

Ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας

Σκοπός

Το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η περιγραφή του σήματος στο πεδίο της συχνότητας. Η θεώρηση των σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου από το πεδίο της συχνότητας, μας δίνει μια εντελώς διαφορετική δυναμική κατανόησης και επεξεργασίας τους. Για τα σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία μας ενδιαφέρουν, η μετάβαση στο πεδίο της συχνότητας επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Για ακολουθίες πεπερασμένου μήκους χρησιμοποιείται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Μετά τη μελέτη του κεφαλαίου θα είστε σε θέση να:

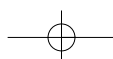
- Υπολογίζετε ποσοτικά και ποιοτικά το φάσμα ενός σήματος διακριτού χρόνου
- Υπολογίζετε το μετασχηματισμό Fourier για σήματα διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας
- Εκτελείτε την κυκλική ολίσθηση σημάτων διακριτού χρόνου
- Υπολογίζετε την απόκριση ενός συστήματος διακριτού χρόνου (γραμμική συνέλιξη) μέσω του πεδίου της συχνότητας, βασιζόμενοι στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier
- Υλοποιείτε έναν από τους ταχείς μετασχηματισμούς Fourier

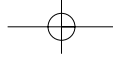
Έννοιες κλειδιά

- Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)
- Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT)
- Κυκλική συνέλιξη
- Μετασχηματισμός Fourier
- Φάσμα σήματος

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφρα-

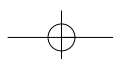


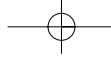


στεί ως γραμμικός συνδυασμός ολισθημένων μοναδιαίων κρουστικών $\{\delta(n-m)\}$. Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση οποιασδήποτε ακολουθίας ως συνδυασμού μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής $\{e^{-j\omega n}\}$, (κατ' αναλογία με το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού αναλογικού σήματος). Πρόκειται για μία πολύ χρήσιμη αναπαράσταση των σημάτων και των συστημάτων διακριτού χρόνου σ' ένα μετασχηματισμένο πεδίο. Με άλλα λόγια, στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς μπορούμε να μεταβούμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα. Και όλα αυτά θα αφορούν πάντοτε την περίπτωση των σημάτων διακριτού χρόνου.

Στην ενότητα 2.1 πραγματευόμαστε το μετασχηματισμό Fourier^[1] διακριτού χρόνου (DTFT, Discrete Time Fourier Transform), ο οποίος εφαρμόζεται σε μη περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου και παρουσιάζουμε τις ιδιότητές του. Με βάση το διαφορετικό τρόπο θεώρησης των σημάτων από το πεδίο της συχνότητας, επανεξετάζουμε το θέμα της δειγματοληψίας. Στη συνέχεια, μελετάμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform) ο οποίος εφαρμόζεται σε σήματα διακριτού χρόνου πεπερασμένου μήκους (ενότητα 2.2). Τέλος, στην ενότητα 2.3 παρουσιάζουμε το βασικό αλγόριθμο για τον ταχύ υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (FFT, Fast Fourier Transform).

[1] Ιστορική αναδρομή: Ο Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) ήταν Γάλλος μαθηματικός και φυσικός. Ο Fourier ερευνούσε τη διάδοση της θερμότητας και το 1807 παρουσίασε στο Ινστιτούτο της Γαλλίας μια εργασία του για τη χρήση των ημιτονικών κυματομορφών στην αναπαράσταση των κατανομών θερμοκρασίας. Η εργασία του αυτή υποστήριζε την ανορθόδοξη, για την εποχή εκείνη, άποψη ότι οποιοδήποτε συνεχές περιοδικό σήμα θα μπορούσε να εκφραστεί ως άθροισμα κατάλληλων ημιτονικών κυματομορφών. Ανάμεσα στους κριτές της εργασίας υπήρχαν και δύο από τους πιο φημισμένους μαθηματικούς, ο Joseph Luis Lagrange (1736–1813) και ο Pierre Simon de Laplace (1749–1827). Και ενώ ο Laplace, όπως και άλλοι κριτές, ψήφισαν υπέρ της δημοσίευσης της εργασίας, ο Lagrange αρνήθηκε, γιατί μέχρι τη στιγμή εκείνη δεν υπήρχε το κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο, στο οποίο θα μπορούσε να στηριχτεί η σχετική απόδειξη. Για πενήντα χρόνια ο Lagrange επέμενε ότι μια τέτοια προσέγγιση δε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση σημάτων με «γωνίες», δηλαδή σημάτων με ασυνέχειες, όπως είναι οι τετραγωνικοί παλμοί. Το Ινστιτούτο της Γαλλίας, υποκύπτοντας στο γόητρο του Lagrange, απέρριψε την εργασία του Fourier. Τελικά, αυτή δημοσιεύτηκε μετά το θάνατο του Lagrange.





2.1 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

2.1.1 Ορισμοί

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT, discrete-time Fourier transform) ενός σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$ είναι η αναπαράσταση του σήματος αυτού ως συνδυασμού μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής $\{e^{-j\omega n}\}$, όπου ω μεταβλητή, γνωστή και ως (κυκλική) συχνότητα. Ο DTFT μίας ακολουθίας, *εάν υπάρχει*, είναι μοναδικός. Η αρχική ακολουθία μπορεί να υπολογιστεί, όταν μας δίνεται ο DTFT αυτής, με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Ο DTFT $X(e^{j\omega})$ της ακολουθίας $x(n)$ ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega}) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2.1)$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x(n) \equiv F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (2.2)$$

Οι σχέσεις (2.1) και (2.2) αποτελούν το λεγόμενο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου. Η σχέση (2.1) ονομάζεται και *εξίσωση ανάλυσης*, ενώ η (2.2) *εξίσωση σύνθεσης*. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι *μία ακολουθία μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών*. Η συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ είναι μιγαδική και μπορεί να γραφεί ως

$$X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}) \quad (2.3)$$

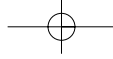
όπου $X_r(e^{j\omega})$ και $X_i(e^{j\omega})$ είναι πραγματικές συναρτήσεις ως προς ω , και αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $X(e^{j\omega})$ αντίστοιχα. Η $X(e^{j\omega})$ σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (2.4)$$

όπου
$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_r^2(e^{j\omega}) + X_i^2(e^{j\omega})} \quad (2.5)$$

$$\theta(\omega) = \arg\{X(e^{j\omega})\} = \tan^{-1} \left[\frac{X_i(e^{j\omega})}{X_r(e^{j\omega})} \right] \quad (2.6)$$

Η ποσότητα $|X(e^{j\omega})|$ ονομάζεται *συνάρτηση μέτρου* και η ποσότητα $\theta(\omega)$ *συνάρτη-*



ση φάσης. Και οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις του ω . Σε πολλές εφαρμογές, ο μετασχηματισμός Fourier ονομάζεται *φάσμα Fourier*, και κατ' επέκταση οι συναρτήσεις $|X(e^{j\omega})|$ και $\theta(\omega)$ αναφέρονται ως *φάσμα μέτρον* (magnitude spectrum) και *φάσμα φάσης* (phase spectrum) αντίστοιχα.

Ο DTFT $X(e^{j\omega})$ της ακολουθίας $x(n)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του ω . Επιπλέον, είναι *περιοδική ως προς ω με περίοδο ίση με 2π* , δηλαδή

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega}). \tag{2.7}$$

Η τελευταία αυτή σχέση μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2k\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2k\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} e^{-j2kn\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Η περιοδικότητα είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι τα διακριτού χρόνου μιγαδικά εκθετικά σήματα, τα οποία διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π , είναι μεταξύ τους ταυτόσημα.

Ο DTFT, όπως ορίζεται από τη σχέση (2.1), είναι ένα άθροισμα άπειρων όρων, το οποίο πιθανόν να μην υπάρχει (να μη συγκλίνει) για κάποια σήματα. Αποδεικνύεται ότι η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη αυτού ικανοποιείται όταν η ακολουθία $x(n)$ είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή, δηλαδή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{2.8}$$

Πριν προχωρήσουμε στις ιδιότητες του DTFT, ας δούμε ορισμένα παραδείγματα υπολογισμού του.

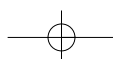
Παράδειγμα 2.1

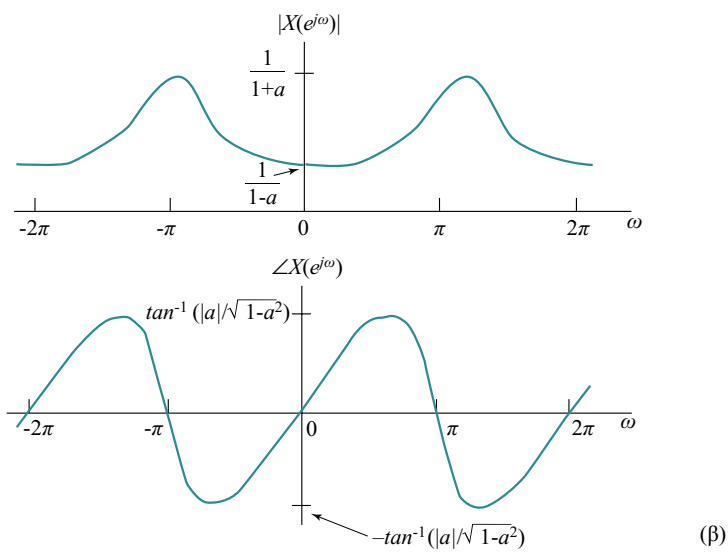
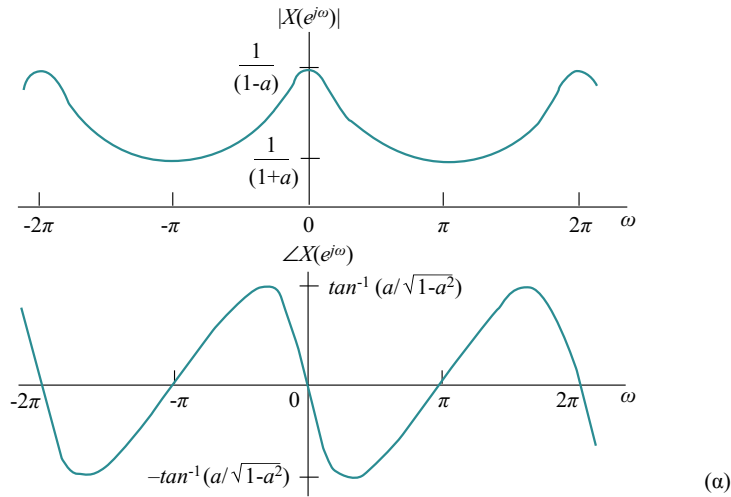
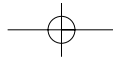
Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x(n) = a^n u(n)$, όπου $|a| < 1$.

Λύση:

Από τον ορισμό (2.1) έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$



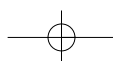


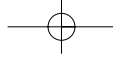
Σχήμα 2.1

Μέτρο και φάση του DTFT της ακολουθίας $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$ για (α) $a > 0$ και (β) $a < 0$.

Το μέτρο και η φάση της $X(e^{j\omega})$ φαίνονται στο Σχήμα 2.1. Παρατηρούμε, ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς και περιοδικές ως προς ω με περίοδο 2π . Επίσης, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο DTFT της $x(n)$ υπάρχει,

$$\text{αφού } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n| u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|} < \infty \text{ (για } |a| < 1).$$





Παράδειγμα 2.2

Να υπολογιστεί ο DTFT της μοναδιαίας κρουστικής ακολουθίας $x(n) = \delta(n)$.

Λύση:

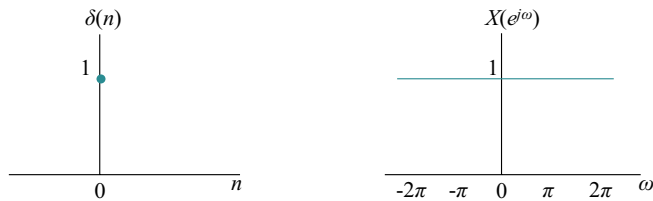
Από τον ορισμό (2.1) έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)e^{-j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega 0} = 1$$

Οι γραφικές παραστάσεις της $\delta(n)$ και του μετασχηματισμού Fourier αυτής φαίνονται στο Σχήμα 2.2. Παρατηρούμε, ότι η μοναδιαία κρουστική έχει μετασχηματισμό Fourier ο οποίος συνίσταται στην ισόποση συνεισφορά όλων των συχνοτήτων.

Σχήμα 2.2

(α) Η μοναδιαία κρουστική ακολουθία και
(β) ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου αυτής.



Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.1

Υπολογίστε τον DTFT της μετατοπισμένης μοναδιαίας κρουστικής ακολουθίας $x(n) = \delta(n-M)$ και σχεδιάστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.2

Υπολογίστε τον DTFT του τετραγωνικού παλμού $x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$, και σχεδιάστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Ο μετασχηματισμός Fourier (DTFT) των πιο γνωστών σημάτων διακριτού χρόνου δίνεται από τον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1

Μετασχηματισμός Fourier γνωστών ακολουθιών

Σήμα	Μετασχηματισμός
$\delta(n)$	$1, -\infty < \omega < \infty$
$\delta(n - M)$	$e^{-j\omega M}$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
$\alpha^n u(n), \alpha < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$u(n) - u(n - M)$	$\frac{\sin(\omega M / 2)}{\sin(\omega / 2)} e^{-j\omega(M-1)/2}$

$$\leftarrow \frac{\sin(\frac{\omega M}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\omega \frac{M-1}{2}}$$

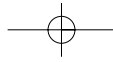
2.1.2 Θεωρήματα και ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ο DTFT παρουσιάζει ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες για την ανάλυση σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Η απόδειξή τους, στην πλειονότητα των περιπτώσεων, γίνεται εύκολα, όταν πάρουμε ως αφετηρία τους ορισμούς (2.1) και (2.2). Θα αναφέρουμε στη συνέχεια τις πιο γνωστές από αυτές. Με $x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ θα συμβολίζουμε το ζεύγος των μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου, όπως αυτό δίνεται από τις σχέσεις (2.1) και (2.2).

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

$$\text{Εάν } x_1(n) \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) \text{ και } x_2(n) \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$\text{τότε } a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xrightarrow{F} a_1 X_1(e^{j\omega}) + a_2 X_2(e^{j\omega}) \quad (2.9)$$



Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, κατάλληλος για τη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Έτσι, ο DTFT του γραμμικού συνδυασμού δύο ή περισσότερων σημάτων ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των DTFT του κάθε σήματος.

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

Εάν $x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

τότε $x(n - n_0) \xrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ (2.10)

Απόδειξη

Έστω $g(n) = x(n - n_0)$. Από τον ορισμό (2.1) του DTFT έχουμε:

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0)e^{-j\omega n}$$

Θέτοντας $q = n - n_0$, οπότε $n = q + n_0$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q)e^{-j\omega(q+n_0)} = e^{-j\omega n_0} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q)e^{-j\omega q} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

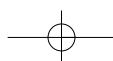
Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι, εάν ένα σήμα μετατοπιστεί στο πεδίο του χρόνου κατά n_0 δείγματα, τότε το φάσμα του μέτρου του παραμένει αναλλοίωτο. Αυτό που αλλάζει κατά $-\omega n_0$ είναι το φάσμα της φάσης. Γίνεται φανερό, επομένως, ότι το περιεχόμενο των συχνοτήτων ενός σήματος εξαρτάται μόνον από τη μορφή του και όχι από τη θέση του. Από μαθηματική άποψη, αυτό εκφράζεται ως εξής: η ολίσθηση (μετατόπιση) στο πεδίο του χρόνου κατά n_0 , ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του φάσματος επί $e^{-j\omega n_0}$ στο πεδίο της συχνότητας.

