ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Α1 - ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (DFT – FFT)

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2024-2025

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (DFT - DISCRETE FOURIER TRANSFORM)

ΟΡΙΣΜΟΙ

$$\boxed{\begin{array}{ll} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, & k=0,1,\dots,N-1 \\ x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, & n=0,1,\dots,N-1 \end{array}}$$

← ευθύς μετασχ. (DFT)

← αντίστροφος μετασχ. (IDFT)

Ορίζοντας με $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ την N-οστή ρίζα της μονάδας, οι παραπάνω σχέσεις εκφράζονται ως εξής:

$$\boxed{\begin{array}{ll} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn}, & k=0,1,\dots,N-1 \\ x(n) = \frac{1}{N}\sum X(k)\, W_N^{-kn}, & n=0,1,\dots,N-1 \end{array}}$$

← DFT

← IDFT

- Οι ακολουθίες <u>$x(n)$ και $X(k)$</u> είναι <u>περιοδικές με περίοδο N</u> (βλ. υποσημείωση)
- Οι συντελεστές $X(k)$ αποτελούν ουσιαστικά δείγματα του $X(e^{j\omega})$ σε ισαπέχοντα κατά $\frac{2\pi}{N}$ σημεία στον άξονα των συχνοτήτων, δηλαδή $X(k)$ είναι η συντομογραφία του $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$.
- Για τον υπολογισμό κάθε σημείου του DFT, με άλλα λόγια για τον υπολογισμό κάθε συντελεστή $X(k)$, απαιτούνται N μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και $(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις. Συνεπώς, για τον υπολογισμό των N συντελεστών απαιτούνται συνολικά N^2 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και $N(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις. Σημειώνεται ότι για κάθε μιγαδικό πολλαπλασιασμό απαιτούνται 4 πολλαπλασιασμοί και 2 προσθέσεις πραγματικών αριθμών.
- Οι ορισμοί του DFT και IDFT N-σημείων μπορούν να εκφραστούν και με τη μορφή πινάκων ως ακολούθως:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N \rightarrow \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{00} & W_N^{01} & \cdots & \\ W_N^{10} & W_N^{11} & \cdots & \\ & & \ddots & \\ W_N^{(N-1)0} & & \cdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^{*} \mathbf{X}_N$$

Ο πίνακας $\mathbf{W}_N$ είναι <u>συμμετρικός και ορθογώνιος (unitary)</u>.

Υποσημείωση: $x(n+N) = x(n)$ για όλα τα n

$X(k+N) = X(k)$ για όλα τα k

• O DFT έχει προκύψει από τον DTFT (ο οποίος είναι συνεχής και περιοδικός με περίοδο 2π) με δειγματοληψία στη συχνότητα ανά $2\pi/N$. Αυτά τα ισαπέχοντα δείγματα συχνότητας $X(k) \equiv X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, $k=0,1,2,\dots,N-1$ αντιστοιχούν στο φάσμα ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου $x_p(n)$ περιόδου N.

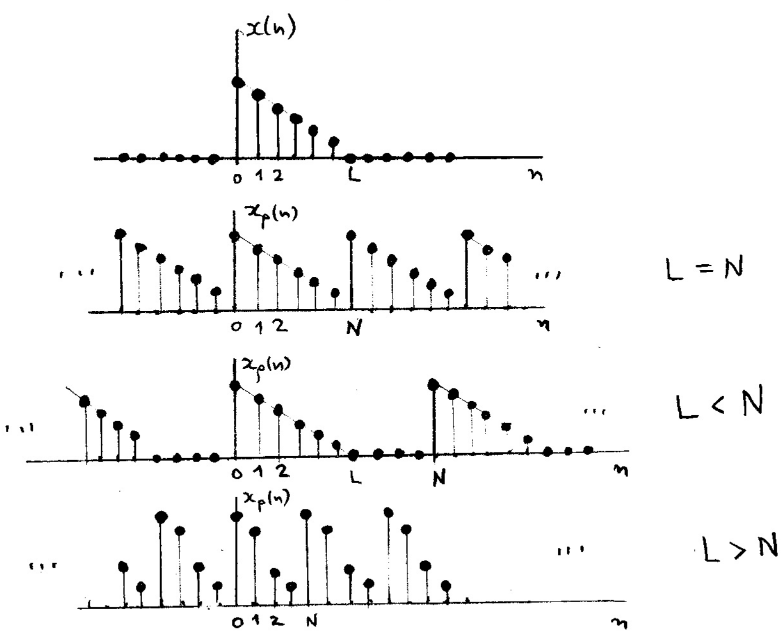
- Εάν η ακολουθία $x(n)$ (το σήμα διακριτού χρόνου) έχει μήκος (χρονική διάρκεια) N, τότε το σήμα $x_p(n)$ είναι απλά η περιοδική επανάληψη του $x(n)$ ανά N δείγματα. Σε μια περίοδο δηλαδή, θα ισχύει

$$x_p(n) = x(n), \qquad 0 \le n \le N-1$$

- Εάν το σήμα $x(n)$ έχει μήκος $L<N$, τότε το σήμα $x_p(n)$ θα ισούται με την περιοδική επανάληψη ενός σήματος το οποίο αποτελείται από το $x(n)$ για L σημεία και μηδενικά για τα υπόλοιπα $N-L$ σημεία.
Σε μια περίοδο δηλαδή θα ισχύει

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & L \le n \le N-1 \end{cases}$$

- Εάν το σήμα $x(n)$ έχει μήκος $L>N$, τότε το σήμα $x_p(n)$ θα ισούται με την περιοδική επανάληψη ενός σήματος N σημείων το οποίο θα είναι μια aliased εκδοχή του $x(n)$. Δηλαδή δεν είναι δυνατόν να ανακατασκευασθεί το σήμα $x(n)$ από την περιοδική επέκτασή του λόγω του φαινομένου aliasing στον χρόνο (time-domain aliasing).
Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και τα σήματα $x(n)$ των οποίων η διάρκεια είναι άπειρη, δηλ. $L \to \infty$.



ΑΣΚΗΣΗ Μία πεπερασμένου μήκους ακολουθία δίνεται από τη σχέση

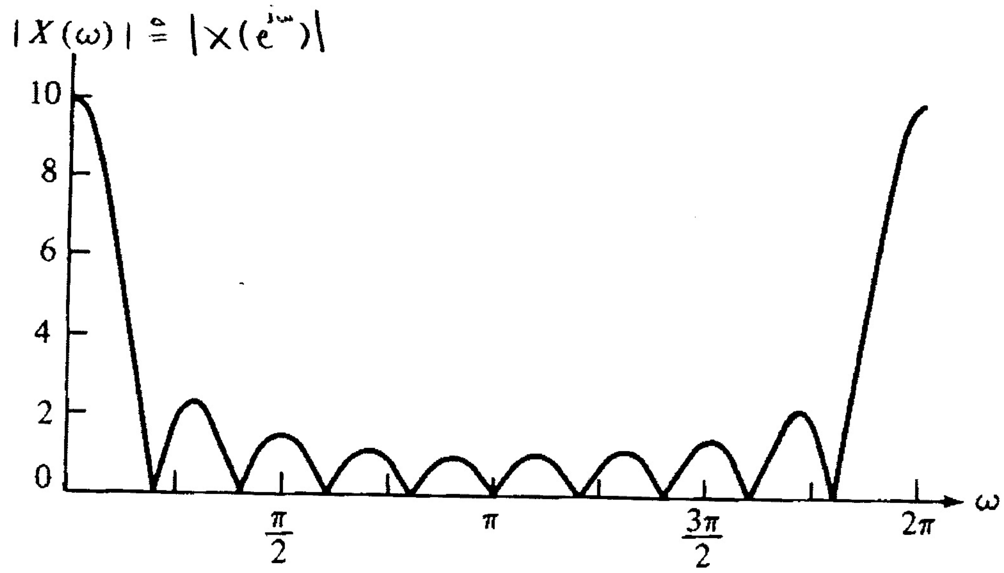
$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

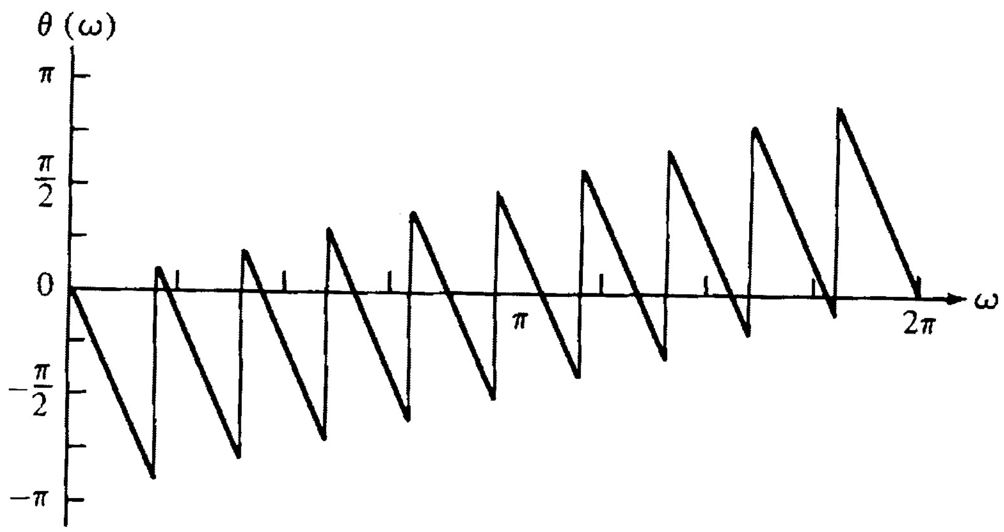
Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων για $N \geq L$.

ΛΥΣΗ Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της μήκους L ακολουθίας ισούται με:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(L-1)/2}\, \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Το μέτρο και η φάση του $X(e^{j\omega})$ δείχνονται στο παρακάτω σχήμα για $L=10$.



