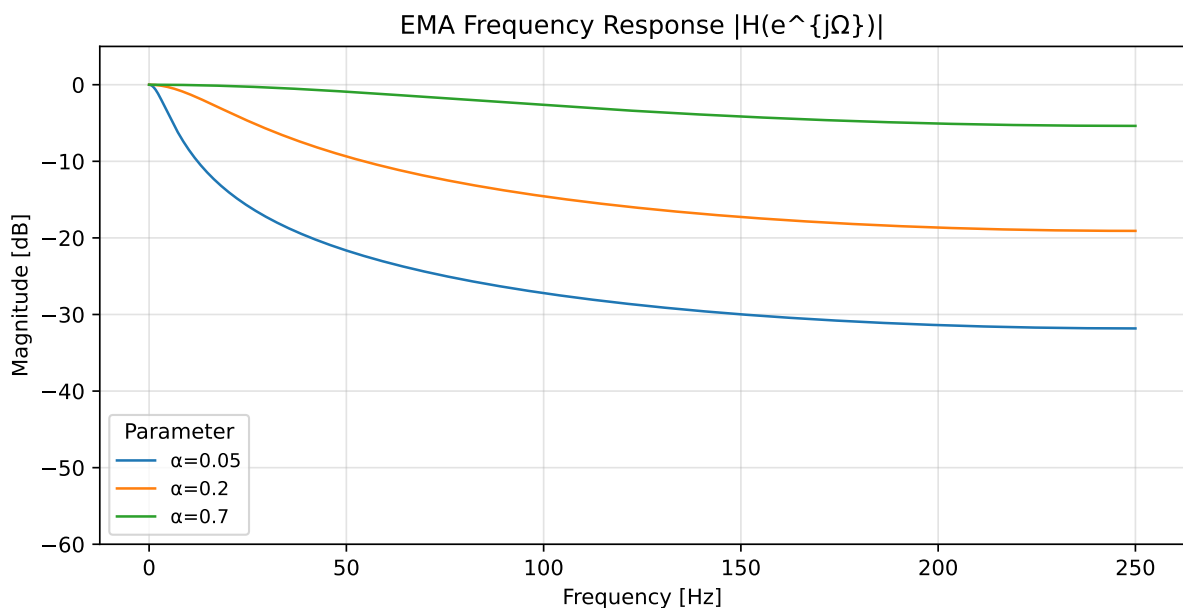
Σχέση α με συχνότητας αποκοπής. Για συχνότητα δειγματοληψίας f_s και (κατά προσέγγιση) συχνότητα αποκοπής f_c στα -3 dB:

$$\alpha \approx 1 - e^{-2\pi f_c / f_s} \iff f_c \approx -\frac{f_s}{2\pi} \ln(1 - \alpha).$$

Σημειώσεις. Το EMA είναι εξαιρετικά αποδοτικό (ένα γινόμενο + μία πρόσθεση ανά δείγμα), αιτιοκρατικό (causal), σταθερό και εύκολο να υλοποιηθεί, αλλά έχει μη γραμμική φασική απόκριση.



Σχήμα 4.10: Παράδειγμα φιλτραρίσματος EMA στον χρόνο για διαφορετικές τιμές του α .



Σχήμα 4.11: Καμπύλες μέτρου συχνότητας του EMA για διάφορες τιμές του α .

Hand-coded implementation.

```
1 y = np.zeros_like(x)
2 y_prev = 0.0 # zero-state init; use x[0] for steady start if preferred
3 a = 1.0 - alpha
4 for n, xn in enumerate(x):
5     y_curr = alpha*xn + a*y_prev
6     y[n] = y_curr
7     y_prev = y_curr
8 # y is the output signal
```

Listing 10: EMA Filter implementation

Using `scipy.signal.lfilter`.

```
1 b = np.array([alpha], dtype=float) # numerator
2 a = np.array([1.0, -(1.0 - alpha)], float) # denominator: 1 - (1-a)
   z^-1
3 # lfilter uses zero initial conditions by default (matches hand-coded
   above)
4 y = scipy.signal.lfilter(b, a, x)
```