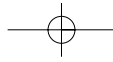
Παράδειγμα 2.3

Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $g(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Λύση:

Σχεδιάζοντας την ακολουθία $g(n)$, παρατηρούμε ότι αυτή έχει την ίδια μορφή με την $x(n)$ της Άσκησης Αυτοαξιολόγησης 2.2, μόνο που είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά δύο δείγματα, δηλαδή $g(n) = x(n-2)$. Έτσι, μπορούμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier $G(e^{j\omega})$ με βάση τον ορισμό (2.1), χρησι-





μποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο κατά $n_0 = 2$. Άρα,

$$G(e^{j\omega}) = F\{g(n)\} = F\{x(n-2)\} = e^{-j\omega 2} X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(\frac{5\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την τελευταία σχέση του Πίνακα 2.1 για $M=5$, αφού πράγματι η ακολουθία $g(n)$ γράφεται και ως $g(n) = u(n)-u(n-5)$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.3

Υπολογίστε τον DTFT της $x(n)-x(n-1)$, αν γνωρίζετε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $x(n)$ είναι $X(e^{j\omega})$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.4

Υπολογίστε τον DTFT της αιτιατής ακολουθίας $x(n) = Aa^n \cos(\omega_0 n + \varphi)u(n)$, όπου A, a, ω_0, φ πραγματικοί.

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Εάν $x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

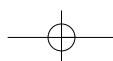
τότε $e^{j\omega_0 n} x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ (2.11)

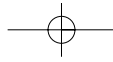
Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, ο πολλαπλασιασμός μιας ακολουθίας $x(n)$ επί $e^{j\omega_0 n}$ ισοδυναμεί με την ολίσθηση (μετατόπιση) του φάσματος $X(e^{j\omega})$ κατά ω_0 . Η ιδιότητα αυτή θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στη διαδικασία της σχεδίασης ψηφιακών φίλτρων που θα γνωρίσουμε στο Κεφάλαιο 4.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$ και $x_2(n) \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$

τότε $x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ (2.12)





Απόδειξη:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) * x_2(n)]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \right] e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

< αλλάζοντας τη σειρά των αθροισμάτων και θέτοντας επιπλέον $q = n-m$ έχουμε >

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-m)e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_2(q)e^{-j\omega(q+m)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)e^{-j\omega m} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_2(q)e^{-j\omega q} = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Το θεώρημα της συνέλιξης είναι από τα πλέον σημαντικά εργαλεία στην ανάλυση γραμμικών συστημάτων. Ουσιαστικά, μας λέει ότι η συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με το γινόμενο των φασμάτων τους στο πεδίο της συχνότητας. Το γεγονός αυτό είναι μεγάλης σημασίας στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων και στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ένα LTI σύστημα αποκρίνεται σε κάποια είσοδο που εφαρμόζεται σ' αυτό. Θυμηθείτε τη γραμμική συνέλιξη, όπως τη γνωρίσαμε στην ενότητα 1.4. Είδαμε ότι, αν σ' ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$ εφαρμοστεί το σήμα $x(n)$, τότε η έξοδος του συστήματος $y(n)$ θα ισούται με τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής αυτού, δηλαδή $y(n) = x(n) * h(n)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης, θα ισχύει $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$, όπου $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των ακολουθιών $x(n)$, $y(n)$, $h(n)$ αντίστοιχα.

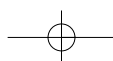
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PARSEVAL

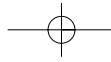
Εάν $x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{2.13}$$

Απόδειξη:

Στην προκειμένη περίπτωση μας συμφέρει να αρχίσουμε την απόδειξη από το δεύτερο μέλος της σχέσης. Έχουμε λοιπόν:





$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right) X^*(e^{j\omega})d\omega = \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \end{aligned}$$

Το θεώρημα του Parseval αναφέρεται στη διατήρηση της ενέργειας κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Η ποσότητα $|X(e^{j\omega})|^2$ αναφέρεται και ως *φάσμα ενεργειακής πυκνότητας* (energy–density spectrum) του σήματος $x(n)$.

Εκτός από τις ιδιότητες που αναφέραμε, υπάρχουν και πολλές άλλες τις οποίες απλώς παραθέτουμε στον Πίνακα 2.2.

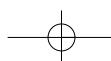
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.5

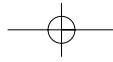
Να αποδειχτεί η ιδιότητα του πολλαπλασιασμού δύο σημάτων διακριτού χρόνου.

Πίνακας 2.2

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)

Ιδιότητα	Μη Περιοδικό Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$\left. \begin{matrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} X_1(e^{j\omega}) \\ X_2(e^{j\omega}) \end{matrix} \right\}$ περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π
Γραμμικότητα	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(e^{j\omega}) + a_2X_2(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Συζυγής ακολουθία	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Επέκταση χρόνου	$x(n/k)$ για n πολλαπλάσιο του k	$X(e^{jk\omega})$
Συνέλιξη	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$



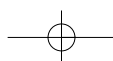


Πολλαπλασιασμός	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Διαφόριση στη συχνότητα	$nx(n)$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σήματα	$x(n)$ πραγματική	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \text{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\text{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Συμμετρία για πραγματικά και άρτια σήματα	$x(n)$ πραγματική και άρτια	$X(e^{j\omega})$ πραγματική και άρτια
Συμμετρία για πραγματικά και περιττά σήματα	$x(n)$ πραγματική και περιττή	$X(e^{j\omega})$ φανταστική και περιττή
Θεώρημα του Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

2.1.3 Δειγματοληψία: μια ακόμη ματιά

Γνωρίσαμε τη δειγματοληψία στην ενότητα 1.2 του Κεφαλαίου 1 και είδαμε ότι αυτή έχει να κάνει με τη μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Θα ασχοληθούμε και πάλι με τη δειγματοληψία, προσεγγίζοντας, όμως τη φορά αυτή, το όλο θέμα από μία διαφορετική οπτική γωνία. Γνωρίζοντας, πλέον, το μετασχηματισμό Fourier και το πεδίο της συχνότητας, θα εξετάσουμε τα σήματα από το πεδίο της συχνότητας και θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την επίδραση που έχει η δειγματοληψία σ' αυτά. Ο στόχος μας θα είναι και πάλι ο ίδιος, δηλαδή ο προσδιορισμός της κατάλληλης περιόδου δειγματοληψίας T , έτσι ώστε, να μη χάνεται πληροφορία, και να είμαστε πάντοτε σε θέση να ανακατασκευάσουμε το αρχικό αναλογικό σήμα από τα δείγματά του.

Έστω λοιπόν, ότι το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ τροφοδοτείται στην είσοδο ενός ιδανικού δειγματολήπτη. Η έξοδος αυτού θα είναι η ακολουθία $x(n)$, τα στοιχεία της οποίας αντιστοιχούν στις μετρήσεις του πλάτους της $x_a(t)$ ανά χρονικά διαστήματα T δευτερολέπτων



$$x(n) = x_a(nT) \quad (2.14)$$

Η παράμετρος T αποτελεί την *περίοδο δειγματοληψίας* και το αντίστροφο αυτής τη *συχνότητα ή το ρυθμό δειγματοληψίας* ($F_s = 1/T$), δηλαδή, το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνονται στη μονάδα του χρόνου.

Για να είμαστε σε θέση να ανακατασκευάσουμε το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ από την ακολουθία $x(n)$ θα πρέπει τα φασματικά χαρακτηριστικά του αναλογικού σήματος να διατηρούνται μετά τη δειγματοληψία. Έστω $X_a(j\Omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x_a(t)$ και $X(e^{j\omega})$ ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x(n)$. Αποδεικνύεται ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left[\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right]\right) \quad (2.15)$$

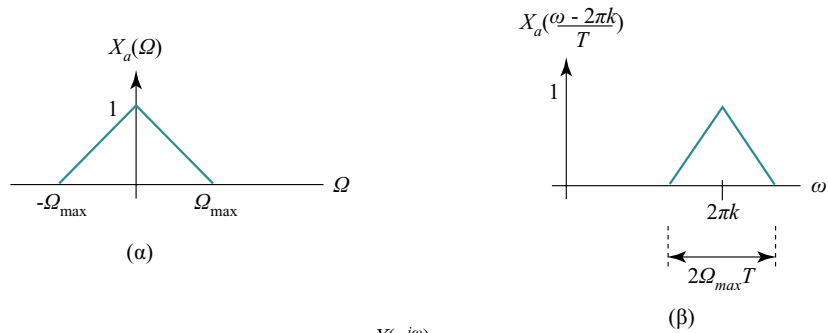
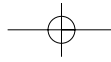
Η σχέση αυτή δηλώνει ότι το φάσμα του σήματος που προέκυψε από τη δειγματοληψία, αποτελείται από περιοδικές επαναλήψεις του φάσματος του αναλογικού σήματος. Γραφικά αυτό παριστάνεται στο Σχήμα 2.3. Στο Σχήμα 2.3α φαίνεται το φάσμα του αναλογικού σήματος $x_a(t)$. Η ακριβής μορφή του (τριγωνική στην προκειμένη περίπτωση) δεν έχει σημασία. Αυτό που έχει σημασία, είναι το ότι πρόκειται για σήμα περιορισμένου εύρους (band-limited), δηλαδή, όλες οι συχνότητες κυμαίνονται μεταξύ $-\Omega_{\max}$ και Ω_{\max} ($-\Omega_{\max} \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$). Στο Σχήμα 2.3β φαίνεται ένας από τους όρους της εξίσωσης (2.15), ενώ στο Σχήμα 2.3γ δίνονται όλοι οι όροι της εξίσωσης αυτής, δηλαδή το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος. Για να είμαστε σε θέση να ανακατασκευάσουμε το αρχικό σήμα από τα δείγματά του, θα πρέπει να φροντίσουμε ώστε αυτές οι *περιοδικές επαναλήψεις να μην καλύπουν η μία την άλλη*. Θα πρέπει δηλαδή να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\Omega_{\max} T \leq \pi \quad (2.16)$$

Επειδή $\Omega_{\max} = 2\pi F_{\max}$, η συνθήκη αυτή γράφεται ως

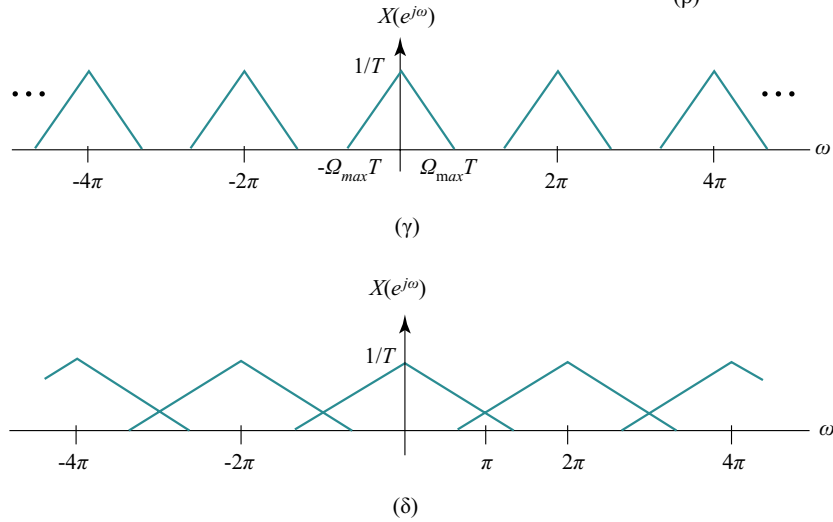
$$F_s \geq 2F_{\max} \quad (2.17)$$

που είναι το γνωστό μας θεώρημα δειγματοληψίας. Στην περίπτωση που η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3δ, τότε λέμε ότι έχουμε το φαινόμενο της *φασματικής επικάλυψης* (spectral overlap) ή της *χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας* (aliasing / undersampling). Σε μια τέτοια περίπτωση η μορφή του φάσματος του αρχικού σήματος δε διατηρείται στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, με συνέπεια να μην είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος.

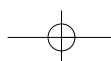


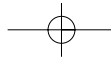
Σχήμα 2.3

Η δειγματοληψία από το πεδίο της συχνότητας: (α) φάσμα αναλογικού σήματος, (β) ένας από τους όρους του φάσματος του δειγματοληπτημένου σήματος, (γ) φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος για $F_s > 2F_{max}$, και (δ) φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος για $F_s < 2F_{max}$



Θεωρήσαμε στα προηγούμενα ότι το αναλογικό σήμα είναι περιορισμένου εύρους συχνοτήτων, όπως άλλωστε παριστάνεται στο Σχήμα 2.3α. Στην πράξη αυτό δε συμβαίνει πάντοτε. Επιπλέον, ας μην ξεχνάμε, ότι ο θόρυβος που παρεισδύει σε κάθε σύστημα εκτείνεται συνήθως σε όλο το εύρος των συχνοτήτων. Έτσι, για να διασφαλίσουμε το γεγονός ότι το σήμα εισόδου είναι περιορισμένου εύρους, τοποθετούμε πάντοτε ένα αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο (analog lowpass filter) πριν από το σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων, για να αποκόψει τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από $F_s/2$. Ένα παρόμοιο αναλογικό φίλτρο τοποθετείται και στην έξοδο του ψηφιακού συστήματος για τη σωστή ανακατασκευή του σήματος εξόδου, δηλαδή για την επιλογή μόνο του βασικού φασματικού περιεχομένου μεταξύ $-F_s/2$ και $F_s/2$. Έτσι, ένα πλήρες σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων είναι όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 2.4.





Σχήμα 2.4

Διάγραμμα βαθμίδων ενός συστήματος ψηφιακής επεξεργασίας αναλογικών σημάτων

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή ασχοληθήκαμε με το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT). Είδαμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός εφαρμόζεται γενικά σε μη περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου άπειρου μήκους. Ο DTFT τέτοιων σημάτων είναι συνεχής και περιοδικός. Η γνώση του μετασχηματισμού Fourier μας βοήθησε να προσεγγίσουμε και πάλι το θέμα της δειγματοληψίας, αλλά από το πεδίο της συχνότητας τη φορά αυτή, αποσαφηνίζοντας το φαινόμενο της φασματικής επικάλυψης, το οποίο παρουσιάζεται όταν ο ρυθμός λήψης δειγμάτων είναι χαμηλότερος του απαιτούμενου.

2.2 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

2.2.1 Ορισμοί

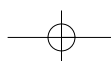
Είδαμε στην ενότητα 2.1 ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$ είναι η συνεχής συνάρτηση $X(e^{j\omega})$. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί με τη χρήση ενός ψηφιακού επεξεργαστή σήματος, ο οποίος είναι συνήθως ένας γενικού σκοπού υπολογιστής ή ένα ειδικά σχεδιασμένο ψηφιακό κύκλωμα. Εκείνο που είναι εύκολο να υπολογιστεί, είναι δείγματα του φάσματος $X(e^{j\omega})$. Αυτό είναι το αντικείμενο με το οποίο ασχολούμαστε στην παρούσα ενότητα, δηλαδή ο υπολογισμός του φάσματος σε διακριτές συχνότητες (διακριτός μετασχηματισμός Fourier), καθώς και οι ιδιότητες που ισχύουν σ' αυτή την περίπτωση.