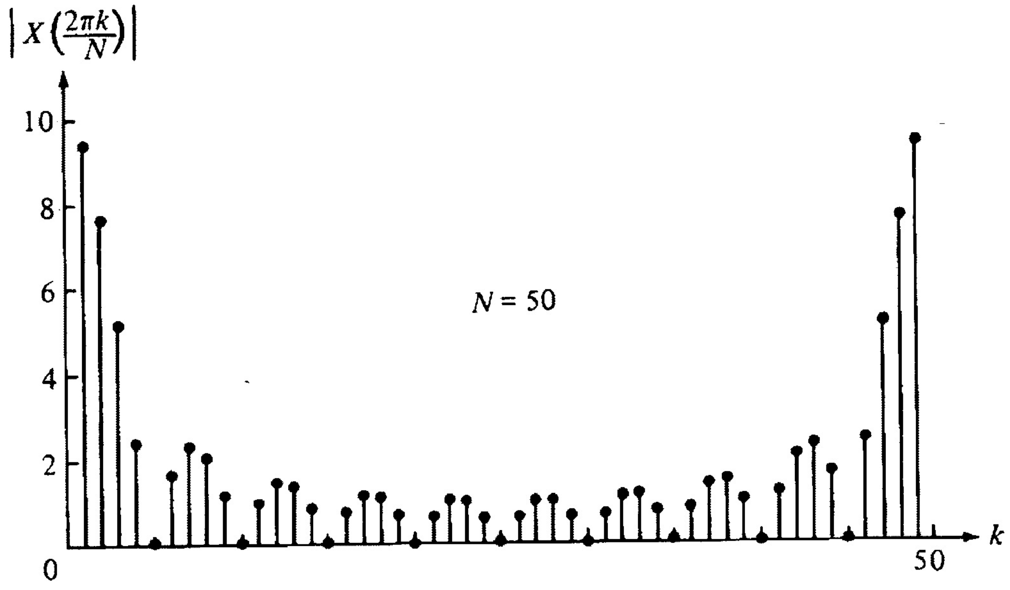


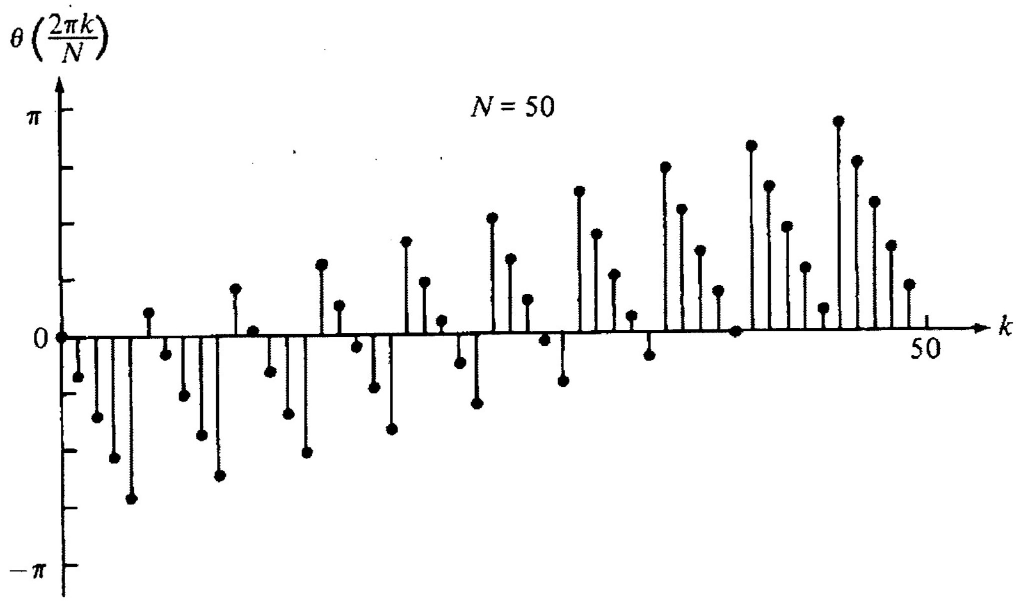
Ο DFT N-σημείων της ακολουθίας $x(n)$ προκύπτει από το $X(e^{j\omega})$ υπολογιζόμενο σε N ισαπέχουσες συχνότητες $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Έχουμε δηλαδή

$$X(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}kL}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = e^{-j\pi k(L-1)/N}\,\frac{\sin(\pi k L/N)}{\sin(\pi k/N)} \quad \text{όπου } k=0,1,\ldots,N-1$$

Για την περίπτωση $N=L$ προκύπτει ότι $X(k) = \begin{cases} L & k=0 \\ 0 & k=1,2,\ldots,L-1 \end{cases}$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή ο DFT έχει μόνο μία μη μηδενική τιμή.
(Σημείωση: Η περίπτωση αυτή δεν είναι άλλη από τη δυϊκή του DFT του μοναδιαίου δείγματος $\delta(n)$. Θυμηθείτε ότι $\delta(n) \xleftrightarrow{DFT} 1$).

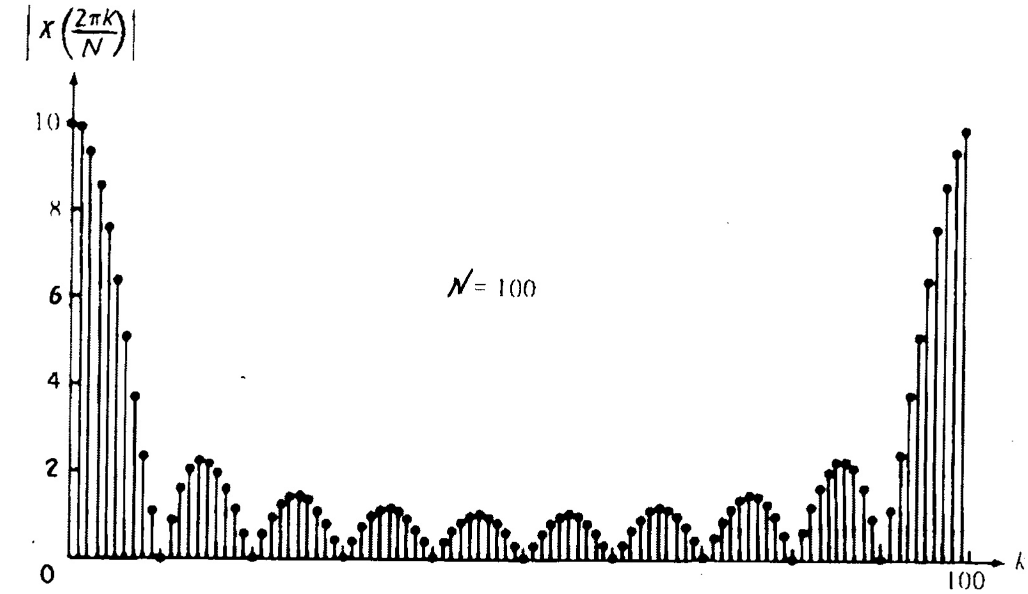


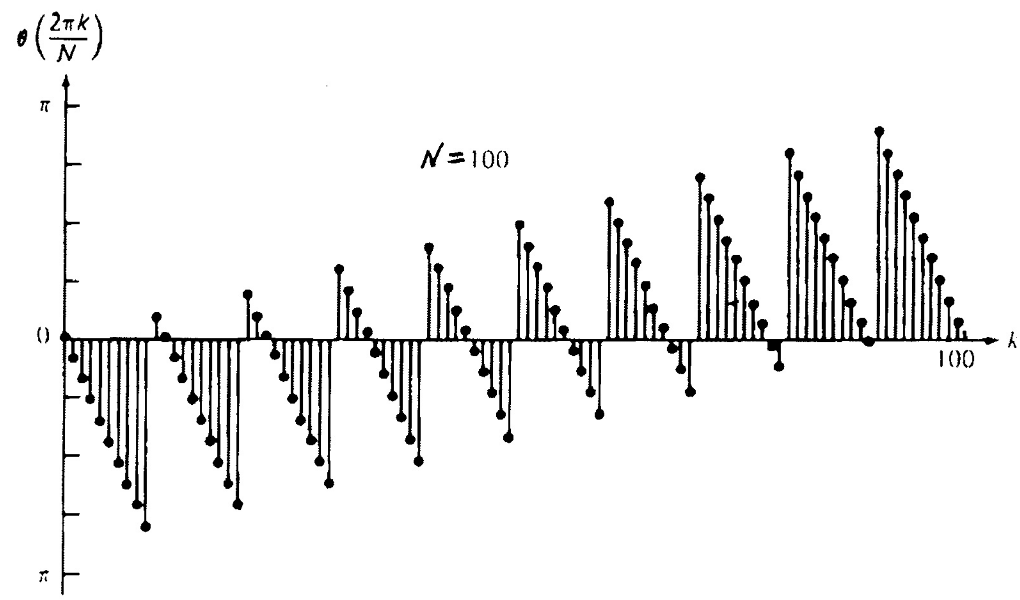


Η $x(n)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί από την $X(k)$ υπολογίζοντας τον αντίστροφο DFT (IDFT) L-σημείων.