Listing 11: EMA Filter using `scipy`

4.15 Υλοποίηση IIR Φίλτρων με Biquads

Biquads. Τα IIR φίλτρα υψηλής τάξης υλοποιούνται συνήθως με διαδοχικά φίλτρα δεύτερης τάξης για αριθμητική ευρωστία. Ένα μόνο biquad έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H_i(z) = \frac{b_{0,i} + b_{1,i}z^{-1} + b_{2,i}z^{-2}}{1 + a_{1,i}z^{-1} + a_{2,i}z^{-2}}.$$

Μια πρακτική υλοποίηση είναι:

$$\begin{cases} y_i[n] = b_{0,i} v_{i-1}[n] + s_{1,i}[n-1] \\ s_{1,i}[n] = b_{1,i} v_{i-1}[n] - a_{1,i} y_i[n] + s_{2,i}[n-1] \\ s_{2,i}[n] = b_{2,i} v_{i-1}[n] - a_{2,i} y_i[n] \end{cases}$$

όπου:

- $v_{i-1}[n]$ είναι η είσοδος της βαθμίδας i (με $v_0[n] = x[n]$),
- $y_i[n]$ είναι η έξοδος της βαθμίδας i ,
- $s_{1,i}[n]$, $s_{2,i}[n]$ είναι οι δύο εσωτερικές καταστάσεις.

Διαδοχικά L biquads. Το συνολικό IIR φίλτρο προκύπτει ως:

$$H(z) = \prod_{i=1}^L H_i(z),$$

και υλοποιείται ως διαδοχικά L δευτεροτάξιων βαθμίδων, με συνολικά $2L$ καταστάσεις.

Streaming pseudocode (cascade of biquads).

```
Input   :  $x[n]$  stream;
L sections with  $(b_0, b_1, b_2, a_1, a_2)_i$ 
Init    :  $s_{1,i} \leftarrow 0, s_{2,i} \leftarrow 0$  for all  $i = 1..L$ 

1 foreach  $x[n]$  do
2    $v \leftarrow x[n]$                                      // cascade input
3   for  $i = 1$  to  $L$  do
4      $(b_0, b_1, b_2, a_1, a_2) \leftarrow (b_0, b_1, b_2, a_1, a_2)_i$ 
5      $y \leftarrow b_0 v + s_{1,i}$ 
6      $s_{1,i} \leftarrow b_1 v - a_1 y + s_{2,i}$ 
7      $s_{2,i} \leftarrow b_2 v - a_2 y$ 
8      $v \leftarrow y$                                      // output of section  $i$  feeds section  $i+1$ 
9   yield( $v$ )                                           // final output  $y[n]$ 
```

4.16 Διαχωρίσιμο IIR Φιλτράρισμα σε Εικόνες

1Δ IIR εκθετικό φίλτρο ανά γραμμή. Χρησιμοποιούμε το μονοδιάστατο εκθετικό φίλτρο EMA:

$$y[n] = \alpha x[n] + (1 - \alpha) y[n - 1], \quad 0 < \alpha < 1 \Rightarrow H(z) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}}.$$

Διαχωρίσιμη 2Δ κατασκευή. Για μια εικόνα $X \in \mathbb{R}^{H \times W}$, εφαρμόζουμε το ίδιο 1D IIR κατά μήκος των γραμμών και στη συνέχεια κατά μήκος των στηλών:

$$Y_{\text{row}}(i, :) = \text{IIR}(X(i, :)), \quad Z(:, j) = \text{IIR}(Y_{\text{row}}(:, j)).$$

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα γρήγορο, περίπου ισότροπο χαμηλοπερατό φίλτρο χωρίς πραγματική 2Δ αναδρομή.