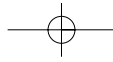
ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (DFT)

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της πεπερασμένου μήκους N ακολουθίας $x(n)$, δηλαδή $x(n) = 0$ για $n < 0$ και $n \geq N$, ισούται με

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (2.18)$$

όπου τα όρια του αθροίσματος αντικατοπτρίζουν το γεγονός ότι $x(n) = 0$ εκτός του





διαστήματος $0 \leq n \leq N-1$. Εάν λάβουμε δείγματα της συνεχούς συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ σε ισαπέχοντα διαστήματα στη συχνότητα $\omega_k = k\Delta\omega = k(2\pi/N)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, (Βλ. Σχήμα 2.5), τότε θα πάρουμε τα δείγματα

$$X(k) \equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.19)$$

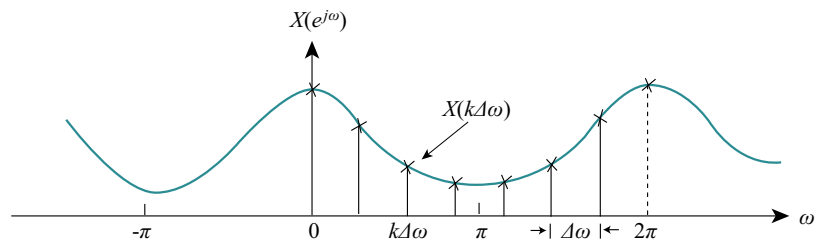
Ας σημειωθεί ότι, αφού η $X(e^{j\omega})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , μόνο τα δείγματα της βασικής περιοχής συχνοτήτων είναι απαραίτητα. Επειδή τα δείγματα αυτά προκύπτουν από τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier $X(e^{j\omega})$ σε N ισαπέχουσες διακριτές συχνότητες, η σχέση (2.19) ονομάζεται *διακριτός μετασχηματισμός Fourier* (Discrete Fourier Transform, DFT) της $x(n)$. Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την ακολουθία $x(n)$ από τα δείγματα $X(k)$ στη συχνότητα, με βάση τη σχέση

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.20)$$

η οποία αποτελεί τον *αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier* (inverse DFT, IDFT).

Σχήμα 2.5

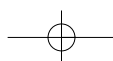
Δειγματοληψία στη συχνότητα του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).

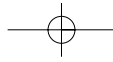


Οι σχέσεις (2.19) και (2.20) αποτελούν το λεγόμενο «ζεύγος του DFT». Παρατηρήστε ότι, τόσο η ακολουθία $x(n)$, όσο και η ακολουθία $X(k)$ είναι του ίδιου μήκους N . Θα συμβολίζουμε το ζεύγος του DFT N -σημείων ως $x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$. Οι σχέσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν και ως

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.21)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.22)$$



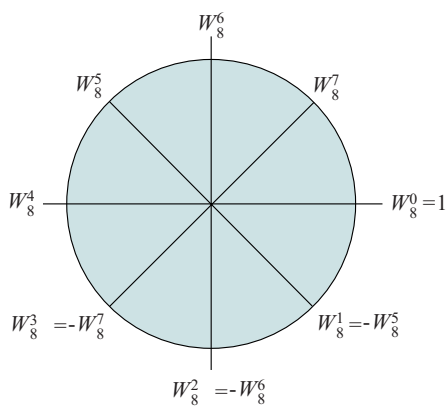


όπου εξ ορισμού

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \tag{2.23}$$

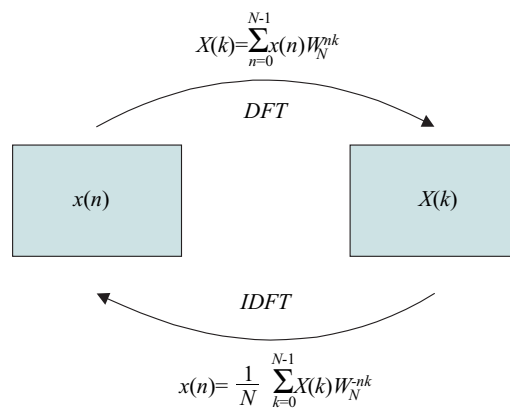
είναι η $N_{\text{στη}}$ ρίζα της μονάδας. Οι παράγοντες W_N^{nk} αποτελούν τις μιγαδικές ακολουθίες βάσης στις οποίες στηρίζεται ο DFT και ονομάζονται *παράγοντες στροφής* (twiddle factors). Στο Σχήμα 2.6 φαίνεται η μιγαδική αναπαράσταση των W_N και αναδεικνύεται η κυκλική ιδιότητα των παραγόντων στροφής για ένα DFT 8-σημείων ($N = 8$).

Η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντιστρόφως, με τη βοήθεια του ζεύγους των μετασχηματισμών Fourier (εξισώσεις 2.21 και 2.22), απεικονίζεται στο Σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.6

Παράγοντες στροφής για ένα DFT 8-σημείων ($N = 8$).



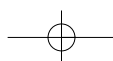
Σχήμα 2.7

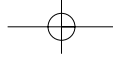
Σχηματική αναπαράσταση της μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντιστρόφως με χρήση του ζεύγους DFT.

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα από τους ορισμούς του ζεύγους DFT, ότι οι ακολουθίες $x(n)$ και $X(k)$ είναι περιοδικές με περίοδο N , δηλαδή

$$x(n + N) = x(n) \quad \text{για όλα τα } n \tag{2.24}$$

$$X(k + N) = X(k) \quad \text{για όλα τα } k \tag{2.25}$$





Παράδειγμα 2.4

Να υπολογισθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $\{1, 1, 0, 0\}$.

Λύση:

Η ακολουθία $x(n)$ αποτελείται από τέσσερα δείγματα ($N = 4$), τα εξής: $x(0) = 1, x(1) = 1, x(2) = 0, x(3) = 0$. Με βάση τη σχέση (2.21) υπολογίζουμε τις τέσσερις συνιστώσες της συχνότητας:

$$\begin{aligned} X(0) &= \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{n0} = x(0)W_4^{00} + x(1)W_4^{10} + x(2)W_4^{20} + x(3)W_4^{30} = \\ &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 1 + 1 + 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{n1} = x(0)W_4^{01} + x(1)W_4^{11} + x(2)W_4^{21} + x(3)W_4^{31} = \\ &= x(0) + x(1) \cdot (-j) + x(2) \cdot (-1) + x(3) \cdot j = 1 + 1 \cdot (-j) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot j = 1 - j \end{aligned}$$

$$\text{όπου } W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} = 0 - j = -j$$

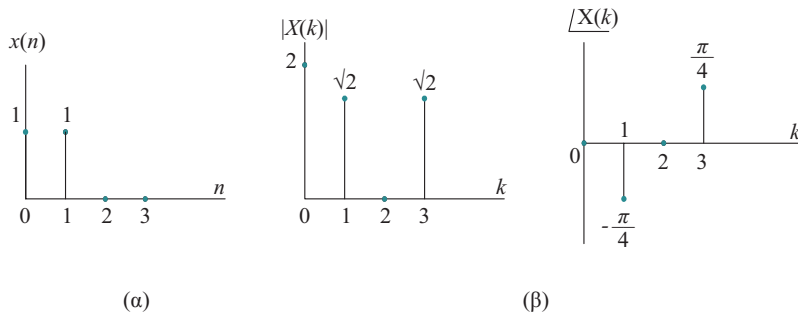
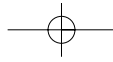
$$W_4^2 = e^{-j\frac{2\pi \cdot 2}{4}} = e^{-j\pi} = \cos \pi - j \sin \pi = -1$$

$$W_4^3 = e^{-j\frac{2\pi \cdot 3}{4}} = e^{-j\frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} - j \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - j(-1) = j$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $X(2) = 0$ και $X(3) = 1 + j$. Παρατηρήστε ότι η συνιστώσα μηδενικής συχνότητας $X(0)$ ισούται πάντοτε με το άθροισμα όλων των στοιχείων της ακολουθίας $x(n)$. Άρα ο DFT της ακολουθίας $\{1, 1, 0, 0\}$ ισούται με τη μιγαδική ακολουθία $\{2, 1-j, 0, 1+j\}$. Για να είναι πιο κατανοητή η αναπαράσταση του αποτελέσματος, συνηθίζεται να εκφράζουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με το μέτρο και τη φάση τους. Έτσι, ο DFT που μόλις υπολογίσαμε, εκφράζεται ως

$$\left\{ 2, \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, 0, \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \right\}.$$

Οι γραφικές παραστάσεις της ακολουθίας $x(n)$ και του αντίστοιχου DFT $X(k)$, φαίνονται στο Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8
 (α) Η ακολουθία $x(n)$ και
 (β) το μέτρο και η φάση του DFT αυτής.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.6

Να υπολογιστεί ο DFT της μοναδιαίας κρουστικής.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.7

Να υπολογιστεί ο DFT της σταθερής ακολουθίας $x(n) = \begin{cases} A, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Η περιοδική επέκταση της πεπερασμένου μήκους ακολουθίας $x(n), 0 \leq n \leq N-1$, ανά N δείγματα, οδηγεί στην περιοδική ακολουθία

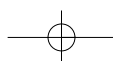
$$x_p(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n - qN) \tag{2.26}$$

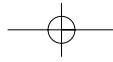
με βασική περίοδο N , όπως φαίνεται στα Σχήματα 2.9α,β για $N = 6$. Η ολίσθηση (μετατόπιση) της περιοδικής ακολουθίας $x_p(n)$ κατά n_0 δείγματα προς τα δεξιά, θα μας δώσει μία άλλη περιοδική ακολουθία

$$x'_p(n) = x_p(n - n_0) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n - n_0 - qN) \tag{2.27}$$

Η πεπερασμένου μήκους ακολουθία

$$x'(n) = \begin{cases} x'_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2.28}$$





συνδέεται με την αρχική ακολουθία $x(n)$ μέσω της *κυκλικής ολίσθησης*. Στο Σχήμα 2.9γ φαίνεται η ακολουθία $x'_p(n) = x_p(n-n_0)$ για $n_0 = 2$ και στο Σχήμα 2.9δ η πεπερασμένου μήκους ακολουθία $x'(n)$ ($N = 6$).

Γενικά, η κυκλική ολίσθηση μιας ακολουθίας μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των υπολοίπων (modulo) ως

$$x'(n) = x(\langle n - n_0 \rangle_N) \tag{2.29}$$

όπου ο συμβολισμός $\langle m \rangle_N$ διαβάζεται ως m modulo N και σημαίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του m δια του N . Για $n_0 > 0$ (κυκλική ολίσθηση προς τα δεξιά), η σχέση αυτή σημαίνει ότι

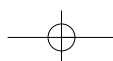
$$x(\langle n - n_0 \rangle_N) = \begin{cases} x(n - n_0 + N) & \text{για } n = 0, 1, \dots, n_0 - 1 \\ x(n - n_0) & \text{για } n = n_0, \dots, N - 1 \end{cases} \tag{2.30}$$

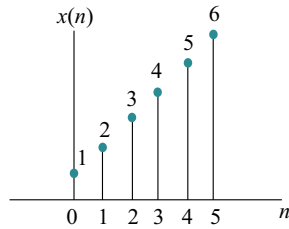
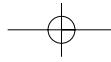
Η κυκλική ολίσθηση κατά n_0 , όπου $n_0 > N$, ισοδυναμεί με την κυκλική ολίσθηση κατά $\langle n_0 \rangle_N$. Για το παράδειγμα της ακολουθίας $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του Σχήματος 2.9, η κυκλική ολίσθηση κατά δύο θα μας δώσει την ακολουθία $x'(n) = x(\langle n - 2 \rangle_6) = \{5, 6, 1, 2, 3, 4\}$. Ο υπολογισμός της κυκλικά ολισθημένης ακολουθίας $x'(n)$ σύμφωνα με τον ορισμό (2.30) έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} x'(0) &= x(\langle 0 - 2 \rangle_6) = x(0 - 2 + 6) = x(4) = 5 \\ x'(1) &= x(\langle 1 - 2 \rangle_6) = x(1 - 2 + 6) = x(5) = 6 \\ x'(2) &= x(\langle 2 - 2 \rangle_6) = x(0) = 1 \\ x'(3) &= x(\langle 3 - 2 \rangle_6) = x(1) = 2 \\ x'(4) &= x(\langle 4 - 2 \rangle_6) = x(2) = 3 \\ x'(5) &= x(\langle 5 - 2 \rangle_6) = x(3) = 4 \end{aligned}$$

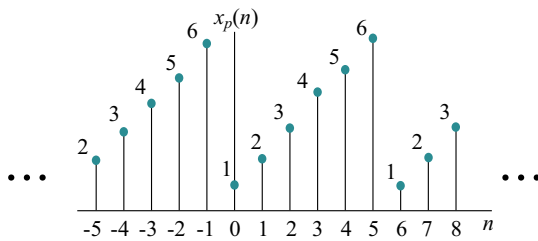
Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η *κυκλική ολίσθηση μιας ακολουθίας N -σημείων ισοδυναμεί με τη γραμμική ολίσθηση της περιοδικής της επέκτασης*.

Ένας παραστατικός τρόπος, για την κατανόηση της κυκλικής ολίσθησης μιας πεπερασμένου μήκους ακολουθίας, είναι αυτός της τοποθέτησης των στοιχείων της στην περιφέρεια ενός κύκλου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9ε για την ακολουθία $x(n)$ έξι στοιχείων. Τα στοιχεία τοποθετούνται σε ισαπέχοντα σημεία στην περιφέρεια ενός κύκλου και με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ωρολογίου (αριστερόστροφα). Κυκλική ολίσθηση κατά n_0 σημαίνει την ολίσθηση όλων των στοιχείων κατά n_0 θέσεις αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα, ανάλογα με το αν n_0 είναι θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα. Στο Σχήμα 2.9στ φαίνεται η $x(\langle n - 2 \rangle_6)$, η οποία προέκυψε από την $x(n)$ του Σχήματος 2.9ε με κυκλική ολίσθηση αριστερόστροφα κατά $n_0 = 2$.

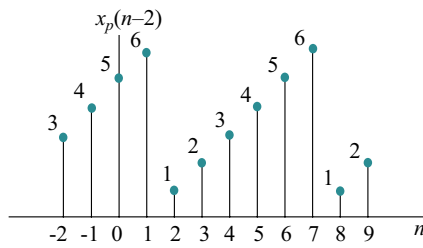




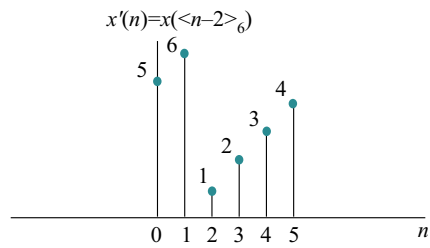
(α)



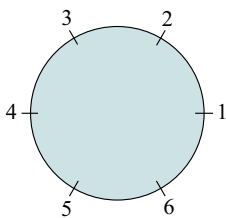
(β)



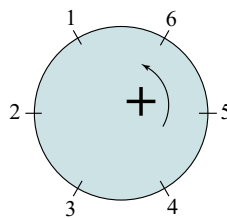
(γ)



(δ)



(ε)



(στ)

Σχήμα 2.9

Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας:

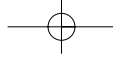
(α) αρχική ακολουθία,

(β) περιοδική επέκταση της αρχικής,

(γ) γραμμική ολίσθηση της περιοδικής ακολουθίας,

(δ) κυκλικά ολισθημένη ακολουθία κατά δύο,

(ε) η αρχική ακολουθία σε κύκλο, (στ) κυκλική ολίσθηση κατά δύο αριστερόστροφα.



ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $x_1(n)$ και $x_2(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, ορίζεται ως

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n-m \rangle_N), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.31)$$

Παρατηρήστε ότι πρόκειται για μία νέα ακολουθία επίσης μήκους N , όσο δηλαδή και το μήκος καθενιάς από τις αρχικές ακολουθίες, και όχι μήκους $2N-1$, όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση της γραμμικής συνέλιξης αυτών. Τα βήματα για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης είναι ίδια με τα τέσσερα βήματα που γνωρίσαμε κατά τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης (βλ. ενότητα 1.4): *αντιστροφή χρόνου* (κατοπτρισμός) της μιας ακολουθίας, *ολίσθηση* της κατοπτρικής ακολουθίας, *πολλαπλασιασμός* των δύο ακολουθιών σημείο προς σημείο και *άθροιση* των γινομένων. Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο αυτών τύπων συνέλιξης, είναι ότι κατά την κυκλική συνέλιξη ο κατοπτρισμός και η ολίσθηση γίνονται με κυκλικό τρόπο, υπολογίζοντας τους δείκτες της μιας ακολουθίας με βάση την πράξη του υπολοίπου (modulo N). Στην περίπτωση της γραμμικής συνέλιξης, δεν υπάρχει η πράξη του υπολοίπου.

