

Διαλέξεις 7 & 8: Τυχαίες Διαδικασίες και Εκτίμηση Φάσματος Σημειώσεις

Κωνσταντίνος Χατζηλυγερούδης
costashatz@upatras.gr

Δήμητρα Κουμούτσου
dkoumoutsou@upatras.gr

10 Νοεμβρίου, 2025

Contents

1	Τυχαίες Διαδικασίες	4
1.1	Ορισμός και Διαισθητική Κατανόηση	4
1.2	Στασιμότητα Τυχαίων Διαδικασιών	7
1.2.1	Ορισμός και Διαισθητική Κατανόηση	7
1.2.2	Στασιμότητα με την Ευρεία Έννοια (Wide-Sense Stationarity, WSS)	8
1.2.3	Πρακτικές Επιπτώσεις	8
1.2.4	Παραδείγματα και Αντιπαραδείγματα	9
1.2.5	Διαισθητική Σύνοψη	10
1.3	Εργοδικότητα Τυχαίων Διαδικασιών	10
1.3.1	Ορισμός και Κίνητρο	10
1.3.2	Χρονικές Μέσες Τιμές και Μέσες Τιμές Συνόλου (Ensemble Averages)	10
1.3.3	Είδη Εργοδικότητας	11
1.3.4	Σχέση Στασιμότητας και Εργοδικότητας	11
1.3.5	Πρακτικές Επιπτώσεις	11
1.3.6	Παραδείγματα	11
1.3.7	Σύνοψη	12
1.4	Συσχέτιση WSS Στοχαστικών Σημάτων	12
1.4.1	Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση	12
1.4.2	Συσχέτιση Διανυσματικών WSS Στοχαστικών Σημάτων	13
1.4.3	Παραδείγματα	14
2	Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD)	17
2.1	Ορισμός και Ερμηνεία	17
2.2	Διακριτός Χρόνος	17
2.3	Βασικές Ιδιότητες της PSD	18
2.4	Παραδείγματα	18

2.5	Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) Διανυσματικών Τυχαίων Σημάτων	20
2.5.1	Ορισμός	20
2.5.2	Στοιχεία και Ερμηνεία	20
2.5.3	Ιδιότητες της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος σε Πίνακα	20
2.5.4	Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος	21
2.6	Παραδείγματα	21
2.6.1	Γραμμικό Μοντέλο	21
2.6.2	Συσχετισμένος θόρυβος σε δύο κανάλια	22
2.6.3	Σχόλια	23
3	Εκτίμηση της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος μέσω FFT	23
3.1	Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδογράμμα	23
3.2	Αναλυτική Απόδειξη/Υπολογισμός του Περιοδογράμματος μέσω FFT	24
3.3	Ερμηνεία και Ιδιότητες	25
3.4	Μονόπλευρη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος για Πραγματικά Σήματα	26
3.5	Παράδειγμα: Εκτίμηση PSD μέσω FFT	27
3.5.1	Python Implementation	29
3.6	Σύνοψη	31
4	Μέθοδος Welch για Εκτίμηση Φάσματος	31
4.1	Κίνητρο και Βασική Ιδέα	31
4.2	Μαθηματική Διατύπωση	31
4.3	Κανονικοποίηση και Ενέργεια Παραθύρου	32
4.4	Παράδειγμα	33
4.5	Δίλημμα μεροληψίας-διακύμανσης (Bias-Variance Tradeoff)	36
4.6	Welch PSD για Πολυκαναλικά Σήματα με Παραθύρωση ανά κανάλι	37
5	Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (LTI) Συστήματα με WSS Είσοδο	39
5.1	Πλαίσιο και Βασικές Ιδιότητες	39
5.2	Σταθερότητα LTI Συστημάτων	39
5.3	Χαρακτηριστικά Δεύτερης Τάξης στο Πεδίο του Χρόνου	41
5.4	Σχέσεις στο Πεδίο της Συχνότητας	42
5.5	Λυμένο παράδειγμα: Συστοιχία Φίλτρων 2×2 (Filter Bank) με Είσοδο Vector AR(1)	42
5.6	Έλεγχοι Συνέπειας και Πρακτικές Παρατηρήσεις	43
6	Παραμετρική Εκτίμηση Φάσματος: Μοντέλα AR	45
6.1	Κίνητρο	45
6.2	Αυτοπαλίνδρομα (AR) Μοντέλα	45
6.3	Παράδειγμα: Αυτοαναδρομικό Μοντέλο AR(2)	46
6.4	Σύγκριση με τη Μέθοδο Welch	46
6.5	Διανυσματικά Αυτοπαλίνδρομα Μοντέλα (VAR)	47
6.6	Στασιμότητα και Σταθερότητα	47
6.7	Εξισώσεις Yule-Walker	48
6.8	Παράδειγμα: αυτοπαλίνδρομο μοντέλο AR(2) από 5 δείγματα	50
6.9	Διανυσματικές (Πολυκαναλικές) Εξισώσεις Yule-Walker	52
6.10	Εκτίμηση Παραμέτρων AR με Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Squares)	55
6.11	Σύνοψη	58

7	Άλλα Χρήσιμα Παραμετρικά Μοντέλα: MA και ARMA	59
7.1	Μοντέλα Κινούμενου Μέσου (MA)	59
7.2	Autoregressive Moving Average (ARMA) Models	59
8	Glossary (English – Greek)	61

1 Τυχαίες Διαδικασίες

1.1 Ορισμός και Διαισθητική Κατανόηση

Στην επεξεργασία σήματος και τις τηλεπικοινωνίες συναντούμε συχνά σήματα των οποίων οι ακριβείς τιμές δεν μπορούν να προβλεφθούν ντετερμινιστικά, αλλά των οποίων η συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί στατιστικά. Τέτοια σήματα ονομάζονται **τυχαίες διαδικασίες** (ή **στοχαστικές διαδικασίες**).

Τυπικά, μια τυχαία διαδικασία ορίζεται ως μία συλλογή (ή οικογένεια) τυχαίων μεταβλητών που δεικτοδοτούνται από μία συνεχή ή διακριτή παράμετρο, η οποία συνήθως παριστά τον χρόνο:

$$\{x(t), t \in \mathbb{R}\} \quad \text{ή} \quad \{x[k], k \in \mathbb{Z}\}.$$

Για κάθε σταθερό χρόνο t , το $x(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Για κάθε σταθερή έκβαση ω του υποκείμενου πειράματος (της τυχαίας μεταβλητής $x(t)$), η απεικόνιση $t \mapsto x(t, \omega)$ είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου, που ονομάζεται **στιγμιότυπο** ή **συνάρτηση δείγμα**.

Έτσι, μια τυχαία διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί είτε ως μια **χρονικά εξαρτημένη τυχαία μεταβλητή** είτε ως μια **κατανομή πιθανότητας πάνω σε σήματα**. Αυτή η δυϊκότητα είναι θεμελιώδης:

- Κοιτάζοντας **κατά μήκος του χρόνου** (ακολουθώντας ένα συγκεκριμένο στιγμιότυπο) λαμβάνουμε ένα ντετερμινιστικό σήμα που εξελίσσεται στον χρόνο.
- Κοιτάζοντας **κατά “μήκος” των πιθανών συναρτήσεων** (κρατώντας σταθερή την χρονική στιγμή t) λαμβάνουμε μια τυχαία μεταβλητή με κάποια κατανομή.

Στιγμιότυπα και Σύνολο Συναρτήσεων (Ensemble). Το πλήρες σύνολο όλων των δυνατών συναρτήσεων/σημάτων της διαδικασίας ονομάζεται **ensemble**. Κάθε πραγμάτωση/στιγμιότυπο αντιστοιχεί σε μία δυνατή έκβαση του πειράματος που παράγει το σήμα. Στην πράξη, συχνά διαθέτουμε περιορισμένο αριθμό δειγμάτων ή, σε πολλές εφαρμογές, μόνο μία (π.χ. μία ηχογράφηση ομιλίας, μία μετρούμενη ακολουθία αισθητήρα). Παρ’ όλα αυτά, υποθέτοντας ιδιότητες όπως στασιμότητα ή εργοδικότητα (αναλύονται αργότερα), μπορούμε να συναγάγουμε στατιστικά του ensemble από μία μόνο παρατήρηση.

Πιθανοτική Περιγραφή. Η στατιστική συμπεριφορά μιας τυχαίας διαδικασίας χαρακτηρίζεται πλήρως από τις **πεπερασμένης διάρκειας κατανομές της**. Για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο χρονικών στιγμών $t_1, t_2, \dots, t_n$, εξετάζουμε το τυχαίο διάνυσμα

$$\mathbf{x}_n = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]^T.$$

Η κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) του διανύσματος είναι

$$F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{P}[x(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2, \dots, x(t_n) \leq x_n].$$

Αν αυτή η κατανομή διαθέτει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF - Probability Density Function), τότε ορίζουμε

$$p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Ισοδύναμα, σε διαφορική μορφή,

$$\mathbb{P}[x(t_1) \in dx_1, x(t_2) \in dx_2, \dots, x(t_n) \in dx_n] = p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Στην πράξη, στις περισσότερες εφαρμογές μηχανικής, είναι αδύνατον να καθορίσουμε όλες αυτές τις πυκνότητες/συναρτήσεις κατανομής, οπότε επικεντρωνόμαστε σε πιο διαχειρίσιμα στατιστικά δεύτερης τάξης όπως η μέση τιμή, η διακύμανση και οι συναρτήσεις συσχέτισης.

Συνάρτηση Μέσης Τιμής και Αυτοσυσχέτισης. Για μια τυχαία διαδικασία $x(t)$, η συνάρτηση μέσης τιμής ορίζεται ως:

$$\mu_x(t) = \mathbb{E}[x(t)],$$

και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[x(t_1)x(t_2)].$$

Αυτές περιγράφουν αντίστοιχα την αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας σε κάθε χρονική στιγμή και τον βαθμό συσχέτισης των τιμών της σε δύο χρονικά σημεία. Αποτελούν βασικά εργαλεία για φασματική ανάλυση και πολλές μεθόδους εκτίμησης.

Ερμηνεία. Διαισθητικά, μια τυχαία διαδικασία περιγράφει ένα σήμα του οποίου η ακριβής τιμή δεν μπορεί να προβλεφθεί, αλλά του οποίου οι στατιστικές κανονικότητες μπορούν να αναλυθούν και να αξιοποιηθούν. Αυτό το πλαίσιο επιτρέπει τη μοντελοποίηση φαινομένων όπως:

- **Θερμικός θόρυβος** σε ηλεκτρονικά κυκλώματα.
- **Διακυμάνσεις ισχύος** σε ασύρματα κανάλια.
- **Ομιλία** και άλλα βιολογικά σήματα, τα οποία είναι στοχαστικά αλλά ακολουθούν στατιστικές δομές.
- **Χρηματοοικονομικές χρονοσειρές** όπως τιμές μετοχών και επιτόκια.

Παράδειγμα ενός στιγμιότυπου. Έστω ότι $x[k]$ παριστά την τάση στα άκρα ενός αντιστάτη, δειγματοληπτημένη στον χρόνο. Κάθε πείραμα — που αντιστοιχεί σε διαφορετική τυχαία κίνηση ηλεκτρονίων — παράγει ένα διακριτό σήμα $x_1[k], x_2[k], \dots$. Όλα αυτά τα σήματα μαζί αποτελούν την στοχαστική διαδικασία, δηλαδή το σύνολο (*ensemble*) των πιθανών σημάτων που μπορούν να παραχθούν. Στη φασματική ανάλυση, ο στόχος μας δεν είναι να προβλέψουμε με ακρίβεια κάθε δείγμα τάσης, αλλά να χαρακτηρίσουμε το φασματικό περιεχόμενο και τη δομή συσχέτισής του κατά μέσο όρο κατά μήκος των συναρτήσεων δείγματος.

Παράδειγμα: Αυτοπαλίνδρομη (AR) Διαδικασία

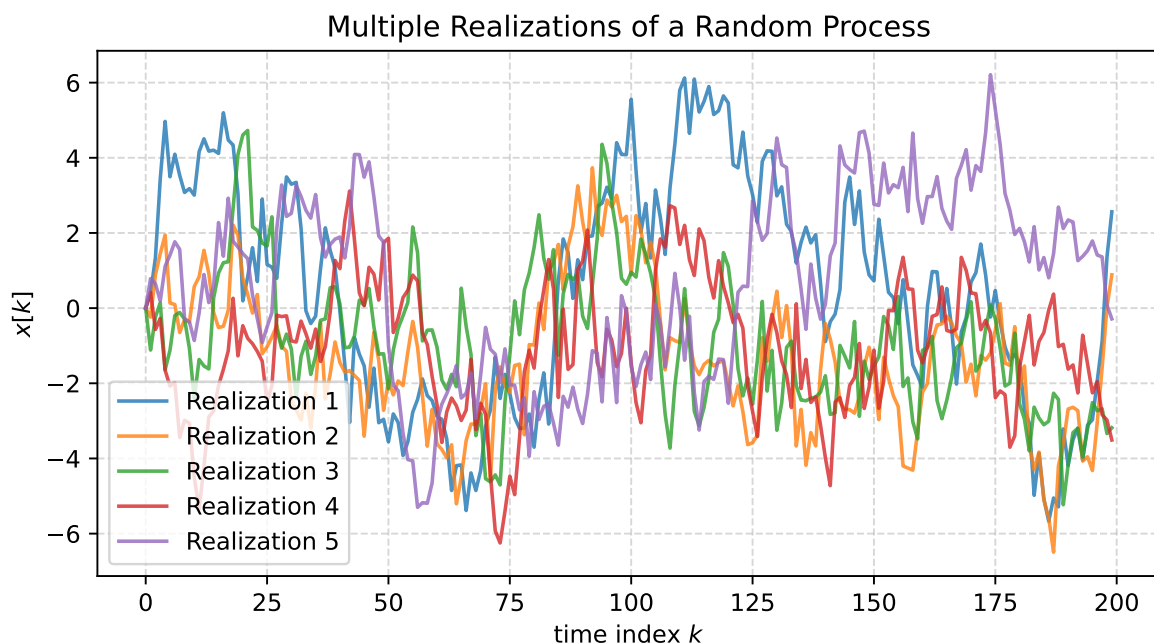
Ένα απλό αλλά θεμελιώδες παράδειγμα τυχαίας διαδικασίας είναι η **αυτοπαλίνδρομη (autoregressive, AR)** διαδικασία. Στο μοντέλο **AR(1)**, το τρέχον δείγμα εξαρτάται γραμμικά από το προηγούμενο δείγμα συν έναν τυχαίο όρο:

$$x[k] = \rho x[k-1] + w[k], \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Εδώ, ρ είναι ο συντελεστής αυτοπαλίνδρομης εξάρτησης (π.χ. $\rho = 0.9$), και το $w[k]$ είναι λευκός Γκαουσιανός θόρυβος με μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία διασπορά:

$$w[k] \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Αυτός ο αναδρομικός ορισμός σημαίνει ότι κάθε δείγμα είναι μία θορυβώδης εκδοχή του προηγούμενου, εισάγοντας χρονική συσχέτιση στην ακολουθία. Όταν $|\rho| < 1$, η διαδικασία είναι **στάσιμη** (stationary), δηλαδή οι στατιστικές της ιδιότητες (μέση τιμή, διακύμανση, δομή συσχέτισης) παραμένουν σταθερές στον χρόνο. Διαφορετικά στιγμιότυπα μιας τέτοιας διαδικασίας παράγουν διαφορετικές τροχιές, αλλά όλες μοιράζονται την ίδια υποκείμενη στατιστική συμπεριφορά.



Παράδειγμα: Bayesian Linear Regression ως Τυχαία Διαδικασία

Μία ακόμη σημαντική οπτική για τις τυχαίες διαδικασίες είναι ότι μπορούν να ιδωθούν ως **κατανομές πάνω σε συναρτήσεις**. Θεωρήστε το **Bayesian γραμμικό μοντέλο**:

$$f(t) = \phi(t)^\top \mathbf{w},$$

όπου $\phi(t) \in \mathbb{R}^M$ είναι ένα διάνυσμα χαρακτηριστικών (ή διάνυσμα βάσεων), και τα βάρη $\mathbf{w}$ είναι τυχαίες μεταβλητές με Γκαουσιανή εκ των προτέρων (prior) κατανομή:

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \alpha^{-1} \mathbf{I}).$$

Υπό αυτό το μοντέλο, οι τιμές της συνάρτησης $f(t)$ σχηματίζουν μία τυχαία διαδικασία με μέση τιμή και συνδιακύμανση:

$$\mathbb{E}[f(t)] = 0, \quad \text{cov}(f(t), f(t')) = \alpha^{-1} \phi(t)^\top \phi(t').$$

Επομένως, η συσχέτιση μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t και t' εξαρτάται από το πόσο «όμοια» είναι τα αντίστοιχα διανύσματα χαρακτηριστικών τους.

Έστω τώρα ότι διαθέτουμε ένα σύνολο δεδομένων $D = \{(t_i, f_i)\}_{i=1}^N$. Ορίζουμε τον πίνακα σχεδιασμού (design matrix) και το διάνυσμα εξόδου ως:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(t_1)^\top \\ \vdots \\ \phi(t_N)^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times M}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

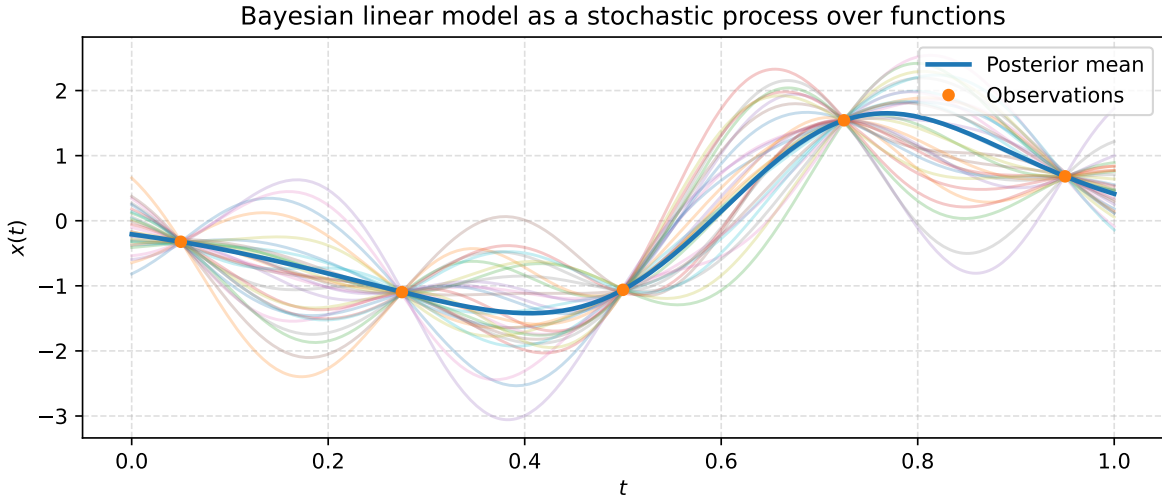
Με βάση τα δεδομένα, η posterior κατανομή των βαρών είναι:

$$\Sigma_{w|D} = \left(\alpha \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma^2} \Phi^\top \Phi \right)^{-1}, \quad \mu_{w|D} = \Sigma_{w|D} \frac{1}{\sigma^2} \Phi^\top \mathbf{f}.$$

Τέλος, ορίζουμε την **posterior τυχαία διαδικασία** ως:

$$x(t) = \phi(t)^\top \mathbf{w}_D, \quad \mathbf{w}_D \sim \mathcal{N}(\mu_{w|D}, \Sigma_{w|D}).$$

Αυτή η παράσταση ορίζει μία κατανομή πάνω σε συναρτήσεις που είναι συμβατές με τα παρατηρημένα δεδομένα και αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο μεθόδων όπως **Gaussian Process Regression**.



1.2 Στασιμότητα Τυχαίων Διαδικασιών

1.2.1 Ορισμός και Διαισθητική Κατανόηση

Μια τυχαία διαδικασία λέγεται **στατική (stationary)** όταν οι στατιστικές της ιδιότητες δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Διαισθητικά, μια στατική διαδικασία «φαίνεται ίδια» ανεξάρτητα από τη χρονική στιγμή παρατήρησης: με άλλα λόγια, η χρονική μετατόπιση δεν αλλάζει τη στοχαστική της συμπεριφορά.

Τυπικά, για μια διαδικασία $x(t)$, εξετάζουμε την κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) των τιμών της σε n χρονικές στιγμές:

$$p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Η διαδικασία λέγεται **στατική με την αυστηρή έννοια (strict-sense stationary, SSS)** εάν, για οποιοδήποτε n και οποιαδήποτε χρονική μετατόπιση τ , η pdf παραμένει αμετάβλητη:

$$p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Αυτό σημαίνει ότι η κοινή στοχαστική δομή της διαδικασίας δεν εξαρτάται από την απόλυτη χρονική θέση — μόνο οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ των χρονικών στιγμών έχουν σημασία.

Στην πράξη, όμως, ο έλεγχος SSS απαιτεί επαλήθευση της αμεταβλητότητας όλων των πεπερασμένων κατανομών, κάτι που είναι συνήθως μη ρεαλιστικό. Γι' αυτό στην ανάλυση σημάτων χρησιμοποιείται συχνότερα μια ασθενέστερη αλλά πιο εφαρμόσιμη μορφή στασιμότητας.

1.2.2 Στασιμότητα με την Ευρεία Έννοια (Wide-Sense Stationarity, WSS)

Μια τυχαία διαδικασία $x(t)$ λέγεται **στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS)** όταν οι ροπές (moments) πρώτης και δεύτερης τάξης της παραμένουν αμετάβλητες ως προς χρονικές μετατοπίσεις. Δηλαδή:

$$\mathbb{E}[x(t)] = \mu_x \quad (\text{σταθερά}),$$

και

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[x(t_1)x(t_2)] = R_{xx}(t_1 - t_2) = R_{xx}(\tau),$$

όπου $\tau = t_1 - t_2$ είναι η *χρονική υστέρηση (lag)*. Με άλλα λόγια, η μέση τιμή είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από τη διαφορά χρόνου, όχι από τις απόλυτες χρονικές στιγμές.

Από αυτά τα δύο κριτήρια προκύπτει ότι και η συνάρτηση συνδιακύμανσης:

$$C_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2) - \mu_x^2$$

εξαρτάται αποκλειστικά από την υστέρηση τ . Συνεπώς, μια WSS διαδικασία παρουσιάζει την ίδια «στατιστική συμπεριφορά δεύτερης τάξης» ανεξάρτητα από το πότε παρατηρείται.

1.2.3 Πρακτικές Επιπτώσεις

Για τις περισσότερες εφαρμογές στην επεξεργασία σήματος, η υπόθεση WSS είναι αρκετή και απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση:

- Η μέση τιμή $\mu_x = \mathbb{E}[x(t)]$ είναι σταθερή στον χρόνο.
- Η διακύμανση $\text{Var}(x(t)) = R_{xx}(0) - |\mu_x|^2$ δεν εξαρτάται από το t .
- Η αυτοσυσχέτιση $R_{xx}(\tau)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική υστέρηση τ .

Αυτές οι ιδιότητες αποτελούν τη βάση της φασματικής ανάλυσης, καθώς η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (Power Spectral Density, PSD) ορίζεται ως ο Μετασχηματισμός Fourier του $R_{xx}(\tau)$, το οποίο ισχύει μόνο για WSS διαδικασίες.