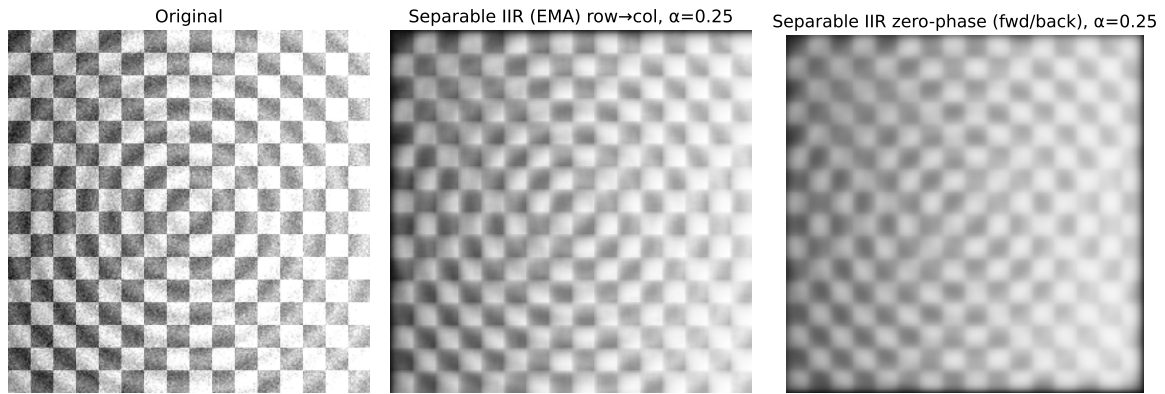
Μηδενική φάση. Για να εξαλειφθεί η κατευθυντική μεροληψία και η παραμόρφωση φάσης, μπορούμε να εφαρμόσουμε forward-backward φιλτράρισμα σε κάθε άξονα (ανά γραμμή και ανά στήλη). Αν η αντιστροφή χρόνου συμβολίζεται με $(\cdot)^\leftarrow$,

$$\tilde{y} = \text{IIR}(\text{IIR}(x)^\leftarrow)^\rightarrow.$$

Αυτό διπλασιάζει την αποτελεσματική τάξη του φίλτρου αλλά ακυρώνει πλήρως τη φάση, ανάλογα με τη `filtfilt` στη 1D περίπτωση.

Σημειώσεις.

- Υπολογιστική πολυπλοκότητα $O(HW)$: δεν απαιτούνται μεγάλοι 2Δ πυρήνες.
- Μεγαλύτερη $\alpha \Rightarrow$ ασθενέστερη εξομάλυνση. Μικρότερη $\alpha \Rightarrow$ ισχυρότερη εξομάλυνση.
- Η forward-backward λειτουργία διπλασιάζει την τάξη αλλά παρέχει σχεδόν μηδενική φάση.



Σχήμα 4.12: Αριστερά: αρχική εικόνα. Μέση: αιτιατό row-column EMA. Δεξιά: μηδενικής φάσης forward-backward διαχωρίσιμο EMA.

4.16.1 Python Implementation for 2D EMA

```

1  # ----- Separable 1D IIR (Exponential) along rows and columns -----
2  def ema_separable(img, alpha, zero_phase=False):
3      """
4      Apply 1D exponential IIR along rows, then columns.
5      If zero_phase is True, do forward-backward along each axis.
6      """
7      b = np.array([alpha], float)
8      a = np.array([1.0, -(1.0 - alpha)], float)
9
10     # Row pass
11     Y = np.empty_like(img)
12     if not zero_phase:
13         for i in range(img.shape[0]):
14             Y[i, :] = scipy.signal.lfilter(b, a, img[i, :])
15     else:
16         for i in range(img.shape[0]):
17             fwd = scipy.signal.lfilter(b, a, img[i, :])
18             rev = scipy.signal.lfilter(b, a, fwd[::-1])[::-1]
19             Y[i, :] = rev
20
21     # Column pass
22     Z = np.empty_like(Y)
23     if not zero_phase:
24         for j in range(Y.shape[1]):
25             Z[:, j] = scipy.signal.lfilter(b, a, Y[:, j])
26     else:
27         for j in range(Y.shape[1]):
28             fwd = scipy.signal.lfilter(b, a, Y[:, j])
29             rev = scipy.signal.lfilter(b, a, fwd[::-1])[::-1]
30             Z[:, j] = rev
31     return Z

```

Listing 12: Separable 2D EMA IIR Filter

4.17 Περίληψη

Τα IIR φίλτρα προσφέρουν **υψηλή επιλεκτικότητα με χαμηλή τάξη** και αποτελούν την καταλληλότερη επιλογή για εφαρμογές πραγματικού χρόνου με περιορισμένους πόρους.