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας ισχύει και για την περίπτωση της κυκλικής συνέλιξης, δηλαδή

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = x_2(n) \otimes x_1(n) \quad (2.32)$$

Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε από τις δύο ακολουθίες υποστεί κατοπτρισμό και ολίσθηση, το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης δεν αλλάζει.

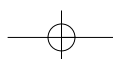
Ας δούμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα υπολογισμού της κυκλικής συνέλιξης δύο ακολουθιών.

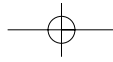
Παράδειγμα 2.5

Να υπολογισθεί η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $x_1(n) = \{1, 2, 3\}$, $x_2(n) = \{4, 5, 6\}$.

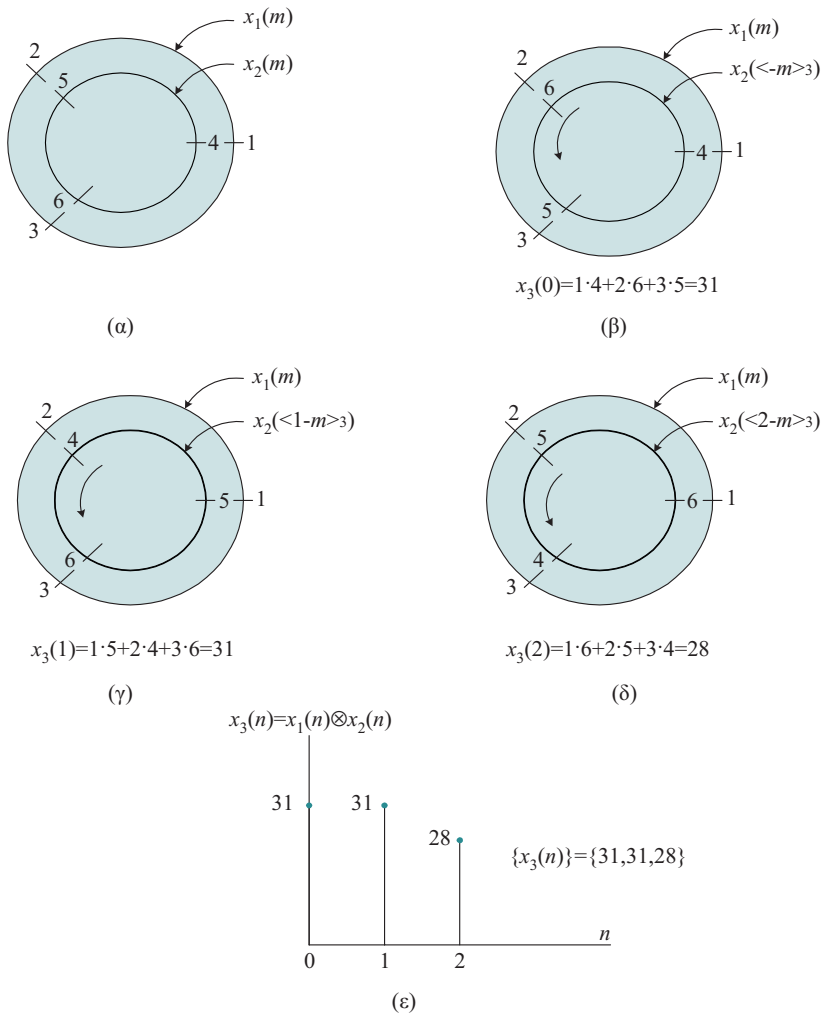
Λύση:

Ο υπολογισμός της κυκλικής συνέλιξης $x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ με βάση τη σχέση (2.31), μας υπαγορεύει την κυκλική ολίσθηση της κατοπτρικής της ακολουθίας $x_2(m)$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με την τοποθέτηση των ακολουθιών πάνω στις περιφέρειες δύο ομόκεντρων κύκλων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Αρχικά οι δύο ακολουθίες τοποθετούνται πάνω στις περιφέρειες αριστερόστροφα (Σχήμα 2.10α). Στη συνέχεια, βρίσκουμε την κατοπτρική της ακολουθίας $x_2(m)$, τοποθετώντας αυτή δεξιόστροφα, όπως φαίνεται στον εσωτερικό κύκλο του Σχήματος 2.10β. Ο εξωτερικός κύκλος παραμένει σταθερός, ενώ ο εσωτερικός περιστρέφεται κάθε φορά αριστερόστροφα κατά $2\pi/3$ ή κατά





$2\pi/N$ γενικά. Με κάθε περιστροφή κατά $2\pi/3$, υπολογίζουμε τα αθροίσματα των γινομένων σύμφωνα με τη σχέση (2.31). Το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης φαίνεται στο Σχήμα 2.10ε.

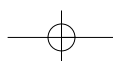


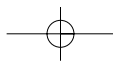
Σχήμα 2.10

Κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $\{1, 2, 3\}$ και $\{4, 5, 6\}$

2.2.2 Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Ο DFT παρουσιάζει ορισμένες σημαντικές ιδιότητες τις οποίες μπορούμε να αξιοποιήσουμε στις διάφορες εφαρμογές μας. Μερικές από τις ιδιότητες του DFT είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες του DTFT. Άλλες είναι διαφορετικές, γεγονός που οφείλεται στο πεπερασμένο μήκος των ακολουθιών και του DFT αυτών.





ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{DFT_N} X_1(k)$ και $x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} X_2(k)$

τότε $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k)$ (2.33)

όπου a_1, a_2 πραγματικές ή μιγαδικές σταθερές. Η ιδιότητα της γραμμικότητας αποδεικνύεται πολύ εύκολα από τον ορισμό του DFT (σχέση 2.21).

ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

Εάν $x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(k)$

τότε $x(<n - n_0 >_N) \xrightarrow{DFT_N} W_N^{kn_0} X(k)$ (2.34)

Η σχέση αυτή μας δείχνει ότι ο DFT της κυκλικά ολισθημένης ακολουθίας έχει το ίδιο μέτρο με την αρχική, αλλά διαφορετική φάση.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.8

Να υπολογισθεί ο DFT των ακολουθιών $x_1(n) = \{1, 0, 0, 1\}$ και $x_2(n) = \{0, 0, 1, 1\}$.

ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Εάν $x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(k)$

τότε $W_N^{-k_0 n} x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(<k - k_0 >_N)$ (2.35)

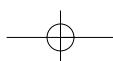
Με άλλα λόγια, ο πολλαπλασιασμός της ακολουθίας $x(n)$ με την εκθετική ακολουθία $e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$, ισοδυναμεί με την κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα, κατά k_0 μονάδες, του DFT αυτής.

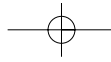
ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{DFT_N} X_1(k)$ και $x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} X_2(k)$

τότε $x_1(n) \otimes x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} X_1(k) \cdot X_2(k)$ (2.36)

Η κυκλική συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων DFT αυτών.





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.9

Να επαληθευτεί η ιδιότητα της κυκλικής συνέλιξης για την περίπτωση των ακολουθιών του Παραδείγματος 2.5.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΥΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{DFT_N} X_1(k)$ και $x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} X_2(k)$

$$\text{τότε } x_1(n) \cdot x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) \quad (2.37)$$

Πρόκειται ουσιαστικά για τη διττή έκφραση της προηγούμενης ιδιότητας, και επαληθεύεται έτσι το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί στην κυκλική συνέλιξη των DFT αυτών.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PARSEVAL

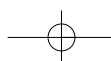
Εάν $x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(k)$

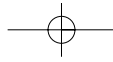
$$\text{τότε } \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (2.38)$$

Το θεώρημα του Parseval εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Με άλλα λόγια, το άθροισμα των τετραγώνων των τιμών των δειγμάτων ισούται με τη μέση τιμή των τετραγώνων των φασματικών γραμμών. Η αναπαράσταση των $|X(k)|^2$ ονομάζεται *φάσμα ισχύος* της $x(n)$. Παρατηρούμε ότι το φάσμα ισχύος εξαρτάται μόνο από το μέτρο του φάσματος και όχι από τη φάση του.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.10

Να επαληθευτεί το θεώρημα του Parseval για το σήμα $x(n) = \{1, 2, 3\}$.





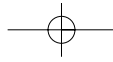
Ο πλήρης κατάλογος των ιδιοτήτων του DFT παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.3.

Πίνακας 2.3

Ιδιότητες του DFT

Ιδιότητα	Ακολουθία μήκους N	DFT N σημείων
	$x_1(n)$	$X_1(k)$
	$x_2(n)$	$X_2(k)$
Γραμμικότητα	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Κυκλική μετατόπιση στο χρόνο	$x(\langle n - n_0 \rangle_N)$	$W^{kn_0} X(k)$
Κυκλική μετατόπιση στη συχνότητα	$W^{-k_0n} x(n)$	$X(\langle k - k_0 \rangle_N)$
Συζυγής ακολουθία	$x^*(n)$	$X^*(\langle -k \rangle_N)$
Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(\langle -n \rangle_N)$	$X^*(k)$
Κυκλική συνέλιξη	$x_1(n) \otimes x_2(n)$ ^[1]	$X_1(k)X_2(k)$
Πολλαπλασιασμός	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m)X_2(\langle k - m \rangle_N)$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σήματα	$x(n)$ πραγματική	$\begin{cases} X(k) = X^*(\langle -k \rangle_N) \\ \text{Re}\{X(k)\} = \text{Re}\{X(\langle -k \rangle_N)\} \\ \text{Im}\{X(k)\} = -\text{Im}\{X(\langle -k \rangle_N)\} \\ X(k) = X(\langle -k \rangle_N) \\ \angle X(k) = -\angle X(\langle -k \rangle_N) \end{cases}$
Θεώρημα του Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$	

$$[1] x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(\langle n - m \rangle_N)$$



2.2.3 Γραμμική συνέλιξη μέσω του DFT

Είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα ότι το γινόμενο δύο DFT είναι ισοδύναμο με την κυκλική συνέλιξη των αντιστοιχών ακολουθιών στο χρόνο. Η κυκλική συνέλιξη όμως δε φαίνεται να μας είναι χρήσιμη στην πράξη, αφού για τον υπολογισμό της απόκρισης $y(n)$ ενός γραμμικού συστήματος, πρέπει να βρούμε τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου $x(n)$ με την κρουστική απόκριση $h(n)$ αυτού, δηλαδή $y(n) = x(n)*h(n)$ (ενότητα 1.4). Μάλιστα, εάν L είναι το μήκος της ακολουθίας $x(n)$ και M το μήκος της ακολουθίας $h(n)$, τότε το μήκος της ακολουθίας $y(n)$ θα ισούται με $L + M - 1$. Από τις ιδιότητες του DTFT (ενότητα 2.1), γνωρίζουμε ότι

$$y(n) = x(n) * h(n) \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (2.39)$$

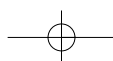
Άρα, εάν θέλουμε να ανακατασκευάσουμε την $y(n)$ από τα δείγματα του φάσματος της $Y(e^{j\omega})$ σε διακριτές συχνότητες, θα πρέπει να πάρουμε τουλάχιστο $L + M - 1$ δείγματα στη συχνότητα. Συνεπώς, απαιτείται ένας DFT μήκους $N \geq L + M - 1$, για την αναπαράσταση της ακολουθίας $y(n)$ στο πεδίο του χρόνου. Έτσι,

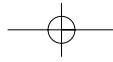
$$\text{εάν } Y(k) \equiv Y(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{τότε } Y(k) = X(k)H(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.40)$$

όπου $X(k)$, $H(k)$ οι DFT N -σημείων των ακολουθιών $x(n)$, $h(n)$ αντίστοιχα. Επειδή οι ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$ έχουν μήκος μικρότερο από N , προσθέτουμε στοιχεία μηδενικής τιμής σε καθεμιά από αυτές, έτσι ώστε το μήκος τους να γίνει ίσο με N (zero padding). Αυτή η αύξηση του μήκους των ακολουθιών δεν επηρεάζει τα φάσματά τους $X(e^{j\omega})$ και $Y(e^{j\omega})$, τα οποία είναι συνεχή. Απλώς, αυτό που έχουμε επιτύχει με το να πάρουμε N δείγματα στη συχνότητα, (υπολογίζοντας τους DFT μήκους N), είναι να αυξήσουμε το πλήθος των δειγμάτων, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις ακολουθίες αυτές στο πεδίο της συχνότητας, πέρα από το ελάχιστο πλήθος (L και M αντίστοιχα).

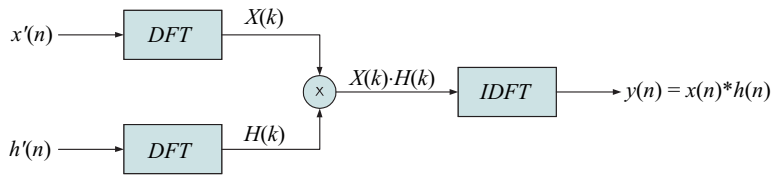
Ο N -σημείων DFT, όπου $N = L + M - 1$, της ακολουθίας εξόδου $y(n)$, είναι αρκετός για την αναπαράσταση της $y(n)$ στο πεδίο των συχνοτήτων. Κατά συνέπεια, και ο πολλαπλασιασμός των N -σημείων DFT $X(k)$ και $H(k)$, σύμφωνα με τη σχέση (2.40) και ο επακόλουθος N -σημείων IDFT του γινομένου, θα μας δώσει την ακολουθία $y(n)$ (Βλ. Σχήμα 2.11). Κατ' αναλογία, στο πεδίο του χρόνου αυτό σημαίνει πως η N -σημείων κυκλική συνέλιξη των $x'(n)$ και $h'(n)$ ισοδυναμεί με τη γραμμική συνέλιξη των $x(n)$ (μήκους L) και $h(n)$ (μήκους M). Με άλλα λόγια, αυξάνοντας το μήκος των ακολουθιών $x(n)$ και $h(n)$ σε N (προσθέτοντας στο τέλος καθεμιάς στοιχεία μηδενικής τιμής) και εκτελώντας την κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών που προκύπτουν,





παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα με εκείνο που θα παίρναμε, εάν εκτελούσαμε τη γραμμική συνέλιξη των αρχικών ακολουθιών. Επομένως, ο DFT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης, εφαρμόζοντας αυτόν στις ακολουθίες που έχουν κατάλληλα επιμηκυνθεί.

Σχήμα 2.11
Γραμμική συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας



Παράδειγμα 2.6

Χρησιμοποιήστε το ζεύγος του DFT για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = \{1, 4, 4, 1\}$ στο οποίο εφαρμόζεται είσοδος $x(n) = \{5, 4, 3, 2, 1\}$.

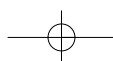
Λύση

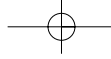
Η ακολουθία εισόδου έχει μήκος $L = 4$ και η κρουστική ακολουθία έχει μήκος $M = 5$. Η γραμμική συνέλιξη των δύο αυτών ακολουθιών θα μας δώσει την ακολουθία εξόδου $y(n)$ μήκους $N = L + M - 1 = 8$. Επομένως, το μήκος του DFT θα πρέπει να είναι (τουλάχιστον) οχτώ. Επιμηκύνουμε τις ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$, ώστε καθεμιά να αποκτήσει μήκος ίσο με οχτώ, προσθέτοντας στοιχεία μηδενικής τιμής, και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον DFT των νέων ακολουθιών. Οι ακολουθίες που προκύπτουν είναι $x'(n) = \{5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0\}$ και $h'(n) = \{1, 4, 4, 1, 0, 0, 0, 0\}$.