1.2.4 Παραδείγματα και Αντιπαραδείγματα

Παράδειγμα 1: Λευκός Θόρυβος. Έστω ότι $w[k]$ είναι μια διακριτή, μηδενικής μέσης τιμής, λευκή διαδικασία θορύβου, όπου τα δείγματα είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα (i.i.d.) με διακύμανση σ_w^2 . Τότε:

$$\mathbb{E}[w[k]] = 0, \quad R_{ww}[m_1, m_2] = \mathbb{E}[w[m_1]w[m_2]] = \begin{cases} \sigma_w^2, & m_1 = m_2, \\ 0, & m_1 \neq m_2. \end{cases}$$

Επειδή $R_{ww}[m_1, m_2] = \sigma_w^2 \delta[m_1 - m_2]$ εξαρτάται μόνο από την υστέρηση $m = m_1 - m_2$, η διαδικασία είναι **στασιμη με την ευρεία έννοια (WSS)**. Επιπλέον, επειδή η κοινή πυκνότητα πιθανότητας παραγοντοποιείται σε γινόμενο πανομοιότυπων μονοδιάστατων pdf, η διαδικασία είναι τελικά **στασιμή με την αυστηρή έννοια (SSS)**.

Ερμηνεία: Ο λευκός θόρυβος έχει σταθερή ισχύ και μηδενική χρονική συσχέτιση. Οι στατιστικές του ιδιότητες είναι ίδιες για κάθε χρονική στιγμή και για κάθε στιγμιότυπο (realization).

Παράδειγμα 2: Ημιτονοειδές με Τυχαία Φάση. Θεωρήστε τη διαδικασία:

$$x[k] = A \cos(\omega_0 k + \Phi),$$

όπου η φάση Φ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$ και ανεξάρτητη από το k . Τότε:

$$\mathbb{E}[x[k]] = \mathbb{E}_\Phi[\cos(\omega_0 k + \Phi)] = 0,$$

και

$$R_{xx}[m_1, m_2] = \mathbb{E}[x[m_1]x[m_2]] = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0(m_1 - m_2)) = R_{xx}(m_1 - m_2).$$

Άρα, το $x[k]$ είναι **στάσιμο με την ευρεία έννοια (WSS)**, καθώς τόσο η μέση τιμή όσο και η αυτοσυσχέτιση εξαρτώνται μόνο από την υστέρηση. Γενικά, δεν είναι στάσιμο εκτός αν η φάση Φ είναι τυχαία: αν η φάση ήταν σταθερή, η διαδικασία θα ήταν ντετερμινιστική και χρονικά εξαρτώμενη.

Ερμηνεία: Ένα ημιτονοειδές με τυχαία φάση έχει σταθερή συχνότητα, αλλά η αβεβαιότητα φάσης κάνει τα στατιστικά του χαρακτηριστικά ίδια για οποιαδήποτε χρονική μετατόπιση.

Παράδειγμα 3: Ημιτονοειδές με Αργά Μεταβαλλόμενη Συχνότητα. Τώρα θεωρήστε

$$x[k] = A \cos(\omega[k] k + \Phi),$$

όπου η $\omega[k]$ είναι μια αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση του χρόνου (π.χ. $\omega[k] = \omega_0 + \alpha k$). Ακόμη κι αν η φάση Φ είναι τυχαία, η διαδικασία είναι **μη στάσιμη**, επειδή η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται ρητά από τους δύο χρονικούς δείκτες:

$$R_{xx}[m_1, m_2] = \frac{A^2}{2} \cos(\omega[m_1] m_1 - \omega[m_2] m_2),$$

η οποία δεν μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση μόνο της υστέρησης $m_1 - m_2$.

Ερμηνεία: Καθώς η στιγμιαία συχνότητα αλλάζει, η διαδικασία “εξελισσεται”: το φάσμα και η δομή συσχέτισής της μεταβάλλονται με τον χρόνο. Τέτοιες διαδικασίες απαιτούν χρονοσυχνοτικές αναπαραστάσεις (π.χ. φασματογράμματα, wavelets) αντί μεθόδων ανάλυσης φάσματος που βασίζονται σε στασιμότητα.

1.2.5 Διαισθητική Σύνοψη

Η στασιμότητα αποτελεί τον σύνδεσμο ανάμεσα στην *χρονική* και τη *συχνотική* περιγραφή τυχαίων σημάτων. Αν μια διαδικασία είναι WSS, τότε η δομή συσχέτισης και το φάσμα της είναι χρονικά αναλλοίωτα, επιτρέποντας να ορίσουμε με νόημα την **Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD)**, ένα από τα κεντρικά εργαλεία της φασματικής ανάλυσης.

Αντίθετα, σε μη στάσιμες διαδικασίες, το φάσμα μεταβάλλεται με το χρόνο, απαιτώντας χρονοσυχνотικές (time-frequency) μεθόδους όπως ο *βραχυχρόνιος μετασχηματισμός Fourier (STFT)* ή η *wavelet ανάλυση*. Σε αυτό το μάθημα, θα επικεντρωθούμε κυρίως σε WSS διαδικασίες, οι οποίες αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο της κλασικής ανάλυσης σημάτων.

1.3 Εργοδικότητα Τυχαίων Διαδικασιών

1.3.1 Ορισμός και Κίνητρο

Στην πράξη, συχνά έχουμε διαθέσιμη μόνο *ένα στιγμιότυπο* (realization) μιας τυχαίας διαδικασίας (για παράδειγμα, ένα μόνο ηχογραφημένο σήμα ή χρονοσειρά) και όχι ολόκληρο το σύνολο όλων των πιθανών σημάτων. Για να μπορέσουμε να εξάγουμε στατιστικές πληροφορίες από αυτή το μοναδικό στιγμιότυπο, πρέπει να υποθέσουμε ότι οι *χρονικοί μέσοι* που υπολογίζουμε πάνω σε ένα σήμα είναι αντιπροσωπευτικοί των αντίστοιχων *μέσων του συνόλου* (ensemble averages). Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **εργοδικότητα**.

Μια διαδικασία ονομάζεται **εργοδική** όταν οι χρονικοί μέσοι όλων των στατιστικών μεγεθών που μας ενδιαφέρουν είναι ίσοι (για όλες τις πρακτικές περιπτώσεις) με τις αναμενόμενες (expected) θεωρητικές ensemble. Μαθηματικά, η εργοδικότητα μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε τον τελεστή αναμενόμενης τιμής $\mathbb{E}[\cdot]$ με έναν τελεστή χρονικής μέσης τιμής πάνω σε ένα αρκούντως μεγάλο παραθύρου παρατήρησης.

1.3.2 Χρονικές Μέσες Τιμές και Μέσες Τιμές Συνόλου (Ensemble Averages)

Έστω $x(t)$ μια πραγματικής τιμής τυχαία διαδικασία. Η **μέση τιμή συνόλου (ensemble mean)** ορίζεται ως:

$$\mu_x = \mathbb{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x; t) dx.$$

Η αντίστοιχη **χρονική μέση τιμή** κατά μήκος ενός μόνο στιγμιότυπου $x(t, \omega_0)$ είναι:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t, \omega_0) dt.$$

Αν η διαδικασία είναι *εργοδική ως προς τη μέση τιμή*, τότε:

$$\bar{x} = \mu_x \quad \text{για σχεδόν κάθε στιγμιότυπο } \omega_0.$$

Αντίστοιχα, η **αυτοσυσχέτιση συνόλου** ορίζεται ως:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[x(t_1)x(t_2)],$$

ενώ η **χρονική μέση αυτοσυσχέτιση** για ένα μόνο στιγμιότυπο είναι:

$$\bar{R}_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t, \omega_0) x(t - \tau, \omega_0) dt.$$

Αν ισχύει $R_{xx}(\tau) = \bar{R}_{xx}(\tau)$ για σχεδόν κάθε στιγμιότυπο, η διαδικασία είναι **εργοδική** ως προς την αυτοσυσχέτιση ή γενικότερα **δεύτερης τάξης εργοδική**.

1.3.3 Είδη Εργοδικότητας

Η εργοδικότητα μπορεί να οριστεί ως προς διάφορα στατιστικά μεγέθη:

- **Εργοδικότητα ως προς τη μέση τιμή:** η χρονική μέση τιμή ισούται με τη μέση τιμή συνόλου.
- **Εργοδικότητα ως προς την αυτοσυσχέτιση:** η χρονική αυτοσυσχέτιση ισούται με την αυτοσυσχέτιση συνόλου.
- **Εργοδικότητα ως προς τη n -οστή ροπή:** η χρονική μέση τιμή του $x(t)^n$ ισούται με την αντίστοιχη ποσότητα του συνόλου (ensemble) $\mathbb{E}[x(t)^n]$.

Μια διαδικασία που είναι εργοδική στη μέση τιμή και στην αυτοσυσχέτιση ονομάζεται **εργοδική δεύτερης τάξης**. Για τις περισσότερες εφαρμογές στην επεξεργασία σήματος, αυτή η μορφή εργοδικότητας είναι επαρκής, καθώς η φασματική ανάλυση βασίζεται αποκλειστικά σε στατιστικά δεύτερης τάξης.

1.3.4 Σχέση Στασιμότητας και Εργοδικότητας

Αν και σχετικές, οι δύο έννοιες είναι διαφορετικές:

- **Στασιμότητα:** περιγράφει την αμεταβλητότητα των στατιστικών ιδιοτήτων υπό χρονικές μετατοπίσεις.
- **Εργοδικότητα:** περιγράφει την ισοδυναμία μεταξύ χρονικών και ensemble ποσοτήτων (δηλ. τη δυνατότητα πρακτικής εκτίμησης).

Κάθε εργοδική διαδικασία είναι υποχρεωτικά στάσιμη, διότι διαφορετικά οι χρονικές μέσες τιμές δεν είναι καλά ορισμένες. Ωστόσο, κάθε στάσιμη διαδικασία **δεν είναι** εργοδική: η στασιμότητα δεν εγγυάται ότι ένα μόνο στιγμιότυπο αντιπροσωπεύει το σύνολο.

1.3.5 Πρακτικές Επιπτώσεις

Η εργοδικότητα είναι κρίσιμη, επειδή σχεδόν πάντα διαθέτουμε μόνο *ένα* στιγμιότυπο μιας τυχαίας διαδικασίας. Για παράδειγμα, εκτιμούμε τη μέση τιμή και την αυτοσυσχέτιση μέσω:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x[k], \quad \hat{R}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-m} x[k] x[k+m],$$

όπου τα αθροίσματα λαμβάνονται πάνω σε ένα μόνο παρατηρημένο σήμα. Αυτές οι εκτιμήσεις προσεγγίζουν τις ποσότητες του συνόλου (ensemble) μ_x και $R_{xx}[m]$ *μόνο* όταν η διαδικασία είναι εργοδική.

1.3.6 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Λευκός Θόρυβος. Μια τυχαία διαδικασία λευκού θορύβου με μη-δενική μέση τιμή και ανεξάρτητα (i.i.d.) δείγματα είναι ταυτόχρονα στάσιμη και εργοδική. Επειδή κάθε δείγμα είναι ανεξάρτητο, οι χρονικές μέσες τιμές προσεγγίζουν (λόγω του νόμου των μεγάλων αριθμών) τις τιμές συνόλου:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{R}_{ww}[m] = \sigma_w^2 \delta[m].$$

Παράδειγμα 2: Σημιτόνιο με Τυχαία Φάση. Η διαδικασία $x[k] = A \cos(\omega_0 k + \Phi)$ με $\Phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ είναι στάσιμη, αλλά όχι εργοδική στη μέση τιμή. Κάθε στιγμιότυπο έχει χρονική μέση τιμή $\bar{x}$ που εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή της φάσης Φ . Ωστόσο, στο σύνολο των στιγμιότυπων ισχύει:

$$\mathbb{E}[x[k]] = 0.$$

Επομένως, η χρονική μέση τιμή διαφέρει από τη μέση τιμή συνόλου για μεμονωμένα στιγμιότυπα, παραβιάζοντας την εργοδικότητα στη μέση τιμή. Αυτό δείχνει ότι η στασιμότητα δεν συνεπάγεται εργοδικότητα.

Παράδειγμα 3: Πρακτικά σήματα μέτρησης. Στην πράξη, πολλά σήματα (όπως ηχητικός θόρυβος, θερμοκρασιακές διακυμάνσεις ή δεδομένα δονήσεων) αντιμετωπίζονται ως WSS και εργοδικά μέσα σε ένα πεπερασμένο παράθυρο παρατήρησης. Αν και η εργοδικότητα είναι ασυμπτωτική ιδιότητα ($T \rightarrow \infty$), η προσεγγιστική εργοδικότητα σε αρκούντως μεγάλες καταγραφές επιτρέπει αξιόπιστη εκτίμηση στατιστικών δεύτερης τάξης και φασματικών πυκνοτήτων από ένα και μόνο στιγμιότυπο.

1.3.7 Σύνοψη

Η εργοδικότητα είναι ο κρίσιμος σύνδεσμος μεταξύ θεωρίας και πράξης: επιτρέπει την εκτίμηση στατιστικών συνόλου από ένα μόνο χρονοσειριακό σήμα. Η στασιμότητα εξασφαλίζει ότι οι στατιστικές ιδιότητες δεν αλλάζουν με χρονικές μετατοπίσεις, ενώ η εργοδικότητα εξασφαλίζει ότι ένα μεμονωμένο στιγμιότυπο «περιέχει» επαρκή στατιστική πληροφορία ώστε να αντιπροσωπεύει ολόκληρη τη στοχαστική διαδικασία. Μαζί, αυτές οι ιδιότητες καθιστούν εφικτή την εκτίμηση φάσματος, την ανάλυση αυτοσυσχέτισης και το φιλτράρισμα από πραγματικά δεδομένα.

1.4 Συσχέτιση WSS Στοχαστικών Σημάτων

1.4.1 Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση

Για μια τυχαία WSS διαδικασία, η στατιστική εξάρτηση μεταξύ των δειγμάτων εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά (ή υστέρηση) και όχι από την απόλυτη χρονική στιγμή. Αυτό οδηγεί σε απλοποιημένους ορισμούς της αυτοσυσχέτισης και της ετεροσυσχέτισης.

Αυτοσυσχέτιση. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός πραγματικού WSS σήματος $x(t)$ ορίζεται ως:

$$R_{xx}(\tau) = \mathbb{E}[x(t)x(t+\tau)].$$

Μετρά την ομοιότητα του σήματος με μια χρονικά μετατοπισμένη εκδοχή του. Μεγάλες τιμές του $R_{xx}(\tau)$ υποδηλώνουν ισχυρή συσχέτιση, ενώ μικρές ή αρνητικές τιμές υποδηλώνουν αδύναμη ή αντίστροφη συσχέτιση.

Ερμηνεία. Η αυτοσυσχέτιση αποτυπώνει το “πόση μνήμη” έχει το σήμα. Περιοδικά σήματα έχουν επίσης περιοδική αυτοσυσχέτιση, ενώ λευκός θόρυβος εμφανίζει απότομη κορυφή στο $\tau = 0$.

Ετεροσυσχέτιση. Για δύο WSS διαδικασίες $x(t)$ και $y(t)$, η **συνάρτηση ετεροσυσχέτισης** ορίζεται ως:

$$R_{xy}(\tau) = \mathbb{E}[x(t)y(t+\tau)].$$

Μετρά τον βαθμό γραμμικής ομοιότητας μεταξύ του $x(t)$ και μιας χρονικά μετατοπισμένης εκδοχής του $y(t)$. Χρήσιμη για ανάλυση σχέσης εισόδου-εξόδου σε γραμμικά συστήματα.

Βασικές Ιδιότητες.

- **Συμμετρία:** $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ για πραγματικά σήματα.
- **Μέγιστο μέτρο:** $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$, με ισότητα στο $\tau = 0$.
- **Ανισότητα Cauchy-Schwarz:** $|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0) R_{yy}(0)$.
- **Μηδενική μέση τιμή:** Αν $\mathbb{E}[x(t)] = 0$, τότε $R_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau)$.

Οι συναρτήσεις συσχέτισης αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία για την ποσοτικοποίηση εξαρτήσεων σε στοχαστικά σήματα και αποτελούν τη βάση της φασματικής ανάλυσης μέσω του θεωρήματος Wiener-Khinchin, το οποίο συνδέει την αυτοσυσχέτιση, $R_{xx}(\tau)$, με την Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD).

1.4.2 Συσχέτιση Διανυσματικών WSS Στοχαστικών Σημάτων

Για πολυμεταβλητά (διανυσματικά) στοχαστικά σήματα, οι συναρτήσεις συσχέτισης λαμβάνουν μορφή πίνακα. Έστω $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^M$ μια WSS διαδικασία μηδενικής μέσης τιμής με συνιστώσες

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix}.$$

Πίνακας Αυτοσυσχέτισης. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως:

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t+\tau)] \in \mathbb{R}^{M \times M}.$$

Κάθε στοιχείο $[R_{xx}(\tau)]_{ij} = \mathbb{E}[x_i(t)x_j(t+\tau)]$ αντιστοιχεί στην ετεροσυσχέτιση μεταξύ της $x_i(t)$ και μιας χρονικά μετατοπισμένης εκδοχής της $x_j(t)$.

Ιδιότητες.

- **Συμμετρία:**

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \mathbf{R}_{xx}^T(-\tau).$$

- **Ημιθετικότητα:**

$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_{xx}(\tau) \mathbf{a} \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^M.$$

- **Διαγώνια στοιχεία:** $[R_{xx}(\tau)]_{ii} = R_{x_i x_i}(\tau)$.

- **Εκτός διαγωνίου:** $[R_{xx}(\tau)]_{ij} = R_{x_i x_j}(\tau)$.

Πίνακας Ετεροσυσχέτισης. Για δύο διανυσματικές διαδικασίες $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^M$ και $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^N$, ο πίνακας ετεροσυσχέτισης ορίζεται ως:

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau) = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t) \mathbf{y}^T(t + \tau)] \in \mathbb{R}^{M \times N}.$$

Αποτελεί γενίκευση του βαθμωτού ορισμού και περιγράφει τις μέσες γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συνιστωσών των δύο σημάτων.

Σχόλια. Οι πίνακες συσχέτισης $\mathbf{R}_{xx}(\tau)$ και $\mathbf{R}_{xy}(\tau)$ παίζουν κεντρικό ρόλο στη πολυκαναλική ανάλυση:

- Αποτελούν τη βάση φασματικών αναπαραστάσεων, π.χ. του πίνακα φασματικής πυκνότητας ισχύος

$$\mathbf{S}_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{R}_{xx}(\tau)\}.$$

- Είναι κρίσιμοι σε προβλήματα βέλτιστης εκτίμησης και φιλτραρίσματος.

Σύνοψη. Για WSS διαδικασίες, οι συναρτήσεις συσχέτισης εξαρτώνται μόνο από την υστέρηση τ . Στην βαθμωτή περίπτωση, το $R_{xx}(\tau)$ αποτυπώνει τη μνήμη και περιοδικότητα του σήματος, ενώ στη διανυσματική περίπτωση, οι πίνακες $\mathbf{R}_{xx}(\tau)$ και $\mathbf{R}_{xy}(\tau)$ καταγράφουν την αλληλεπίδραση μεταξύ καναλιών. Αυτές οι ποσότητες συνδέουν τη στατιστική ανάλυση χρόνου με τη φασματική ανάλυση μέσω της PSD.

1.4.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Λευκός Θόρυβος (1D). Έστω $w[k]$ λευκός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής, i.i.d., με διασπορά σ_w^2 :

$$\mathbb{E}[w[k]] = 0, \quad \mathbb{E}[w[k]^2] = \sigma_w^2, \quad \mathbb{E}[w[k]w[\ell]] = 0 \quad (k \neq \ell).$$

Η αυτοσυσχέτιση είναι

$$R_{ww}[m] = \mathbb{E}[w[k] w[k + m]] = \sigma_w^2 \delta[m].$$

Έλεγχος: $R_{ww}[m] = R_{ww}[-m]$, $|R_{ww}[m]| \leq \sigma_w^2$ (Cauchy-Schwarz).

Παράδειγμα 2: Ημίτονο με Τυχαία Φάση (1D). Έστω $x[k] = A \cos(\omega_0 k + \Phi)$ με $\Phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, ανεξάρτητη από το k .

$$\mathbb{E}[x[k]] = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 k + \phi) d\phi = 0.$$

Αυτοσυσχέτιση:

$$\begin{aligned} R_{xx}[m] &= \mathbb{E}[x[k] x[k + m]] = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 m) + \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\phi + \text{const}) d\phi \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 m). \end{aligned}$$

Άρα $R_{xx}[m]$ εξαρτάται μόνο από το lag (WSS) και είναι άρτια συνάρτηση.

Παράδειγμα 3: Stable Αυτοπαλίνδρομη Διαδικασία AR(1) (1D). Έστω

$$x[k] = \rho x[k-1] + w[k], \quad |\rho| < 1,$$

όπου $w[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ και ανεξάρτητο από το παρελθόν.

Βήμα 1: Διασπορά $R[0]$.

$$R_{xx}[0] = \mathbb{E}[x[k]^2] = \mathbb{E}[(\rho x[k-1] + w[k])^2] = \rho^2 \mathbb{E}[x[k-1]^2] + 2\rho \mathbb{E}[x[k-1]w[k]] + \mathbb{E}[w[k]^2].$$

Ανεξαρτησία $\Rightarrow \mathbb{E}[x[k-1]w[k]] = 0$, στασιμότητα $\Rightarrow \mathbb{E}[x[k-1]^2] = R_{xx}[0]$:

$$R[0] = \rho^2 R[0] + \sigma_w^2 \Rightarrow R[0] = \frac{\sigma_w^2}{1 - \rho^2}.$$

Βήμα 2: Αναδρομική σχέση για $R[m]$. Για $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} R[m] &\triangleq \mathbb{E}[x[k] x[k+m]] = \mathbb{E}[x[k] \cdot (\rho x[k+m-1] + w[k+m])] \\ &= \rho \mathbb{E}[x[k] x[k+m-1]] + \underbrace{\mathbb{E}[x[k] w[k+m]]}_0 = \rho R[m-1]. \end{aligned}$$

Οπότε $R[m] = \rho^m R[0] = \frac{\sigma_w^2}{1 - \rho^2} \rho^m$ for $m \geq 0$. Λόγω συμμετρίας (WSS πραγματικό σήμα), $R[-m] = R[m]$:

$$\boxed{R_{xx}[m] = \frac{\sigma_w^2}{1 - \rho^2} \rho^{|m|}}.$$

Παράδειγμα 4: Η Διασταυρούμενη Συσχέτιση Αποκαλύπτει Καθυστέρηση.

Έστω $y[k] = x[k-d] + v[k]$, όπου το x είναι WSS μηδενικής μέσης τιμής, $d \in \mathbb{Z}$, και το v είναι λευκός θόρυβος ανεξάρτητος του x .

$$\begin{aligned} R_{xy}[m] &= \mathbb{E}[x[k] y[k+m]] = \mathbb{E}[x[k] (x[k+m-d] + v[k+m])] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[x[k] x[k+m-d]]}_{R_{xx}[m-d]} + \underbrace{\mathbb{E}[x[k] v[k+m]]}_0 \\ &= \boxed{R_{xy}[m] = R_{xx}[m-d]}. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα:

$$R_{yx}[m] = R_{xx}[m+d].$$

Παράδειγμα 5: Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο (LTI) Σύστημα με WSS Είσοδο (1D). Έστω

$$y[k] = (h * x)[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] x[k-n],$$

με απόλυτα αθροίσιμη $h[\cdot]$ και WSS είσοδο x .