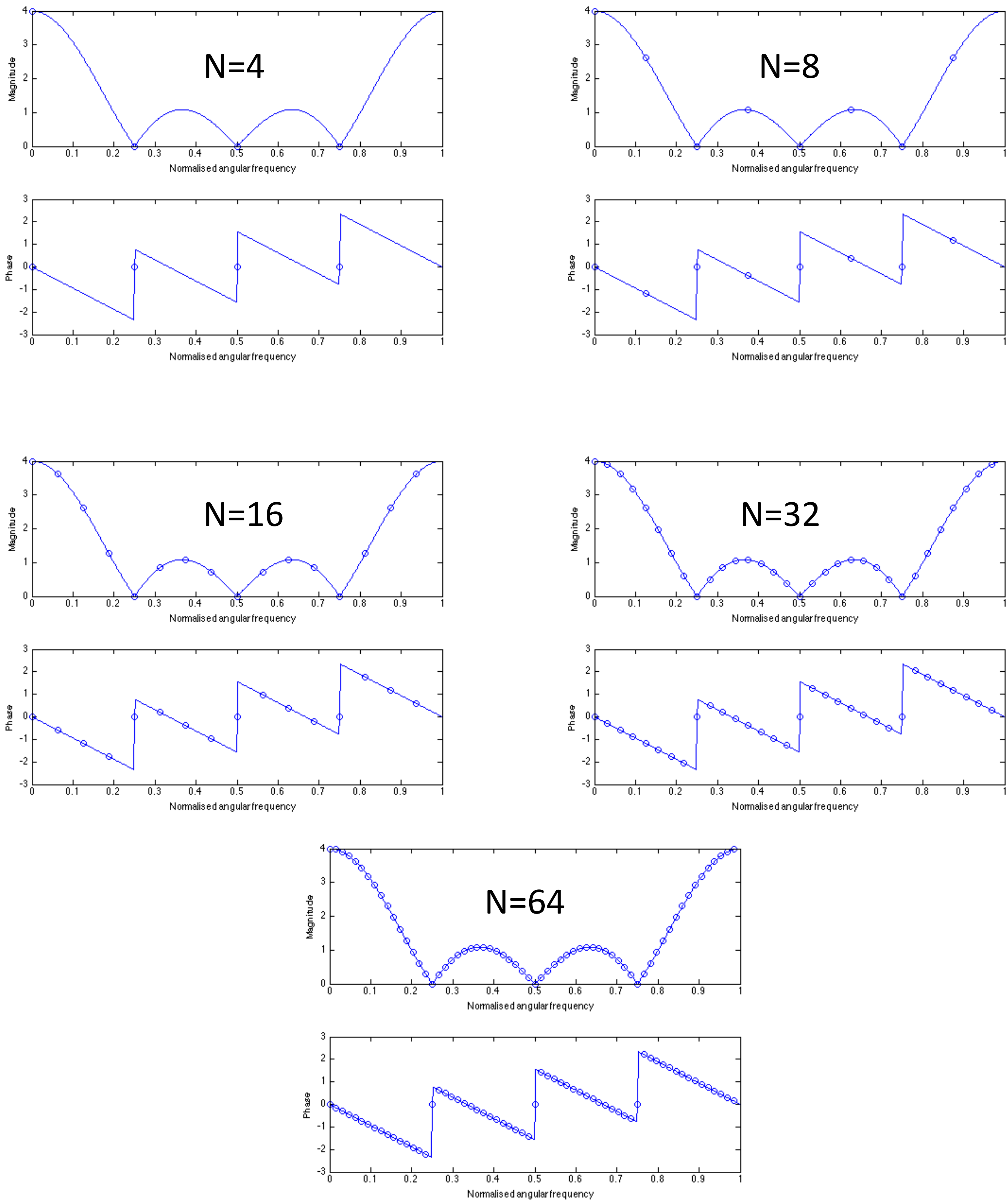
Αν και ο DFT L-σημείων είναι ικανός να αντιπροσωπεύσει μοναδικά την ακολουθία $x(n)$ στον χώρο των συχνοτήτων, εν τούτοις δεν μας παρέχει επαρκή λεπτομέρεια για να έχουμε μια καλή εικόνα του φάσματος της $x(n)$. Για να αυξήσουμε τη λεπτομέρεια θα πρέπει να υπολογίσουμε δείγματα της $X(e^{j\omega})$ σε πιο μικρές αποστάσεις συχνότητας, δηλαδή $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, όπου $N > L$. Στην πράξη είναι σαν να αυξάνουμε το μήκος της ακολουθίας από L σε N σημεία, προσαρτώντας N−L μηδενικά (zero padding). Έτσι ο N-σημείων DFT επιτυγχάνει καλύτερη παρεμβολή από τον L-σημείων DFT.

Το προηγούμενο, όπως και το επόμενο σχήμα, δίνουν τις κυματομορφές μέτρου και φάσης για $N=50$ και $N=100$, αντίστοιχα. Το $L=10$ και στις δύο περιπτώσεις. Παρατηρούμε ότι με περισσότερα σημεία προσεγγίζουμε καλύτερα το συνεχές φάσμα $X(e^{j\omega})$.





Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων (μέτρο και φάση) της ακολουθίας $x(n)=\delta(n)+\delta(n-1) + \ldots +\delta(n-L+1)$ για L=4 και N=4, 8, 16, 32, 64.



Υπολογισμός Αντίστροφου DFT

IDFT: $$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-nk} \quad , \; n=0,1,\dots,N-1 \qquad (1)$$

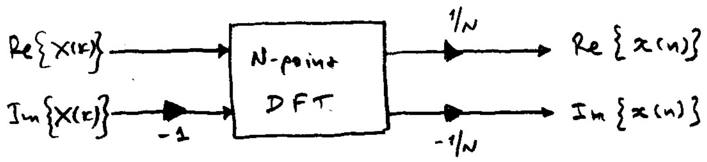
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με N και λαμβάνοντας τον συζυγή μιγαδικό, έχουμε:

$$N\, x^*(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\, W_N^{nk}}_{DFT} \qquad (2)$$

Το δεξιό μέλος είναι ο DFT της ακολουθίας $X^*(k)$, και μπορεί να υπολογιστεί μέσω του FFT. Άρα, ο ζητούμενος IDFT υπολογίζεται ως:

$$x(n) = \frac{1}{N}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\, W_N^{nk}\right\}^* \qquad (3)$$

Διαγραμματικά αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DFT του μιγαδικού σήματος $x_1(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk_0}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. και k_0 ακέραιος.

ΛΥΣΗ

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\, W_N^{nk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}}_{x_1(n)} \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{W_N} = \sum_{n=0}^{N-1} \Big[\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}}_{\alpha}\Big]^n = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \text{για } \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{για } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

- $\alpha = 1$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)} = 1 \rightsquigarrow k_0 - k = \ell N \quad \text{ή} \quad k_0 - k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \ldots$$

Άρα όταν $k_0 - k$ ακέραιο πολλαπλάσιο της (περιόδου) N έχουμε

$$X_1(k) = N$$

- $\alpha \neq 1$

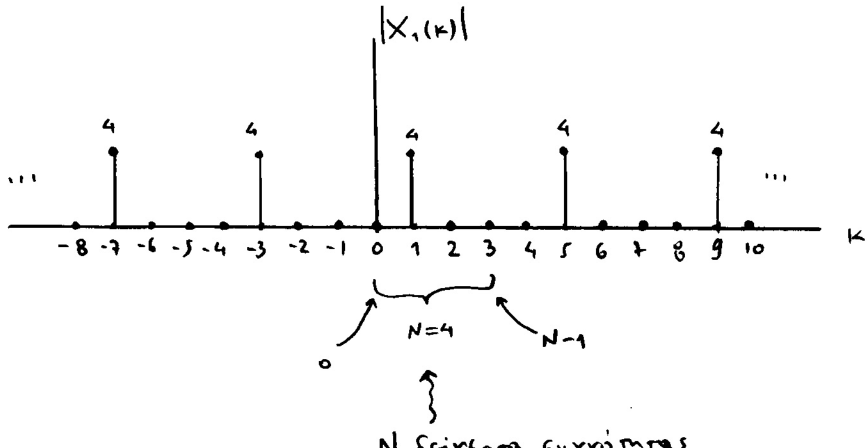
$$X_1(k) = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{\cancel{N}}(k_0-k)\cancel{N}}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}} = \frac{1 - e^{j2\pi(k_0-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}} = \frac{1-1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}} = 0$$

Τελικά έχουμε:

$$X_1(k) = \begin{cases} N & \text{για } k = k_0 - \ell N \quad \text{όπου } \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εφαρμογή για $k_0 = 1$ και $N = 4$

$$X_1(k) = \begin{cases} 4 & \text{για } k = 1 - \ell N \quad \text{ή} \quad k = \ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



N δείγματα συχνότητας

Όλα τα άλλα είναι οι επαναλήψεις, λόγω της περιοδικότητας του φάσματος με περίοδο N.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DFT του μιγαδικού σήματος $x_2(n) = e^{j(k_0+b)\frac{2\pi}{N}n}$, $n = 0,1,2,\dots,N-1$ όπου $0<b<1$.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι η συχνότητα του σήματος δεν είναι $k_0 \frac{2\pi}{N}$, αλλά κάποια άλλη μεγαλύτερη από αυτή και μικρότερη από το επόμενο ακέραιο πολλαπλάσιό της $(k_0+1)\frac{2\pi}{N}$.

ΛΥΣΗ

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)\, W_N^{nk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k_0+b)\frac{2\pi}{N}n}\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\left[e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0+b-k)}\right]}_{\alpha}{}^{n} = \begin{cases} N & \text{για } \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{για } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

- $\alpha = 1$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0+b-k)} = 1 \rightsquigarrow \frac{k_0+b-k}{N} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ακέραιος}}}{\ell} \Rightarrow b = \underbrace{\ell N + k - k_0}_{\text{ακέραιος}}$$

Αλλά $0<b<1$, δηλ. το b δεν είναι ακέραιος. Άρα αυτό είναι αδύνατον. Συνεπώς η περίπτωση $\alpha=1$ είναι αδύνατον να συμβεί.

- $\alpha \neq 1$

$$X_2(k) = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} = \frac{1-e^{j\frac{2\pi}{\cancel{N}}(k_0+b-k)\cdot\cancel{N}}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0+b-k)}} = \frac{1-e^{j2\pi(k_0+b-k)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0+b-k)}} = \frac{1-\cancel{e^{j2\pi(k_0-k)}}^{\,1}\, e^{j2\pi b}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0+b-k)}} \Rightarrow$$

$$X_2(k) = \frac{1-e^{j2\pi b}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0+b-k)}}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που η συχνότητα του σήματος δεν ισούται με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο της $2\pi/N$, τότε το φάσμα "διαχέεται" ή "διαρρέει" στις υπόλοιπες συχνότητες. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται <u>φασματική διαρροή</u> (spectral leakage).

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DFT του πραγματικού σήματος $x(n)=\cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)$, όπου $n=0,1,\dots,N-1$ και k_0 ακέραιος.