Ο 8-σημείων DFT της εισόδου $x'(n)$ ισούται με $X(k) = \sum_{n=0}^7 x'(n)e^{-j2\pi kn/8}$, $k = 0, 1, \dots, 7$ και επομένως:

$X(0) = 15$	$X(4) = 3$
$X(1) = 5,41 - j7,24$	$X(5) = 2,6 + j1,24$
$X(2) = 3 - j2$	$X(6) = 3 + j2$
$X(3) = 2,6 - j1,24$	$X(7) = 5,41 + j7,24$

Ο 8-σημείων DFT της κρουστικής $h'(n)$ ισούται με $H(k) = \sum_{n=0}^7 h'(n)e^{-j2\pi kn/8}$, $k = 0, 1, \dots, 7$ και επομένως:





$$\begin{aligned} H(0) &= 10 & H(4) &= 0 \\ H(1) &= 3,12-j7,54 & H(5) &= -1,12-j0,46 \\ H(2) &= -3-j3 & H(6) &= -3 + j3 \\ H(3) &= -1,12 + j0,46 & H(7) &= 3,12 + j7,54 \end{aligned}$$

Το γινόμενο των δύο αυτών DFT στοιχείο προς στοιχείο θα μας δώσει την $Y(k)$:

$$\begin{aligned} Y(0) &= 150 & Y(4) &= 0 \\ Y(1) &= -37,68-j63,41 & Y(5) &= -2,32-j2,59 \\ Y(2) &= -15-j3 & Y(6) &= -15 + j3 \\ Y(3) &= -2,32 + j2,59 & Y(7) &= -37,68 + j63,41 \end{aligned}$$

Η απόκριση $y(n)$ προκύπτει από τον 8-σημείων IDFT της $Y(k)$ ως

$$y(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 Y(k) e^{j2\pi kn/8}, \quad n = 0, 1, \dots, 7 \text{ και τελικά } y(n) = \{5, 25, 39, 35, 25, 15, 6, 1\}.$$

Σημειώστε ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν εκτελέσουμε την κυκλική συνέλιξη απευθείας στο πεδίο του χρόνου, όπως έγινε στο Παράδειγμα 2.5, τοποθετώντας τις μήκους οχτώ σημείων ακολουθίες $x'(n)$ και $h'(n)$ στις περιφέρειες κύκλων, περιστρέφοντας και προσθέτοντας τα γινόμενα.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.11

Να υπολογίσετε την απόκριση ενός συστήματος με κρουστική $h(n) = \{1, 2, 3\}$ για είσοδο $x(n) = \{3, 4, 5, 2\}$ χρησιμοποιώντας DFT και IDFT των οχτώ σημείων.

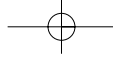
2.2.4 Ο DFT σε μορφή πινάκων

Ο DFT N -σημείων (εξίσωση 2.21) μπορεί να θεωρηθεί και ως γραμμικός μετασχηματισμός ενός διάνυσματος N -διαστάσεων στο χρόνο σε ένα N -διαστάσεων διάνυσμα στη συχνότητα. Έστω \mathbf{x} το διάνυσμα των N στοιχείων της ακολουθίας $x(n)$,

$$\mathbf{x} = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)]^T \tag{2.41}$$

όπου ο εκθέτης T υποδηλώνει τον ανάστροφο πίνακα, \mathbf{X} το διάνυσμα των N συντελεστών $X(k)$

$$\mathbf{X} = [X(0) \ X(1) \ \dots \ X(N-1)]^T \tag{2.42}$$



και \mathbf{W} ο $N \times N$ DFT πίνακας

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

όπου $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ η N οστή ρίζα της μονάδας. Ο πίνακας \mathbf{W} είναι συμμετρικός. Με βάση αυτούς τους ορισμούς, ο DFT μπορεί να εκφρασθεί σε μορφή πινάκων ως:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad (2.44)$$

Θεωρούμε ότι ο αντίστροφος του \mathbf{W} υπάρχει και είναι ο \mathbf{W}^{-1} , οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης με \mathbf{W}^{-1} παίρνουμε

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{X} \quad (2.45)$$

Όμως, η σχέση (2.22) του IDFT εκφράζεται σε μορφή πινάκων ως:

$$\mathbf{x} = (1/N)\mathbf{W}^*\mathbf{X} \quad (2.46)$$

όπου \mathbf{W}^* ο συζυγής μιγαδικός του \mathbf{W} . Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

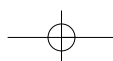
$$\mathbf{W}^{-1} = (1/N)\mathbf{W}^* \quad (2.47)$$

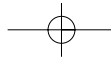
και, κατά συνέπεια,

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^* = \mathbf{I} \quad (2.48)$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $N \times N$. Επομένως, ο πίνακας \mathbf{W} είναι ένας ορθογώνιος (unitary) πίνακας.

Από τις σχέσεις αυτές γίνεται σαφές ότι για τον υπολογισμό του DFT απαιτούνται N^2 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και $N(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις (λαμβάνοντας υπόψη τους πολλαπλασιασμούς ακόμη και με τη μονάδα). Όμως, αφού ο πίνακας \mathbf{W} είναι συμμετρικός, οι μισές τιμές αυτού είναι ίδιες με τις άλλες μισές. Επιπλέον, οι τιμές αυτές είναι οι N ρίζες της μονάδας, και από αυτές οι μισές είναι αντίθετες των άλλων. Αυτό μπορεί να γίνει φανερό αν γράψουμε τον πίνακα \mathbf{W} για $N = 8$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.12. Ο πίνακας αυτός προέκυψε με τη βοήθεια του Σχήματος





2.6. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο τέσσερις διαφορετικές τιμές στον πίνακα αυτό. Αξιοποιώντας, επομένως, τη συμμετρία και την περιοδικότητα των τιμών του πίνακα, μπορούμε να απαλείψουμε τον πλεονασμό. Έτσι, μπορούμε να καταλήξουμε σε τεχνικές υπολογισμού του DFT με αρκετά λιγότερες πράξεις, δηλαδή, καταλήγουμε σ' έναν ταχύ μετασχηματισμό Fourier (fast Fourier transform, FFT), όπως θα δούμε στην ενότητα 2.3.

		$n \longrightarrow$							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$k \downarrow$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	a	$-j$	$-b$	-1	$-a$	j	b
	2	1	$-j$	-1	j	1	$-j$	-1	j
	3	1	$-b$	j	a	-1	b	$-j$	$-a$
	4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	5	1	$-a$	$-j$	b	-1	a	j	$-b$
	6	1	j	-1	$-j$	1	j	-1	$-j$
	7	1	b	j	$-a$	-1	$-b$	$-j$	a

Σχήμα 2.12

Ο πίνακας W για $N = 8$

$$(a = \frac{1-j}{\sqrt{2}}, b = \frac{1+j}{\sqrt{2}}, j = \sqrt{-1})$$

Παράδειγμα 2.7

Να υπολογιστεί ο DFT της ακολουθίας $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$.

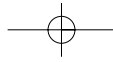
Λύση

Η ακολουθία $x(n)$ είναι μήκους τέσσερα, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα W για $N = 4$. Αξιοποιώντας την περιοδικότητα και τη συμμετρία ($W_N^{k+N/2} = -W_N^k$) των τιμών του πίνακα έχουμε

$$W_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \end{bmatrix}$$

Όπως ήταν φυσικό, το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με εκείνο του Παραδείγματος 2.4.



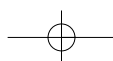
Σύνοψη ενότητας

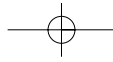
Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή το μετασχηματισμό που εφαρμόζεται σε ακολουθίες πεπερασμένου μήκους. Αυτός είναι ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται στην πράξη στην επεξεργασία σημάτων με υπολογιστή. Είδαμε ότι για ένα σήμα N δειγμάτων, προκύπτουν N δείγματα στη συχνότητα. Πρόκειται για ένα περιοδικό διακριτό φάσμα. Γνωρίσαμε επίσης την έννοια της κυκλικής ολίσθησης ενός σήματος. Είδαμε ότι η κυκλική συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου, μήκους L και M αντίστοιχα, μπορεί να δώσει το ίδιο αποτέλεσμα με τη γραμμική συνέλιξη αυτών, μόνο αφού επεκτείνουμε τα αρχικά σήματα με επιπλέον στοιχεία μηδενικής τιμής, ώστε να αποκτήσουν μήκος τουλάχιστον ίσο με $L + M - 1$ το καθένα, και αφού υπολογίσουμε την κυκλική συνέλιξη των νέων, μεγαλύτερου μήκους, ακολουθιών. Τέλος, διαπιστώσαμε για μία ακόμα φορά, ότι κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας η ενέργεια διατηρείται (θεώρημα Parseval).

2.3 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (fast Fourier transform, FFT) δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας αποδοτικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του DFT. Στην πράξη, δεν υπάρχει μόνο ένας αλγόριθμος, αλλά πλήθος από διαφορετικούς αλγόριθμους που επιτυγχάνουν το σκοπό αυτό. Οι διαφορές τους βρίσκονται κυρίως στο πλήθος και στο είδος των πράξεων καθώς και στο μέγεθος της απαιτούμενης μνήμης. Όλοι όμως, έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: *χρειάζονται μόνο $(N/2) \log_2 N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς για τον υπολογισμό ενός DFT N -σημείων*. Εμείς θα αναφερθούμε στον αλγόριθμο των Cooley–Tukey, ο οποίος προτάθηκε το 1965 και ο οποίος έδωσε μία πραγματικά εντυπωσιακή ώθηση στην ψηφιακή επεξεργασία σημάτων. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εφαρμοστεί σε σήματα αποτελούμενα από N δείγματα, όπου $N = 2^m$, δηλαδή πρόκειται για έναν αλγόριθμο βάσης-2 (radix-2), όπως αυτός ονομάζεται. Αρχικά, η ακολουθία των N στοιχείων εισόδου $x(n)$ χωρίζεται σε δύο ακολουθίες μήκους $N/2$ η καθεμία, τις $x(2n)$ και $x(2n + 1)$, αποτελούμενες από στοιχεία με άρτιους και περιττούς δείκτες, αντίστοιχα. Έτσι, ξεκινώντας από τον ορισμό του DFT (εξίσωση 2.21) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{2nk}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$





Όμως $W_N^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} = W_{N/2}^{nk}$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_{N/2}^{nk}}_{X_1(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_{N/2}^{nk}}_{X_2(k)}$$

ή $X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$ (2.50)

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των N σημείων του $X(k)$ έχει εκφραστεί ως άθροισμα δύο DFTs με πλήθος σημείων $N/2$ ο καθένας, εκ των οποίων ο ένας πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί W_N^k . Αυτός ο πολλαπλασιασμός ήταν αναμενόμενος, αν σκεφθούμε ότι η ακολουθία των περιττών δεικτών είναι ολισθημένη κατά ένα δείγμα ως προς την αρχή του χρόνου, οπότε με βάση την ιδιότητα της κυκλικής ολίσθησης στο χρόνο, αυτό συνεπάγεται πολλαπλασιασμό επί W_N^k στο πεδίο της συχνότητας.

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ και $W_N^{n(k+\frac{N}{2})} = W_{\frac{N}{2}}^{nk}$, η σχέση (2.50)

για k ίσο με $k + (N/2)$ γίνεται:

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k)$$
 (2.51)

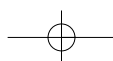
Κατά συνέπεια, έχουμε επιτύχει μέχρι το σημείο αυτό, να εκφράσουμε τον αρχικό DFT των N σημείων ως συνδυασμό δύο άλλων DFTs μισού μήκους ο καθένας. Ας ξαναγράψουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις, προσέχοντας όμως αυτή τη φορά, ότι τα n, k κυμαίνονται μεταξύ 0 και $(N/2)-1$ και όχι μεταξύ 0 και $N-1$, όπως είχαμε ξεκινήσει:

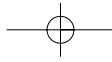
$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$
 (2.52)

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k)$$
 (2.53)

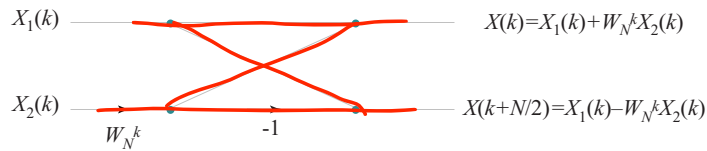
όπου $k = 0, 1, \dots, N/2-1$.

Ο υπολογισμός των τιμών αυτών μπορεί να γίνει συνδυαστικά εκτελώντας μόνο ένα πολλαπλασιασμό. Παραστατικά, η διαδικασία αυτή δίνεται με τη βοήθεια της λεγόμενης πεταλούδας (butterfly) του Σχήματος 2.13. Πρόκειται ουσιαστικά, για τον υπολογισμό ενός DFT 2 σημείων. Στο πάνω δεξί άκρο της πεταλούδας έχουμε την πρόσθεση των αριθμών που καταλήγουν σ' αυτό, ενώ στο κάτω δεξί άκρο εκτελούμε την αφαίρεση των ίδιων αριθμών.



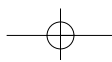
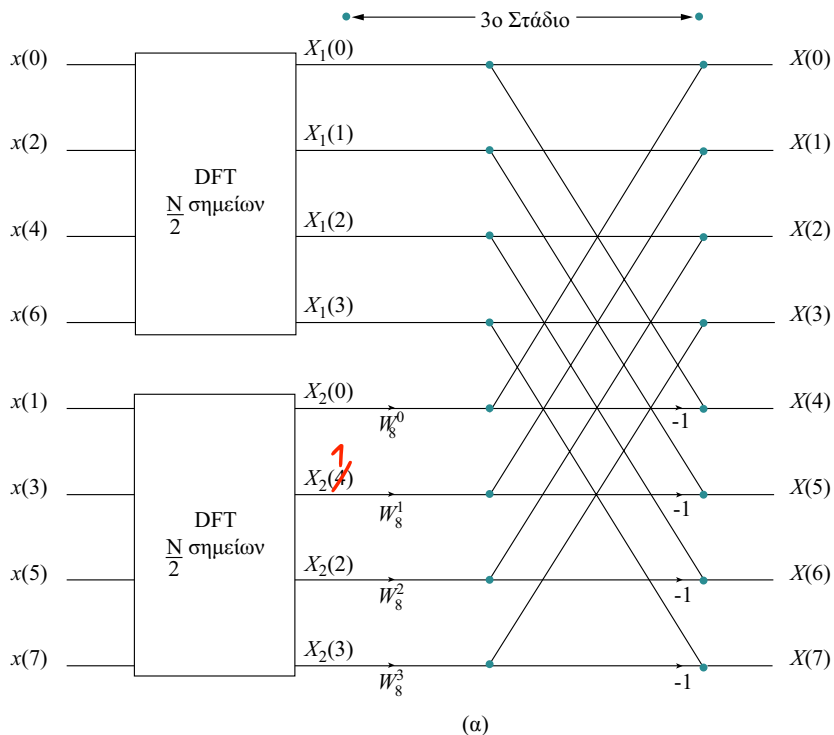