Αυτοσυσχέτιση του y .

$$\begin{aligned}
R_{yy}[m] &= \mathbb{E}[y[k] y[k+m]] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_n h[n] x[k-n] \right) \left(\sum_\ell h[\ell] x[k+m-\ell] \right) \right] \\
&= \sum_n \sum_\ell h[n] h[\ell] \mathbb{E}[x[k-n] x[k+m-\ell]] \\
&= \sum_n \sum_\ell h[n] h[\ell] R_{xx}[m+(n-\ell)].
\end{aligned}$$

Αν $h^\sharp[m] \triangleq h[-m]$, τότε:

$$R_{yy}[m] = (h * R_{xx} * h^\sharp)[m].$$

Διασταυρούμενη συσχέτιση $x \leftrightarrow y$.

$$R_{xy}[m] = \mathbb{E}[x[k] y[k+m]] = \sum_\ell h[\ell] R_{xx}[m-\ell] = (R_{xx} * h^\sharp)[m].$$

Παράδειγμα 6: Διανυσματική Διαδικασία από Γραμμικό Μοντέλο Ανάμιξης.

Έστω $\mathbf{w}[k] \in \mathbb{R}^M$ WSS μηδενικής μέσης τιμής με συσχέτιση $\mathbf{R}_{ww}[m]$, και

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{B}\mathbf{w}[k], \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M \times M} \text{ πλήρης τάξης.}$$

Αυτοσυσχέτιση της $\mathbf{x}[k]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{xx}[m] &= \mathbb{E}[\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k+m]] = \mathbb{E}[\mathbf{B}\mathbf{w}[k] (\mathbf{B}\mathbf{w}[k+m])^T] \\
&= \mathbf{B} \mathbb{E}[\mathbf{w}[k] \mathbf{w}^T[k+m]] \mathbf{B}^T \\
&= \boxed{\mathbf{R}_{xx}[m] = \mathbf{B} \mathbf{R}_{ww}[m] \mathbf{B}^T}.
\end{aligned}$$

Ειδική περίπτωση (λευκές πηγές):

$$\mathbf{R}_{ww}[m] = \Sigma_w \delta[m] \Rightarrow \mathbf{R}_{xx}[m] = \mathbf{B} \Sigma_w \mathbf{B}^T \delta[m].$$

Παράδειγμα 7: Εκτίμηση Συσχετίσεων από ένα στιγμιότυπο. Δοθέντος ενός στιγμιότυπου $x[1], \dots, x[N]$ από WSS εργοδική διαδικασία μηδενικής μέσης τιμής, ορίζουμε την μεροληπτική εκτίμηση (biased estimation, $\hat{R}_{xx}^b$) και την αμερόληπτη εκτίμηση (unbiased estimation, $\hat{R}_{xx}^u$):

$$\hat{R}_{xx}^b[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-m} x[k] x[k+m], \quad \hat{R}_{xx}^u[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^{N-m} x[k] x[k+m].$$

Αναμενόμενη τιμή του *biased estimator*:

$$\mathbb{E}[\hat{R}_{xx}^b[m]] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-m} R_{xx}[m] = \frac{N-m}{N} R_{xx}[m],$$

δηλαδή:

$$\mathbb{E}[\hat{R}_{xx}^b[m]] = \left(1 - \frac{m}{N}\right) R_{xx}[m].$$

Αναμενόμενη τιμή του *unbiased estimator*:

$$\mathbb{E}[\hat{R}_{xx}^u[m]] = \frac{1}{N-m} (N-m) R_{xx}[m] = R_{xx}[m].$$

Σχόλιο: Ο biased εκτιμητής παράγει PSD μη-αρνητική μετά από FFT (χρήσιμο για εκτίμηση φάσματος), ενώ ο unbiased έχει μεγαλύτερη διασπορά και μπορεί να οδηγήσει σε αρνητικές φασματικές τιμές για πεπερασμένο N .

2 Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD)

2.1 Ορισμός και Ερμηνεία

Για μία WSS τυχαία διαδικασία, η **Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (Power Spectral Density, PSD)** περιγράφει πώς κατανέμεται η μέση ισχύς της διαδικασίας στις συχνότητες. Αποτελεί τη συχνοτική αναπαράσταση της αυτοσυσχέτισης.

Η PSD ορίζεται ως ο μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$:

$$S_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Αυτό είναι το **Θεώρημα Wiener-Khinchin**, το οποίο καθιερώνει μια αμφίδρομη αντιστοιχία μεταξύ $R_{xx}(\tau)$ και $S_{xx}(\omega)$ για WSS διαδικασίες.

Φυσική ερμηνεία. Η $S_{xx}(\omega)$ ποσοτικοποιεί πόση ισχύς (διασπορά) της τυχαίας διαδικασίας αποδίδεται σε ταλαντώσεις με γωνιακή συχνότητα ω . Ένα επίπεδο φάσμα αντιστοιχεί σε διαδικασία με ίση ισχύ σε όλες τις συχνότητες (λευκός θόρυβος), ενώ ένα φάσμα με κορυφές υποδηλώνει κυρίαρχες συχνοτικές συνιστώσες ή περιοδικές δομές.

2.2 Διακριτός Χρόνος

Για μια τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου $x[k]$ με αυτοσυσχέτιση $R_{xx}[m]$, η PSD ορίζεται μέσω του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT):

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}[m] e^{-j\omega m}.$$

Αντίστροφα, η αυτοσυσχέτιση ανακτάται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$R_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega.$$

Η συνολική μέση ισχύς του σήματος ισούται με την αυτοσυσχέτιση μηδενικής υστέρησης:

$$R_{xx}[0] = \mathbb{E}[|x[k]|^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega.$$

2.3 Βασικές Ιδιότητες της PSD

- **Μη αρνητικότητα:**

$$S_{xx}(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega.$$

Αυτό προκύπτει από το ότι η αυτοσυσχέτιση είναι θετικά ημιορισμένη: για οποιαδήποτε μιγαδική ακολουθία a_k ισχύει $\sum_{i,j} a_i^* a_j R_{xx}[i-j] \geq 0$.

- **Άρτια συμμετρία (για πραγματικές διαδικασίες):** Αν το $x[k]$ είναι πραγματικό σήμα, τότε $R_{xx}[m]$ είναι άρτια ($R_{xx}[m] = R_{xx}[-m]$), και συνεπώς

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{-j\omega}).$$

- **Πραγματικότητα:** Αν το $R_{xx}[m]$ είναι πραγματικό, τότε και το $S_{xx}(e^{j\omega})$ είναι πραγματικό και άρτιο.
- **Συνολική ισχύς:** Η συνολική μέση ισχύς της διαδικασίας ισούται με το ολοκλήρωμα της PSD:

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega \quad (\text{διακριτός χρόνος}),$$

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (\text{συνεχής χρόνος}).$$

- **Γραμμικότητα:** Για $z(t) = a x(t) + b y(t)$ ισχύει

$$S_{zz}(\omega) = |a|^2 S_{xx}(\omega) + |b|^2 S_{yy}(\omega) + ab^* S_{xy}(\omega) + a^* b S_{yx}(\omega).$$

- **Ιδιότητα φιλτραρίσματος:** Αν $y(t) = h(t) * x(t)$, τότε

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega),$$

όπου $H(\omega)$ είναι η συχνотική απόκριση του συστήματος.

2.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Λευκός Θόρυβος. Για λευκό θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς σ_w^2 ,

$$R_{ww}[m] = \sigma_w^2 \delta[m].$$

Τότε,

$$S_{ww}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{ww}[m] e^{-j\omega m} = \sigma_w^2.$$

Άρα ο λευκός θόρυβος έχει **επίπεδο** (σταθερό) φάσμα, δηλαδή ίση ισχύ σε όλες τις συχνότητες.

Παράδειγμα 2: Ημίτονο με Τυχαία Φάση. Για $x[k] = A \cos(\omega_0 k + \Phi)$ με $\Phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$,

$$R_{xx}[m] = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 m) = \frac{A^2}{4} (e^{j\omega_0 m} + e^{-j\omega_0 m}).$$

Η PSD είναι:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}[m] e^{-j\omega m} = \frac{A^2}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{j(\omega_0 - \omega)m} + e^{-j(\omega_0 + \omega)m}).$$

Με τη σχέση $\sum_m e^{j\alpha m} = 2\pi \sum_k \delta(\alpha - 2\pi k)$,

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Η PSD έχει δύο συμμετρικές γραμμές στις $\pm\omega_0$, που αντιστοιχούν στο μονοτονικό περιεχόμενο του σήματος.

Παράδειγμα 3: Διαδικασία AR(1). Για $x[k] = \rho x[k-1] + w[k]$ με $|\rho| < 1$ και $w[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$,

$$R_{xx}[m] = \frac{\sigma_w^2}{1 - \rho^2} \rho^{|m|}.$$

Υπολογίζουμε τη DTFT:

$$\begin{aligned} S_{xx}(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}[m] e^{-j\omega m} = \frac{\sigma_w^2}{1 - \rho^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{|m|} e^{-j\omega m} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{1 - \rho^2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (\rho e^{-j\omega})^m + \sum_{m=1}^{\infty} (\rho e^{j\omega})^m \right] \\ &= \frac{\sigma_w^2}{1 - \rho^2} \left[\frac{1}{1 - \rho e^{-j\omega}} + \frac{\rho e^{j\omega}}{1 - \rho e^{j\omega}} \right] = \frac{\sigma_w^2}{|1 - \rho e^{-j\omega}|^2}. \end{aligned}$$

Ερμηνεία:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega}.$$

Καθώς $|\rho| \rightarrow 1$, το φάσμα συγκεντρώνεται κοντά στη συχνότητα μηδέν, δείχνοντας ισχυρή χρονική συσχέτιση (αργή μεταβολή στο χρόνο).

Παράδειγμα 4: Ιδιότητα Φιλτραρίσματος LTI. Έστω $y[k] = (h * x)[k]$, με συχνοτική απόκριση $H(e^{j\omega})$. Από το θεώρημα φιλτραρίσματος:

$$S_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{xx}(e^{j\omega}).$$

Αν το $x[k]$ είναι λευκός θόρυβος με $S_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2$ και $h[k] = \frac{1}{2}\delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1]$ (απλό φίλτρο μέσου όρου), τότε:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) = e^{-j\omega/2} \cos(\omega/2),$$

και

$$S_{yy}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 |H(e^{j\omega})|^2 = \sigma_w^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Η PSD εξόδου είναι χαρακτηριστικά χαμηλοπερατή — το φίλτρο μέσου όρου καταστέλλει υψηλές συχνότητες του θορύβου.

2.5 Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) Διανυσματικών Τυχαίων Σημάτων

2.5.1 Ορισμός

Για ένα διανυσματικό τυχαίο σήμα

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^M,$$

τα στατιστικά δεύτερης τάξης του περιγράφονται όχι από μία βαθμωτή συνάρτηση, αλλά από ένα **πίνακα Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος (PSD)**. Ορίζεται ως ο μετασχηματισμός Fourier του πίνακα αυτοσυσχέτισης:

$$\mathbf{S}_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{R}_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad \mathbf{S}_{xx}(\omega) \in \mathbb{C}^{M \times M}.$$

Κάθε στοιχείο του πίνακα περιγράφει τη σχέση στο πεδίο της συχνότητας μεταξύ δύο συνιστωσών της διαδικασίας.

2.5.2 Στοιχεία και Ερμηνεία

Το στοιχείο (i, j) της $\mathbf{S}_{xx}(\omega)$ είναι:

$$[\mathbf{S}_{xx}(\omega)]_{ij} = S_{x_i x_j}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{x_i x_j}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i x_j}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

- Για $i = j$, το $S_{x_i x_i}(\omega)$ είναι το PSD της συνιστώσας $x_i(t)$.
- Για $i \neq j$, το $S_{x_i x_j}(\omega)$ είναι η **διασταυρούμενη φασματική πυκνότητα**, που μετρά τη συσχέτιση των x_i και x_j ως συνάρτηση της συχνότητας.

Φυσική ερμηνεία. Η $\mathbf{S}_{xx}(\omega)$ περιγράφει πώς κατανέμονται η ισχύς και η συνέπεια (coherence) σε όλο το φάσμα για πολυμεταβλητές στοχαστικές διεργασίες. Τα εκτός διαγώνιου στοιχεία αποκαλύπτουν κοινό φασματικό περιεχόμενο ή γραμμικές εξαρτήσεις μεταξύ συνιστωσών. Τα διαγώνια στοιχεία περιγράφουν τα φάσματα ισχύος κάθε καναλιού ξεχωριστά.

2.5.3 Ιδιότητες της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος σε Πίνακα

- **Ερμιτιανή συμμετρία:**

$$\mathbf{S}_{xx}^H(\omega) = \mathbf{S}_{xx}(\omega),$$

$$\text{δηλαδή } S_{x_i x_j}(\omega) = S_{x_j x_i}^*(\omega).$$

- **Θετικότητα ημι-ορισμένης μορφής:** Για κάθε μιγαδικό διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^M$,

$$\mathbf{a}^H \mathbf{S}_{xx}(\omega) \mathbf{a} \geq 0.$$

Η ιδιότητα προκύπτει επειδή ο πίνακας αυτοσυσχέτισης $\mathbf{R}_{xx}(\tau)$ έχει θετικά ορισμένη μορφή.

- **Συζυγής συμμετρία (πραγματικές διεργασίες):** Για πραγματιμίες διεργασίες $\mathbf{x}(t)$,

$$\mathbf{S}_{xx}(-\omega) = \mathbf{S}_{xx}^*(\omega).$$

- **Συνδιασπορά στη μηδενική υστέρηση φάσεως:** Η συνδιασπορά (ο πίνακας αυτοσυσχέτισης στο $\tau = 0$) ισούται με το ολοκλήρωμα της φασματικής πυκνότητας ισχύος:

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{xx}(\omega) d\omega.$$

2.5.4 Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος

Για δύο από κοινού WSS διανυσματικές διεργασίες $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^M$ και $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^N$, η **διαφασματική πυκνότητα ισχύος** ορίζεται ως

$$\mathbf{S}_{xy}(\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{R}_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad \mathbf{S}_{xy}(\omega) \in \mathbb{C}^{M \times N}.$$

Κάθε στοιχείο $S_{x_i y_j}(\omega)$ περιγράφει τη διαφασματική πυκνότητα ισχύος μεταξύ των συνιστωσών x_i και y_j . Η ερμιτιανή συμμετρία επεκτείνεται ως:

$$\mathbf{S}_{yx}(\omega) = \mathbf{S}_{xy}^H(\omega).$$

2.6 Παραδείγματα

2.6.1 Γραμμικό Μοντέλο

Έστω $\mathbf{w}[k] \in \mathbb{R}^M$ μια μηδενικού μέσου WSS διανυσματική διεργασία με πίνακα αυτοσυσχέτισης και φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\mathbf{R}_{ww}[m] = \mathbb{E}[\mathbf{w}[k] \mathbf{w}^T[k+m]], \quad \mathbf{S}_{ww}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{ww}[m] e^{-j\omega m}.$$

Ορίζουμε $\mathbf{x}[k] = \mathbf{B} \mathbf{w}[k]$, όπου $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ είναι σταθερός πίνακας πλήρους βαθμίδας.

Αυτοσυσχέτιση της $\mathbf{x}[k]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}[m] &= \mathbb{E}[\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k+m]] = \mathbb{E}[\mathbf{B} \mathbf{w}[k] (\mathbf{B} \mathbf{w}[k+m])^T] \\ &= \mathbf{B} \mathbb{E}[\mathbf{w}[k] \mathbf{w}^T[k+m]] \mathbf{B}^T = \boxed{\mathbf{R}_{xx}[m] = \mathbf{B} \mathbf{R}_{ww}[m] \mathbf{B}^T}. \end{aligned}$$

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος. Παίρνοντας τον DTFT και στα δύο μέλη:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{xx}[m] e^{-j\omega m} = \mathbf{B} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{ww}[m] e^{-j\omega m} \right) \mathbf{B}^T \\ &= \boxed{\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) = \mathbf{B} \mathbf{S}_{ww}(e^{j\omega}) \mathbf{B}^T}. \end{aligned}$$

Ειδική περίπτωση: Λευκή είσοδος. Αν η $\mathbf{w}[k]$ είναι λευκή:

$$\mathbf{R}_{ww}[m] = \Sigma_w \delta[m], \quad \mathbf{S}_{ww}(e^{j\omega}) = \Sigma_w,$$

τότε

$$\boxed{\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) = \mathbf{B} \Sigma_w \mathbf{B}^T}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η $\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega})$ είναι λευκή (σταθερή ως προς τη συχνότητα), αλλά όχι απαραίτητα διαγώνια. Τα εκτός διαγωνίου στοιχεία εκφράζουν στιγμιαίες ετεροσυσχετίσεις μεταξύ των μεικτών καναλιών.

Παράδειγμα (2D περίπτωση). Έστω

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_w = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 - \sigma_2^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Τα δύο κανάλια εξόδου μοιράζονται συσχετισμένα φάσματα εκτός κι αν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (τέλεια ισοσταθμισμένες πηγές).

2.6.2 Συσχετισμένος θόρυβος σε δύο κανάλια

Έστω

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}$$

είναι μια WSS διανυσματική διαδικασία μηδενικής μέσης τιμής, τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}[x_1[k] x_1[k+m]] = \mathbb{E}[x_2[k] x_2[k+m]] = \sigma^2 \delta[m], \quad \mathbb{E}[x_1[k] x_2[k+m]] = \rho \sigma^2 \delta[m],$$

όπου $|\rho| \leq 1$ ελέγχει την στιγμιαία συσχέτιση (τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των καναλιών για την ίδια χρονική στιγμή).

Πίνακας αυτοσυσχέτισης.

$$\mathbf{R}_{xx}[m] = \mathbb{E}[\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k+m]] = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \delta[m].$$

Κάθε διαγώνιο στοιχείο δίνει την αυτοσυσχέτιση κάθε καναλιού, ενώ τα εκτός διαγωνίου στοιχεία κωδικοποιούν την αχαριαία ετεροσυσχέτιση μεταξύ x_1 και x_2 .

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό DTFT:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{xx}[m] e^{-j\omega m} = \mathbf{R}_{xx}[0] \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα το φάσμα είναι σταθερό (λευκό) ως προς τη συχνότητα, και τα εκτός διαγωνίου στοιχεία περιγράφουν σύζευξη ανεξάρτητη της συχνότητας.

Ανάλυση ιδιοτιμών και Συνέπεια. Οι ιδιοτιμές της $\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega})$ είναι

$$\lambda_1 = \sigma^2(1 + \rho), \quad \lambda_2 = \sigma^2(1 - \rho),$$

με τα αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο πίνακας φασματικής πυκνότητας ισχύος γράφεται ως

$$\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T.$$

Ερμηνεία: Ο πίνακας φασματικής πυκνότητας ισχύος αναλύεται σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες:

- Η πρώτη ($\mathbf{v}_1$) αντιστοιχεί στο άθροισμα των δύο καναλιών σε φάση.
- Η δεύτερη ($\mathbf{v}_2$) αντιστοιχεί στη διαφορά των δύο καναλιών εκτός φάσης.

Καθώς $\rho \rightarrow 1$, έχουμε $\lambda_2 \rightarrow 0$, πράγμα που σημαίνει ότι τα δύο σήματα γίνονται πλήρως συνεπή (πλεονάζοντα).

Διαφασματική πυκνότητα ισχύος και συνάρτηση συνέπειας. Το διαφάσμα μεταξύ των x_1 και x_2 είναι

$$S_{x_1 x_2}(e^{j\omega}) = \rho \sigma^2,$$

και η (τετραγωνική κατά μέτρο) συνέπεια ορίζεται ως

$$\gamma_{x_1 x_2}^2(e^{j\omega}) = \frac{|S_{x_1 x_2}(e^{j\omega})|^2}{S_{x_1 x_1}(e^{j\omega}) S_{x_2 x_2}(e^{j\omega})} = \rho^2.$$

Ερμηνεία: Η συνέπεια είναι ανεξάρτητη της συχνότητας (σταθερή ίση με ρ^2), δείχνοντας ότι τα δύο κανάλια είναι εξίσου συσχετισμένα σε όλες τις συχνότητες.

2.6.3 Σχόλια

- Ο πίνακας φασματικής πυκνότητας ισχύος $\mathbf{S}_{xx}(\omega)$ γενικεύει τη βαθμωτή φασματική πυκνότητα σε πολυκαναλικές περιπτώσεις.
- Τα εκτός διαγωνίου στοιχεία αποτυπώνουν τις ετεροσυσχετίσεις μεταξύ καναλιών, ενώ τα διαγώνια στοιχεία περιγράφουν την ισχύ φάσματος ανά κανάλι.
- Η ανάλυση ιδιοτιμών της $\mathbf{S}_{xx}(\omega)$ αποκαλύπτει τους κύριους φασματικούς τρόπους και τη δομή συνέπειας μεταξύ καναλιών.
- Η συνολική συνδιασπορά ανακτάται από τη σχέση

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) d\omega.$$

Από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε στον πίνακα φασματικής πυκνότητας ισχύος ως απλά φασματική πυκνότητα ισχύος ή PSD.

3 Εκτίμηση της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος μέσω FFT

3.1 Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδόγραμμα

Έστω ότι $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^M$ είναι ένα πεπερασμένο μοντέλο ενός μηδενικού μέσου, διακριτού στο χρόνο τυχαίου σήματος, με $k = 0, \dots, N-1$. Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT) προσεγγίζεται στην πράξη μέσω του N -σημείων Διακριτού

Μετασχηματισμού Fourier (DFT):

$$\mathbf{X}[\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}[k] e^{-j2\pi\ell k/N}, \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1.$$

Κάθε $\mathbf{X}[\ell] \in \mathbb{C}^M$ αντιστοιχεί στο μιγαδικό πλάτος του φάσματος στο bin συχνότητας:

$$\omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}.$$

Ο **εκτιμητής περιοδογράμματος** της φασματικής πυκνότητας ισχύος ορίζεται ως:

$$\boxed{\hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell) = \frac{1}{N} \mathbf{X}[\ell] \mathbf{X}^H[\ell], \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N},}$$

όπου $\mathbf{X}^H$ δηλώνει τον Ερμιτιανό ανάστροφο ενός πίνακα:

$$\mathbf{X}^H = (\mathbf{X}^*)^T.$$

Για βαθμωτά σήματα ($M = 1$), ο ορισμός απλοποιείται σε:

$$\hat{S}_{xx}(\omega_\ell) = \frac{1}{N} |X[\ell]|^2.$$

Ο ορισμός αυτός επιτρέπει άμεση και υπολογιστικά αποδοτική εκτίμηση του PSD μέσω FFT.