ΛΥΣΗ Με χρήση της ταυτότητας του Euler έχουμε

$$x(n)=\cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)=\frac{1}{2}\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}}_{x_1(n)}+\frac{1}{2}\underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}}_{x_1^*(n)}$$

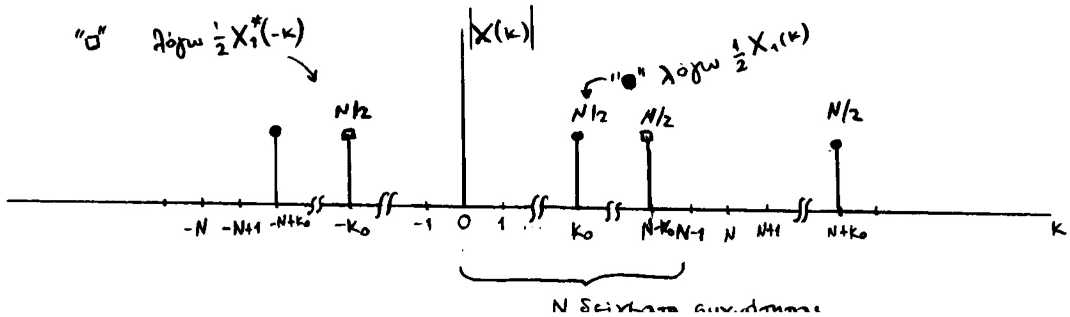
Δηλαδή $x(n)=\frac{1}{2}x_1(n)+\frac{1}{2}x_1^*(n)$ όπου $x_1(n)=e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$

Συνεπώς $X(k)=\frac{1}{2}X_1(k)+\frac{1}{2}X_1^*(-k)$

όπου

$$X_1(k)=\begin{cases} N & \text{για } k=k_0-lN, \text{ όπου } l=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

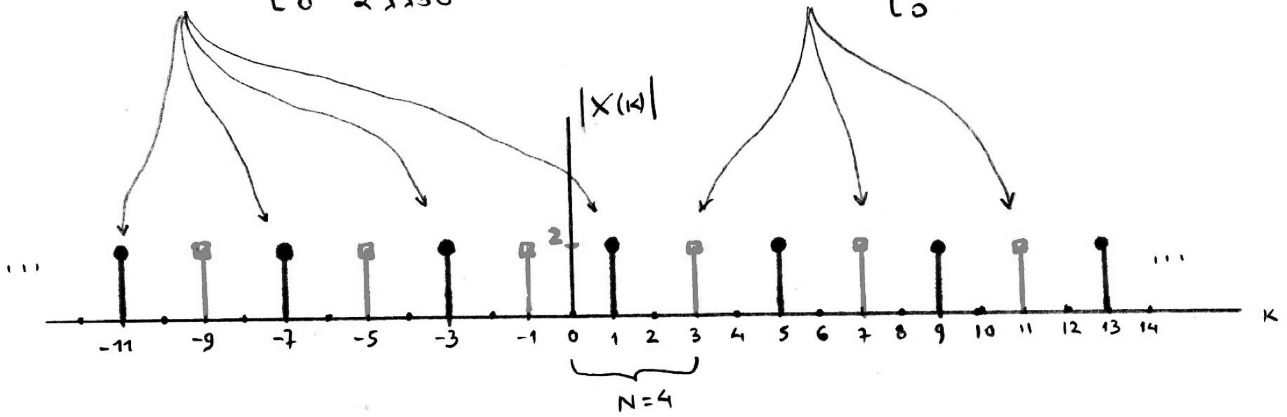
$$X_1^*(-k)=\begin{cases} N & \text{για } -k=k_0-lN, \text{ όπου } l=0,\pm1,\pm2,\dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Εφαρμογή για $k_0=1$ και $N=4$

$$X_1(k)=\begin{cases} 4 & \text{για } k=\dots,-7,-3,1,5,9,13,\dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

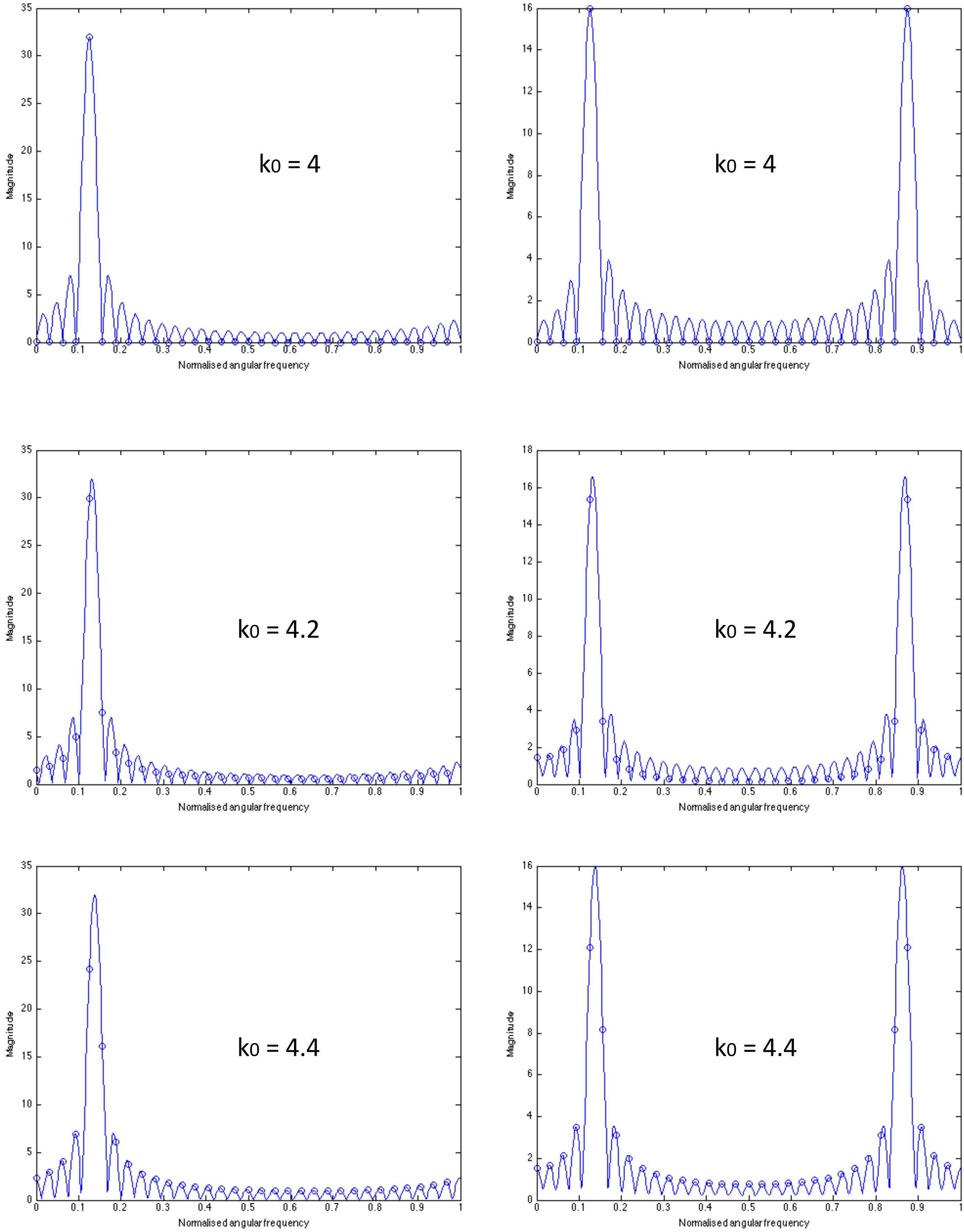
$$X_1^*(-k)=\begin{cases} 4 & \text{για } k=\dots,-9,-5,-1,3,7,11,\dots \\ 0 \end{cases}$$

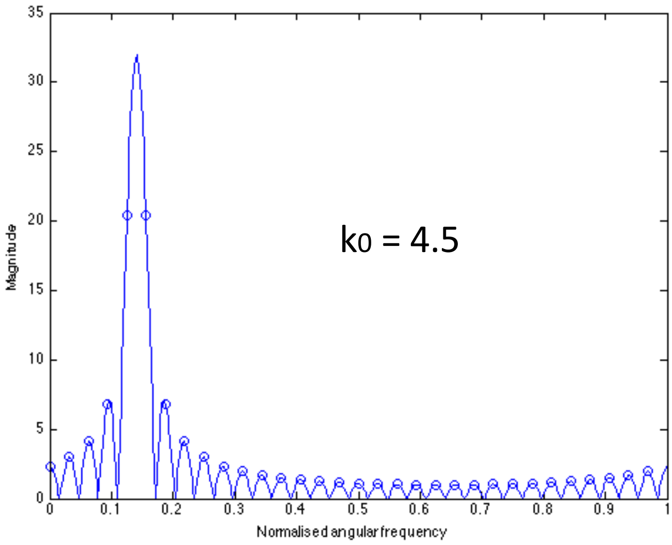


Υποσημείωση: Με "●" σημειώνονται οι συνιστώσες συχνότητας που οφείλονται στο $X_1(k)$, ενώ με "□" σημειώνονται οι συχνότητες που οφείλονται στο (προκύπτουν από) $X^*(-k)$.

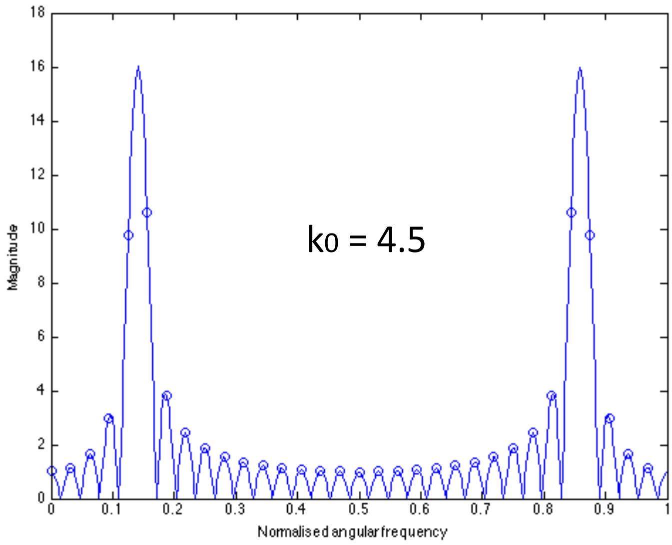
N=32

$x(n) = \exp(j2\pi n k_0/N)$ $\qquad$ $x(n) = \cos(2\pi n k_0/N)$

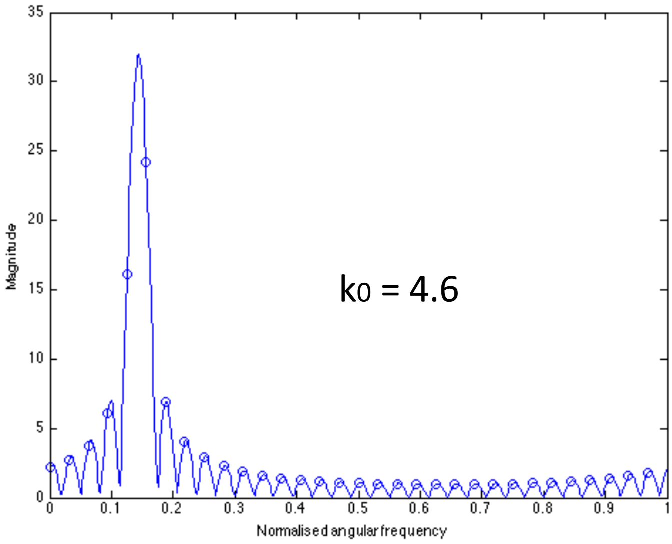




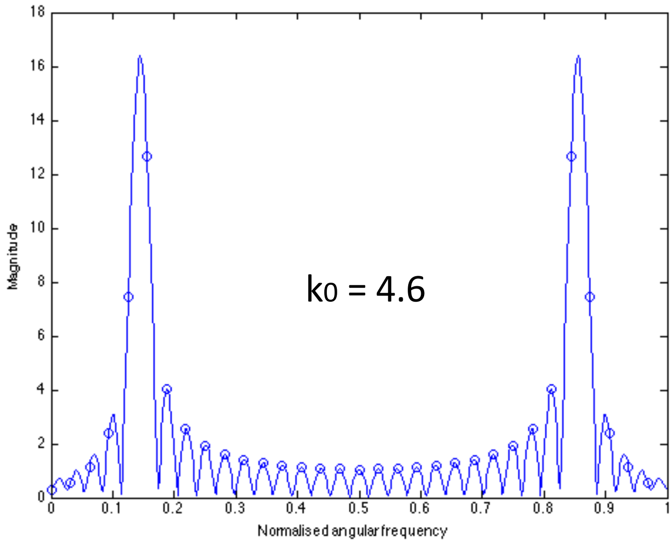
k0 = 4.5
Magnitude
Normalised angular frequency