Η μη γραμμική φάση και η αριθμητική ευαισθησία τους απαιτούν προσεκτικό σχεδιασμό: αναλογικά πρωτότυπα-φίλτρα → μετασχηματισμός bilinear, υλοποίηση μέσω Biquads, και (όταν χρειάζεται) φιλτράρισμα μηδενικής φάσης τύπου **forward-backward**.

Glossary (English – Greek)

• General Concepts

- noise — θόρυβος
- random process — τυχαία διαδικασία
- randomness — τυχαιότητα
- uncertainty — αβεβαιότητα
- mean / expectation — μέση τιμή / αναμενόμενη τιμή
- variance — διακύμανση
- autocorrelation — αυτοσυσχέτιση

• Noise Types

- white noise — λευκός θόρυβος
- Gaussian white noise — Γκαουσιανός λευκός θόρυβος
- colored noise — χρωματισμένος θόρυβος
- pink noise (1/f noise) — ροζ θόρυβος (θόρυβος 1/f)
- brown/red noise — καφέ / κόκκινος θόρυβος
- shaping filter — φίλτρο διαμόρφωσης
- shaping of white noise — διαμόρφωση λευκού θορύβου

• Digital Linear Filters

- linear filter — γραμμικό φίλτρο
- linear time-invariant (LTI) — γραμμικό χρονικά αμετάβλητο
- impulse response — χροστική απόκριση
- convolution — συνέλιξη
- FIR filter — φίλτρο πεπερασμένης χροστικής απόκρισης (FIR)
- IIR filter — φίλτρο άπειρης χροστικής απόκρισης (IIR)
- filter taps — συντελεστές φίλτρου
- feedforward coefficients — συντελεστές τροφοδότησης προς τα εμπρός
- feedback coefficients — συντελεστές ανατροφοδότησης
- recursive / nonrecursive filter — αναδρομικό / μη αναδρομικό φίλτρο
- stability (BIBO) — ευστάθεια (BIBO ευστάθεια)
- causality — αιτιότητα
- linear phase — γραμμική φάση

- nonlinear phase — μη γραμμική φάση
- group delay — καθυστέρηση
- zero-phase filtering — φιλτράρισμα μηδενικής φάσης
- forward-backward filtering — forward-backward φιλτράρισμα

• Filter Frequency Concepts

- frequency response — απόκριση συχνότητας
- magnitude response — μέτρο απόκρισης
- transition band — περιοχή μετάβασης
- passband / stopband — ζώνη διέλευσης / ζώνη αποκοπής
- cutoff frequency — συχνότητα αποκοπής
- low-pass / high-pass — χαμηλοπερατό / υψηλοπερατό
- band-pass / band-stop — ζωνοπερατό / ζωνοαπορριπτικό
- notch — εγκοπή

• Filter Design

- analog prototype — αναλογικό πρωτότυπο
- bilinear transform — bilinear μετασχηματισμός
- prewarping — προ-παραμόρφωση
- window method — μέθοδος παραθύρωσης
- Hamming / Hann / Blackman window — παράθυρο Hamming / Hann / Blackman
- difference equation — εξίσωση διαφορών
- direct form I / II — άμεση μορφή I / II
- second-order section (SOS) — βαθμίδα δεύτερης τάξης

• Image Filtering (2D)

- separable filter — διαχωρίσιμο φίλτρο
- Gaussian blur — Γκαουσιανό θόλωμα
- Sobel operator — τελεστής Sobel