3.2 Αναλυτική Απόδειξη/Υπολογισμός του Περιοδογράμματος μέσω FFT

Ξεκινώντας από τον ορισμό της (μεροληπτικής) εκτιμώμενης αυτοσυσχέτισης για ένα πραγματικό, μηδενικού μέσου, WSS σήμα:

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}[\tau] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-|\tau|} \mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k+\tau], \quad \tau = -(N-1), \dots, (N-1).$$

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος προκύπτει ως ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης:

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{\mathbf{R}}_{xx}[\tau] e^{-j\omega_\ell \tau}, \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}.$$

Αντικαθιστώντας τον ορισμό της $\hat{\mathbf{R}}_{xx}[\tau]$:

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell) = \frac{1}{N} \sum_{\tau} \sum_k \mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k+\tau] e^{-j\omega_\ell \tau}.$$

Με την αλλαγή δείκτη $m = k + \tau$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell) &= \frac{1}{N} \sum_k \sum_m \mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[m] e^{-j\omega_\ell(m-k)} \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_k \mathbf{x}[k] e^{-j\omega_\ell k} \right) \left(\sum_m \mathbf{x}[m] e^{-j\omega_\ell m} \right)^H. \end{aligned}$$

Αναγνωρίζοντας τον DFT

$$\mathbf{X}[\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}[k] e^{-j\omega_\ell k},$$

καταλήγουμε:

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell) = \frac{1}{N} \mathbf{X}[\ell] \mathbf{X}^H[\ell].$$

Άρα, το περιοδόγραμμα είναι ακριβώς ο μετασχηματισμός Fourier της εκτιμώμενης ακολουθίας αυτοσυσχέτισης και μπορεί να υπολογιστεί αποδοτικά μέσω FFT.

3.3 Ερμηνεία και Ιδιότητες

Αμεροληψία. Το περιοδόγραμμα είναι αμερόληπτος εκτιμητής της πραγματικής Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος:

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell)] = \mathbf{S}_{xx}(\omega_\ell),$$

αλλά παρουσιάζει υψηλή διακύμανση, η οποία δεν μειώνεται με το N . Γι' αυτό, στην πράξη εφαρμόζονται τεχνικές μέσου όρου ή εξομάλυνσης (π.χ. μέθοδος Welch) για μείωση των διακυμάνσεων.

Ανάλυση και διαρροή φάσματος. Η εκτίμηση PSD με FFT έχει διακριτική ικανότητα

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}.$$

Τα πεπερασμένα δεδομένα αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό με ορθογώνιο παράθυρο, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier (συνάρτηση τύπου *sinc*) προκαλεί **διαρροή φάσματος**, δηλαδή “άπλωμα” ενέργειας σε γειτονικές συχνότητες. Η χρήση παραθύρων (Hamming, Hann, Blackman) μειώνει τη διαρροή με τίμημα τη χειρότερη ανάλυση.

Ερμιτιανή δομή (πραγματικά σήματα). Αν $\mathbf{x}[k]$ είναι πραγματικό σήμα, τότε ισχύει:

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}(-\omega_\ell) = \hat{\mathbf{S}}_{xx}^*(\omega_\ell),$$

άρα μόνο το διάστημα $0 \leq \omega_\ell \leq \pi$ περιέχει μη πλεονάζουσα πληροφορία.

Θετικά ορισμένη μορφή. Για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^M$,

$$\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell) \mathbf{a} = \frac{1}{N} |\mathbf{a}^H \mathbf{X}[\ell]|^2 \geq 0.$$

Επομένως, η εκτιμώμενη PSD είναι Ερμιτιανή και έχει θετικά ορισμένη μορφή εκ κατασκευής.

3.4 Μονόπλευρη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος για Πραγματικά Σήματα

Για πραγματικά δεδομένα, ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) ικανοποιεί τη σχέση Ερμιτιανής συμμετρίας:

$$X[\ell] = X^*[N - \ell], \quad \ell = 1, \dots, N - 1.$$

Έτσι, μόνο οι συχνότητες στο διάστημα $[0, f_s/2]$ (ή $[0, \pi]$ σε κανονικοποιημένη συχνότητα) περιέχουν μοναδική πληροφορία.

Η συνολική ισχύς του σήματος στην **αμφίπλευρη PSD** ικανοποιεί:

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{S}_{xx}^{(2\text{-sided})}[\ell] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} |X[\ell]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2.$$

Για να ορίσουμε μια **μονόπλευρη PSD** που διατηρεί την ίδια συνολική ισχύ στο διάστημα $[0, f_s/2]$, πρέπει να διπλασιάσουμε όλα τα bin εκτός από το DC και το bin Nyquist:

$$\hat{S}_{xx}^{(1\text{-sided})}[\ell] = \begin{cases} \hat{S}_{xx}^{(2\text{-sided})}[\ell], & \ell = 0, \\ 2 \hat{S}_{xx}^{(2\text{-sided})}[\ell], & 1 \leq \ell < N/2, \\ \hat{S}_{xx}^{(2\text{-sided})}[N/2], & \ell = N/2 \text{ (αν } N \text{ άρτιος)}. \end{cases}$$

Αυτό εξασφαλίζει:

$$\sum_{\ell=0}^{N/2} \hat{S}_{xx}^{(1\text{-sided})}[\ell] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{S}_{xx}^{(2\text{-sided})}[\ell],$$

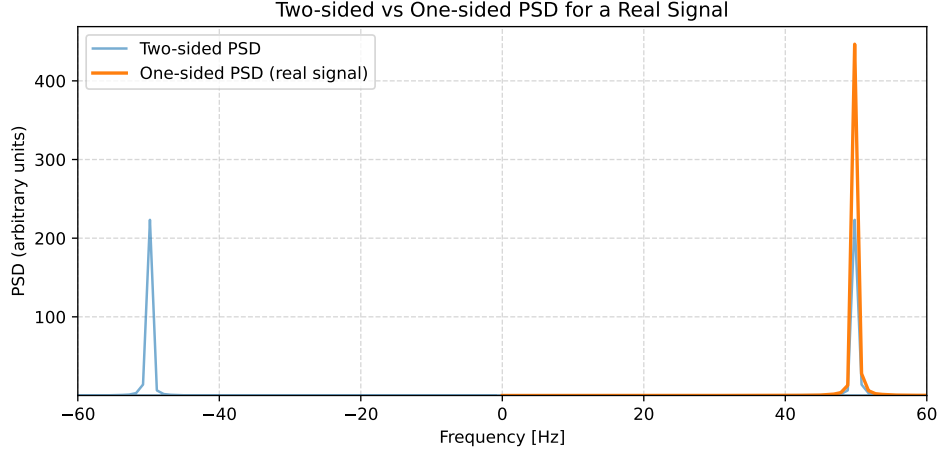
δηλαδή η συνολική εκτιμώμενη **διακύμανση** του $x[k]$ διατηρείται.

Πρακτική υλοποίηση.

- Υπολογίζουμε την εκτίμηση Welch στο πλήρες FFT και κρατάμε μόνο τα πρώτα $N/2 + 1$ bin (αν N άρτιος).
- Διπλασιάζουμε τα εσωτερικά bin (εκτός των bin DC και Nyquist).
- Για πολυκαναλικά PSD $\hat{\mathbf{S}}_{xx}[\ell]$, διπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία των αντίστοιχων υποπινάκων στα ίδια bin. Η τελική μονόπλευρη $\hat{\mathbf{S}}_{xx}^{(1\text{-sided})}[\ell]$ παραμένει Ερμιτιανή και με θετικά ορισμένη μορφή.

Ερμηνεία. Η μονόπλευρη PSD αντιστοιχεί στην κατανομή της συνολικής ισχύος του σήματος μόνο στις θετικές συχνότητες. Αυτή είναι η σύμβαση που χρησιμοποιείται στα περισσότερα υπολογιστικά πακέτα (π.χ. `scipy.signal.welch`, `pwelch` του MATLAB) και συνδέεται με τις φυσικές μονάδες ισχύος ανά *Hertz*, όταν πολλαπλασιαστεί με τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s :

$$S_{xx}^{(1)}(f) [\text{power/Hz}] = \frac{1}{f_s} \hat{S}_{xx}^{(1\text{-sided})}[\ell].$$



Σχήμα 3.1: Αμφίπλευρη έναντι μονόπλευρης PSD για πραγματικό σήμα. Τα bin εκτός DC και Nyquist διπλασιάζονται ώστε να διατηρείται η συνολική ισχύς. Στην αμφίπλευρη μορφή εμφανίζονται δύο συμμετρικές κορυφές, ενώ στη μονόπλευρη μία μονή διπλάσια κορυφή. Η συνολική ισχύς είναι ίδια και στις δύο αναπαραστάσεις.

3.5 Παράδειγμα: Εκτίμηση PSD μέσω FFT

Έστω ένα δικάναλο διακριτό σήμα:

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Τα δύο κανάλια ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} x_1[k] &= \sin(2\pi 0.005 k) + 0.3 w_1[k], \\ x_2[k] &= \sin(2\pi 0.0075 k) + 0.3 w_2[k], \end{aligned}$$

όπου $w_1[k], w_2[k] \sim \mathcal{N}(0, 1)$ είναι ανεξάρτητα λευκά σήματα θορύβου. Κάθε κανάλι περιέχει μια χαμηλόσυχνή μιμημι sinusoidal τάση και προσθετικό Γκαουσιανό θόρυβο.

Στόχος. Να εκτιμήσουμε τη **Φασματική Πυκνότητα Ισχύος**:

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell) = \frac{1}{N} \mathbf{X}[\ell] \mathbf{X}^H[\ell], \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad \ell = 0, \dots, N-1,$$

όπου $\mathbf{X}[\ell]$ είναι ο N -σημείων DFT του διανύσματος $\mathbf{x}[k]$:

$$\mathbf{X}[\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}[k] e^{-j2\pi\ell k/N}.$$

Περιγραφή υλοποίησης.

1. Υπολογισμός του DFT για κάθε κανάλι:

$$X_1[\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] e^{-j2\pi\ell k/N}, \quad X_2[\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} x_2[k] e^{-j2\pi\ell k/N}.$$

2. Κατασκευή διανύσματος και υπολογισμός της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος (matrix-valued periodogram):

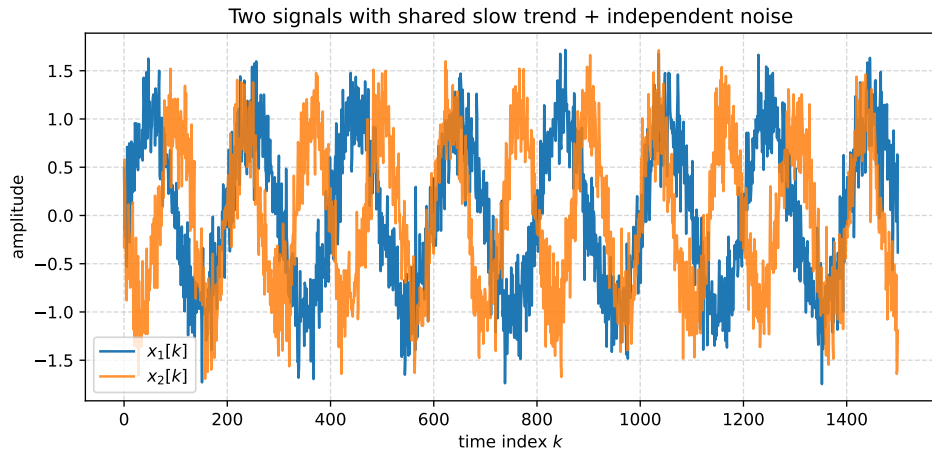
$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}(\omega_\ell) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} X_1[\ell] \\ X_2[\ell] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^*[\ell] & X_2^*[\ell] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} |X_1[\ell]|^2 & X_1[\ell]X_2^*[\ell] \\ X_2[\ell]X_1^*[\ell] & |X_2[\ell]|^2 \end{bmatrix}.$$

3. Επειδή το $\mathbf{x}[k]$ είναι πραγματικό σήμα, αρκεί η μονόπλευρη PSD για $0 \leq \omega \leq \pi$. Τα bins συχνότητας που δεν είναι ούτε στο DC ούτε στη Nyquist συχνότητα διπλασιάζονται ώστε να διατηρηθεί η συνολική ισχύς.
4. Τα διαγώνια στοιχεία δίνουν τις επιμέρους PSD ($S_{x_1x_1}$ και $S_{x_2x_2}$), ενώ το εκτός διαγωνίου στοιχείο $S_{x_1x_2}$ αποτυπώνει τη διαφασματική πυκνότητα ισχύος και τη συνεκτικότητα/συνέργεια μεταξύ των καναλιών.

Αριθμητική διάταξη. Με $N = 4096$ δείγματα και συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1$ Hz:

$$\text{συχνότητες: } f_\ell = \frac{\ell}{N}f_s, \quad \omega_\ell = 2\pi f_\ell.$$

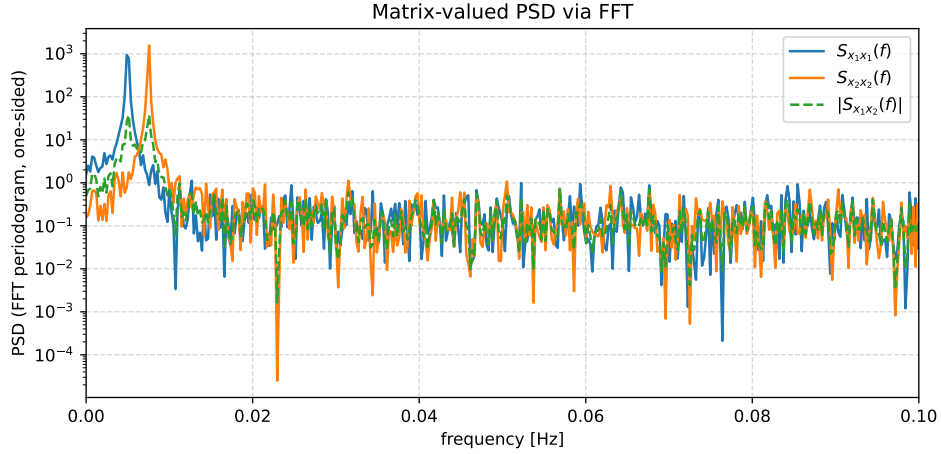
Οι ημιτονοειδείς συνιστώσες αντιστοιχούν στις ομαλοποιημένες συχνότητες $f_1 = 0.005$ και $f_2 = 0.0075$, και οι δύο πολύ κοντά στο DC. Ο θόρυβος εισάγει ευρυζωνικό φάσμα.



Σχήμα 3.2: Δείγματα των $x_1[k]$ και $x_2[k]$. Κάθε σήμα παρουσιάζει αργή ημιτονοειδή τάση με προσθετικό Γκαουσιανό θόρυβο.

Ερμηνεία.

- Τα x_1 και x_2 παρουσιάζουν κυρίαρχες αιχμές στις αντίστοιχες ημιτονοειδείς συχνότητές τους.
- Το διαφασματικό $S_{x_1x_2}(f)$ είναι μικρό, επιβεβαιώνοντας ότι οι δύο διεργασίες είναι σχεδόν ασυσχέτιστες στο πεδίο της συχνότητας.
- Το επίπεδο ευρυζωνικού υποβάθρου προέρχεται από τον προσθετικό λευκό θόρυβο ($0.3 w_i[k]$).



Σχήμα 3.3: Εκτίμηση μονόπλευρης Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος σε πίνακα μέσω FFT. Τα διαγώνια στοιχεία $S_{x_1 x_1}$ και $S_{x_2 x_2}$ εμφανίζουν αιχμές στα f_1 και f_2 . Το στοιχείο εκτός διαγωνίου $|S_{x_1 x_2}|$ δείχνει αδύναμη συνέπεια μεταξύ καναλιών.

Αριθμητική ανάλυση του πίνακα PSD. Σε ένα bin συχνότητας κοντά στο $f \approx 0.005$, μπορεί κανείς να παρατηρήσει έναν πίνακα PSD της μορφής:

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}(f) \simeq \begin{bmatrix} 2.10 & 0.05 + j 0.01 \\ 0.05 - j 0.01 & 1.95 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας είναι ανάστροφος Ερμιτιανός και με θετικά ορισμένη μορφή, όπως αναμένεται.

Παρατηρήσεις.

- Το περιοδόγραμμα βασισμένο σε FFT εκτιμά απευθείας τον φασματικό πίνακα σε διακριτές συχνότητες.
- Είναι αμερόληπτος εκτιμητής της πραγματικής PSD, αλλά παρουσιάζει μεγάλη διακύμανση για πεπερασμένο N .
- Μέθοδοι εξομάλυνσης ή μέσου όρου (π.χ. μέθοδος Welch) βελτιώνουν τη σταθερότητα της εκτίμησης χωρίς να εισάγουν μεροληψία.

3.5.1 Python Implementation

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 np.random.seed(1)
5 fs = 1.0
6 N = 4096
7 k = np.arange(N)
8 t = k / fs
9
10 # --- Example 2: shared slow trend + independent high-freq noise ---
11 trend = np.sin(2*np.pi*0.005*t) # very low frequency drift
12 trend2 = np.sin(-2*np.pi*0.0075*t) # very low frequency drift
13 x1 = trend + 0.3*np.random.randn(N)

```

```

14 # x2 = 1.1*trend + 0.3*np.random.randn(N)
15 x2 = trend2 + 0.3*np.random.randn(N)
16 X = np.vstack([x1, x2]) # shape: (2, N), real-valued
    channels
17
18 # ----- Matrix periodogram (two-sided) -----
19 # DFT of each channel
20 Xf = np.fft.fft(X, n=N, axis=1) # shape: (2, N)
21 freqs = np.fft.fftfreq(N, d=1/fs) # two-sided
22
23 # Matrix-valued periodogram at each bin:  $S_{\text{hat}}[l] = (1/N) X_{\text{vec}} X_{\text{vec}}^H$ 
24 S_hat = np.zeros((N, 2, 2), dtype=complex)
25 for l in range(N):
26     vec = Xf[:, l:l+1] # shape: (2,1)
27     S_hat[l] = (1.0/N) * (vec @ vec.conj().T)
28
29 # ----- One-sided PSD for real signals (0..fs/2) with doubling
    -----
30 pos = freqs >= 0
31 freqs_pos = freqs[pos].copy()
32 S_pos = S_hat[pos].copy() # (Npos, 2, 2)
33 # Double non-DC and (if N even) non-Nyquist bins
34 if N % 2 == 0:
35     # indices: 0 .. N/2
36     doub = np.ones_like(freqs_pos, dtype=bool)
37     doub[0] = False
38     doub[-1] = False
39 else:
40     # indices: 0 .. (N-1)/2
41     doub = np.ones_like(freqs_pos, dtype=bool)
42     doub[0] = False
43 S_pos[doub] *= 2.0
44
45 # ----- Choose how to visualize the matrix PSD: 'magnitude' or 'real'
    , -----
46 plot_mode = 'magnitude' # or 'real'
47
48 if plot_mode == 'magnitude':
49     S11 = S_pos[:,0,0].real # diagonal is real/nonneg
50     S22 = S_pos[:,1,1].real
51     S12 = np.abs(S_pos[:,0,1]) # magnitude of cross-PSD
52     cross_label = r"$|S_{x_1x_2}(f)|$"
53 else:
54     S11 = S_pos[:,0,0].real
55     S22 = S_pos[:,1,1].real
56     S12 = S_pos[:,0,1].real # real part of cross-PSD
57     cross_label = r"$\text{Re}\{S_{x_1x_2}(f)\}$"
58
59 # ----- Plots -----
60 # Time series (short segment for readability)
61 plt.figure(figsize=(8,4))
62 plt.plot(k[:1500], x1[:1500], label=r"$x_1[k]$")
63 plt.plot(k[:1500], x2[:1500], label=r"$x_2[k]$", alpha=0.85)
64 plt.xlabel("time index $k$")
65 plt.ylabel("amplitude")
66 plt.title("Two signals with shared slow trend + independent noise")
67 plt.grid(True, ls="--", alpha=0.5); plt.legend(); plt.tight_layout()
68 plt.show()

```