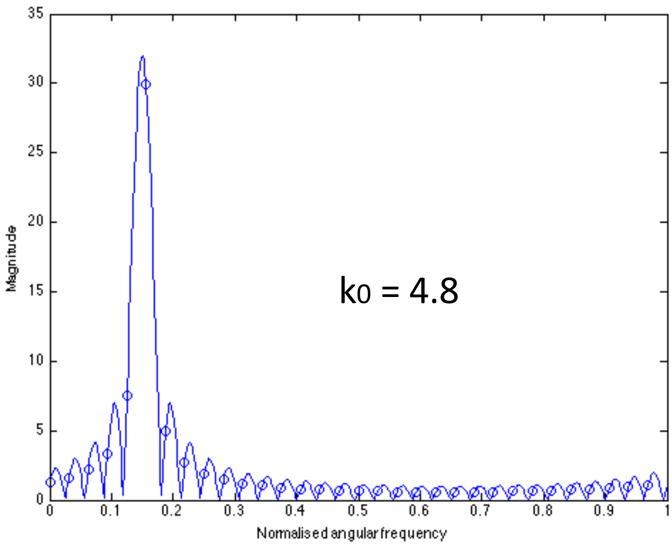
k0 = 4.5
Magnitude
Normalised angular frequency



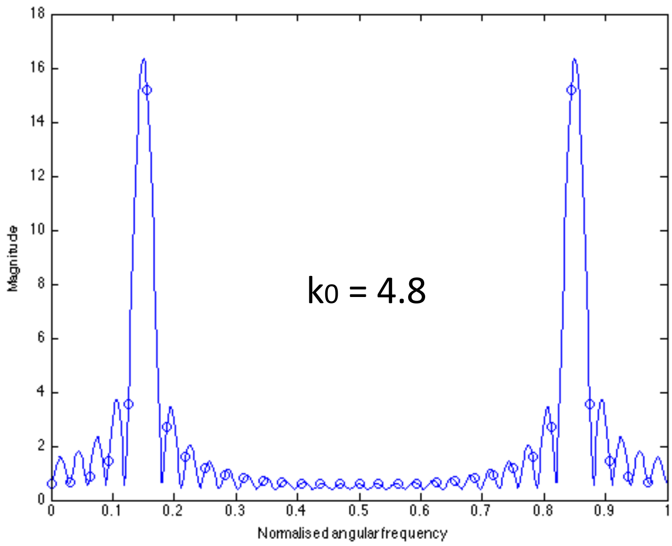
k0 = 4.6
Magnitude
Normalised angular frequency



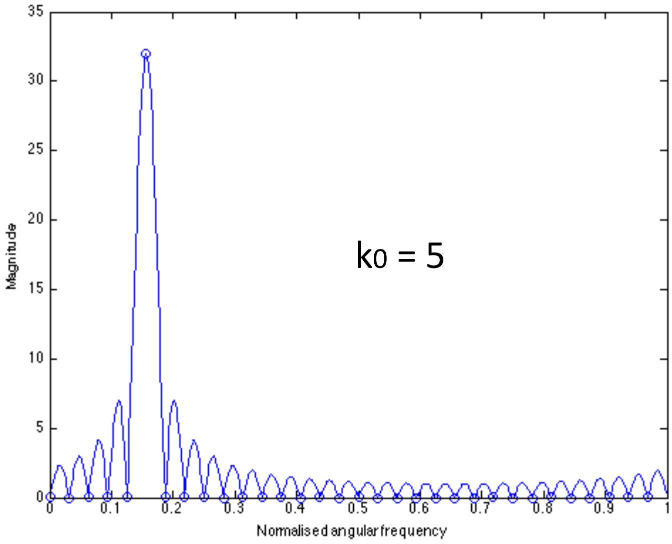
k0 = 4.6
Magnitude
Normalised angular frequency

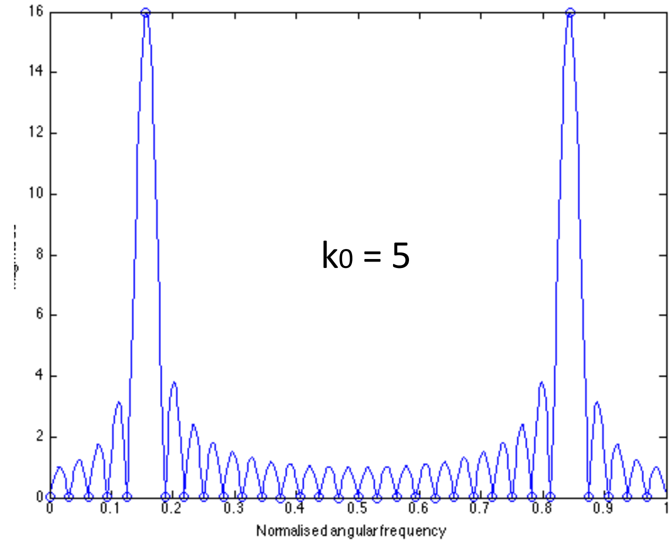


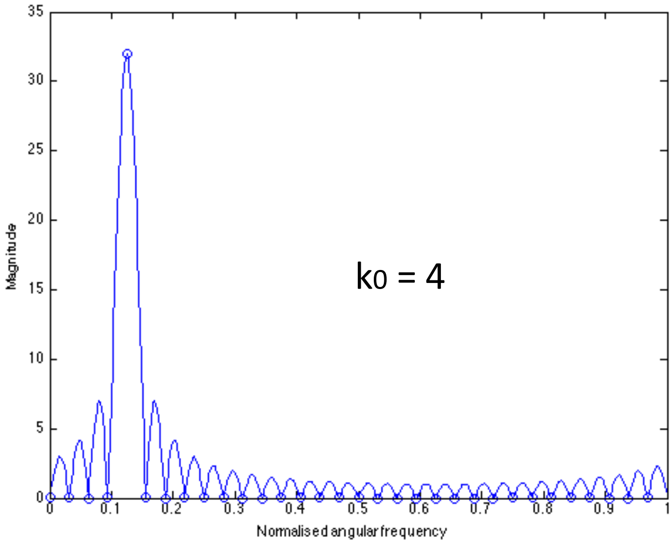
k0 = 4.8
Magnitude
Normalised angular frequency

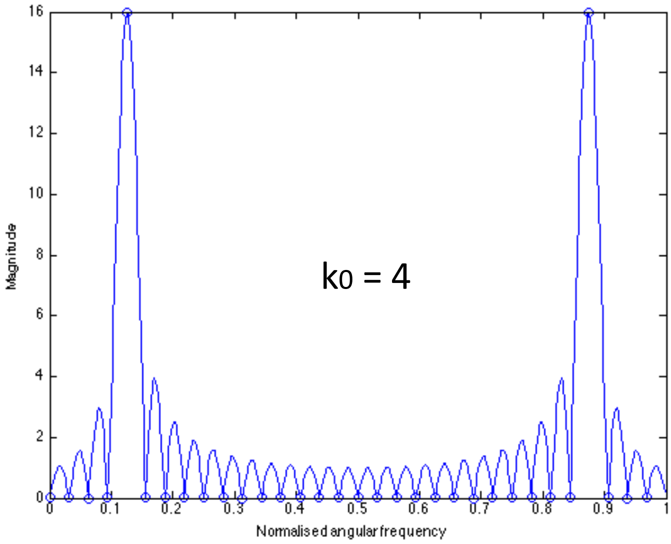


k0 = 4.8
Magnitude
Normalised angular frequency









Matlab code

```
N  = input('Number of points = ');
k0 = input('Frequency = ');
n  = 0:N-1;
x  = exp(j*((2*pi)/N)*k0*n);

X  = fft(x);
XE = fft(x, 512);

% Plot the magnitude of X
L  = 0:511;
plot(L/512, abs(XE))
hold
plot(n/N, abs(X), 'o')
xlabel('Normalised angular frequency')
ylabel('Magnitude')
```

ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΗΜΑΤΟΣ

- Ο υπολογισμός του DFT N-σημείων ενός σήματος $x(n)$ πεπερασμένης διάρκειας N ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του DFT N-σημείων ενός περιοδικού σήματος $x_p(n)$ περιόδου N, το οποίο έχει προκύψει από την περιοδική επέκταση του $x(n)$, δηλαδή

$$x_p(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n-qN)$$

Ας υποθέσουμε ότι το περιοδικό σήμα $x_p(n)$ υφίσταται ολίσθηση προς τα δεξιά κατά k μονάδες. Το σήμα που προκύπτει είναι το $x_p(n-k)$, όπου

$$x_p(n-k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n-k-qN)$$

Το πεπερασμένης διάρκειας σήμα $x'(n)$ που αποτελείται από τα N δείγματα μεταξύ 0 και N-1, δηλ.

$$x'(n) = \begin{cases} x_p(n-k) & \text{για } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

προκύπτει από το αρχικό σήμα $x(n)$ μέσω <u>κυκλικής ολίσθησης</u>.
(Βλ. σχήμα στην επόμενη σελίδα για $N=4$).

Συμπέρασμα: Η κυκλική ολίσθηση μιας ακολουθίας N-σημείων ισοδυναμεί με τη γραμμική ολίσθηση (μετατόπιση) της περιοδικής της επέκτασης.