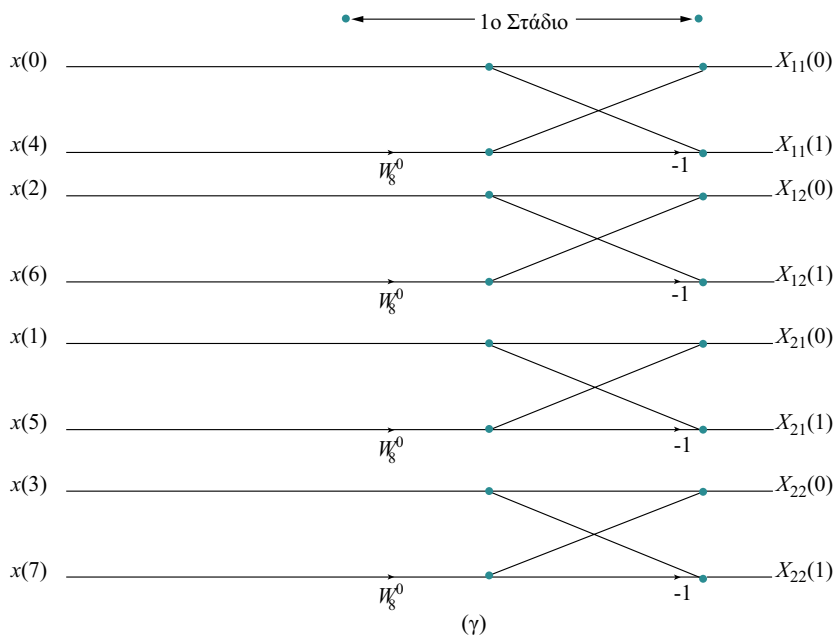
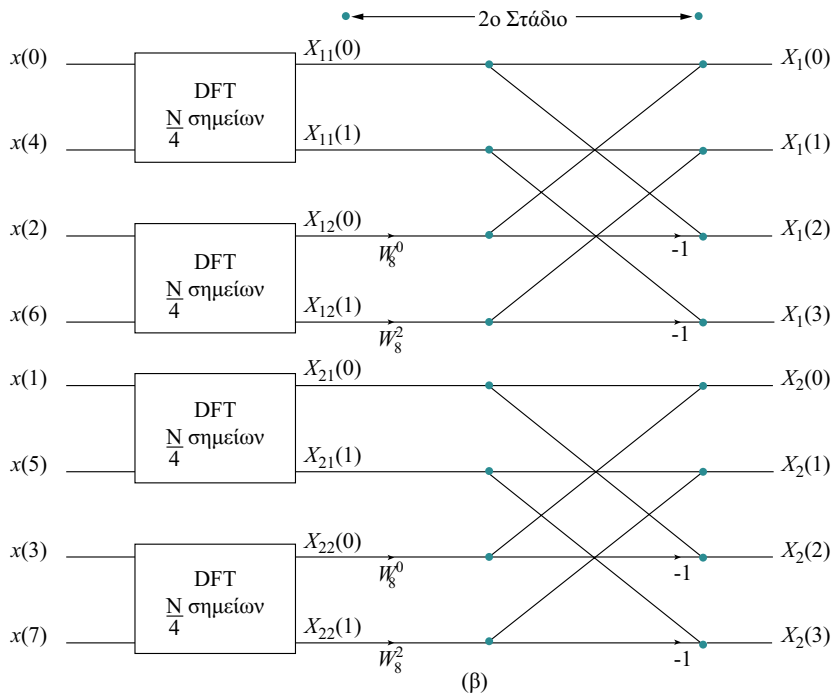
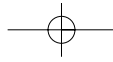
Σχήμα 2.13
Βασική πεταλούδα 2 σημείων

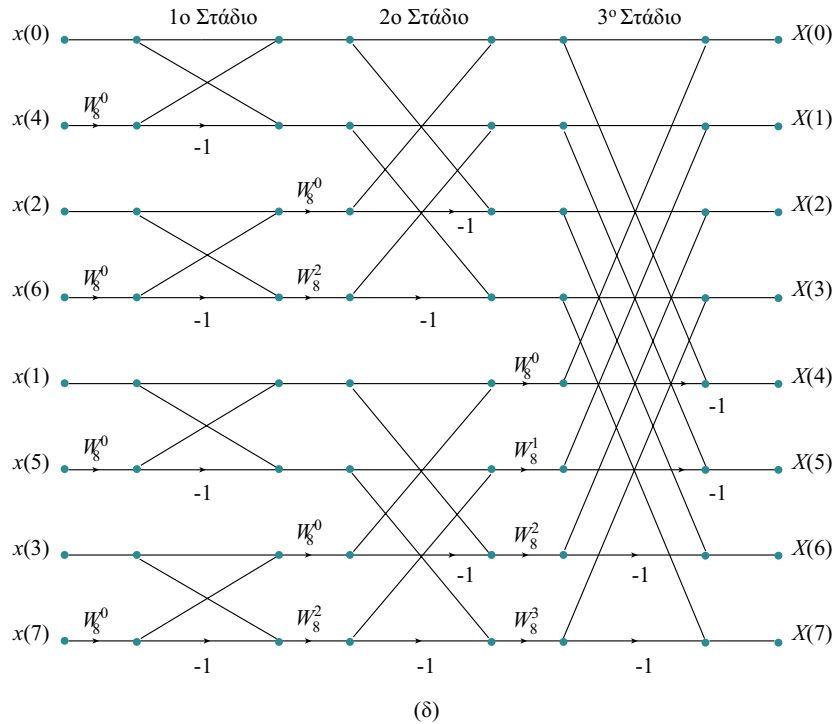
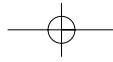


Γραφικά, η μέχρι τώρα ανάλυση του DFT δίνεται στο Σχήμα 2.14α για την περίπτωση που έχουμε οχτώ δείγματα ($N = 8$). Γίνεται σαφές ότι ο υπολογισμός του N -σημείων DFT έχει αναχθεί στον υπολογισμό δύο DFTs $N/2$ -σημείων ο καθένας και στον τελικό συνδυασμό των αποτελεσμάτων τους. Η διαδικασία ανάλυσης που ακολουθήθηκε προηγουμένως μπορεί να συνεχιστεί και για τους δύο νέους DFTs των $N/2$ σημείων. Έτσι, χωρίζουμε και πάλι σε άρτια και περιττά και ακολουθώντας την ίδια τακτική καταλήγουμε στο διάγραμμα του Σχήματος 2.14β. Αυτή η διαδικασία ανάλυσης (αποδεκατισμού) συνεχίζεται μέχρις ότου καταλήξουμε στον υπολογισμό DFT 2-σημείων (Σχήμα 2.14γ). Αυτό θα γίνει μετά από m στάδια, όπου $m = \log_2 N$. Το συνολικό διάγραμμα ροής ενός FFT οχτώ σημείων φαίνεται στο Σχήμα 2.14δ.

Σχήμα 2.14
Διαγράμματα ροής FFT οχτώ σημείων: (α)-(γ) τα τρία διαδοχικά στάδια ανάπτυξης του αλγορίθμου, (δ) το συνολικό διάγραμμα ροής





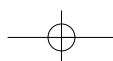


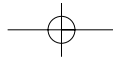
Σχήμα 2.14

Διαγράμματα ροής FFT οχτώ σημείων: (α)–(γ) τα τρία διαδοχικά στάδια ανάπτυξης του αλγορίθμου, (δ) το συνολικό διάγραμμα ροής

Από το Σχήμα 2.14δ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

Η διάταξη των δειγμάτων εξόδου (συντελεστών) είναι κανονική, δηλαδή $X(0), X(1), \dots, X(7)$, ενώ η διάταξη των δειγμάτων εισόδου (δεδομένων) είναι μη κανονική, $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$. Η μη κανονική αυτή διάταξη των δειγμάτων εισόδου είναι αποτέλεσμα της σταδιακής αποσύνθεσης των δειγμάτων εισόδου (πεδίο χρόνου), που εφαρμόσαμε κατά την ανάπτυξη του αλγορίθμου. Αυτή η διαδικασία αποσύνθεσης ονομάζεται αποδεκατισμός στο χρόνο (decimation-in-time, DIT). Η διάταξη των στοιχείων εισόδου δεν είναι τυχαία, αλλά προκύπτει από την κανονική διάταξη των δειγμάτων με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (bit-reversal). Η πλήρης αντιστοίχιση των κανονικών και των αναδιαταγμένων δεικτών για $N = 8$ δίνεται στον Πίνακα 2.4.





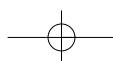
Πίνακας 2.4

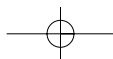
Κανονική διάταξη και διάταξη που προκύπτει από αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων για $N = 8$

Κανονική διάταξη		Διάταξη από αντιστροφή της σειράς των bits	
Δεκαδικός	Δυαδικός	Δυαδικός	Δεκαδικός
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο του FFT που μόλις αναπτύξαμε, είναι η δυνατότητα εκτέλεσης των υπολογισμών στις ίδιες θέσεις μνήμης (in place). Δεν απαιτείται, δηλαδή, επιπλέον χώρος για την αποθήκευση των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων. Από το Σχήμα 2.14, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε στάδιο, οι έξοδοι μπορούν να αποθηκεύονται στις ίδιες θέσεις μνήμης, όπου ήταν αποθηκευμένες οι εισοδοί του σταδίου εκείνου.

Τέλος, το πλέον ουσιαστικό στοιχείο του FFT είναι η μειωμένη υπολογιστική πολυπλοκότητά του, δηλαδή, το συνολικό πλήθος πράξεων (πολλαπλασιασμών και προσθέσεων). Γενικεύοντας την περίπτωση του Σχήματος 2.14δ μπορούμε να δούμε ότι ο υπολογισμός του FFT N δειγμάτων ($N = 2^m$) γίνεται σε m στάδια ($m = \log_2 N$). Σε κάθε στάδιο έχουμε $N/2$ πεταλούδες, δηλαδή, $(N/2) \log_2 N$ πεταλούδες συνολικά. Από το Σχήμα 2.14δ διαπιστώνουμε ότι για τον υπολογισμό κάθε πεταλούδας απαιτείται ένας μιγαδικός πολλαπλασιασμός και δύο μιγαδικές προσθέσεις. Έτσι, ο N -σημείων FFT απαιτεί $(N/2) \log_2 N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και $N \log_2 N$ μιγαδικές προσθέσεις. Είδαμε στην παράγραφο 2.2.4, ότι για τον απευθείας υπολογισμό του N -σημείων DFT, απαιτούνται N^2 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και $N(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις. Κατά συνέπεια, το κέρδος σε πράξεις και άρα σε χρόνο υπολογισμού, είναι πολύ μεγάλο, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.5 για διαφορετικό πλήθος δειγμάτων.





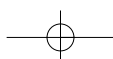
Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για $N = 1024$ το κέρδος αυτό γίνεται μεγαλύτερο του διακόσια, δηλαδή ο χρόνος υπολογισμού μειώνεται τουλάχιστον κατά δύο τάξεις μεγέθους.

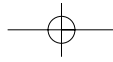
Πίνακας 2.5

Μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί για τον υπολογισμό του DFT και του FFT

N	DFT	FFT	Λόγος Μιγαδικών
	Πλήθος Μιγαδικών Πολλαπλασιασμών	Πλήθος Μιγαδικών Πολλαπλασιασμών	Πολλαπλασιασμών (#DFT / #FFT)
2	4	1	4
4	16	4	4
8	64	12	5,3
16	256	32	8,0
32	1 024	80	12,8
64	4 096	192	21,3
128	16 384	448	36,6
256	65 536	1 024	64,0
512	262 144	2 304	113,8
1024	1 048 576	5 120	204,8
2048	4 194 304	11 264	372,4
4096	16 777 216	24 576	682,7
8192	67 108 864	53 248	1 260,3

Θα πρέπει να τονιστεί ότι ο FFT αλγόριθμος, που μόλις αναπτύχθηκε, εφαρμόζεται μόνο για πλήθος δειγμάτων που είναι δύναμη του δύο ($\text{radix}=2$). Το γεγονός αυτό αποτελεί άλλωστε και τον περιορισμό του FFT, δηλαδή ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί, έτσι όπως παρουσιάστηκε εδώ, για τυχαίο πλήθος σημείων — όπως ο DFT. Υπάρχουν πολλοί FFT αλγόριθμοι στη διεθνή βιβλιογραφία οι οποίοι αξιοποιούν τα διαφορετικά χαρακτηριστικά της εισόδου και επιτυγχάνουν υψηλότερες επιδόσεις. Έτσι, συναντούμε αλγορίθμους που εφαρμόζονται μόνο για πλήθος σημείων που είναι δυνάμεις του τέσσερα ($\text{radix}=4$), ή αλγορίθμους μόνο για πραγματικές εισόδους (real-valued), ή αλγορίθμους για πλήθος σημείων που είναι πρώτοι αριθμοί





(prime length).

Η προηγούμενη ανάλυση βασίστηκε στον *αποδεκατισμό στο χρόνο* (DIT). Με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε *αποδεκατισμό στη συχνότητα* (decimation-in-frequency, DIF) καταλήγοντας σ' έναν FFT αλγόριθμο (Sande-Tukey, 1966), ο οποίος έχει την ίδια υπολογιστική πολυπλοκότητα με τον αντίστοιχο DIT αλγόριθμο. Χαρακτηριστικό του DIF αλγορίθμου είναι ότι οι *πολλαπλασιασμοί στις πεταλούδες* γίνονται μετά την *άθροιση των εισόδων* και ότι τα δείγματα εισόδου είναι σε κανονική διάταξη, ενώ τα δείγματα εξόδου σε μη κανονική διάταξη (bit-reversed).

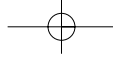
Υπενθυμίζεται τέλος, ότι ο FFT δεν αποτελεί κάποιο νέο μετασχηματισμό Fourier, αλλά μία αποδοτική αλγοριθμική μέθοδο για τον υπολογισμό του DFT.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.12

Πόσοι μιγαδικοί *πολλαπλασιασμοί* απαιτούνται για την υλοποίηση της γραμμικής *συνέλιξης* δύο ακολουθιών μήκους N η καθεμιά, όπου N δύναμη του δύο; Υπολογίστε τη γραμμική *συνέλιξη* (α) *απευθείας* στο πεδίο του χρόνου, (β) μέσω του πεδίου της *συχνότητας* με χρήση του DFT και (γ) μέσω του πεδίου της *συχνότητας* με χρήση του FFT. Καταστρώστε πίνακα ο οποίος να δείχνει το πλήθος των πράξεων συναρτήσει του αριθμού των σημείων N . Για ποιες τιμές του N μας συμφέρει να υπολογίσουμε τη γραμμική *συνέλιξη* μέσω του FFT και όχι *απευθείας*;

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τον *ταχύ* μετασχηματισμό Fourier. Αναπτύξαμε τον αλγόριθμο *αποδεκατισμού στο χρόνο* για την περίπτωση που το πλήθος των σημείων είναι δύναμη του δύο. Είδαμε ότι υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι για τον *ταχύ* υπολογισμό του DFT, η υπολογιστική πολυπλοκότητα των οποίων, είναι της τάξεως του $N \log_2 N$ και όχι του N^2 , όπως συμβαίνει με τον *απευθείας* υπολογισμό του DFT.



Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τα σήματα διακριτού χρόνου από την πλευρά του πεδίου της συχνότητας και είδαμε ότι:

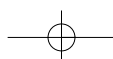
Η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας επιτυγχάνεται με το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (εξίσωση ανάλυσης), ενώ η μετάβαση από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου γίνεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (εξίσωση σύνθεσης).

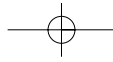
Κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας η ενέργεια του σήματος διατηρείται (θεώρημα Parseval). Πρόκειται στην ουσία για την αναπαράσταση της ίδιας πληροφορίας με διαφορετικό τρόπο.

Ο DTFT ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι μία συνεχής και περιοδική συνάρτηση.

Ο DFT ενός σήματος διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας είναι μία περιοδική ακολουθία.

Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT) είναι κάθε αλγόριθμος ο οποίος έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα μικρότερη από εκείνη του απευθείας υπολογισμού του DFT. Η συνήθης υπολογιστική πολυπλοκότητα του FFT είναι της τάξεως του $M \log_2 N$, ενώ εκείνη του DFT είναι της τάξεως του N^2 .





Βιβλιογραφία κεφαλαίου

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων*, Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός, Αθήνα, 1998.

Ν.Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*, Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα, 1993.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

D.J.DeFatta, J.G.Lucas, W.S.Hodgkiss, *Digital Signal Processing: A System Design Approach*, J. Wiley & Sons, 1988.

P.Duhamel, M.Vetterli, *Fast Fourier Transforms: A Tutorial Review and a State of the Art*, Signal Processing, 19, 259, 1990.

E.C.Ifeachor, B.W.Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Second Edition, Pearson Education Limited, 2002.