```

69
70 # PSD curves
71 plt.figure(figsize=(8,4))
72 plt.semilogy(freqs_pos, S11, label=r"$S_{x_1x_1}(f)$")
73 plt.semilogy(freqs_pos, S22, label=r"$S_{x_2x_2}(f)$")
74 plt.semilogy(freqs_pos, S12, "--", label=cross_label)
75 plt.xlim(0, 0.1) # focus near DC to highlight the shared trend peak
76 plt.xlabel("frequency [Hz]")
77 plt.ylabel("PSD (FFT periodogram, one-sided)")
78 plt.title("Matrix-valued PSD via FFT")
79 plt.grid(True, ls="--", alpha=0.5); plt.legend(); plt.tight_layout()
80 plt.show()

```

Listing 1: PSD Estimation via FFT (Matrix Periodogram)

3.6 Σύνοψη

- Ο FFT παρέχει μια άμεση και αποδοτική υλοποίηση του εκτιμητή περιοδογράμματος.
- Ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος αλλά με υψηλή διακύμανση: στην πράξη απαιτείται εξομάλυνση/smoothing.
- Το περιοδόγραμμα σε μορφή πίνακα γενικεύει τη φασματική εκτίμηση από το μονοκάναλο στο πολυκάναλο σήμα.
- Στις επόμενες ενότητες θα εξετάσουμε βελτιωμένους εκτιμητές όπως η μέθοδος Welch και η εκτίμηση φάσματος βασισμένη σε μοντέλα (AR/Yule-Walker).

4 Μέθοδος Welch για Εκτίμηση Φάσματος

4.1 Κίνητρο και Βασική Ιδέα

Το περιοδόγραμμα, αν και αμερόληπτο, αποτελεί εκτιμητή της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος (PSD) με πολύ υψηλή διακύμανση (variance). Η μέθοδος Welch το βελτιώνει χωρίζοντας το σήμα σε επικαλυπτόμενα, παραθυρωμένα τμήματα και λαμβάνοντας τον μέσο όρο των προκύπτοντων περιοδογραμμάτων. Η διακύμανση έτσι μειώνεται με κόστος τη μείωση της διακριτικής ικανότητας στην συχνότητα.

Δοθέντος ενός διακριτού (ενδεχομένως πολυδιάστατου) σήματος

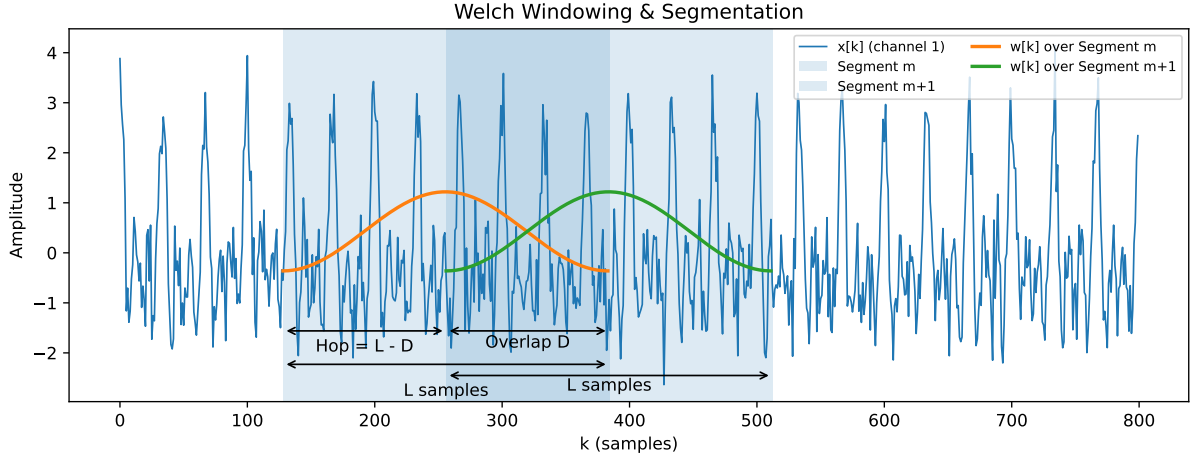
$$\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^M, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

το διαιρούμε σε K επικαλυπτόμενα τμήματα μήκους L , με επικάλυψη D δειγμάτων. Κάθε τμήμα πολλαπλασιάζεται με ένα παράθυρο (taper) $w[k]$ ώστε να περιοριστεί η φασματική διαρροή λόγω της πεπερασμένης διάρκειας.

4.2 Μαθηματική Διατύπωση

Για κάθε τμήμα $m = 1, \dots, K$, ορίζουμε τον παραθυρωμένο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT)

$$\mathbf{X}_m[\ell] = \sum_{k=0}^{L-1} w[k] \mathbf{x}_m[k] e^{-j\frac{2\pi\ell k}{L}}, \quad \ell = 0, \dots, L-1.$$



Σχήμα 4.1: Τμηματοποίηση και παραθύρωση στη μέθοδο Welch. Η παραθύρωση μειώνει τη φασματική διαρροή μειώνοντας τις τιμές στα άκρα κάθε τμήματος.

Το περιοδογράμμα του τμήματος είναι

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}^{(m)}[\ell] = \frac{1}{L U} \mathbf{X}_m[\ell] \mathbf{X}_m^H[\ell], \quad U = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} w^2[k],$$

όπου το U κανονικοποιεί την ενέργεια του παραθύρου. Η εκτίμηση PSD κατά Welch προκύπτει ως μέσος όρος:

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}^{\text{Welch}}[\ell] = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K \hat{\mathbf{S}}_{xx}^{(m)}[\ell].$$

Συνήθεις επιλογές είναι επικάλυψη 50% και παράθυρα Hann ή Hamming.

4.3 Κανονικοποίηση και Ενέργεια Παραθύρου

Η παραθύρωση πολλαπλασιάζει κάθε τμήμα με το $w[k]$, $k = 0, \dots, L-1$, γεγονός που μειώνει την ενέργεια του τμήματος σε σχέση με το ορθογώνιο παράθυρο. Γι' αυτό τα περιοδογράμματα πρέπει να επανακλιμακώνονται κατάλληλα ώστε να διατηρείται η συνολική ισχύς.

Ρύθμιση και συμβολισμός. Θεωρούμε ότι το m -οστό τμήμα είναι $x_m[k]$, η παραθυρωμένη εκδοχή του $y_m[k] \triangleq w[k] x_m[k]$, και ο L -σημείων DFT του:

$$Y_m[\ell] = \sum_{k=0}^{L-1} y_m[k] e^{-j \frac{2\pi \ell k}{L}}, \quad \ell = 0, \dots, L-1.$$

Το θεώρημα Parseval για τον L -σημείων DFT δίνει:

$$\sum_{k=0}^{L-1} |y_m[k]|^2 = \frac{1}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} |Y_m[\ell]|^2.$$

Ορίζουμε τον συντελεστή μέσης τετραγωνικής τιμής (RMS) του παραθύρου:

$$U \triangleq \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} w^2[k].$$

Αν το x_m είναι WSS με μέση ισχύ ανά δείγμα $\mathbb{E}\{|x_m[k]|^2\} = P_x$, τότε η αναμενόμενη ενέργεια του παραθυρωμένου τμήματος μειώνεται σε:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{L-1} |y_m[k]|^2\right] = \sum_{k=0}^{L-1} \mathbb{E}\{|x_m[k]|^2\} w^2[k] = LU P_x.$$

Με Parseval:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} |Y_m[\ell]|^2\right] = LU P_x.$$

Συνέπεια για το περιοδόγραμμα. Το παραθυρωμένο περιοδόγραμμα ενός τμήματος πρέπει να κατανέμει συνολική ισχύ $\approx L P_x$ στα L bins (όπως στη χρήση ορθογωνίου παραθύρου). Αφού η παραθύρωση μειώνει την ενέργεια κατά U , πρέπει να διαιρέσουμε με το U για να γίνει αντιστάθμιση. Με την κλασική κανονικοποίηση DFT $1/L$, το *ορθά κανονικοποιημένο* περιοδόγραμμα Welch για ένα τμήμα είναι:

$$\widehat{S}_{xx}^{(m)}[\ell] = \frac{1}{LU} |Y_m[\ell]|^2,$$

ώστε:

$$\sum_{\ell=0}^{L-1} \widehat{S}_{xx}^{(m)}[\ell] \approx \frac{1}{LU} \sum_{\ell=0}^{L-1} |Y_m[\ell]|^2 = \frac{1}{U} \sum_{k=0}^{L-1} w^2[k] |x_m[k]|^2 \xrightarrow{\mathbb{E}} L P_x,$$

και έτσι έχουμε ίδια αναμενόμενη συνολική ισχύ όπως και στο τετράγωνο παράθυρο.

4.4 Παράδειγμα

Θεωρούμε

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} \sin(2\pi 0.005k) + 0.3w_1[k] \\ \sin(2\pi 0.0075k) + 0.3w_2[k] \end{bmatrix}, \quad w_i[k] \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

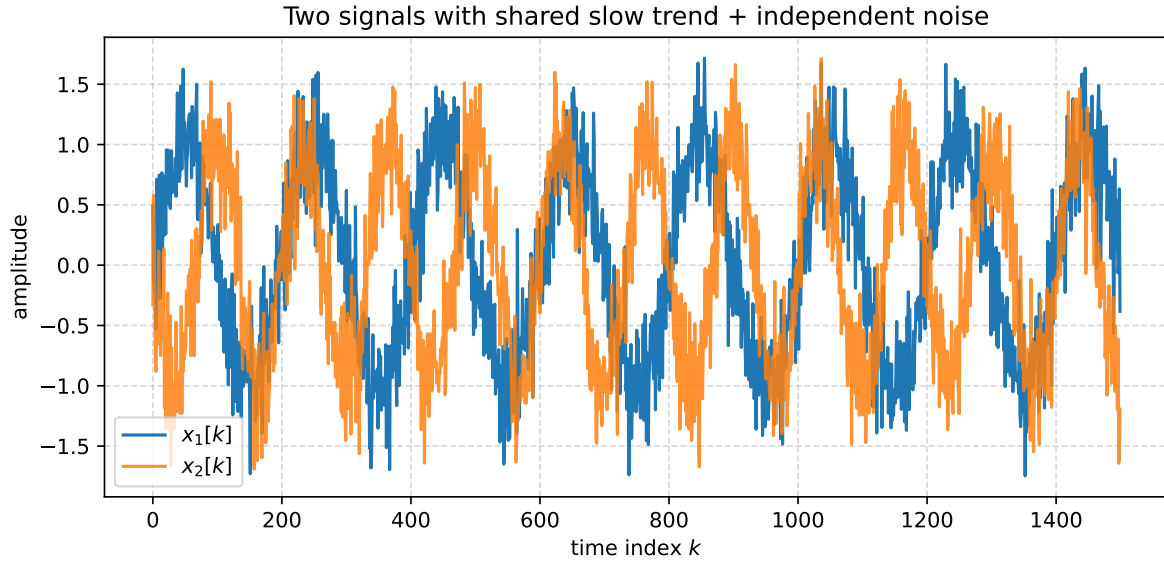
με $N = 4096$. Εκτιμούμε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) με τη μέθοδο Welch, χρησιμοποιώντας παράθυρο Hann και επικάλυψη 50%.

Python Implementation

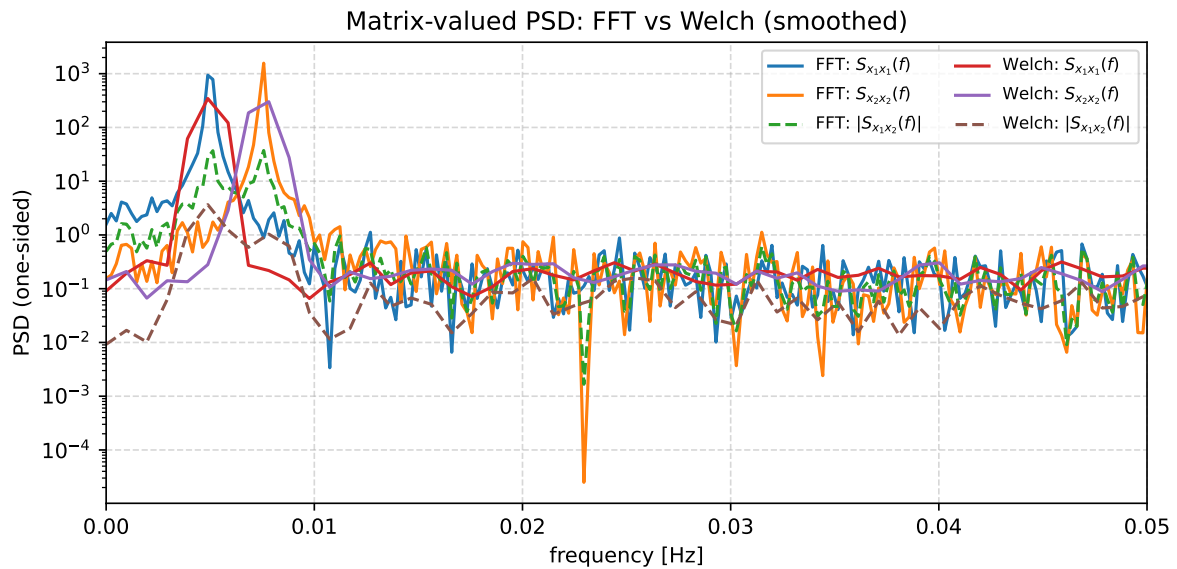
```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # -----
5 # Example: Two real-valued channels with slow trends + noise
6 # -----
7 np.random.seed(1)
8 fs = 1.0
9 N = 4096

```



Σχήμα 4.2: Τροχιές των $x_1[k]$ και $x_2[k]$ (στιγμιότυπα).



Σχήμα 4.3: Εκτιμήσεις PSD κατά Welch, με μειωμένο θόρυβο και πιο καθαρές κορυφές συχνότητας σε σχέση με το περιδογράμμα μέσω FFT.

```

10 k = np.arange(N)
11 t = k / fs
12
13 trend1 = np.sin(2*np.pi*0.005*t)
14 trend2 = np.sin(-2*np.pi*0.0075*t)
15
16 x1 = trend1 + 0.3*np.random.randn(N)
17 x2 = trend2 + 0.3*np.random.randn(N)
18 X = np.vstack([x1, x2]) # shape: (2, N)
19
20 # -----
21 # Raw FFT (matrix-valued periodogram)

```

```

22 # -----
23 Xf = np.fft.fft(X, n=N, axis=1)
24 freqs = np.fft.fftfreq(N, d=1/fs)
25 S_hat = np.zeros((N, 2, 2), dtype=complex)
26 for l in range(N):
27     v = Xf[:, l:l+1]
28     S_hat[l] = (1.0/N) * (v @ v.conj().T)
29
30 # One-sided PSD (real signals)
31 pos = freqs >= 0
32 freqs_pos = freqs[pos]
33 S_pos = S_hat[pos]
34 if N % 2 == 0:
35     doub = np.ones_like(freqs_pos, dtype=bool)
36     doub[0] = False
37     doub[-1] = False
38 else:
39     doub = np.ones_like(freqs_pos, dtype=bool)
40     doub[0] = False
41 S_pos[doub] *= 2.0
42
43 S11_fft = S_pos[:,0,0].real
44 S22_fft = S_pos[:,1,1].real
45 S12_fft = np.abs(S_pos[:,0,1])
46
47 # -----
48 # Welch matrix PSD (vector version)
49 # -----
50 L = 1024          # segment length
51 overlap = 0.5
52 D = int(L * overlap)
53 hop = L - D
54 starts = np.arange(0, N - L + 1, hop)
55 K = len(starts)
56 print("K=", K)
57
58 w = np.hanning(L)
59 U = (1.0/L) * np.sum(w**2)
60
61 S_welch = np.zeros((L, 2, 2), dtype=complex)
62
63 for start in starts:
64     seg = X[:, start:start+L]
65     segw = seg * w # window applied per channel
66     Xseg = np.fft.fft(segw, n=L, axis=1)
67     for l in range(L):
68         v = Xseg[:, l:l+1]
69         S_welch[l] += v @ v.conj().T
70
71 S_welch *= (1.0 / (K * L * U))
72
73 freqs_w = np.fft.fftfreq(L, d=1/fs)
74 pos_w = freqs_w >= 0
75 freqs_w_pos = freqs_w[pos_w]
76 S_w_pos = S_welch[pos_w]
77 if L % 2 == 0:
78     doub_w = np.ones_like(freqs_w_pos, dtype=bool)
79     doub_w[0] = False

```