- Μια ακολουθία N-σημείων ονομάζεται κυκλικά άρτια εάν είναι συμμετρική γύρω από το σημείο 0 (μηδέν) του κύκλου:

$$x(N-n) = x(n) \qquad 1 \le n \le N-1$$

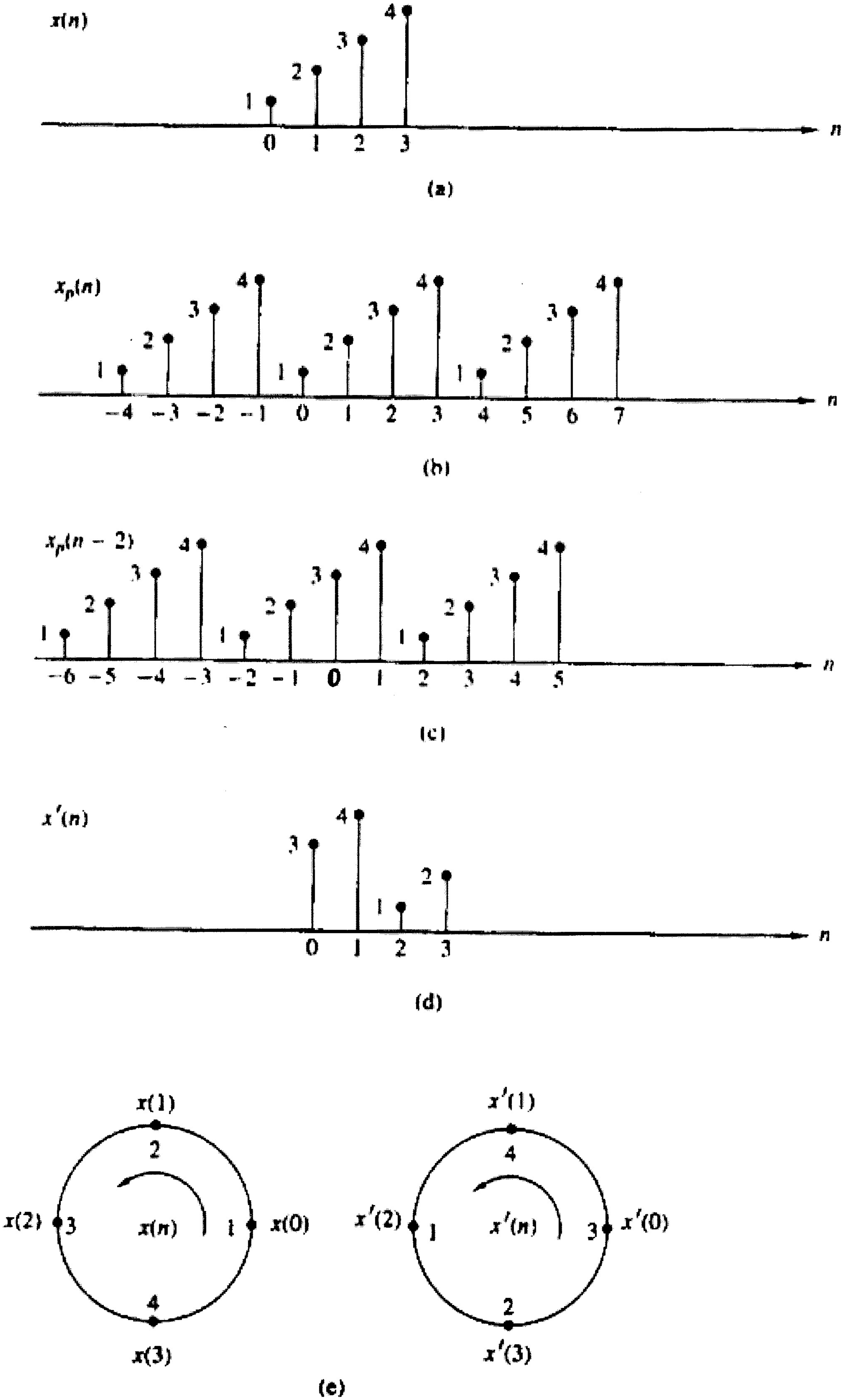
- Μια ακολουθία N-σημείων ονομάζεται κυκλικά περιττή εάν είναι αντισυμμετρική γύρω από το σημείο 0 (μηδέν) του κύκλου:

$$x(N-n) = -x(n) \qquad 1 \le n \le N-1$$

- Η χρονική αναστροφή (time reversal) μιας ακολουθίας N-σημείων προκύπτει από την αναστροφή των στοιχείων της γύρω από το σημείο 0 (μηδέν) του κύκλου:

$$x(\langle -n \rangle_N) = x(N-n) \qquad 0 \le n \le N-1$$

Η χρονική αναστροφή ισοδυναμεί με τη σχεδίαση της $x(n)$ κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού πάνω στον κύκλο.


x(n)
n
(a)
x_p(n)
(b)
x_p(n − 2)
(c)
x'(n)
(d)
x(1)
x(2)
x(0)
x(3)
x'(1)
x'(2)
x'(0)
x'(3)
(e)

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3\}$ και $x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{4},5,6\}$ μέσω του DFT και IDFT.

ΛΥΣΗ Κατ' αρχήν υπολογίζουμε τον DFT των ακολουθιών $x_1(n)$ και $x_2(n)$ για $N=3$.

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{2} x_1(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{3}nk} = x_1(0)+x_1(1)\,e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+x_1(2)\,e^{-j\frac{2\pi}{3}2k} = 1+2e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+3e^{-j\frac{4\pi}{3}k}$$

$$X_2(k)=\sum_{n=0}^{2} x_2(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{3}nk} = 4+5e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+6e^{-j\frac{4\pi}{3}k}$$

$X_1(0)=6$

$X_1(1)=-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$X_1(2)=-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$X_2(0)=15$

$X_2(1)=-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$X_2(2)=-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Πολλαπλασιάζοντας (στοιχείο προς στοιχείο) τις ακολουθίες $X_1(k)$ και $X_2(k)$ παίρνουμε την ακολουθία

$$X_3(k)=X_1(k)\cdot X_2(k)$$

όπου $X_3(0)=90$

$X_3(1)=\frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$X_3(2)=\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Ο αντίστροφος DFT (IDFT) της $X_3(k)$ θα μας δώσει την ακολουθία $x_3(n)$ που δεν είναι άλλη από την κυκλική συνέλιξη των $x_1(n)$ και $x_2(n)$.

$$x_3(n)=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} X_3(k)\, e^{j\frac{2\pi}{3}nk} = \frac{1}{3}\left[X_3(0)+X_3(1)\,e^{j\frac{2\pi}{3}n}+X_3(2)\,e^{j\frac{4\pi}{3}n}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[90+\left(\frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)e^{j\frac{2\pi}{3}n}+\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)e^{j\frac{4\pi}{3}n}\right]$$

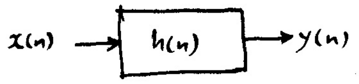
Τελικά, για $n=0,1,2$ βρίσκουμε αντίστοιχα:

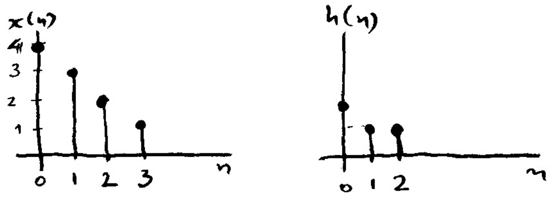
$x_3(0)=31$ $\quad x_3(1)=31$ $\quad x_3(2)=28$

ή

$$x_3(n)=\{31,\ 31,\ 28\}$$

ΑΣΚΗΣΗ





$x(n)=\{\underset{\uparrow}{4},3,2,1\}$ $\qquad$ $h(n)=\{\underset{\uparrow}{2},1,1\}$

Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ με καθεμιά από τις ακόλουθες μεθόδους:

α. Απευθείας υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης

β. Υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης μέσω μιας και μόνον κυκλικής συνέλιξης

γ. Υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης μέσω radix-2 FFT αλγορίθμων.

Για καθεμιά από τις μεθόδους υπολογισμού να προσδιορίσετε το πλήθος των πραγματικών πολ/μών. Για την περίπτωση των radix-2 FFT να ΜΗΝ λάβετε υπόψη σας τους πολλαπλασιασμούς με $\pm 1, \pm j, W_N^0$.

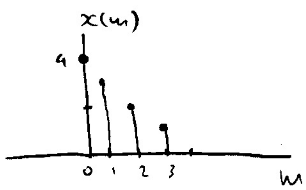
ΛΥΣΗ

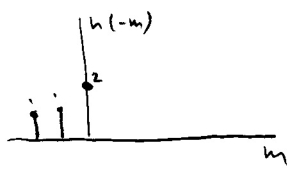
α. Απευθείας υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης $\quad y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1)$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & & 2 & 1 & 1 \\
\hline
 & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\
8 & 6 & 4 & 2 & & \\
\hline
8 & 10 & 11 & 7 & 3 & 1
\end{array}$$

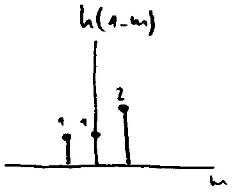
$\rightsquigarrow \; y(n)=\{\underset{\uparrow}{8},10,11,7,3,1\}$

Από τη σχέση της συνέλιξης (1) η κανονική διαδικασία υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης έχει ως εξής:

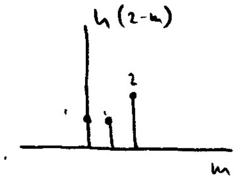




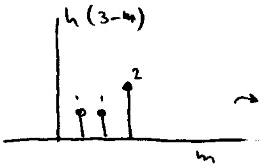
$\rightsquigarrow \; y(0)=4\cdot 2=8 \quad \longrightarrow$ 1 πραγμ. πολ/μός



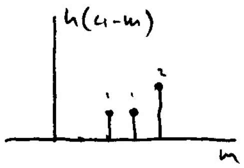
$\rightsquigarrow y(1) = 4\cdot 1 + 3\cdot 2 = 10 \rightsquigarrow$ 2 πραγμ. πολ/μοί



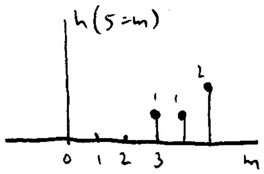
$\rightsquigarrow y(2) = 4\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 11 \rightarrow$ 3 πραγμ. πολ/μοί



$\rightsquigarrow y(3) = 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 7 \rightarrow$ 3 πραγμ. πολ/μοί



$\rightsquigarrow y(4) = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3 \rightsquigarrow$ 2 πραγμ. πολ/μοί



$\rightsquigarrow y(5) = 1\cdot 1 = 1 \rightsquigarrow$ 1 πραγμ. πολ/μός

Τελικά η $y(n) = \{\underset{\uparrow}{8}, 10, 11, 7, 3, 1\}$ και απαιτήθηκαν 12 πολ/μοί πραγματικών αριθμών για τον υπολογισμό της.