P.A.Lynn, W.Fuerst, *Introductory Digital Signal Processing With Computer Applications*, J.Wiley & Sons Ltd, 1989.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, Second Edition, McGraw Hill, 2001.

S.J.Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.

A.V.Oppenheim, A.S.Willsky, *Signals & Systems*, Second Edition, Prentice-Hall, 1997.

J.G.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, 1996.

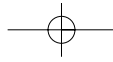
L.R.Rabiner et al, *Terminology in Digital Signal Processing*, IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-20, No. 5, pp. 322-337, Dec. 1972.

S.W.Smith, *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, Second Edition, California Technical Publishing, 1999

R.D.Strum, D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

band-limited	περιορισμένου εύρους
bit reversal	αντιστροφή δυαδικών ψηφίων
circular shift	κυκλική ολίσθηση ή μετατόπιση
decimation in frequency	αποδεκατισμός στη συχνότητα
decimation in time	αποδεκατισμός στο χρόνο
discrete Fourier transform	διακριτός μετασχηματισμός Fourier
domain	πεδίο, χώρος
dual	διττός
energy-density spectrum	φάσμα ενεργειακής πυκνότητας
fast Fourier transform	ταχύς μετασχηματισμός Fourier
magnitude spectrum	φάσμα μέτρου
phase spectrum	φάσμα φάσης
radix	βάση
sampling frequency	συχνότητα δειγματοληψίας
sampling rate	ρυθμός δειγματοληψίας
shift	ολίσθηση, μετατόπιση
spectral overlap	φασματική επικάλυψη
twiddle factor	παράγοντας στροφής
zero padding	προσθήκη μηδενικών στοιχείων



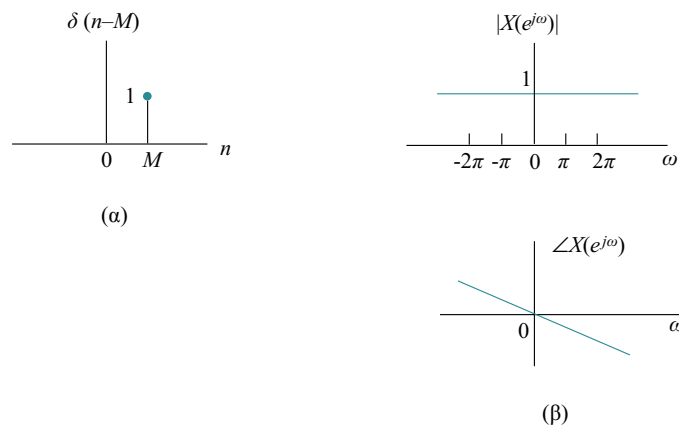
2.1

Η άσκηση αυτή είναι εύκολο να λυθεί, αν θυμηθούμε ότι $\delta(n-M) = 1$ μόνο για $n = M$, και εργαζομαστε όπως στο Παράδειγμα 2.2. Έτσι, από τον ορισμό (2.1) έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-M)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega M}$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της συνάρτησης που υπολογίσαμε είναι και πάλι ίσο με 1, αφού $|X(e^{j\omega})| = |e^{-j\omega M}| = |\cos(\omega M) - j \sin(\omega M)| = \sqrt{\cos^2(\omega M) + \sin^2(\omega M)}$, ενώ η φάση είναι ανάλογη της συχνότητας, δηλαδή $\angle X(e^{j\omega}) = -\omega M$.

Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις δίνονται στο Σχήμα 2.15.



Σχήμα 2.15

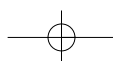
(α) Η ακολουθία $\delta(n-M)$ και (β) το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier αυτής.

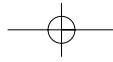
Αν καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, μπράβο σας. Αν όχι, ξαναπροσπαθήστε. Δύο είναι τα σημεία τα οποία πιθανόν δεν έχετε κατανοήσει: (α) τη μοναδιαία κρουστική $\delta(n-M)$ η οποία είναι παντού ίση με μηδέν, εκτός του σημείου $n = M$, όπου έχει την τιμή 1 (Βλ. ενότητα 1.3), και (β) τους ορισμούς τους σχετικούς με τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι ορισμοί (2.3) έως (2.6) θα σας βοηθήσουν σ' αυτό. Δείτε τους και προσπαθήστε και πάλι να λύσετε μόνοι σας την άσκηση.

2.2

Θυμηθείτε ότι με βάση τη σχέση 1.34 ο παλμός $x(n)$ γράφεται:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = 1 \cdot [\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)].$$

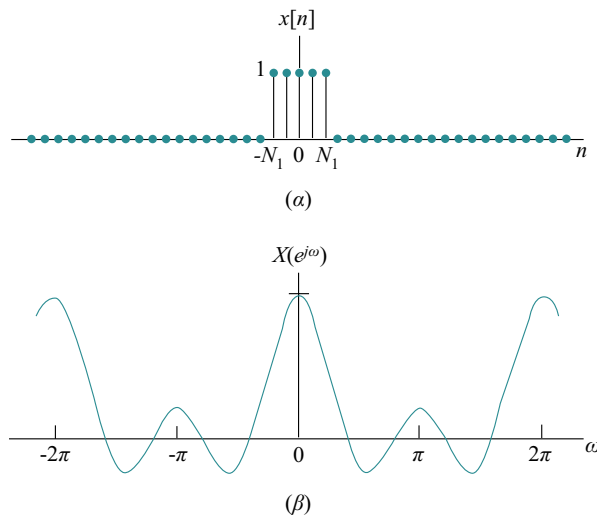




Επομένως, από τον ορισμό (2.1) του DTFT έχουμε:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 \cdot [\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)]e^{-j\omega n} = \\ &= 1 \cdot [e^{j\omega 2} + e^{j\omega} + e^{j\omega 0} + e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2}] = 1 \cdot [1 + (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})] = \\ &= 1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) \end{aligned}$$

Οι γραφικές παραστάσεις του παλμού $x(n)$ για $N_1 = 2$ και του DTFT αυτού φαίνονται στο Σχήμα 2.16.



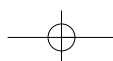
Σχήμα 2.16

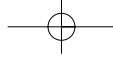
(α) Η ακολουθία $x(n)$ της άσκησης αυτοαξιολόγησης 2.2 για $N_1 = 2$ και (β) ο DTFT αυτής.

Θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε τον υπολογισμό του αθροίσματος γενικότερα, ως γεωμετρική πρόοδο, δηλαδή:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-2}^2 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^4 e^{-j\omega(m-2)} = e^{j\omega 2} \sum_{m=0}^4 (e^{-j\omega})^m = \\ &< \text{όπου } m = n + 2 \Rightarrow n = m - 2 > \\ &= e^{j\omega 2} \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{j\omega 2} \frac{e^{-j\omega 5/2} (e^{j\omega 5/2} - e^{-j\omega 5/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \\ &= e^{j\omega 2} e^{j\omega/2} e^{-j\omega 5/2} \frac{2j \sin(\omega 5 / 2)}{2j \sin(\omega / 2)} = \frac{\sin(5\omega / 2)}{\sin(\omega / 2)} \end{aligned}$$

Η τελευταία συνάρτηση αποτελεί ουσιαστικά τη διακριτού χρόνου περίπτωση της





συνάρτησης sinc, η οποία εμφανίζεται κατά το μετασχηματισμό Fourier του τετραγωνικού παλμού συνεχούς χρόνου. Η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο αυτών συναρτήσεων, βρίσκεται στο ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο 2π , (γεγονός που οφείλεται στη δειγματοληψία), ενώ η συνάρτηση sinc είναι μη περιοδική.

Αν καταλήξατε στη σωστή έκφραση, σας αξίζουν συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει τον ορισμό του DTFT και το χειρισμό των μιγαδικών αριθμών της μορφής $e^{j\omega}$. Αν πάλι δεν τα καταφέρατε, μην απογοητευθείτε. Επαναλάβετε την άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.1, (αφού ίσως μελετήσετε και πάλι την ενότητα 1.3 του Κεφαλαίου 1) και ξαναπροσπαθήστε.

Τώρα που εξοικειωθήκατε με αυτού του είδους τις πράξεις, επαναλάβετε τη διαδικασία υπολογισμού του DTFT του παλμού του Σχήματος 2.16 για τη γενική περίπτωση που αυτός εκτείνεται από $-N_1$ ως N_1 . Εύκολα θα καταλήξετε στη σχέση $X(e^{j\omega}) = \sin[\omega(N_1 + 1/2)]/\sin(\omega/2)$.

2.3

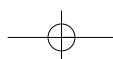
Ο υπολογισμός του DTFT της $g(n)$ γίνεται πολύ εύκολα εάν βασιστούμε στις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης στο χρόνο του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Έτσι έχουμε:

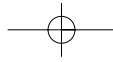
- $x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ εξ ορισμού.
- $x(n-1) \xrightarrow{F} e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$ λόγω της ιδιότητας της ολίσθησης στο χρόνο κατά $n_0 = 1$ (βλ. Πίνακα 2.2)
- $x(n) - x(n-1) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$ λόγω των δύο προηγούμενων σχέσεων και της ιδιότητας της γραμμικότητας.

Αν απαντήσατε σωστά, τότε συγχαρητήρια. Τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης στο χρόνο θα τις συναντούμε πολύ συχνά. Αν δεν καταφέρατε να χωρήσετε στη λύση της άσκησης, τότε χρειάζεται να επαναλάβετε τη μελέτη των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της ολίσθησης της υποενότητας 2.1.2. Ολοκληρώστε την επανάληψη και προσπαθήστε πάλι να λύσετε αυτή την άσκηση. Τη φορά αυτή θα τα καταφέρετε εύκολα.

2.4

Η λύση αυτή δεν είναι και από τις πλέον εύκολες. Θα πρέπει να σκεφτούμε ότι, αφού η σχέση του DTFT είναι ένα άθροισμα εκθετικών όρων, θα ήταν χρήσιμο να εκφράσουμε την τριγωνομετρική συνάρτηση cos σε εκθετική μορφή, δηλαδή, $\cos\theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$. Έτσι, έχουμε:





$$\begin{aligned}
 x(n) &= Aa^n \cos(\omega_0 n + \varphi) u(n) = Aa^n \frac{e^{j(\omega_0 n + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} u(n) \\
 &= \frac{A}{2} a^n (e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi} + e^{-j\omega_0 n} e^{-j\varphi}) u(n) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} (ae^{j\omega_0})^n u(n) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} (ae^{-j\omega_0})^n u(n)
 \end{aligned}$$

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας, καθώς και του αποτελέσματος του Παραδείγματος 2.1, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= F\{x(n)\} = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \frac{1}{1 - ae^{j\omega_0} e^{-j\omega}} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0} e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \frac{1}{1 - ae^{j(\omega - \omega_0)}} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \frac{1}{1 - ae^{-j(\omega + \omega_0)}}
 \end{aligned}$$

Όπως ήδη αναφέραμε στην αρχή της άσκησης αυτής, η λύση της δεν είναι εύκολη. Κατά συνέπεια, μην απογοητευτείτε αν δεν τα καταφέρατε. Προσπαθήστε να την κατανοήσετε και επαναλάβετε την επίλυσή της μόνοι σας πλέον. Αν πάλι είχατε από την αρχή καταφέρει να την λύσετε, τότε σας αξίζουν συγχαρητήρια. Συνεχίστε έτσι.

2.5

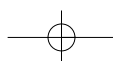
Εάν $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$ και $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$, τότε θέλουμε να δείξουμε ότι

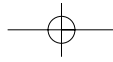
$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta. \text{ Έχουμε λοιπόν:}$$

$$\begin{aligned}
 F\{x_1(n)x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right] x_2(n) e^{-j\omega n} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) e^{-j(\omega - \theta)n} \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta
 \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της σχέσης αντιπροσωπεύει τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier $X_1(e^{j\omega})$ και $X_2(e^{j\omega})$. Αυτή η σχέση αποτελεί τη διττή έκφραση της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου. Με άλλα λόγια, ο πολλαπλασιασμός δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier αυτών. Και αντίθετα, η συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των μετασχηματισμών Fourier αυτών.

Από τη λύση αυτή θα διαπιστώσατε, για μια ακόμη φορά, ότι η απόδειξη των ιδιο-





τήτων είναι συνήθως δύσκολη. Γι' αυτό μην απογοητευθείτε αν δεν τα καταφέρατε. Μελετήστε ξανά τους ορισμούς και τις ιδιότητες της παρούσας υποενοότητας και επιχειρήστε και πάλι να λύσετε την άσκηση μόνοι σας. Αν όμως είχατε καταφέρει από την πρώτη στιγμή να δώσετε τη σωστή απάντηση, τότε μπράβο σας. Δεν πρόκειται να αντιμετωπίσετε καμιά δυσκολία σε οποιαδήποτε από τις επόμενες αποδείξεις ιδιοτήτων.

2.6

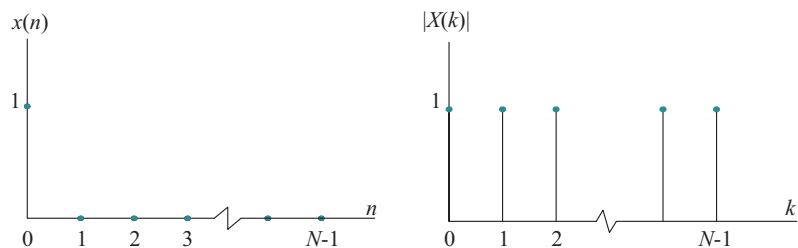
Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $x(n) = \delta(n)$. Αντικαθιστούμε στη σχέση (2.21) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)W_N^{nk} = \delta(0)W_N^{0k} + \delta(1)W_N^{1k} + \dots + \delta(N-1)W_N^{(N-1)k} = \\ &= 1 \cdot 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 \end{aligned}$$

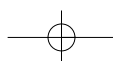
Άρα $X(k) = 1$ όπου $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Δηλαδή, όπως δείχνεται και στο Σχήμα 2.17, η μοναδιαία κρουστική δίνει συχνότητες για όλες τις τιμές του k . Με άλλα λόγια, η μοναδιαία κρουστική καλύπτει όλο το φάσμα των συχνοτήτων! Το φάσμα αυτό ονομάζεται *λευκό* (white), σε παραλληλισμό με το λευκό φως, το οποίο είναι αποτέλεσμα της σύνθεσης όλων των χρωμάτων της ίριδας σε ίσες ποσότητες. Αυτός είναι άλλωστε ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιείται για την εύρεση της απόκρισης ενός συστήματος διακριτού χρόνου, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.4. Παρατηρήστε επίσης, ότι το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε είναι ανεξάρτητο από το πλήθος των δειγμάτων N .

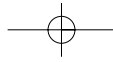
Σχήμα 2.17

Το μοναδιαίο κρουστικό δείγμα και ο DFT του



Όπως διαπιστώσατε, ο υπολογισμός αυτός ήταν εξαιρετικά απλός. Σίγουρα τα καταφέρατε. Αν πάλι αυτό δε συνέβη, τότε μελετήστε ξανά τον ορισμό του DFT καθώς και των παραγόντων στροφής W_N^{nk} . Μετά ξαναπροσπαθήστε. Πραγματικά θα δείτε ότι δεν είναι και τόσο δύσκολο να καταλήξει κανείς στο σωστό αποτέλεσμα.