```

80     doub_w[-1] = False
81 else:
82     doub_w = np.ones_like(freqs_w_pos, dtype=bool)
83     doub_w[0] = False
84 S_w_pos[doub_w] *= 2.0
85
86 S11_w = S_w_pos[:,0,0].real
87 S22_w = S_w_pos[:,1,1].real
88 S12_w = np.abs(S_w_pos[:,0,1])
89
90 # -----
91 # Plot time series (short segment)
92 # -----
93 plt.figure(figsize=(8,4))
94 plt.plot(k[:1500], x1[:1500], label=r"$x_1[k]$")
95 plt.plot(k[:1500], x2[:1500], label=r"$x_2[k]$", alpha=0.85)
96 plt.xlabel("time index $k$")
97 plt.ylabel("amplitude")
98 plt.title("Two signals with slow trends + independent noise")
99 plt.grid(True, ls="--", alpha=0.5)
100 plt.legend()
101 plt.tight_layout()
102 plt.show()
103
104 # -----
105 # Plot PSD comparison (FFT vs Welch)
106 # -----
107 plt.figure(figsize=(8,4))
108 # FFT
109 plt.semilogy(freqs_pos, S11_fft, label=r"FFT: $S_{x_1x_1}(f)$")
110 plt.semilogy(freqs_pos, S22_fft, label=r"FFT: $S_{x_2x_2}(f)$")
111 plt.semilogy(freqs_pos, S12_fft, "--", label=r"FFT: $|S_{x_1x_2}(f)|$")
112 # Welch
113 plt.semilogy(freqs_w_pos, S11_w, label=r"Welch: $S_{x_1x_1}(f)$")
114 plt.semilogy(freqs_w_pos, S22_w, label=r"Welch: $S_{x_2x_2}(f)$")
115 plt.semilogy(freqs_w_pos, S12_w, "--", label=r"Welch: $|S_{x_1x_2}(f)|$")
116
117 plt.xlim(0, 0.05)
118 plt.xlabel("frequency [Hz]")
119 plt.ylabel("PSD (one-sided)")
120 plt.title("Matrix-valued PSD: FFT vs Welch (smoothed)")
121 plt.grid(True, ls="--", alpha=0.5)
122 plt.legend(ncol=2, fontsize=8)
123 plt.tight_layout()
124 plt.show()

```

Listing 2: PSD Estimation via Welch's Method

4.5 Δίλημμα μεροληψίας-διακύμανσης (Bias-Variance Trade-off)

Η μέθοδος Welch εισάγει έναν θεμελιώδη συμβιβασμό (tradeoff) μεταξύ μεροληψίας (λόγω φασματικής λείανσης) και διακύμανσης (στατιστικής αβεβαιότητας).

Ανάλυση συχνότητας. Ο DFT κάθε τμήματος δειγματοληπτεί το φάσμα ανά

$$\Delta f = \frac{1}{LT_s}.$$

Μεγαλύτερο L δίνει λεπτότερη ανάλυση συχνότητας αλλά λιγότερα ανεξάρτητα δείγματα προς μέσο όρο.

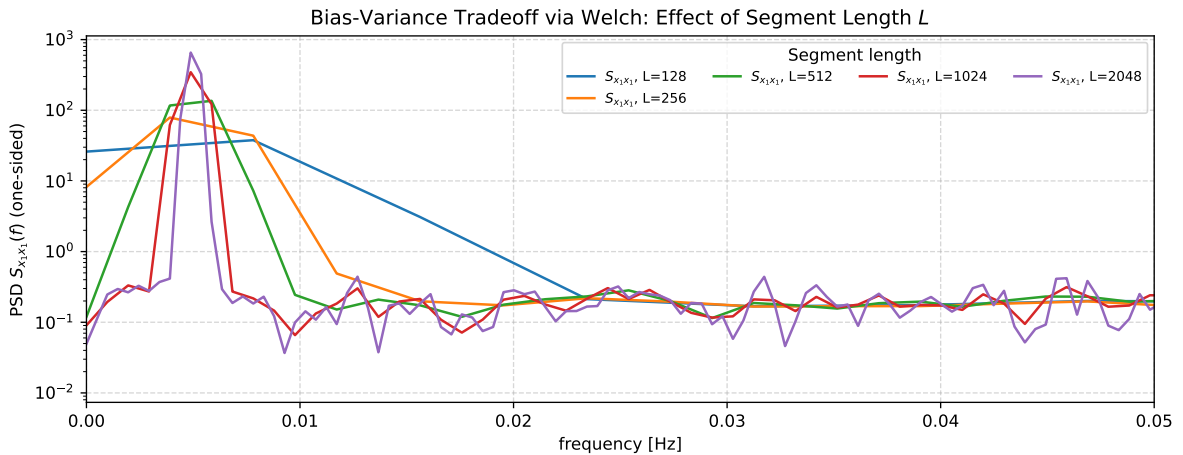
Μείωση διακύμανσης. Ο μέσος όρος σε K τμήματα μειώνει προσεγγιστικά τη διακύμανση κατά

$$\text{Var}\left\{\hat{\mathbf{S}}_{xx}^{\text{Welch}}[\ell]\right\} \approx \frac{1}{K} \text{Var}\left\{\hat{\mathbf{S}}_{xx}^{(m)}[\ell]\right\}.$$

Επομένως, μικρότερα τμήματα (μικρό L) αυξάνουν το πλήθος K και παράγουν πιο «ομαλές» PSD.

Δίλημμα μεροληψίας-διακύμανσης.

Μήκος τμήματος L	Ανάλυση Δf	Διακύμανση	Επίδραση στο PSD
Μεγάλο	Λεπτή	Υψηλή	Ακριβές αλλά θορυβώδες
Μικρό	Χονδροειδής	Χαμηλή	Ομαλό αλλά λιγότερο λεπτομερές



Σχήμα 4.4: Επίδραση του μήκους τμήματος L στην εκτίμηση PSD. Μεγάλο L προσφέρει καλύτερη ανάλυση αλλά πιο θορυβώδη εκτίμηση, ενώ μικρό L προσφέρει πιο ομαλό αλλά πιο μεροληπτικό φάσμα.

Πρακτική επιλογή. Επίλεξε L αρκετά μεγάλο ώστε να διαχωρίζονται οι σημαντικές φασματικές συνιστώσες, αλλά και αρκετά μικρό ώστε να εξασφαλίζονται αρκετά τμήματα ($K \approx 8-20$) για σταθερές εκτιμήσεις.

4.6 Welch PSD για Πολυκαναλικά Σήματα με Παραθύρωση ανά κανάλι

Για μια πραγματική πολυκαναλική στοχαστική διεργασία

$$\mathbf{x}_m[k] \in \mathbb{R}^M, \quad k = 0, \dots, L-1,$$

κάθε κανάλι μπορεί να χρησιμοποιεί το δικό του παράθυρο $w_i[k]$. Ορίζουμε τον διαγώνιο πίνακα παραθύρου

$$\mathbf{W}[k] = \text{diag}(w_1[k], w_2[k], \dots, w_M[k]),$$

ώστε το $\mathbf{W}[k]\mathbf{x}_m[k]$ να εφαρμόζει το κατάλληλο taper σε κάθε κανάλι ξεχωριστά.

DFT με παραθύρωση ανά κανάλι. Ο πολυκαναλικός διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) του τμήματος δίνεται από

$$\mathbf{X}_m[\ell] = \sum_{k=0}^{L-1} \mathbf{W}[k] \mathbf{x}_m[k] e^{-j\frac{2\pi\ell k}{L}}, \quad \ell = 0, \dots, L-1,$$

που παράγει ένα μιγαδικό διάνυσμα $\mathbf{X}_m[\ell] \in \mathbb{C}^M$ το οποίο περιέχει το φασματικό περιεχόμενο όλων των M καναλιών.

Ενέργεια παραθύρου ανά κανάλι. Εφόσον κάθε κανάλι μπορεί να χρησιμοποιεί διαφορετικό παράθυρο, η αποτελεσματική ενέργεια πρέπει να κανονικοποιείται ξεχωριστά. Ορίζουμε τις τετραγωνικές μέσες τιμές (RMS) των παραθύρων:

$$U_i = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} w_i^2[k], \quad \mathbf{D} = \text{diag}(U_1, U_2, \dots, U_M),$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{D}$ είναι θετικός διαγώνιος και συγκεντρώνει την ισχύ παραθύρου κάθε καναλιού.

Περιοδόγραμμα. Για να εξασφαλιστεί συνεπής κανονικοποίηση μεταξύ καναλιών, το περιοδόγραμμα του τμήματος γράφεται ως

$$\widehat{\mathbf{S}}_{xx}^{(m)}[\ell] = \frac{1}{L} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}_m[\ell] \mathbf{X}_m^H[\ell] \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}},$$

όπου το $\mathbf{D}^{-1/2}$ αντισταθμίζει τις άνισες ισχύεις παραθύρου ανά κανάλι.

Τα στοιχεία του περιοδογράμματος γράφονται

$$[\widehat{\mathbf{S}}_{xx}^{(m)}[\ell]]_{ij} = \frac{1}{L\sqrt{U_i U_j}} X_{m,i}[\ell] X_{m,j}^*[\ell],$$

που δείχνει ότι κάθε στοιχείο κλιμακώνεται σύμφωνα με τις αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες παραθύρου των δύο καναλιών.

Μέσος όρος μεταξύ τμημάτων. Όπως και στην μονοκαναλική περίπτωση, η εκτίμηση Welch της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος προκύπτει με υπολογισμό μέσου όρου σε K παραθυρωμένα τμήματα:

$$\widehat{\mathbf{S}}_{xx}^{\text{Welch}}[\ell] = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K \widehat{\mathbf{S}}_{xx}^{(m)}[\ell].$$

Κάθε όρος παρέχει μια ανεξάρτητη ή μερικώς επικαλυπτώμενη παρατήρηση της φασματικής δομής, και ο υπολογισμός μέσου όρου μειώνει τη διακύμανση του εκτιμητή περίπου κατά $1/K$.

Ειδικές περιπτώσεις και παρατηρήσεις.

- Όταν όλα τα κανάλια χρησιμοποιούν το ίδιο παράθυρο $w[k]$, τότε $\mathbf{D} = U\mathbf{I}$ και η έκφραση απλοποιείται στη γνωστή μονοκαναλική κανονικοποίηση:

$$\hat{\mathbf{S}}_{xx}^{(m)}[\ell] = \frac{1}{LU} \mathbf{X}_m[\ell] \mathbf{X}_m^H[\ell].$$

- Η γενίκευση αυτή είναι χρήσιμη σε πολυαισθητηριακά συστήματα, όπου τα κανάλια μπορεί να έχουν διαφορετικά παράθυρα ή διαφορετικά μήκη δείγματος.
- Το τελικό $\hat{\mathbf{S}}_{xx}^{\text{Welch}}[\ell]$ παραμένει ανάστροφος Ερμιτιανός και με θετικά ορισμένη μορφή για όλες τις συχνότητες ℓ .

5 Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (LTI) Συστήματα με WSS Είσοδο

5.1 Πλαίσιο και Βασικές Ιδιότητες

Ένα **LTI σύστημα** είναι ταυτόχρονα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο. Για διανυσματικά σήματα διακριτού χρόνου $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^M$ (είσοδος) και $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^P$ (έξοδος), ένα LTI σύστημα χαρακτηρίζεται πλήρως από τη *κρουστική του απόκριση* (*impulse-response*) (σε μορφή πίνακα) $\{\mathbf{H}[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$, όπου $\mathbf{H}[m] \in \mathbb{R}^{P \times M}$. Η σχέση εισόδου-εξόδου δίνεται από τη συνέλιξη:

$$\mathbf{y}[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}[m] \mathbf{x}[k-m].$$

Βασικές ιδιότητες:

- **Γραμμικότητα:** $\mathcal{T}\{a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2\} = a\mathcal{T}\{\mathbf{x}_1\} + b\mathcal{T}\{\mathbf{x}_2\}$.
- **Χρονική αμεταβλητότητα:** μια χρονική μετατόπιση στην είσοδο προκαλεί την ίδια μετατόπιση στην έξοδο.
- **Σταθερότητα (BIBO):** αν $\sum_m \|\mathbf{H}[m]\| < \infty$, τότε κάθε φραγμένη είσοδος παράγει φραγμένη έξοδο.
- **Αιτιότητα:** αν $\mathbf{H}[m] = \mathbf{0}$ για $m < 0$, η έξοδος εξαρτάται μόνο από παρόντα και παρελθοντικά δείγματα της εισόδου.

Αν η είσοδος $\mathbf{x}[k]$ είναι WSS/εργοδική και το σύστημα είναι σταθερό, τότε και η έξοδος $\mathbf{y}[k]$ είναι WSS/εργοδική. Τα στατιστικά μεγέθη (μέση τιμή, συσχέτιση, Φασματική Πυκνότητα Ισχύος) προκύπτουν άμεσα από την ακολουθία $\{\mathbf{H}[m]\}$.

5.2 Σταθερότητα LTI Συστημάτων

Η σταθερότητα ενός LTI συστήματος καθορίζει αν φραγμένες ή πεπερασμένης ισχύος είσοδοι παράγουν καλά ορισμένες, πεπερασμένης ισχύος εξόδους. Για συστήματα διακριτού χρόνου υπάρχουν διαφορετικές ισοδύναμες έννοιες σταθερότητας, ανάλογα με το αν εξετάζουμε ντετερμινιστικά ή στοχαστικά σήματα.

1. Σταθερότητα BIBO (Ντετερμινιστική). Ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση $\mathbf{H}[m] \in \mathbb{R}^{P \times M}$ λέγεται **Bounded-Input Bounded-Output (BIBO) σταθερό** αν κάθε φραγμένη είσοδος παράγει φραγμένη έξοδο:

$$\sup_k \|\mathbf{x}[k]\| < \infty \implies \sup_k \|\mathbf{y}[k]\| < \infty.$$

Για LTI συστήματα αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι απόλυτα αθροίσιμη η κρουστική απόκριση:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \|\mathbf{H}[m]\| < \infty.$$

Διαισθητικά, η απόκριση του συστήματος σε έναν φραγμένο παλμό πρέπει να φθίνει αρκετά γρήγορα ώστε το άθροισμα της συνέλιξης να συγκλίνει.

2. Σταθερότητα Μέσης Τετραγωνικής Τιμής (Mean-Square Stability). Για στοχαστικές (WSS) εισόδους απαιτούμε ροπές δεύτερης τάξης της εξόδου να παραμένουν πεπερασμένες:

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{x}[k]\|^2\} < \infty \implies \mathbb{E}\{\|\mathbf{y}[k]\|^2\} < \infty.$$

Αυτό ικανοποιείται όταν η κρουστική απόκριση είναι τετραγωνικά αθροίσιμη:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \|\mathbf{H}[m]\|^2 < \infty.$$

Η τετραγωνική αθροισμότητα εξασφαλίζει ότι το συνολικό κέρδος ισχύος του φίλτρου είναι πεπερασμένο.

3. Σχέση μεταξύ BIBO και Σταθερότητας Μέσης Τετραγωνικής Τιμής.

- Η BIBO σταθερότητα $\implies$ σταθερότητα μέσης τετραγωνικής τιμής, αλλά όχι απαραίτητα το αντίστροφο.
- Για τα περισσότερα συστήματα επεξεργασίας σημάτων, η ℓ^1 -σταθερότητα (BIBO) εξασφαλίζει ότι όλα τα WSS σήματα πεπερασμένης ισχύος έχουν καλά ορισμένη ισχύ και συσχέτιση στην έξοδο.

4. Συνθήκη στο Πεδίο της Συχνότητας. Έστω $\mathbf{H}(e^{j\omega})$ η μήτρα συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Η σταθερότητα είναι ισοδύναμη με το να έχει η κρουστική απόκριση πεπερασμένη ℓ^2 -νόρμα, δηλαδή ισοδύναμα:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|\mathbf{H}(e^{j\omega})\|_F^2 d\omega < \infty.$$

Για μονοδιάστατα συστήματα αυτό ικανοποιείται αυτόματα όταν όλοι οι πόλοι του $H(z)$ βρίσκονται αυστηρά εντός του μοναδιαίου κύκλου.

5. Συνέπειες για WSS Εισόδους. Αν $\mathbf{x}[k]$ είναι WSS με πεπερασμένη ισχύ (πεπερασμένη διακύμανση), τότε για ένα σταθερό LTI σύστημα ισχύει:

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{y}[k]\|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}[\mathbf{H}(e^{j\omega}) \mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) \mathbf{H}^H(e^{j\omega})] d\omega < \infty,$$

και η $\mathbf{y}[k]$ παραμένει WSS. Άρα η σταθερότητα εξασφαλίζει ότι όλες οι ροπές και η PSD της εξόδου είναι πεπερασμένες και καλά ορισμένες.

6. Σύνοψη.

Κριτήριο	Συνθήκη	Ερμηνεία
Σταθερότητα BIBO	$\sum_m \ \mathbf{H}[m]\ < \infty$	φραγμένη είσοδος $\Rightarrow$ φραγμένη έξοδος
Σταθερότητα μέσης τετραγωνικής τιμής	$\sum_m \ \mathbf{H}[m]\ ^2 < \infty$	πεπερασμένη ισχύς εισόδου $\Rightarrow$ πεπερασμένη ισχύς εξόδου
Συνθήκη συχνοτήτων	$\int_{-\pi}^{\pi} \ \mathbf{H}(e^{j\omega})\ _F^2 d\omega < \infty$	πεπερασμένο κέρδος σε όλες τις συχνότητες

Σχόλια.

- Η σταθερότητα εξασφαλίζει σύγκλιση των αθροισμάτων συνέλιξης και πεπερασμένες PSD.
- Όλα τα φυσικά φίλτρα οφείλουν να είναι σταθερά. Διαφορετικά θόρυβος ή τυχαίες διακυμάνσεις θα αυξάνονταν χωρίς όριο.
- Στη στοχαστική ανάλυση, η σταθερότητα είναι η κεντρική προϋπόθεση που επιτρέπει στα LTI συστήματα να διατηρούν WSS και εργοδικότητα.

5.3 Χαρακτηριστικά Δεύτερης Τάξης στο Πεδίο του Χρόνου

Θέτουμε $\boldsymbol{\mu}_x = \mathbb{E}\{\mathbf{x}[k]\}$ και ορίζουμε

$$\mathbf{R}_{xx}[\tau] \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k+\tau]\} \in \mathbb{R}^{M \times M}, \quad \mathbf{R}_{yy}[\tau] \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{y}[k]\mathbf{y}^T[k+\tau]\} \in \mathbb{R}^{P \times P}.$$

Μέση τιμή.

$$\boldsymbol{\mu}_y = \mathbb{E}\{\mathbf{y}[k]\} = \sum_m \mathbf{H}[m] \mathbb{E}\{\mathbf{x}[k-m]\} = \left(\sum_m \mathbf{H}[m] \right) \boldsymbol{\mu}_x.$$

Ειδικά, αν $\boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{0}$ τότε $\boldsymbol{\mu}_y = \mathbf{0}$.

Αυτοσυσχέτιση. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης και το ότι η $\mathbf{x}$ είναι WSS:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}[\tau] &= \mathbb{E} \left\{ \left(\sum_m \mathbf{H}[m] \mathbf{x}[k-m] \right) \left(\sum_\ell \mathbf{H}[\ell] \mathbf{x}[k+\tau-\ell] \right)^T \right\} \\ &= \sum_m \sum_\ell \mathbf{H}[m] \mathbb{E} \{ \mathbf{x}[k-m] \mathbf{x}^T[k+\tau-\ell] \} \mathbf{H}^T[\ell] \\ &= \boxed{\mathbf{R}_{yy}[\tau] = \sum_m \sum_\ell \mathbf{H}[m] \mathbf{R}_{xx}[\tau+m-\ell] \mathbf{H}^T[\ell].} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, η ετεροσυσχέτιση εισόδου-εξόδου είναι:

$$\boxed{\mathbf{R}_{xy}[\tau] = \sum_m \mathbf{R}_{xx}[\tau-m] \mathbf{H}^T[m], \quad \mathbf{R}_{yx}[\tau] = \sum_m \mathbf{H}[m] \mathbf{R}_{xx}[\tau+m].}$$

5.4 Σχέσεις στο Πεδίο της Συχνότητας

Ορίζουμε τον πίνακα συνάρτησης μεταφοράς (DTFT της κρουστικής απόκρισης)

$$\mathbf{H}(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}[m] e^{-j\omega m} \in \mathbb{C}^{P \times M}.$$

Έστω $\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega})$ και $\mathbf{S}_{yy}(e^{j\omega})$ οι φασματικές πυκνότητες ισχύος των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ αντίστοιχα. Παίρνοντας DTFT των παραπάνω (ή χρησιμοποιώντας τη σχέση $Y = HX$ στο πεδίο της συχνότητας):

$$\boxed{\mathbf{S}_{yy}(e^{j\omega}) = \mathbf{H}(e^{j\omega}) \mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) \mathbf{H}^H(e^{j\omega}).}$$

Για τις δια-φασματικές ποσότητες εισόδου-εξόδου:

$$\boxed{\mathbf{S}_{xy}(e^{j\omega}) = \mathbf{H}(e^{j\omega}) \mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}), \quad \mathbf{S}_{yx}(e^{j\omega}) = \mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) \mathbf{H}^H(e^{j\omega}).}$$

Ειδική περίπτωση (λευκή είσοδος). Αν $\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \mathbf{I}_M$, τότε:

$$\boxed{\mathbf{S}_{yy}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \mathbf{H}(e^{j\omega}) \mathbf{H}^H(e^{j\omega}).}$$

Έτσι, το φάσμα της εξόδου ισούται με το φάσμα της εισόδου διαμορφωμένο από το φίλτρο.

5.5 Λυμένο παράδειγμα: Συστοιχία Φίλτρων 2×2 (Filter Bank) με Είσοδο Vector AR(1)

Μοντέλο εισόδου.

$$\mathbf{x}[k] = \rho \mathbf{x}[k-1] + \mathbf{w}[k], \quad \mathbf{w}[k] \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_w^2 \mathbf{I}_2), \quad |\rho| < 1.$$

Κάθε κανάλι έχει Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{|1 - \rho e^{-j\omega}|^2} = \frac{\sigma_w^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega}.$$

Συστοιχία LTI Φίλτρων.

$$\mathbf{H}[0] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}[1] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

άρα

$$\mathbf{H}(e^{j\omega}) = \begin{bmatrix} 0.5(1 + e^{-j\omega}) & 0.5(1 + e^{-j\omega}) \\ (1 - e^{-j\omega}) & -(1 - e^{-j\omega}) \end{bmatrix}.$$

Με τους ορισμούς sum/difference

$$s[k] = x_1[k] + x_2[k], \quad d[k] = x_1[k] - x_2[k],$$

προκύπτει

$$y_1[k] = \frac{1}{2}s[k] + \frac{1}{2}s[k-1], \quad y_2[k] = d[k] - d[k-1].$$

Άρα

$$H_{\text{LP}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) = e^{-j\omega/2} \cos(\omega/2),$$

$$H_{\text{HP}}(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2} 2j \sin(\omega/2).$$

Αναμενόμενη συμπεριφορά.

- y_1 : καναλι low-pass – τονίζει ομαλές μεταβολές (ισχυρό για μικρά ω).
- y_2 : καναλι high-pass – τονίζει γρήγορες αλλαγές και θόρυβο.

Φάσματα εξόδου.

$$S_{y_1 y_1}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2 \cos^2(\omega/2)}{|1 - \rho e^{-j\omega}|^2}, \quad S_{y_2 y_2}(e^{j\omega}) = \frac{4\sigma_w^2 \sin^2(\omega/2)}{|1 - \rho e^{-j\omega}|^2}.$$

Εφόσον s και d είναι ασυσχέτιστα, ισχύει $S_{y_1 y_2} = 0$.

5.6 Έλεγχοι Συνέπειας και Πρακτικές Παρατηρήσεις

- **Ερμιτιανή PSD:** $S_{yy}(e^{j\omega}) = S_{yy}^H(e^{j\omega})$ και θετικά ημιορισμένη: για κάθε $\mathbf{a}$ ισχύει $\mathbf{a}^H \mathbf{S}_{yy} \mathbf{a} \geq 0$.
- **Συνολική συνδιασπορά:**

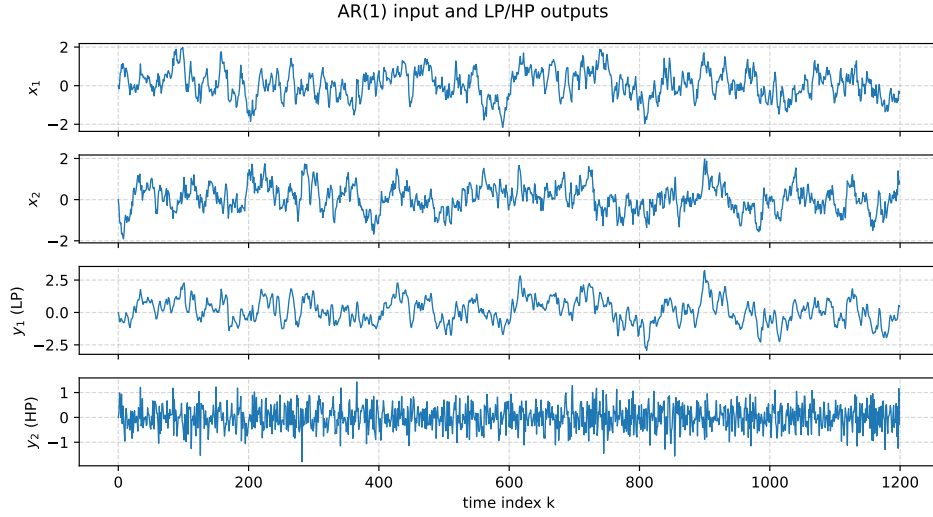
$$\mathbf{R}_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{S}_{yy}(e^{j\omega}) d\omega.$$

- **Λευκή είσοδος:** Αν $\mathbf{S}_{xx} = \sigma_x^2 \mathbf{I}$, τότε

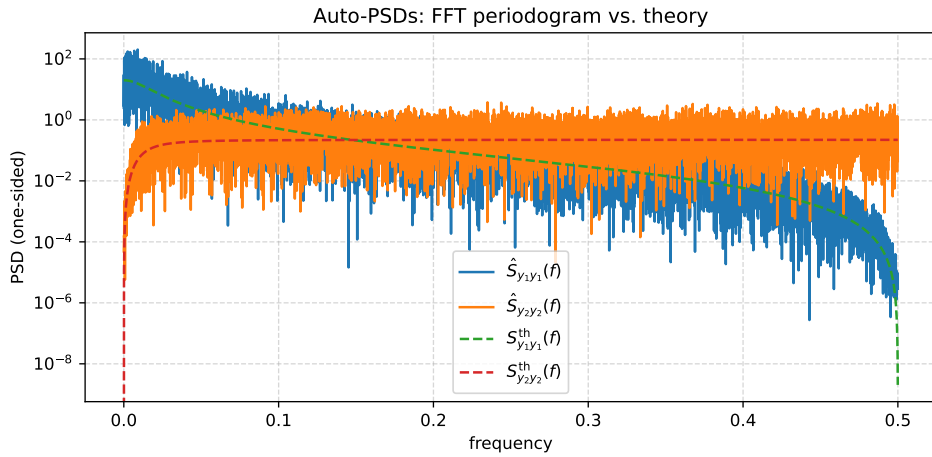
$$\mathbf{S}_{yy} = \sigma_x^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^H,$$

δηλαδή η έξοδος προκύπτει από καθαρή φασματική διαμόρφωση του λευκού θορύβου.

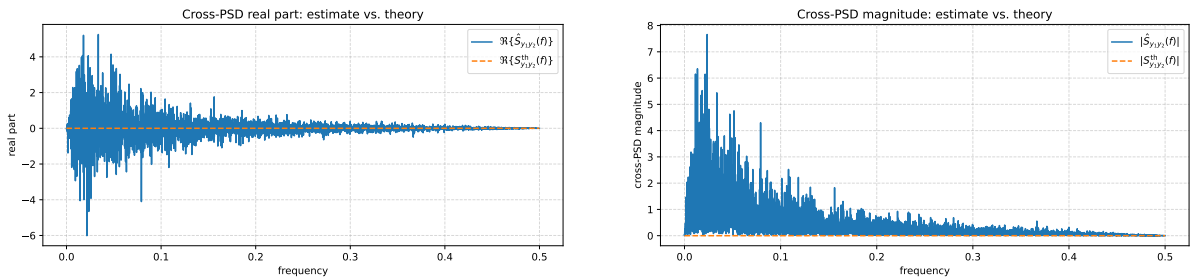
- **Εργοδικότητα/σταθερότητα:** Ένα σταθερό LTI σύστημα διατηρεί WSS και εργοδικότητα, επιτρέποντας την εκτίμηση στατιστικών εξόδου από ένα μόνο στιγμιότυπο (μία μόνο κυματομορφή).



Σχήμα 5.1: Δείγματα εισόδου και εξόδου για το 2×2 LTI συστοιχία φίλτρων. Το y_1 είναι μια εξομαλυμένη (low-pass) εκδοχή των εισόδων, ενώ το y_2 τονίζει γρήγορες διαφορές (high-pass).



Σχήμα 5.2: Εκτίμηση μονόπλευρης PSD των x_1 , x_2 , y_1 , y_2 μέσω FFT. Το low-pass κανάλι y_1 έχει ενέργεια συγκεντρωμένη κοντά στο DC, ενώ το y_2 παρουσιάζει αυξημένη ισχύ σε υψηλές συχνότητες.



Σχήμα 5.3: Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος μεταξύ y_1 και y_2 : πραγματικό μέρος και μέτρο. Οι σχεδόν μηδενικές τιμές επιβεβαιώνουν ότι τα δύο κανάλια είναι φασματικά ασυσχέτιστα.

6 Παραμετρική Εκτίμηση Φάσματος: Μοντέλα AR

6.1 Κίνητρο

Μέχρι τώρα είδαμε **μη παραμετρικές** τεχνικές εκτίμησης φάσματος, όπως το περιοδόγραμμα και τη μέθοδο Welch. Παρά την απλότητά τους, παρουσιάζουν περιορισμούς:

- Βασίζονται σε τμήματα δεδομένων πεπερασμένου μήκους, περιορίζοντας την ανάλυση συχνότητας.
- Υπάρχει εγγενής συμβιβασμός (tradeoff) μεταξύ συχνοτικής ανάλυσης (frequency resolution) και διακύμανσης (variance).
- Τα φασματικά μέγιστα μπορεί να θολώνουν ή να συγχωνεύονται όταν το σήμα είναι μικρού μήκους ή έχει χαμηλό signal to noise ratio (SNR).
- Το παράθυρο και ο υπολογισμός μέσου όρου μειώνουν τη διακύμανση αλλά διευρύνουν τα χαρακτηριστικά στενής ζώνης.

Για να ξεπεράσουμε αυτά τα ζητήματα, χρησιμοποιούμε παραμετρικές μεθόδους βασισμένες σε μοντέλα. Η βασική ιδέα είναι να υποθέσουμε ότι το σήμα ακολουθεί ένα γνωστό στοχαστικό μοντέλο, όπως ένα **αυτοπαλίνδρομο (AR)** μοντέλο, και να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του αντί για το ίδιο το φάσμα.