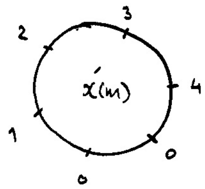
β. Υπολογισμός μέσω της κυκλικής συνέλιξης

Στην περίπτωση αυτή οι δύο ακολουθίες πρέπει να επεκταθούν σε μήκος ώστε να φτάσουν τα 6 στοιχεία, όσο είναι και το μήκος του αποτελέσματος της γραμμικής συνέλιξης, δηλ. $N_1 + N_2 - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$

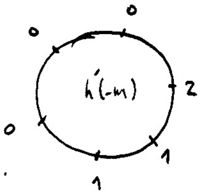
Η επέκταση γίνεται προσθέτοντας μηδενικά στο τέλος καθεμιάς.

Οι νέες ακολουθίες στις οποίες θα κάνουμε κυκλική συνέλιξη είναι:

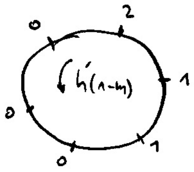
$x'(n) = \{4, 3, 2, 1, 0, 0\}$ $\quad h'(n) = \{2, 1, 1, 0, 0, 0\}$



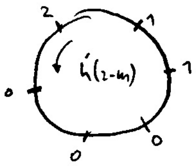
$$y(n) = x'(n) \circledast h'(n) = \sum_{m=0}^{5} x'(m)\cdot h'(n-m)$$



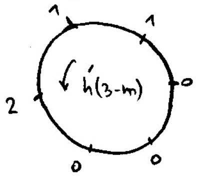
$y(0) = 4\cdot2+3\cdot0+2\cdot0+1\cdot0+0\cdot1+0\cdot1 = 8$ ~ 6 πραγμ. πολ/μοί



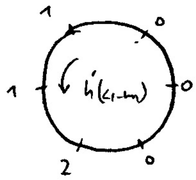
$y(1) = 4\cdot1+3\cdot2+2\cdot0+1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1 = 10$ ~ -//-



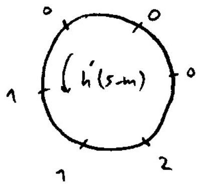
$y(2) = 4\cdot1+3\cdot1+2\cdot2+1\cdot0+0\cdot0+0\cdot0 = 11$ ~ -//-



$y(3) = 4\cdot0+3\cdot1+2\cdot1+1\cdot2+0\cdot0+0\cdot0 = 7$ ~ -//-



$y(4) = 4\cdot0+3\cdot0+2\cdot1+1\cdot1+0\cdot2+0\cdot0 = 3$ ~ -//-

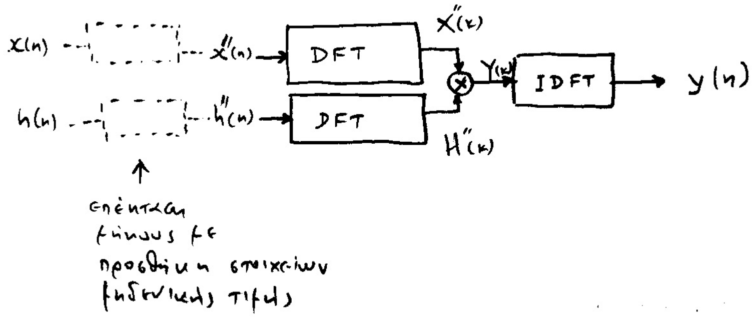


$y(5) = 4\cdot0+3\cdot0+2\cdot0+1\cdot1+0\cdot1+0\cdot2 = 1$ ~ -//-

Για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου απαιτούνται 6 πολ/μοί πραγματικών αριθμών, δηλαδή συνολικά 36 πραγματικοί πολ/μοί.

γ. Υπολογισμός μέσω radix-2 FFT

Για τον υπολογισμό μέσω του DFT θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τον DFT κάθε ακολουθίας, να πολλαπλασιάσουμε τα αποτελέσματα σημείο-προς-σημείο και τέλος να υπολογίσουμε τον αντίστροφο DFT (IDFT) του αποτελέσματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Επειδή οι υπολογισμοί θα γίνουν μέσω του radix-2 FFT (και radix-2 IFFT) ο οποίος δουλεύει για πλήθος σημείων που είναι δυνάμεις του 2, θα πρέπει η κάθε ακολουθία εισόδου να επεκταθεί προσθέτοντας στο τέλος μηδενικά, ώστε να αποκτήσει μήκος 8.

Σημείωση: Εάν χρησιμοποιούσαμε τον DFT (και όχι τον radix-2 FFT) για τους υπολογισμούς μας, τότε η επέκταση του μήκους κάθε ακολουθίας θα ήταν τόση ώστε να γίνει 6, δηλ. N_1+N_2-1, όπως ακριβώς είπαμε στο προηγούμενο ερώτημα β.

Άρα οι ακολουθίες εισόδου για κάθε FFT θα είναι:

$$x''(n) = \{4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

$$h''(n) = \{2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

Οι υπολογισμοί μέσω του FFT δίνουν αντίστοιχα:

$$X''(k) = \{10, 5.4142-j4.8284, 2-j2, 2.5858-j0.8284, 2, 2.5858+j0.8284, 2+j2, 5.4142+j4.8284\}$$

$$H''(k) = \{4, 2.707-j1.707, 1-j, 1.293+j0.293, 2, 1.293-j0.293, 1+j, 2.707+j1.707\}$$

Ο FFT 8-σημείων ολοκληρώνεται σε $\log_2 8 = 3$ στάδια. Το πρώτο και το δεύτερο στάδιο δεν απαιτούν πολλαπλασιασμούς. Κατά το τρίτο στάδιο χρειάστηκαν 2 μιγαδικοί πολ/μοί.

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα αποτελέσματα σημείο-προς-σημείο και υπολογίζουμε το $Y(k)$. Εδώ χρειάστηκαν 8 μιγαδικοί πολ/μοί.

$$Y(k) = X''(k) \cdot H''(k) = \{40, 6.41-j22.31, -j4, 3.59-j0.31, 4, 3.58+j0.31, j4, 6.41+j22.31\}$$

Τέλος, μέσω του 8-σημείων αντίστροφου FFT, υπολογίζουμε την ακολουθία εξόδου y(n). Για τον υπολογισμό χρειάστηκαν 2 μιγαδικοί πολ/μοί.

$$y(n) = \{8, 10, 11, 7, 3, 1, 0, 0\}$$

Συνολικά, το πλήθος των μιγαδικών πολ/μων είναι $2+2+8+2=14$. Επειδή κάθε μιγαδικός πολ/μός απαιτεί 4 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς (και 2 προσθέσεις), το συνολικό πλήθος των πραγματικών πολ/μών θα είναι $14 \cdot 4 = 56$.

ΑΣΚΗΣΗ

Να αποδειχθεί ότι ο απευθείας υπολογισμός ενός N-σημείων DFT απαιτεί $4N^2$ πραγματικούς πολ/μούς και $(4N-2)N$ πραγματικές προσθέσεις.

ΛΥΣΗ

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον DFT: $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}$ $\quad k=0,1,2,\dots,N-1$

Ο υπολογισμός των N συντελεστών $X(k)$ απαιτεί N^2 μιγαδικούς πολ/μούς και $N(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις.

Όμως κάθε μιγαδικός πολ/μός απαιτεί 4 πραγμ. πολ/μούς και 2 πραγματικές προσθέσεις, ενώ κάθε μιγαδική πρόσθεση απαιτεί 2 πραγματικές προσθέσεις. Άρα έχουμε:

$$O_M = 4\cdot N^2$$

$$O_A = \underbrace{N(N-1)\cdot 2}_{\text{λόγω προσθέσεων}} + \underbrace{N^2\cdot 2}_{\text{λόγω πολ/μών}} = 2N^2-2N+2N^2 = 4N^2-2N = (4N-2)N$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί το πλήθος των πραγματικών πολ/μών και προσθέσεων για την περίπτωση του DIT ή DIF FFT.

ΛΥΣΗ Έστω ότι το σήμα αποτελείται από N δείγματα.

Αναφερόμενοι στην περίπτωση του radix-2 FFT, παρατηρούμε ότι έχουμε $\log_2 N$ στάδια και $\frac{N}{2}$ πεταλούδες ανά στάδιο. Σε κάθε πεταλούδα έχουμε 1 μιγαδικό πολ/μό και 2 μιγαδικές προσθέσεις. Κάθε μιγαδικός πολ/μός απαιτεί 4 πραγματικούς πολ/μούς και 2 πραγματικές προσθέσεις, ενώ κάθε μιγαδική πρόσθεση απαιτεί 2 πραγμ. προσθέσεις.