2.7

Αρχίζοντας και πάλι από τον ορισμό του DFT (σχέση 2.21) έχουμε:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

Για $k=0$ προκύπτει:
$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot e^{-j0} = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot 1 = A \sum_{n=0}^{N-1} 1 = A \cdot N$$

Για $k \neq 0$ προκύπτει:
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

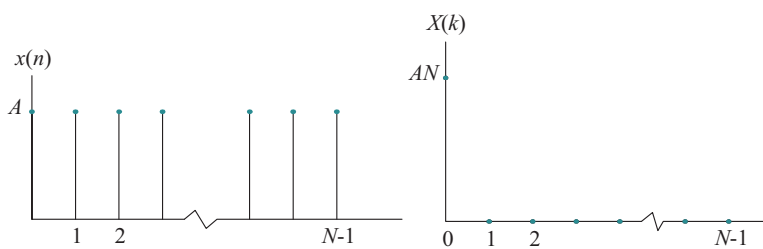
Εκφράζοντας την πεπερασμένη γεωμετρική σειρά σε κλειστή μορφή, έχουμε:

$$X(k) = A \cdot \frac{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)N}}{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}} = A \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = 0 \text{ για } k = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

επειδή ο αριθμητής της σχέσης είναι μηδέν, ενώ ο παρανομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Άρα, τελικά:

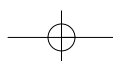
$$X(k) = AN\delta(k), k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

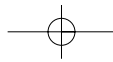
Οι γραφικές παραστάσεις της σταθερής ακολουθίας και του DFT αυτής φαίνονται στο Σχήμα 2.18. Συγκρίνοντας αυτές με εκείνες του Σχήματος 2.17, και αγνοώντας τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες, παρατηρούμε ότι αυτές είναι ίδιες, όταν εναλλάσσουμε το χρόνο με τη συχνότητα. Αυτό είναι απόρροια του διττού χαρακτήρα του μετασχηματισμού Fourier (duality property).



Σχήμα 2.18
Η σταθερή ακολουθία πλάτους A και ο DFT αυτής

Αν δεν καταφέρατε να λύσετε την άσκηση αυτή μην απογοητευθείτε. Δεν είναι από τις πλέον εύκολες, αφού πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις για το k και να κάνουμε τους υπολογισμούς χωριστά για καθεμιά από αυτές. Βλέπουμε και πάλι ότι η σχέση που κατεξοχήν μας χρειάζεται είναι εκείνη του υπολογισμού του αποτελέσματος μιας πεπερασμένης γεωμετρικής σειράς. Προσπαθήστε να την κατανοήσετε





και να επαναλάβετε τη λύση μόνοι σας.

2.8

Ο υπολογισμός του DFT των $x_1(n)$ και $x_2(n)$ θα μπορούσε να γίνει με απευθείας εφαρμογή της σχέσης 2.21, όπως έγινε και στην περίπτωση του Παραδείγματος 2.4 για την ακολουθία $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$, όπου βρέθηκε ότι

$$X(k) = \left\{ 2, \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, 0, \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \right\}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι $x_1(n) = x(\langle n + 1 \rangle_4)$ και $x_2(n) = x(\langle n + 2 \rangle_4)$. Συνεπώς ο DFT αυτών μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της ιδιότητας της κυκλικής ολίσθησης (μετατόπισης) στο χρόνο του Πίνακα 2.3 ως εξής:

$$X_1(k) = W_N^{-k} X(k) \quad \text{και} \quad X_2(k) = W_N^{-2k} X(k)$$

όπου $n_0 = -1$ και $n_0 = -2$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το μέτρο του DFT και των τριών ακολουθιών $x(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$ είναι το ίδιο, όπως δείχνουμε στο Σχήμα 2.19β. Εκείνο που αλλάζει με την ολίσθηση είναι η φάση τους (Σχήμα 2.19γ).

Αν βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα, τότε μπράβο σας. Αυτό σημαίνει ότι έχετε κατανοήσει όχι μόνο τον ορισμό του DFT, αλλά και την επίδραση της ολίσθησης στο τελικό αποτέλεσμα. Αν πάλι δεν τα καταφέρατε, τότε προτείνουμε να ξαναδοκιμάσετε και με τους δύο τρόπους. Αρχίστε τη διαδικασία με βάση τον ορισμό (2.21) και συνεχίστε με βάση τον ορισμό (2.34). Ποιος από τους δύο τρόπους υπολογισμού σας φάνηκε πιο εύκολος;

2.9

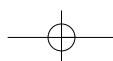
Ο DFT της $x_1(n) = \{1, 2, 3\}$ ισούται με $X_1(k) = \{6, -1,5+j0,866, -1,5-j0,866\}$.

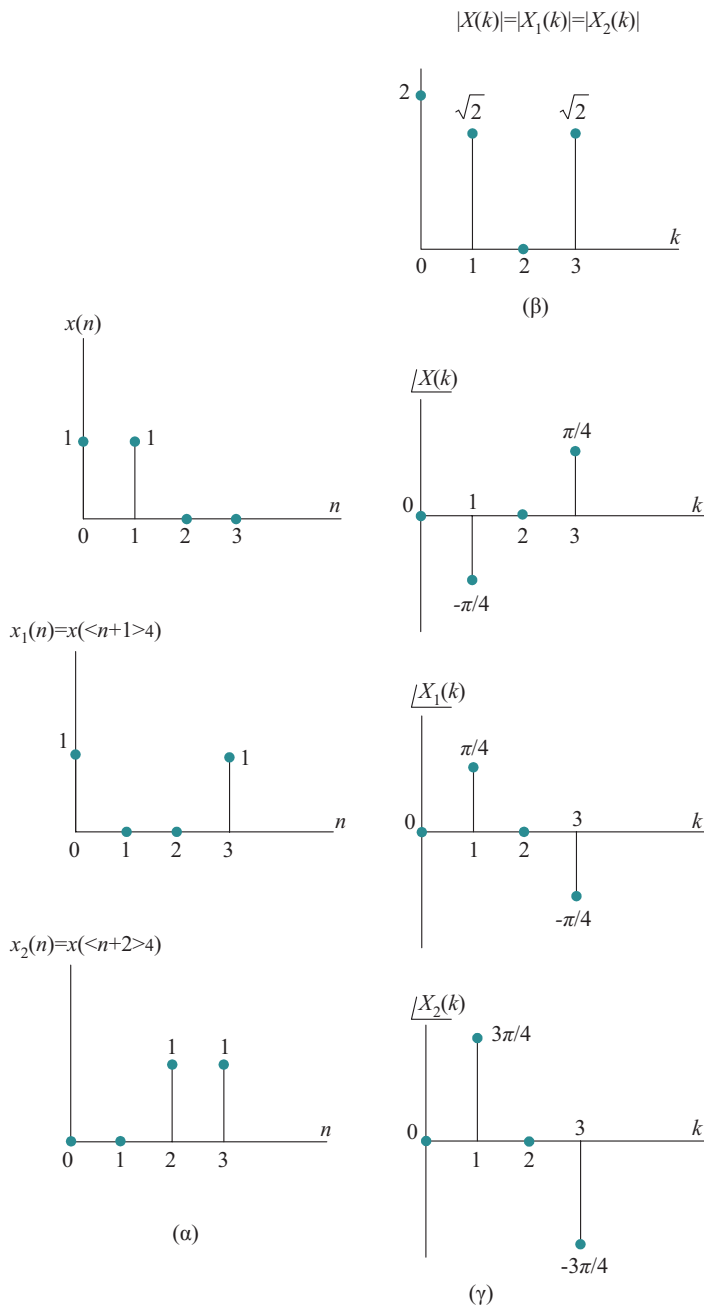
Ο DFT της $x_2(n) = \{4, 5, 6\}$ ισούται με $X_2(k) = \{15, -1,5+j0,866, -1,5-j0,866\}$.

Ο DFT της $x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \{31, 31, 28\}$ ισούται με $X_3(k) = \{90, 1,5-j2,598, 1,5+j2,598\}$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $X_3(k)$ ισούται με το γινόμενο των $X_1(k)$ και $X_2(k)$ στοιχείο προς στοιχείο.

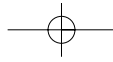
Αν καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, τότε συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει τον τρόπο υπολογισμού του DFT μίας ακολουθίας, καθώς και τη διαδικασία εκτέλεσης πράξεων σε μιγαδικούς αριθμούς. Στην αντίθετη περίπτωση, προσπαθήστε και πάλι. Θα δείτε ότι είναι θέμα εξοικείωσης με τους μιγαδικούς.





Σχήμα 2.19

Τα σήματα (α) έχουν το ίδιο μέτρο (β), αλλά διαφορετική φάση (γ)



2.10

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.21) του DFT βρίσκουμε ότι

$$X(k) = \left\{ 6, -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$\text{Επομένως } \sum_{n=0}^2 |x(n)|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$\text{και } \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 |X(k)|^2 = \frac{1}{3} \cdot (36 + 3 + 3) = \frac{1}{3} \cdot 42 = 14.$$

Συνεπώς, το θεώρημα του Parseval επαληθεύεται.

Αυτή ήταν μία εύκολη άσκηση. Σίγουρα θα καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα. Αν πάλι αυτό δε συνέβη, τότε εξασκηθείτε στους υπολογισμούς με βάση τον ορισμό του DFT (2.21). Ειδικά για μικρές τιμές του N , είναι θέμα απλών πράξεων με μιγαδικούς αριθμούς.

2.11

Επιμηκύνουμε καθεμιά από τις ακολουθίες $h(n)$, $x(n)$ ώστε να αποκτήσει μήκος $N = 8$. Προκύπτουν έτσι οι ακολουθίες $h'(n) = \{1, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0\}$ και $x'(n) = \{3, 4, 5, 2, 0, 0, 0, 0\}$. Το μήκος N είναι μεγαλύτερο του μήκους της ακολουθίας που προκύπτει από τη γραμμική συνέλιξη των $h(n)$, $x(n)$. Με άλλα λόγια, $N > L + M - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$, όπου L , M , $L + M - 1$ τα μήκη των ακολουθιών $h(n)$, $x(n)$ και $y(n) = h(n) * x(n)$, αντίστοιχα.

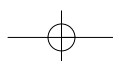
Υπολογίζουμε τον DFT των $h'(n)$, $x'(n)$ με βάση τη σχέση (2.21) και βρίσκουμε αντίστοιχα:

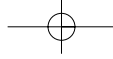
$$H(k) = \{6, 2, 41 - j4, 41, -2 - j2, -0, 41 + j1, 6, 2, -0, 41 - j1, 6, -2 + j2, 2, 41 + j4, 41\}$$

$$X(k) = \{14, 4, 41 - j9, 24, -2 - j2, 1, 6 + j0, 76, 2, 1, 6 - j0, 76, -2 + j2, 4, 41 + j9, 24\}.$$

Το γινόμενο των $H(k)$ και $X(k)$ θα μας δώσει την $Y(k)$, δηλαδή, $Y(k) = X(k)H(k) = \{84, -30, 14 - j41, 8, j8, -1, 86 + j2, 2, 4, -1, 86 - j2, 2, -j8, -30, 14 + j41, 8\}$. Για να βρούμε την $y(n)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τον IDFT της $Y(k)$ σύμφωνα με τη σχέση (2.22), για $N = 8$, δηλαδή

$$y(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 Y(k) e^{j2\pi kn/8}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 7.$$





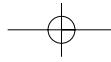
Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι: $y(n) = \{3, 10, 22, 24, 19, 6, 0, 0\}$.

Παρατηρούμε ότι τα δύο τελευταία στοιχεία της ακολουθίας $y(n)$ είναι μηδενικά, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο, αφού η γραμμική συνέλιξη των $x(n)$, $h(n)$ θα πρέπει να έχει μήκος έξι. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με εκείνο του Παραδείγματος 1.6, στο οποίο υπολογίσαμε και πάλι την ίδια γραμμική συνέλιξη, αλλά απευθείας στο πεδίο του χρόνου.

Αν καταφέρατε να λύσετε σωστά την άσκηση αυτή, τότε σας αξίζουν ειλικρινά συγχαρητήρια. Οι υπολογισμοί για μεγάλες τιμές του N είναι επίπονοι και εύκολα μπορεί να γίνουν λάθη. Στις μέρες μας, παρόμοιοι υπολογισμοί γίνονται με τη βοήθεια διαφόρων προγραμματιστικών εργαλείων, όπως για παράδειγμα, του MATLAB. Έτσι, η έμφαση δίνεται στην κατανόηση της ιδιότητας αυτής καθεαυτήν και στη διαδικασία υπολογισμού του αποτελέσματος.

2.12

- (α) Για τον απευθείας υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης δύο ακολουθιών πραγματικών αριθμών μήκους N η καθεμιά, απαιτούνται N^2 πραγματικοί πολλαπλασιασμοί (Βλ. σχέση 1.39). Το αποτέλεσμα της γραμμικής συνέλιξης θα είναι μια ακολουθία μήκους $2N-1$.
- (β) Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης μέσω του πεδίου της συχνότητας γίνεται σύμφωνα με το Σχήμα 2.11. Οι δύο ακολουθίες πρέπει να επιμηκυνθούν με την προσθήκη στοιχείων μηδενικής τιμής, ώστε να αποκτήσουν μήκος τουλάχιστον ίσο προς $2N-1$. Έστω τελικά, ότι το μήκος κάθε ακολουθίας γίνεται ίσο προς $2N$. Ο υπολογισμός του DFT μιας ακολουθίας $2N$ στοιχείων απαιτεί $(2N)^2 = 4N^2$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Σύμφωνα με το Σχήμα 2.11, απαιτείται ο υπολογισμός 2 DFT, ο πολλαπλασιασμός των $2N$ στοιχείων των DFTs που υπολογίσαμε και τέλος, 1 IDFT $2N$ σημείων. Αυτό ισοδυναμεί με 3DFTs και $2N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς, ή συνολικά με $12N^2 + 2N \approx 12N^2$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Επειδή κάθε μιγαδικός πολλαπλασιασμός χρειάζεται τέσσερις πραγματικούς πολλαπλασιασμούς για να πραγματοποιηθεί, ο συνολικός αριθμός των πραγματικών πολλαπλασιασμών γίνεται $48N^2$. Αυτός ο αριθμός είναι κατά πολύ μεγαλύτερος εκείνου που είδαμε στην περίπτωση (α) του υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης απευθείας στο πεδίο του χρόνου. Άρα, η χρήση του DFT κρίνεται ως μη συμφέρουσα.
- (γ) Ας δούμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία, για τον υπολογισμό του DFT χρησιμοποιούμε έναν ταχύ αλγόριθμο Fourier (FFT) βάσης 2. Το πλήθος των μιγα-



δικών πολλαπλασιασμών για μια ακολουθία $2N$ στοιχείων είναι $(2N/2) \log_2 2N = N \log_2 2N$. Για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης σύμφωνα με το Σχήμα 2.11 απαιτούνται $3N \log_2 2N + 2N$ μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί ή $12N \log_2 2N + 8N$ πραγματικοί πολλαπλασιασμοί. Καταγράφοντας το πλήθος των πραγματικών πολλαπλασιασμών για διαφορετικά N στον Πίνακα 2.6, παρατηρούμε ότι για $N > 64$ μας συμφέρει να υπολογίσουμε τη γραμμική συνέλιξη μέσω του πεδίου της συχνότητας (με χρήση του FFT) και όχι απευθείας στο πεδίο του χρόνου.

Πίνακας 2.6

Πλήθος πραγματικών πολλαπλασιασμών για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης δύο ακολουθιών N στοιχείων.

Πλήθος στοιχείων κάθε ακολουθίας	Απευθείας υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου	Υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης στο πεδίο της συχνότητας μέσω του FFT
(N)	(N^2)	($12N \log_2 2N + 8N$)
4	16	176
8	64	448
16	256	1088
32	1024	2560
64	4096	5888
128	16384	13312
256	65536	29696
512	262144	65536
1024	1048576	143360

Αν καταφέρατε να απαντήσετε σωστά, τότε σας αξίζουν συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει τόσο τα πλεονεκτήματα της χρήσης του FFT όσο και τα σχετικά με τον υπολογισμό της συνέλιξης στο χρόνο, ή μέσω του πεδίου της συχνότητας. Αν δεν μπορέσατε να λύσετε την άσκηση αυτή, τότε μελετήστε και πάλι τις ενότητες 2.2.3 και 2.3.