Αφού βρούμε τις παραμέτρους, η PSD προκύπτει αναλυτικά. Αυτό προσφέρει υψηλή φασματική ανάλυση ακόμη και με λίγα δεδομένα και μπορεί να επιτρέψει πιο εύκολα τον εντοπισμό στενής ζώνης συνιστωσών θαμμένων μέσα σε θόρυβο.

6.2 Αυτοπαλίνδρομο (AR) Μοντέλα

Ένα διακριτού χρόνου **AR**(p) μοντέλο ορίζεται ως:

$$x[k] = - \sum_{i=1}^p a_i x[k-i] + w[k], \quad w[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2),$$

όπου:

- p είναι η τάξη του μοντέλου,
- $\{a_i\}$ είναι οι AR συντελεστές,
- $w[k]$ είναι μηδενικού μέσου λευκός θόρυβος.

Το μοντέλο ισοδυναμεί με διέλευση λευκού θορύβου από ένα all-pole φίλτρο:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-j\omega i}},$$

του οποίου οι πόλοι καθορίζουν τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος.

Η αντίστοιχη θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος είναι:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{|1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-j\omega i}|^2}.$$

6.3 Παράδειγμα: Αυτοαναδρομικό Μοντέλο AR(2)

Θεωρούμε ένα αυτοαναδρομικό (AR) μοντέλο δεύτερης τάξης:

$$x[k] = -a_1x[k-1] - a_2x[k-2] + w[k], \quad w[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2).$$

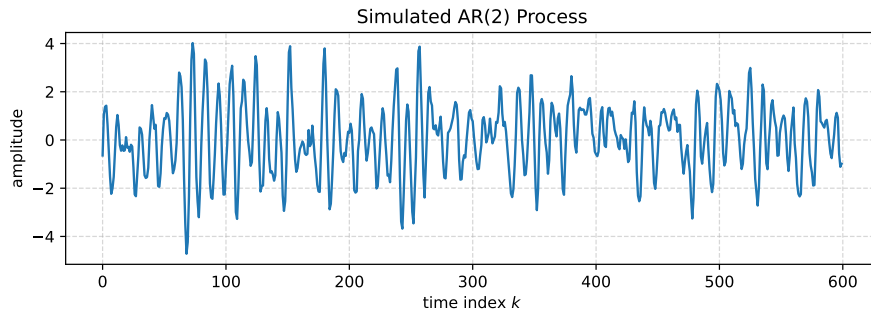
Αν επιλέξουμε συζυγείς πόλους με ακτίνα r και γωνία θ , τότε:

$$1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} = (1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1}) \Rightarrow a_1 = -2r \cos \theta, \quad a_2 = r^2.$$

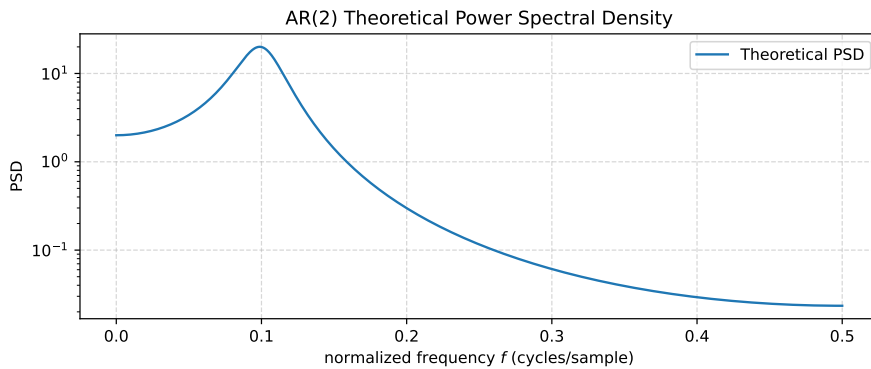
Η αντίστοιχη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) είναι:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{|1 + a_1e^{-j\omega} + a_2e^{-j2\omega}|^2}.$$

Για παράδειγμα, με παραμέτρους $r = 0.9$, $\theta = 0.2\pi$ και $\sigma_w^2 = 0.25$, η διαδικασία παράγει ένα στενής ζώνης σήμα με έντονη συντονιστική συμπεριφορά κοντά στις συχνότητες $\omega = \pm 0.2\pi$.



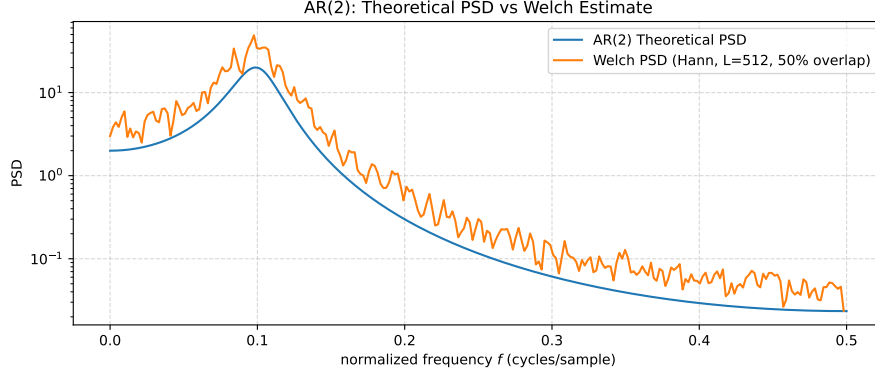
Χρονοσειρά μίας συνάρτησης δείγματος του AR(2) μοντέλου.



Θεωρητική PSD του AR(2) μοντέλου.

6.4 Σύγκριση με τη Μέθοδο Welch

Παρότι τόσο η μέθοδος Welch όσο και η βασισμένη σε μοντέλο (model-based) AR προσέγγιση εκτιμούν τη PSD, η AR μέθοδος παρέχει οξύτερες φασματικές κορυφές ακόμη και για μικρά σύνολα δεδομένων. Αυτό συμβαίνει επειδή η δομή του μοντέλου κωδικοποιεί τις χρονικές συσχετίσεις με συμπαγή τρόπο, αντί να βασίζεται σε παραθυροποιημένο μέσο όρο.



Σύγκριση μεταξύ AR και Welch εκτιμήσεων PSD.

6.5 Διανυσματικά Αυτοπαλίνδρομα Μοντέλα (VAR)

Για πολυδιάστατα σήματα $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^M$, το διανυσματικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο $\text{VAR}(p)$ ορίζεται ως:

$$\mathbf{x}[k] = - \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{x}[k-i] + \mathbf{w}[k],$$

όπου $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{M \times M}$ είναι πίνακες συντελεστών και $\mathbf{w}[k] \sim (0, \Sigma_w)$ είναι λευκός θόρυβος με συνδιασπορά Σ_w .

Η συνάρτηση συχνότητας του συστήματος είναι:

$$\mathbf{H}(e^{j\omega}) = \left(\mathbf{I}_M + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i e^{-j\omega i} \right)^{-1},$$

και η αντίστοιχη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) σε πίνακα:

$$\mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega}) = \mathbf{H}(e^{j\omega}) \Sigma_w \mathbf{H}^H(e^{j\omega}).$$

Τα διαγώνια στοιχεία της $\mathbf{S}_{xx}$ δίνουν τις αυτο-PSD για κάθε κανάλι, ενώ τα εκτός διαγωνίου στοιχεία αποτυπώνουν τις διαφασματικές σχέσεις μεταξύ καναλιών.

6.6 Στασιμότητα και Σταθερότητα

Ένα $\text{AR}(p)$ μοντέλο είναι WSS αν το χαρακτηριστικό του πολώνυμο

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}$$

έχει όλες τις ρίζες **εκτός του μοναδιαίου κύκλου**. Αυτό εξασφαλίζει πεπερασμένη διακύμανση και χρονικά αναλλοίωτη αυτοσυσχέτιση.

Για διανυσματικά μοντέλα, η στασιμότητα απαιτεί:

$$\det \left[\mathbf{I}_M + \sum_i \mathbf{A}_i z^{-i} \right] \neq 0, \quad \forall |z| \geq 1,$$

ή ισοδύναμα όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου $\mathbf{I}_M + \sum_i \mathbf{A}_i z^{-i}$ να βρίσκονται **εντός** του μοναδιαίου κύκλου.

6.7 Εξισώσεις Yule–Walker

Θεωρούμε ένα μηδενικού μέσου, πραγματικό, WSS αυτοπαλίνδρομο μοντέλο $AR(p)$:

$$x[k] = - \sum_{i=1}^p a_i x[k-i] + w[k], \quad w[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2), \quad \mathbb{E}\{w[k] w[\ell]\} = \sigma_w^2 \delta[k - \ell],$$

όπου $\{w[k]\}$ είναι λευκός θόρυβος και ασυσχέτιστος με τα παρελθόντα δείγματα $\{x[k-i]\}_{i \geq 1}$. Ορίζουμε την αυτοσυσχέτιση:

$$R_{xx}[\tau] \triangleq \mathbb{E}\{x[k] x[k+\tau]\}, \quad R_{xx}[-\tau] = R_{xx}[\tau] \text{ (για πραγματικά σήματα)}.$$

Βήμα 1: Πολλαπλασιασμός με μετατοπισμένο δείγμα και λήψη της αναμενόμενης τιμής. Για συγκεκριμένη υστέρηση $\tau \in \mathbb{Z}$, πολλαπλασιάζουμε και παίρνουμε αναμενόμενη τιμή:

$$\mathbb{E}\{x[k] x[k-\tau]\} = - \sum_{i=1}^p a_i \mathbb{E}\{x[k-i] x[k-\tau]\} + \mathbb{E}\{w[k] x[k-\tau]\}.$$

Λόγω στασιμότητας:

$$\mathbb{E}\{x[k] x[k-\tau]\} = R_{xx}[\tau], \quad \mathbb{E}\{x[k-i] x[k-\tau]\} = R_{xx}[\tau-i].$$

Βήμα 2: Ο λευκός θόρυβος μηδενίζει το διασταυρούμενο όρο. Για $\tau \geq 1$,

$$\mathbb{E}\{w[k] x[k-\tau]\} = 0,$$

ενώ για $\tau = 0$ ισχύει $\mathbb{E}\{w[k] x[k]\} = \sigma_w^2$.

Βήμα 3: Σχέσεις Yule–Walker για $\tau \geq 1$. Για $\tau = 1, 2, \dots, p$ παίρνουμε το ομογενές σύστημα:

$$R_{xx}[\tau] + \sum_{i=1}^p a_i R_{xx}[\tau-i] = 0, \quad \tau = 1, \dots, p.$$

Βήμα 4: Η εξίσωση για υστέρηση μηδέν. Για $\tau = 0$ προκύπτει η μη-ομογενής σχέση:

$$R_{xx}[0] + \sum_{i=1}^p a_i R_{xx}[i] = \sigma_w^2.$$

Βήμα 5: Μορφή πίνακα Toeplitz. Ομαδοποιώντας τις εξισώσεις $1, \dots, p$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[1] & \cdots & R_{xx}[p-1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & \cdots & R_{xx}[p-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}[p-1] & R_{xx}[p-2] & \cdots & R_{xx}[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{R} \text{ (Toeplitz)}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} R_{xx}[1] \\ \vdots \\ R_{xx}[p] \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}.$$

Άρα:

$$\mathbf{R} \mathbf{a} = -\mathbf{r}.$$

Μπορούμε τώρα να λύσουμε το σύστημα ως προς $\mathbf{a}$, και να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου. Αφού προσδιοριστούν οι συντελεστές, η διακύμανση του λευκού θορύβου είναι:

$$\sigma_w^2 = R_{xx}[0] + \sum_{i=1}^p a_i R_{xx}[i] = R_{xx}[0] + \mathbf{a}^\top \mathbf{r}.$$

Βήμα 6: Σύνδεση με την PSD. Το φάσμα ενός $\text{AR}(p)$ μοντέλου έχει την παρακάτω μορφή:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-j\omega i} \right|^2}.$$

Έτσι, οι εξισώσεις Yule–Walker δίνουν άμεσα τα $\{a_i\}$ και τη σ_w^2 από τις αυτοσυσχετίσεις, οπότε η PSD προσδιορίζεται πλήρως.

Βήμα 7: Εκτίμηση από δεδομένα. Για μια πεπερασμένη κυματομορφή¹ $\{x[k]\}_{k=0}^{N-1}$ (μηδενικού μέσου, ή μετά την αφαίρεση του μέσου), εκτιμούμε την αυτοσυσχέτιση. Δύο συνηθισμένοι ορισμοί είναι:

$$(\text{μεροληπτικός}) \quad \hat{R}_{xx}^{(b)}[\tau] = \frac{1}{N} \sum_{k=\tau}^{N-1} x[k] x[k - \tau],$$

$$(\text{αμερόληπτος}) \quad \hat{R}_{xx}^{(u)}[\tau] = \frac{1}{N - \tau} \sum_{k=\tau}^{N-1} x[k] x[k - \tau].$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε το σύστημα Toeplitz:

$$\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{a}} = -\hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\sigma}_w^2 = \hat{R}_{xx}[0] + \hat{\mathbf{a}}^\top \hat{\mathbf{r}}.$$

Βήμα 8: Επίλυση του συστήματος. Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα είτε με γενική επίλυση γραμμικών εξισώσεων (`numpy.linalg.solve`), είτε να εκμεταλλευτούμε τη δομή Toeplitz. Ο αλγόριθμος Levinson–Durbin παρέχει επίλυση $\mathcal{O}(p^2)$. Ορίζουμε δυνάμεις σφάλματος πρόβλεψης E_m και συντελεστές ανάκλασης (PARCOR) k_m :

$$\text{Αρχικοποίηση: } a_1^{(1)} = -\frac{\hat{R}_{xx}[1]}{\hat{R}_{xx}[0]}, \quad k_1 = -a_1^{(1)}, \quad E_1 = \hat{R}_{xx}[0] (1 - k_1^2).$$

Αναδρομή για $m = 2, \dots, p$:

$$k_m = -\frac{\hat{R}_{xx}[m] + \sum_{i=1}^{m-1} a_i^{(m-1)} \hat{R}_{xx}[m-i]}{E_{m-1}},$$

$$a_m^{(m)} = k_m, \quad a_i^{(m)} = a_i^{(m-1)} + k_m a_{m-i}^{(m-1)} \quad (i = 1, \dots, m-1),$$

$$E_m = E_{m-1} (1 - k_m^2).$$

¹Ένα μόνο στιγμιότυπο της διεργασίας.

Στο τέλος, $\hat{a}_i = a_i^{(p)}$, ενώ η εκτίμηση της διακύμανσης του θορύβου είναι:

$$\hat{\sigma}_w^2 = E_p,$$

σύμφωνη με τη σχέση Yule–Walker.

Πρακτικές σημειώσεις.

- *Αφαίρεση μέσου*: αφαιρέστε το δειγματικό μέσο πριν την εκτίμηση της $\hat{R}_{xx}[\tau]$.
- *Επιλογή τάξης*: επιλέξτε p με AIC/BIC ή cross-validation. Μικρό $p \Rightarrow$ φαρδύτερες κορυφές (υπομοντελοποίηση). Μεγάλο $p \Rightarrow$ τεχνητοί πόλοι (υπερμοντελοποίηση).
- *Σταθερότητα*: βεβαιωθείτε ότι οι ρίζες του $1 + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i z^{-i}$ είναι έξω από τον μοναδιαίο κύκλο. Αλλιώς, ανακλάστε τις ασταθείς ρίζες.
- *Μονόπλευρη PSD*: για πραγματικά δεδομένα, παίρνουμε το $S_{xx}(f)$ στο $[0, f_s/2]$ με τη σωστή μονόπλευρη κλιμάκωση.

6.8 Παράδειγμα: αυτοπαλίνδρομο μοντέλο AR(2) από 5 δείγματα

Δεδομένα. Έστω ότι τα (μηδενικού μέσου) δεδομένα είναι

$$x[0], x[1], x[2], x[3], x[4] = 2, 1, 0, -1, -2, \quad N = 5.$$

Εκτίμηση αυτοσυσχέτισης. Για υστέρηση $\tau \geq 0$,

$$\hat{R}_{xx}[\tau] = \frac{1}{N} \sum_{k=\tau}^{N-1} x[k] x[k - \tau].$$

Υπολογίζουμε μέχρι $\tau = 2$ (αφού $p = 2$):

$$\hat{R}_{xx}[0] = \frac{1}{5} (2^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-2)^2) = \frac{10}{5} = 2,$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}[1] &= \frac{1}{5} (x[1]x[0] + x[2]x[1] + x[3]x[2] + x[4]x[3]) = \frac{1}{5} (1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot (-1)) \\ &= \frac{1}{5} (2 + 0 + 0 + 2) = \frac{4}{5} = 0.8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}[2] &= \frac{1}{5} (x[2]x[0] + x[3]x[1] + x[4]x[2]) = \frac{1}{5} (0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 0) \\ &= \frac{-1}{5} = -0.2. \end{aligned}$$

Εξισώσεις Yule–Walker για AR(2). Χρησιμοποιούμε τη σύμβαση προσημίων $x[k] = -a_1 x[k-1] - a_2 x[k-2] + w[k]$, οπότε οι σχέσεις Yule–Walker είναι

$$\hat{R}_{xx}[\tau] + a_1 \hat{R}_{xx}[\tau-1] + a_2 \hat{R}_{xx}[\tau-2] = 0, \quad \tau = 1, 2,$$

και η σχέση για τη διακύμανση (υστέρηση μηδέν)

$$\hat{\sigma}_w^2 = \hat{R}_{xx}[0] + a_1 \hat{R}_{xx}[1] + a_2 \hat{R}_{xx}[2].$$

Αντικαθιστώντας τους αριθμούς:

- Για $\tau = 1$:

$$\hat{R}_{xx}[1] + a_1 \hat{R}_{xx}[0] + a_2 \hat{R}_{xx}[1] = 0 \Rightarrow \frac{4}{5} + 2a_1 + \frac{4}{5}a_2 = 0.$$

- Για $\tau = 2$:

$$\hat{R}_{xx}[2] + a_1 \hat{R}_{xx}[1] + a_2 \hat{R}_{xx}[0] = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}a_1 + 2a_2 = 0.$$

Επίλυση του γραμμικού συστήματος 2×2 . Απαλείφουμε τα κλάσματα (πολλαπλασιάζουμε και τις δύο εξισώσεις με 5):

$$\begin{cases} 4 + 10a_1 + 4a_2 = 0, \\ -1 + 4a_1 + 10a_2 = 0. \end{cases}$$

Από τη δεύτερη: $4a_1 = 1 - 10a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{1 - 10a_2}{4}$. Αντικαθιστούμε στην πρώτη:

$$10\left(\frac{1 - 10a_2}{4}\right) + 4a_2 = -4 \Rightarrow \frac{10}{4} - \frac{100}{4}a_2 + 4a_2 = -4 \Rightarrow 2.5 - 25a_2 + 4a_2 = -4$$

$$\Rightarrow 2.5 - 21a_2 = -4 \Rightarrow -21a_2 = -6.5 \Rightarrow a_2 = \frac{13}{42} \approx 0.30952381.$$

Τότε

$$a_1 = \frac{1 - 10a_2}{4} = \frac{1 - 10 \cdot \frac{13}{42}}{4} = \frac{\frac{42}{42} - \frac{130}{42}}{4} = \frac{-\frac{88}{42}}{4} = -\frac{11}{21} \Rightarrow a_1 = -\frac{11}{21} \approx -0.52380952.$$

Διακύμανση θορύβου (από την εξίσωση για $\tau = 0$).

$$\hat{\sigma}_w^2 = \hat{R}_{xx}[0] + a_1 \hat{R}_{xx}[1] + a_2 \hat{R}_{xx}[2] = 2 + \left(-\frac{11}{21}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{13}{42}\right)\left(-\frac{1}{5}\right).$$

Υπολογίζουμε τα κλασματικά μέρη:

$$\left(-\frac{11}{21}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{44}{105}, \quad \left(\frac{13}{42}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{13}{210}.$$

Άθροισμα: $-\frac{44}{105} - \frac{13}{210} = -\frac{88}{210} - \frac{13}{210} = -\frac{101}{210}$. Επομένως

$$\hat{\sigma}_w^2 = 2 - \frac{101}{210} = \frac{420 - 101}{210} = \frac{319}{210} \approx 1.51904762.$$

Προκύπτει αυτοαναδρομικό μοντέλο AR(2).

$$x[k] = -\left(-\frac{11}{21}\right)x[k-1] - \left(\frac{13}{42}\right)x[k-2] + w[k] = \frac{11}{21}x[k-1] - \frac{13}{42}x[k-2] + w[k],$$

με $\hat{\sigma}_w^2 = \frac{319}{210}$.

Έλεγχος σταθερότητας (πόλοι). Η συνάρτηση μεταφοράς του AR μοντέλου είναι

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Οι πόλοι είναι οι ρίζες της $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$, δηλαδή

$$z^2 - \frac{11}{21}z + \frac{13}{42} = 0.$$

Οι ρίζες έχουν μέτρο < 1 (αριθμητικά ≈ 0.5563), άρα το μοντέλο είναι σταθερό / WSS.

PSD (μορφή μόνο-πόλων).

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{|1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega}|^2} = \frac{\frac{319}{210}}{|1 - \frac{11}{21}e^{-j\omega} + \frac{13}{42}e^{-j2\omega}|^2}.$$

Σχόλια.

- Χρησιμοποιήσαμε τη μεροληπτική εκτίμηση αυτοσυσχέτισης (παρονομαστής N) για να είναι πιο απλοί οι υπολογισμοί. Αν χρησιμοποιούσαμε την αμερόληπτη εκτίμηση, οι αριθμητικές τιμές θα άλλαζαν λίγο αλλά η διαδικασία θα ήταν η ίδια.
- Μόνο 5 δείγματα είναι καλά για χειροκίνητους υπολογισμούς, αλλά στην πράξη χρησιμοποιούμε πολύ μεγαλύτερες ακολουθίες και επιλογή τάξης (AIC/BIC).

6.9 Διανυσματικές (Πολυκαναλικές) Εξισώσεις Yule–Walker

Βασική διατύπωση και συμβολισμός. Θεωρούμε μία μηδενικού μέσου διανυσματική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία VAR(p)

$$\mathbf{x}[k] = -\sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{x}[k-i] + \mathbf{w}[k], \quad \mathbb{E}\{\mathbf{w}[k]\mathbf{w}[k]^\top\} = \mathbf{\Sigma}_w, \quad \mathbb{E}\{\mathbf{w}[k]\mathbf{x}[k-\tau]^\top\} = \mathbf{0} \ (\tau \geq 1),$$

με $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^M$ και $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{M \times M}$. Ορίζουμε τους πίνακες (αυτο)συσχέτισης

$$\mathbf{R}_{xx}[\tau] \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{x}[k]\mathbf{x}[k+\tau]^\top\} \in \mathbb{R}^{M \times M}, \quad \mathbf{R}_{xx}[-\tau] = \mathbf{R}_{xx}[\tau]^\top.$$

Αναδρομική σχέση πινάκων. Πολλαπλασιάζουμε το μοντέλο με $\mathbf{x}[k-\tau]^\top$ και παίρνουμε την αναμενόμενη τιμή:

$$\mathbf{R}_{xx}[\tau] = -\sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{xx}[\tau-i] + \delta[\tau] \mathbf{\Sigma}_w.$$

Για $\tau \geq 1$ ο όρος θορύβου μηδενίζεται, ενώ για $\tau = 0$ συνεισφέρει $\mathbf{\Sigma}_w$.

Μπλοκ-Toeplitz σύστημα Yule–Walker (υστερήσεις 1..p). Συσσωρεύοντας τις p ομογενείς εξισώσεις (για $\tau = 1, \dots, p$) προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{xx}[0] & \mathbf{R}_{xx}[1] & \cdots & \mathbf{R}_{xx}[p-1] \\ \mathbf{R}_{xx}[1]^\top & \mathbf{R}_{xx}[0] & \cdots & \mathbf{R}_{xx}[p-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{xx}[p-1]^\top & \mathbf{R}_{xx}[p-2]^\top & \cdots & \mathbf{R}_{xx}[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{(pM) \times (pM)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{A}_p^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(pM) \times M}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{xx}[1]^\top \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{xx}[p]^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(pM) \times M}}.$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{T} \mathbf{A} = -\mathbf{R}, \quad \text{επίλυση ως προς } \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1^\top \cdots \mathbf{A}_p^\top]^\top.}$$

Εξίσωση μηδενικής υστέρησης (διακύμανσης). Θέτοντας $\tau = 0$ στην αναδρομική σχέση παίρνουμε

$$\mathbf{R}_{xx}[0] = -\sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{xx}[-i] + \Sigma_w = -\sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{xx}[i]^\top + \Sigma_w,$$

οπότε

$$\boxed{\Sigma_w = \mathbf{R}_{xx}[0] + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{xx}[i]^\top.}$$

Επίλυση του μπλοκ συστήματος.

- **Άμεση (πυκνή) επίλυση:** Υπολογίζουμε τις εκτιμήσεις $\hat{\mathbf{R}}_{xx}[\tau]$ από τα δεδομένα (με μεροληπτικό ή αμερόληπτο εκτιμητή), σχηματίζουμε τους πίνακες $\hat{\mathbf{T}}$ και $\hat{\mathbf{R}}$ και λύνουμε $\hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{A}} = -\hat{\mathbf{R}}$ με ανάλυση Cholesky/LDL[⊤] αν ο $\hat{\mathbf{T}}$ είναι θετικά ορισμένος. Πολυπλοκότητα $\mathcal{O}((pM)^3)$.
- **Αλγόριθμος Block-Levinson / Wiggins–Robinson (LWR):** Εχμεταλλεύεται τη μπλοκ-Toeplitz δομή ώστε να επιλύσει σε $\mathcal{O}(p^2 M^3)$. Πρόκειται για τη πολυκαναλική επέκταση του αλγορίθμου Levinson–Durbin: αυξάνει αναδρομικά τη τάξη από m σε $m+1$, ενημερώνοντας τους πίνακες συντελεστών πρόβλεψης forward/backward prediction και τους πίνακες συνδιασποράς του σφάλματος πρόβλεψης.

Αναδρομή Block-Levinson–Wiggins–Robinson (LWR). Η αναδρομή block-Levinson (ή Wiggins–Robinson) αποτελεί την πολυκαναλική επέκταση του κλασικού βαθμωτού αλγορίθμου Levinson–Durbin. Επιλύει αποδοτικά το μπλοκ-Toeplitz σύστημα Yule–Walker, αξιοποιώντας την αναδρομική δομή του. Κάθε βήμα αυξάνει τη τάξη του μοντέλου κατά μία, ενώ ενημερώνει τους πίνακες συντελεστών AR και τη συνδιασπορά σφάλματος πρόβλεψης.

Ορισμοί.

- $\mathbf{A}_i^{(m)} \in \mathbb{R}^{M \times M}$: ο i -οστός πίνακας συντελεστών AR τάξης m .
- $\mathbf{E}_m \in \mathbb{R}^{M \times M}$: πίνακας συνδιασποράς σφάλματος πρόβλεψης εμπρός (forward) τάξης m .

- $\mathbf{K}_m \in \mathbb{R}^{M \times M}$: συντελεστής ανάκλασης πίνακα (ή συντελεστής μερικής συσχέτισης, PARCOR) τάξης m .

Αρχικοποίηση (τάξη $m = 1$).

$$\mathbf{A}_1^{(1)} = -\mathbf{R}_{xx}[1] \mathbf{R}_{xx}[0]^{-1}, \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{R}_{xx}[0] - \mathbf{R}_{xx}[1] \mathbf{R}_{xx}[0]^{-1} \mathbf{R}_{xx}[1]^\top.$$

Αναδρομική ενημέρωση (από τάξη m σε $m+1$).

1. Υπολογισμός του πίνακα συντελεστή ανάκλασης:

$$\mathbf{K}_{m+1} = -\left(\mathbf{R}_{xx}[m+1] + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^{(m)} \mathbf{R}_{xx}[m+1-i]\right) \mathbf{E}_m^{-1}.$$