Επομένως έχουμε:

$O_M = \frac{N}{2}\log_2 N$ μιγαδ. πολ/μοί $\rightsquigarrow O_M = \left(\frac{N}{2}\log_2 N\right)\cdot 4$ πραγμ. πολ/μοί $\rightsquigarrow \underline{O_M = 2N\log_2 N}$ πραγματικοί πολλαπλασιασμοί

$O_A = \underbrace{N\log_2 N}_{\text{λόγω προσθέσεων σε κάθε πεταλούδα}} + \underbrace{\frac{N}{2}\log_2 N}_{\text{λόγω πολ/μών σε κάθε πεταλούδα}}$ μιγαδ. προσθέσεις $\rightsquigarrow O_A = 2\cdot(N\log_2 N) + 2\left(\frac{N}{2}\log_2 N\right) = \underline{3N\log_2 N}$ πραγματικές προσθέσεις συνολικά

ΘΕΜΑ Β3 [*15 μονάδες*]

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) του σήματος ***x(n), n=0,1,2,3*** ισούται με ***X(k) = {6, -4, 2, -4}***. Δίνεται ότι ***x(n) = x₁(n) + x₂(n)***, όπου ***x₁(n) = δ(n) + 4δ(n-2) και x₂(n) = -δ(n) + δ(n-1) + δ(n-3).***

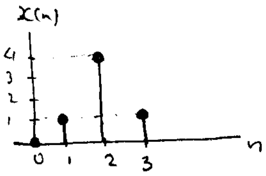
A. Να σχεδίασετε το σήμα ***x(n).***

B. Να σχεδίασετε το σήμα ***g(n) = {4, 1, 0, 1}*** και με βάση τις ιδότητες του DFT να υπολογίσετε τον DFT ***G(k)*** του σήματος ***g(n).***

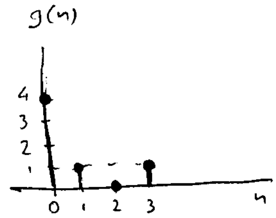
<u>Λύση</u>

A. $x(n) = x_1(n) + x_2(n) = \underbrace{\delta(n) + 4\,\delta(n-2)}_{x_1(n)} + \underbrace{[-\delta(n)] + \delta(n-1) + \delta(n-3)}_{x_2(n)} = 0\cdot\delta(n) + \delta(n-1) + 4\,\delta(n-2) + \delta(n-3)$

ή $x(n) = \{0, 1, 4, 1\}$



B. $g(n) = \{4, 1, 0, 1\}$



Παρατηρούμε ότι η $g(n)$ προκύπτει από την $x(n)$ με <u>κυκλική ολίσθηση στο χρόνο</u> κατά 2 δείγματα, δηλαδή $g(n) = x(n-2)$.

Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης, για τον DFT θα έχουμε:

$$G(k) = W_N^{n_0 k}\, X(k) = W_4^{2k}\, X(k), \quad \text{όπου } n_0 = 2 \text{ και } N = 4$$

Συνεπώς:

$$G(0) = W_4^0\, X(0) = 1\cdot X(0) = 6$$

$$G(1) = W_4^{2\cdot 1}\, X(1) = e^{-j\frac{2\pi}{4}2}\, X(1) = e^{-j\pi}\, X(1) = (\cos\pi - j\sin\pi)\, X(1) = -X(1) = 4$$

$$G(2) = W_4^{2\cdot 2}\, X(2) = e^{-j\frac{2\pi}{4}4}\, X(2) = e^{-j2\pi}\, X(2) = (\cos 2\pi - j\sin 2\pi)\, X(2) = X(2) = 2$$

$$G(3) = W^{2\cdot 3}\, X(3) = e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 6}\, X(3) = e^{-j3\pi}\, X(3) = (\cos 3\pi - j\sin 3\pi)\, X(3) = -X(3) = 4$$

Άρα ο DFT του σήματος $g(n)$ ισούται με:

$$G(k) = \{6, 4, 2, 4\}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Ο DFT της περιοδικής ακολουθίας **x(n)={1, 1, 2, 2}** είναι **X(k)={6, -1+j, 0, -1-j}**. Με βάση αυτά τα δεδομένα και τις ιδιότητες του DFT, να υπολογίσετε τον **DFT, G(k),** του σήματος **g(n)={-2, -1, -1, -2}**. Να σχεδιάσετε τα μέτρα των **X(k)** και **G(k)**. Τι παρατηρείτε; Σχολιάστε.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι $g(n) = -x(n-1)$.

Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο έχουμε ότι:

$$G(k) = -W_N^{1k}\, X(k)$$ όπου $N=4$ στην προκειμένη περίπτωση.

Άρα:

$$G(0) = -W_4^0\, X(0) = -X(0) = -6$$

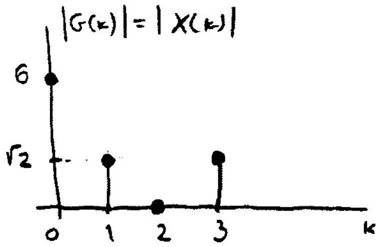
$$G(1) = -W_4^1\, X(1) = -(-j)(-1+j) = -1-j \qquad (*)$$

$$G(2) = -W_4^2\, X(2) = -W_4^2 \cdot 0 = 0$$

$$G(3) = -W_4^3\, X(3) = -j(-1-j) = -1+j \qquad (**)$$

Δηλαδή $G(k) = \{-6, -1-j, 0, -1+j\}$

Το μέτρο του $G(k)$ είναι: $|G(k)| = \{6, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ το οποίο είναι ίσο με το μέτρο του $X(k)$, αφού το ένα σήμα έχει προκύψει από το άλλο με ολίσθηση, οπότε η ενέργεια διατηρείται.



$(*)\quad W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = 0 - j1 = -j$

$(**)\quad W_4^3 = e^{-j\frac{2\pi}{4}3} = \cos\frac{6\pi}{4} - j\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 - j(-1) = j$

ΑΣΚΗΣΗ 2.1 A. Δίνεται το διακριτού χρόνου σήμα $\{x(n)\} = \{3, 2, 1, -1\}$.
Να υπολογίσετε το φάσμα του, $\{X(k)\}$.

B. Να υπολογίσετε το $X(k)$ βασιζόμενοι στο ότι $G(k) = \{-5, 3+2j, 3, 3-2j\}$, όπου $g(n) = \{1, -3, -2, -1\}$

Γ. Επαναλάβετε τον υπολογισμό του $X(k)$ μέσω του 4-σημείων in-place radix-2 DIT (decimation-in-time) FFT.
Χρησιμοποιήστε το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου και σημειώστε πάνω σ' αυτό όλα τα ενδιάμεσα αποτελέσματα.

ΛΥΣΗ A. Ο DFT του σήματος $x(n)$ υπολογίζεται από τη σχέση:

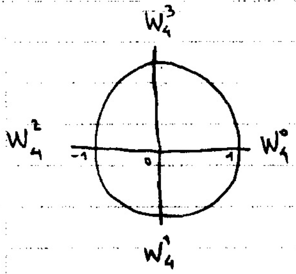
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} = \langle \text{για } N=4 \rangle = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, W_4^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, W_4^{n\cdot 0} = \sum_{n=0}^{3} x(n) = 3 + 2 + 1 + (-1) = 5$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, W_4^{n1} = x(0)\, W_4^0 + x(1)\, W_4^1 + x(2)\, W_4^2 + x(3)\, W_4^3 =$$

$$= 3\cdot 1 + 2\cdot(-j) + 1\,(-1) + (-1)\cdot j = 2 - j3$$

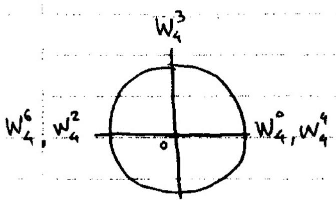
όπου $W_4^0 = e^{-j\frac{2\pi}{4}0} = 1$



$$W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0 - j\,1 = -j$$

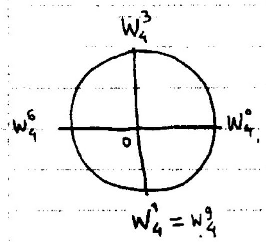
$$W_4^2 = e^{-j\frac{2\pi}{4}2} = e^{-j\pi} = \cos(\pi) - j\sin(\pi) = -1 - j0 = -1$$

$$W_4^3 = e^{-j\frac{2\pi}{4}3} = e^{-j\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) - j\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = 0 - j(-1) = j$$



$$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, W_4^{n2} = x(0)\, W_4^0 + x(1)\, W_4^2 + x(2)\, W_4^4 + x(3)\, W_4^6 =$$

$$= 3\cdot 1 + 2\,(-1) + 1\,(1) + (-1)(-1) = 3$$

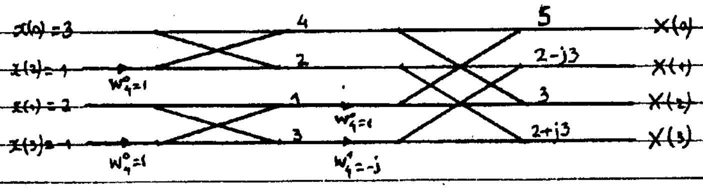


$$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, W_4^{n3} = x(0)\, W_4^0 + x(1)\, W_4^3 + x(2)\, W_4^6 + x(3)\, W_4^9 =$$

$$= 3\cdot 1 + 2\cdot j + 1\,(-1) + (-1)(-j) = 2 + j3$$

Άρα $\{X(k)\} = \{5,\ 2-j3,\ 3,\ 2+j3\}$

Γ.



Β.

Παρατηρούμε ότι $g(n) = -x(n-1)$ ή $x(n) = -g(n+1)$

Συνεπώς

$$X(k) = -e^{j\frac{2\pi}{4}k} G(k) = -e^{j\frac{\pi}{2}k} G(k) \qquad \text{[Βλ. σημείωση]}$$

Άρα

$k=0 \rightarrow X(0) = -G(0) = +5$

$k=1 \rightarrow X(1) = -e^{j\frac{\pi}{2}} G(1) = -\left(\cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}} + j\cancelto{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right) G(1) = -j\,G(1) =$
$= -j(3+2j) = 2-3j$

$k=2 \rightarrow X(2) = -e^{j\frac{2\pi}{4}2} G(2) = -e^{j\pi} G(2) = -\left(\cancelto{-1}{\cos\pi} + j\cancelto{0}{\sin\pi}\right) G(2) =$
$= -(-1)\,G(2) = G(2) = 3$

$k=3 \rightarrow X(3) = -e^{j\frac{2\pi}{4}3} G(3) = -\left(\cancelto{0}{\cos\frac{3\pi}{2}} + j\cancelto{-1}{\sin\frac{3\pi}{2}}\right) G(3) =$
$= j\,G(3) = 2+3j$

Τελικά

$$X(k) = \{5,\ 2-3j,\ 3,\ 2+3j\}$$

Σημείωση

Είναι φανερό ότι τα μέτρα των $X(k)$ και $G(k)$ είναι ίσα, δηλαδή

$$|X(k)| = |G(k)|$$

Η ολίσθηση στον χρόνο επιφέρει αλλαγή μόνον στη φάση!

Σύνολο μιγαδικών πολλαπλασιασμών (ακόμα και με $W_N^0 = 1$):

A: $4^2 = 16$ (γενικά N^2)
B: $4 \cdot 1 = 4$ (γενικά N)
Γ: $\frac{4}{2}\log_2 4 = 2 \cdot 2 = 4$ (γενικά $\frac{N}{2}\log_2 N$)

Άσκηση: Να υπολογιστεί ο 8-σημείων DFT της ακολουθίας $\{x(n)\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\}$ μέσω του in-place radix-2 DIT (Decimation-In-Time) FFT.