Ο πίνακας $\mathbf{K}_{m+1}$ γενικεύει τον βαθμωτό συντελεστή ανάκλασης στην πολυκαναλική περίπτωση. Μετρά τη υπολειπόμενη συσχέτιση ανάμεσα στα σφάλματα πρόβλεψης επόμενου και προηγούμενου δείγματος στη υστέρηση φάσεως ($m+1$).

2. Ενημέρωση των πινάκων συντελεστών AR:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{m+1}^{(m+1)} &= \mathbf{K}_{m+1}, \\ \mathbf{A}_i^{(m+1)} &= \mathbf{A}_i^{(m)} + \mathbf{K}_{m+1} \mathbf{A}_{m+1-i}^{(m)} \quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Η αναδρομή ενημερώνει συμμετρικά όλους τους προηγούμενους πίνακες συντελεστών AR, διατηρώντας τη μπλοκ-Toeplitz δομή του πίνακα συσχέτισης.

3. Ενημέρωση της συνδιασποράς σφάλματος πρόβλεψης εμπρός:

$$\mathbf{E}_{m+1} = \mathbf{E}_m - \mathbf{K}_{m+1} \mathbf{E}_m \mathbf{K}_{m+1}^\top.$$

Ο πίνακας $\mathbf{E}_{m+1}$ μειώνεται μονοτονικά καθώς αυξάνει η τάξη m και παραμένει συμμετρικός με θετικά ορισμένη μορφή για σταθερές διαδικασίες.

Τερματισμός (τάξη p). Μετά από p επαναλήψεις:

$$\hat{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i^{(p)}, \quad \hat{\mathbf{\Sigma}}_w = \mathbf{E}_p.$$

Ο πίνακας $\hat{\mathbf{\Sigma}}_w$ είναι η εκτίμηση της συνδιασποράς του θορύβου διέγερσης και αντιστοιχεί άμεσα στη τελική διακύμανση σφάλματος πρόβλεψης επόμενου δείγματος στο βαθμωτό Levinson-Durbin.

Παρατηρήσεις.

- Η αναδρομή LWR μειώνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα από $\mathcal{O}((pM)^3)$ (άμεση αντιστροφή) σε $\mathcal{O}(p^2 M^3)$ αξιοποιώντας την εσωτερική δομή.
- Κάθε $\mathbf{K}_m$ λειτουργεί ως πολυκαναλικός συντελεστής ανάκλασης, με φασματική ακτίνα μικρότερη της μονάδας για ένα σταθερό VAR μοντέλο.
- Ο αλγόριθμος διατηρεί την Ερμιτιανή δομή των $\mathbf{R}_{xx}[\tau]$ και εξασφαλίζει ότι $\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m^\top \succ 0$ σε κάθε βήμα.
- Η ίδια αναδρομή εφαρμόζεται και σε μιγαδικά δεδομένα, όπου το $^\top$ αντικαθίσταται από το ανάστροφο Ερμιτιανό H .

Από δεδομένα (εκτίμηση). Εκτίμηση $\hat{\mathbf{R}}_{xx}[\tau]$ για $\tau = 0, \dots, p$:

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{(b)}[\tau] = \frac{1}{N} \sum_{k=\tau}^{N-1} \mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k-\tau]^\top \quad (\text{μεροληπτικός})$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{(u)}[\tau] = \frac{1}{N-\tau} \sum_{k=\tau}^{N-1} \mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k-\tau]^\top \quad (\text{αμερόληπτος}).$$

Σχηματίζουμε $\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{R}}$, λύνουμε για $\hat{\mathbf{A}}$ και υπολογίζουμε

$$\hat{\Sigma}_w = \hat{\mathbf{R}}_{xx}[0] + \sum_{i=1}^p \hat{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{R}}_{xx}[i]^\top.$$

Πρακτικές σημειώσεις.

- *Αφαίρεση μέσου*: αφαιρούμε τον μέσο όρο ανά κανάλι πριν τον υπολογισμό των $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$.
- *Επιλογή τάξης*: χρήση πολυμεταβλητών AIC/BIC ή cross-validation ως προς το p .
- *Κανονικοποίηση*: προσθήκη μικρού ridge στον $\hat{\mathbf{R}}_{xx}[0]$ και/ή στο $\hat{\mathbf{T}}$ όταν το N είναι μικρό.

6.10 Εκτίμηση Παραμέτρων AR με Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Squares)

Γενική διατύπωση Least Squares. Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (LS) παρέχει έναν άμεσο, βασισμένο στα δεδομένα τρόπο εκτίμησης των παραμέτρων ενός γραμμικού μοντέλου. Θεωρούμε το γενικό γραμμικό σύστημα:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w},$$

όπου:

- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$: διάνυσμα παρατηρήσεων (output),
- $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times p}$: πίνακας σχεδίασης (regressor matrix),
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$: άγνωστο διάνυσμα παραμέτρων,
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$: προσθετικός θόρυβος / σφάλματα.

Η LS εκτίμηση προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του τετραγώνου σφάλματος πρόβλεψης:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\|_2^2.$$

Θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτουν οι *κανονικές εξισώσεις* ελαχίστων τετραγώνων:

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}^\top \mathbf{y},$$

οπότε:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}.}$$

Ιδιότητες.

- Η εκτίμηση $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτη αν $\mathbb{E}[w] = 0$ και ο πίνακας $\mathbf{X}$ έχει πλήρη τάξη.
- Υπό Γκαουσιανό θόρυβο, η LS εκτίμηση είναι η ελάχιστης διακύμανσης αμερόληπτη γραμμική εκτίμηση.
- Γεωμετρικά, το διάνυσμα $\mathbf{X}\hat{\theta}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{y}$ στον χώρο που παράγουν οι στήλες του $\mathbf{X}$.

Μοντέλο AR(p) ως Πρόβλημα Παλινδρόμησης. Για ένα αυτοπαλινδρόμο (AR) μοντέλο

$$x[k] = - \sum_{i=1}^p a_i x[k-i] + w[k], \quad w[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2),$$

ορίζουμε

$$\mathbf{x}_{\text{past}}[k] = \begin{bmatrix} x[k-1] \\ x[k-2] \\ \vdots \\ x[k-p] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}.$$

Τότε:

$$x[k] = -\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{\text{past}}[k] + w[k].$$

Αν στοιβάξουμε τις εξισώσεις για $k = p, \dots, N-1$, προκύπτει

$$\mathbf{y} = -\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{w},$$

όπου:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x[p] \\ x[p+1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[p-1] & x[p-2] & \cdots & x[p-p] \\ x[p] & x[p-1] & \cdots & x[p-p+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-3] & \cdots & x[N-1-p] \end{bmatrix}.$$

Κάθε γραμμή του πίνακα $\mathbf{X}$ περιέχει τα προηγούμενα p δείγματα που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη του αντίστοιχου $x[k]$.

Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων για τις Παραμέτρους AR. Θέλουμε να βρούμε το διάνυσμα συντελεστών $\hat{\mathbf{a}}$ που ελαχιστοποιεί το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος:

$$J(\mathbf{a}) = \|\mathbf{y} + \mathbf{X}\mathbf{a}\|_2^2 = (\mathbf{y} + \mathbf{X}\mathbf{a})^T (\mathbf{y} + \mathbf{X}\mathbf{a}).$$

Βήμα 1: Ανάπτυξη του τετραγωνικού όρου.

$$J(\mathbf{a}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a} + 2 \mathbf{y}^T \mathbf{X} \mathbf{a}.$$

Βήμα 2: Παραγωγή ως προς $\mathbf{a}$. Επειδή το $J(\mathbf{a})$ είναι τετραγωνική συνάρτηση, το διάνυσμα κλίσης είναι

$$\nabla_{\mathbf{a}} J = 2 \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a} + 2 \mathbf{X}^T \mathbf{y}.$$

Βήμα 3: Μηδενισμός της κλίσης.

$$\nabla_a J = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}} = -\mathbf{X}^\top \mathbf{y}.$$

Βήμα 4: Λύση για το ελάχιστο. Υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ είναι αντιστρέψιμος, η μοναδική λύση είναι

$$\hat{\mathbf{a}} = -(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}.$$

Ερμηνεία.

- Η λύση επιβάλλει ορθογωνιότητα μεταξύ των residuals και του πίνακα σχεδιασμού (regressor/design matrix):

$$\mathbf{X}^\top (\mathbf{y} + \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{0}.$$

Δηλαδή, το εκτιμημένο σφάλμα πρόβλεψης $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{y} + \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}}$ είναι ασυσχέτιστο με όλες τις παρελθοντικές τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στην πρόβλεψη.

- Γεωμετρικά, το $\hat{\mathbf{a}}$ προβάλλει το $\mathbf{y}$ στον υπόχωρο που ορίζεται από τις στήλες του $\mathbf{X}$, ελαχιστοποιώντας το ευκλείδειο μήκος του υπολοίπου.

Βήμα 5: Εκτίμηση της διακύμανσης του θορύβου. Αφού βρεθεί το $\hat{\mathbf{a}}$, τα residuals (σφάλματα πρόβλεψης) είναι

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{y} + \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}}.$$

Για N δείγματα και p εκτιμώμενες παραμέτρους, μια αμερόληπτη εκτίμηση της διακύμανσης του θορύβου είναι

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{N-p} \hat{\mathbf{w}}^\top \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{N-p} \|\mathbf{y} + \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}}\|_2^2.$$

Σύνδεση με τις εξισώσεις Yule–Walker. Αν αντικαταστήσουμε τα γινόμενα δειγμάτων $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}/N$ και $\mathbf{X}^\top \mathbf{y}/N$ με τις αναμενόμενες τιμές τους υπό συνθήκες στασιμότητας, τότε

$$\frac{1}{N} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \approx \begin{bmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[1] & \cdots & R_{xx}[p-1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & \cdots & R_{xx}[p-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}[p-1] & R_{xx}[p-2] & \cdots & R_{xx}[0] \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{N} \mathbf{X}^\top \mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} R_{xx}[1] \\ R_{xx}[2] \\ \vdots \\ R_{xx}[p] \end{bmatrix}.$$

Με αυτή την αντικατάσταση, οι κανονικές εξισώσεις των ελαχίστων τετραγώνων καταλήγουν ακριβώς στο σύστημα Yule–Walker:

$$\mathbf{R} \hat{\mathbf{a}} = -\mathbf{r}.$$

Άρα, η εκτίμηση LS μπορεί να ιδωθεί ως η εκδοχή πεπερασμένου δείγματος (βασισμένη στα δεδομένα) της μεθόδου Yule–Walker.

Παρατηρήσεις.

- **Yule–Walker (YW):** χρησιμοποιεί δειγματικές αυτοσυσχετίσεις $\hat{R}_{xx}[\tau]$ για να σχηματίσει ένα σύστημα Toeplitz $\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{a}} = -\hat{\mathbf{r}}$.
- **Least Squares (LS):** λειτουργεί απευθείας πάνω στα χρονικά δείγματα $x[k]$.
- Αν τα δεδομένα προέρχονται όντως από στάσιμο AR(p) μοντέλο και $N \rightarrow \infty$, οι δύο μέθοδοι γίνονται ασυμπτωτικά ισοδύναμες.
- Για μικρά N ή μη-AR σήματα, η LS συχνά εμφανίζει μικρότερη απόκλιση και διακύμανση.

Επέκταση στη Διανυσματική Περίπτωση (VAR). Για ένα διανυσματικό σήμα $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^M$,

$$\mathbf{x}[k] = - \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{x}[k-i] + \mathbf{w}[k],$$

ορίζουμε

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[p] \\ \mathbf{x}[p+1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[p-1]^\top & \cdots & \mathbf{x}[p-p]^\top \\ \mathbf{x}[p]^\top & \cdots & \mathbf{x}[p-p+1]^\top \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}[N-2]^\top & \cdots & \mathbf{x}[N-1-p]^\top \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{Z}\mathbf{A} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1^\top \cdots \mathbf{A}_p^\top]^\top,$$

και ο πολυκαναλικός εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων είναι

$$\boxed{\hat{\mathbf{A}} = -(\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Y}.}$$

6.11 Σύνοψη

Η παραμετρική (βασισμένη σε αυτοπαλίνδρομο μοντέλο) εκτίμηση φάσματος προσεγγίζει το σήμα ως έξοδο ενός φίλτρου *all-pole* διεγειρόμενου από λευκό θόρυβο. Αυτό προσφέρει:

- Υψηλότερη συχνοτική ανάλυση με περιορισμένα δεδομένα.
- Παραμέτρους με φυσική ερμηνεία (οι πόλοι αντιστοιχούν σε συχνότητες συντονισμού).
- Αναλυτική έκφραση της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος χωρίς παραθύρωση ή υπολογισμό μέσου όρου.

Ωστόσο, απαιτεί επιλογή τάξης μοντέλου και μπορεί να δώσει μεροληπτικές εκτιμήσεις αν οι υποθέσεις του μοντέλου δεν ισχύουν.

7 Άλλα Χρήσιμα Παραμετρικά Μοντέλα: MA και ARMA

7.1 Μοντέλα Κινούμενου Μέσου (MA)

Ορισμός. Ένα $MA(q)$ (Moving Average τάξης q) μοντέλο ορίζεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός δειγμάτων λευκού θορύβου:

$$x[k] = w[k] + b_1 w[k-1] + b_2 w[k-2] + \dots + b_q w[k-q], \quad w[k] \sim (0, \sigma_w^2).$$

Ιδιότητες.

- Το σήμα είναι γραμμικός συνδυασμός *τρέχοντος και παρελθοντικού θορύβου*.
- Είναι πάντα **WSS**, αφού προκύπτει από διεγερση σταθερού LTI φίλτρου με λευκό θόρυβο.
- Η αυτοσυσχέτιση $R_{xx}[\tau]$ μηδενίζεται για όλες τις υστερήσεις $\tau > q$, δηλαδή έχει πεπερασμένη διάρκεια.
- Η αντίστοιχη φασματική πυκνότητα ισχύος είναι

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 |B(e^{j\omega})|^2, \quad B(e^{j\omega}) = 1 + \sum_{i=1}^q b_i e^{-j\omega i}.$$

Εκτίμηση Παραμέτρων (ποιοτικά).

- Σε αντίθεση με τα AR μοντέλα, οι παράμετροι $\{b_i\}$ δεν μπορούν να εξαχθούν απευθείας από την αυτοσυσχέτιση (δεν υπάρχει κλειστή μορφή τύπου Yule–Walker).
- Η εκτίμηση γίνεται συνήθως με μεθόδους βελτιστοποίησης, π.χ. μέσω μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων ή μεθόδων μέγιστης πιθανοφάνειας.
- Το βασικό πρόβλημα είναι ότι τα $w[k]$ δεν παρατηρούνται (δεν έχουμε πρόσβαση). Άρα πρέπει να εκτιμηθούν ταυτόχρονα οι παράμετροι $\{b_i\}$ και τα $w[k]$.

7.2 Autoregressive Moving Average (ARMA) Models

Ορισμός. Ένα $ARMA(p, q)$ μοντέλο συνδυάζει αυτοπαλίνδρομα και κινούμενου μέσου όρου μοντέλα:

$$x[k] = - \sum_{i=1}^p a_i x[k-i] + \sum_{j=0}^q b_j w[k-j], \quad b_0 = 1, \quad w[k] \sim (0, \sigma_w^2).$$

Ισοδύναμα, σε μορφή τελεστών:

$$A(z^{-1})x[k] = B(z^{-1})w[k], \quad A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}, \quad B(z^{-1}) = 1 + \sum_{j=1}^q b_j z^{-j}.$$

Ιδιότητες.

- Γενικεύει τα AR και MA μοντέλα:

$$\text{AR}(p) : q = 0, \quad \text{MA}(q) : p = 0.$$

- Παρέχει πιο ευέλικτους φασματικούς χαρακτήρες: κορυφές από πόλους (AR) και «εγχοπές» από μηδενικά (MA).
- Το σήμα είναι WSS αν το AR μέρος είναι σταθερό, δηλαδή όλες οι ρίζες του $A(z^{-1})$ βρίσκονται εκτός της μοναδιαίας περιφέρειας.
- Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος είναι

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 \frac{|B(e^{j\omega})|^2}{|A(e^{j\omega})|^2}.$$

Εκτίμηση Παραμέτρων (ποιοτικά).

- Η εκτίμηση είναι πιο απαιτητική από τα καθαρά AR ή MA μοντέλα, επειδή εμφανίζονται τόσο παρελθοντικές τιμές του $x[k]$ όσο και μη παρατηρήσιμες τιμές του $w[k]$.
- Κλασικές μέθοδοι:
 - **Μέγιστη Πιθανοφάνεια (MLE):** προϋποθέτει Γκαουσιανό θόρυβο και μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.
 - **Prediction-Error Methods:** ελαχιστοποιούν την ισχύ του σφάλματος πρόβλεψης ενός βήματος.
 - **Αλγόριθμοι Καινοτομιών / Kalman:** υπολογίζουν αναδρομικά πιθανοφάνειες και κλίσεις.
- Στην πράξη χρειάζεται αριθμητική βελτιστοποίηση (quasi-Newton, EM, gradient-based), με καλή αρχικοποίηση (π.χ. από AR μοντέλο μεγαλύτερης τάξης).
- Έπειτα οι εκτιμημένες παράμετροι δίνουν απευθείας το PSD μέσω της παραπάνω all-pole/all-zero μορφής.

Σύνοψη.

Μοντέλο	Εξίσωση	Συνήθης Μέθοδος Εκτίμησης
AR(p)	$x[k] + \sum_{i=1}^p a_i x[k-i] = w[k]$	Yule-Walker, Least Squares
MA(q)	$x[k] = w[k] + \sum_{j=1}^q b_j w[k-j]$	MLE, μη γραμμικά LS, EM
ARMA(p, q)	$x[k] + \sum_{i=1}^p a_i x[k-i] = \sum_{j=0}^q b_j w[k-j]$	MLE, Prediction Error

8 Glossary (English – Greek)

Random Processes / WSS / Correlation / PSD

- random process — τυχαία διαδικασία
- autocorrelation — αυτοσυσχέτιση
- cross-correlation — ετεροσυσχέτιση
- autocorrelation matrix — πίνακας αυτοσυσχέτισης
- zero-lag — μηδενική υστέρηση
- lag — υστέρηση
- covariance — συνδιασπορά
- correlation coefficient — συντελεστής συσχέτισης
- realization — στιγμιότυπο της διεργασίας / συγκεκριμένη κυματομορφή
- ergodic — εργοδικό
- white noise — λευκός θόρυβος

Spectral Analysis / PSD / Matrices

- power spectral density (PSD) — Φασματική Πυκνότητα Ισχύος
- matrix-valued PSD — Πίνακας Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος
- cross-spectral density — διαφασματική πυκνότητα ισχύος
- cross-spectral component — διαφασματικό στοιχείο
- coherence — συνέπεια
- spectral leakage — φασματική διαρροή
- frequency bin — bin συχνότητας
- two-sided PSD — αμφίπλευρη PSD
- one-sided PSD — μονόπλευρη PSD
- variance — διακύμανση
- positive semidefinite — θετικά ημιορισμένο
- Hermitian — Ερμιτιανό
- Hermitian transpose — ανάστροφος Ερμιτιανός
- eigen-decomposition — ανάλυση ιδιοτιμών

- in-phase — σε φάση
- out-of-phase — εκτός φάσης
- correlated spectra — συσχετισμένα φάσματα
- (frequency-domain) coupling — σύζευξη στο πεδίο συχνότητας

DFT / FFT / Periodogram / Welch

- **DTFT (Discrete-Time Fourier Transform)** — μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου
- **DFT (Discrete Fourier Transform)** — διακριτός μετασχηματισμός Fourier
- periodogram — περιοδόγραμμα
- biased autocorrelation — μεροληπτική αυτοσυσχέτιση
- unbiased autocorrelation — αμερόληπτη αυτοσυσχέτιση
- window function — παράθυρο
- Hann window — παράθυρο Hann
- Hamming window — παράθυρο Hamming
- window energy — ενέργεια παραθύρου
- window normalization — κανονικοποίηση παραθύρου
- averaging — υπολογισμός μέσου όρου
- overlap — επικάλυψη
- segment — τμήμα

LTI Systems / Filters / Transfer Functions

- LTI system — γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα
- impulse response — χρονιστική απόκριση
- convolution — συνέλιξη
- BIBO stability — ευστάθεια BIBO
- mean-square stability — ευστάθεια μέσου τετραγώνου
- transfer function — συνάρτηση μεταφοράς
- filter bank — συστοιχία φίλτρων
- low-pass filter — βαθυπερατό φίλτρο
- high-pass filter — υψιπερατό φίλτρο
- sum/difference channels — κανάλια αθροίσματος/διαφοράς

Parametric Models (AR / MA / ARMA / VAR)

- autoregressive (AR) — αυτοπαλίνδρομο
- moving average (MA) — κινούμενου μέσου
- autoregressive moving average (ARMA) — αυτοπαλίνδρομο κινούμενου μέσου
- AR order — τάξη AR
- AR coefficients — συντελεστές AR
- all-pole filter — φίλτρο μόνο με πόλους
- all-zero filter — φίλτρο μόνο με μηδενικά
- poles — πόλοι
- zeros — μηδενικά
- resonance — συντονισμός
- VAR model — διανυσματικό αυτοαναδρομικό μοντέλο
- coefficient matrices — πίνακες συντελεστών

AR Estimation / Yule–Walker / LS / Levinson

- Yule–Walker equations — εξισώσεις Yule–Walker
- Toeplitz matrix — πίνακας Toeplitz
- reflection coefficient / PARCOR — συντελεστής ανάκλασης (PARCOR)
- forward prediction error — σφάλμα πρόβλεψης επόμενου δείγματος
- least squares (LS) — μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων
- normal equations — κανονικές εξισώσεις
- regression matrix — πίνακας σχεδιασμού
- prediction error — σφάλμα πρόβλεψης
- residual — υπόλοιπο
- maximum likelihood estimation (MLE) — εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας
- model order selection — επιλογή τάξης μοντέλου
- AIC / BIC — κριτήριο AIC / κριτήριο BIC
- Levinson–Durbin recursion — αναδρομή Levinson–Durbin
- block-Levinson / LWR — block-Levinson / Wiggins–Robinson αναδρομή