



# ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

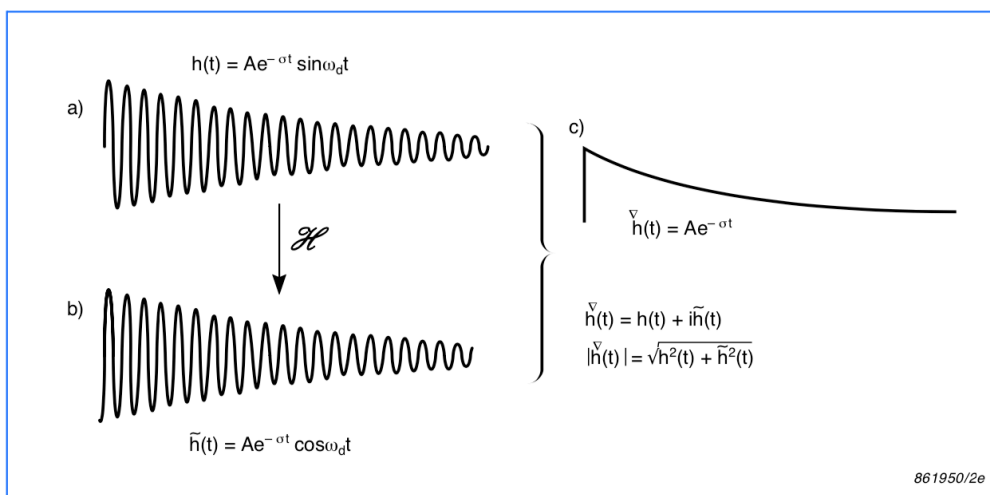
## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HILBERT

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

skodras@upatras.gr  
www.ece.upatras.gr/skodras

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15.11.2024 - ΩΡΑ 10:00-12:00

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑΣ (Envelope Detection)



The Hilbert transform enables computation of the envelope of the impulse-response function

**David Hilbert**



Hilbert in 1912

**Born** 23 January 1862  
Königsberg or Wehlau,  
Prussia

**Died** 14 February 1943 (aged 81)  
Göttingen, Germany

**Nationality** German

**Education** University of Königsberg  
(PhD)

**Known for** Hilbert's basis theorem  
Hilbert's axioms  
Hilbert's problems  
Hilbert's program  
Einstein–Hilbert action  
Hilbert space  
Epsilon calculus

**Spouse** Käthe Jerusch

**Children** Franz (b. 1893)

**Awards** Lobachevsky Prize (1903)  
Bolyai Prize (1910)  
ForMemRSI<sup>[1]</sup>

**Scientific career**

**Fields** Mathematics, Physics and  
Philosophy

**Institutions** University of Königsberg  
Göttingen University

**Thesis** On Invariant Properties of  
Special Binary Forms,  
Especially of Spherical  
Functions (1886)

**Doctoral  
advisor** Ferdinand von Lindemann<sup>[2]</sup>

**Doctoral  
students** [show]

**Other notable  
students** Edward Kasner  
John von Neumann

# ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑΣ - ΣΤΙΓΜΙΑΙΑΣ ΦΑΣΗΣ - ΣΤΙΓΜΙΑΙΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

<https://www.gaussianwaves.com/2017/04/extract-envelope-instantaneous-phase-frequency-hilbert-transform/>

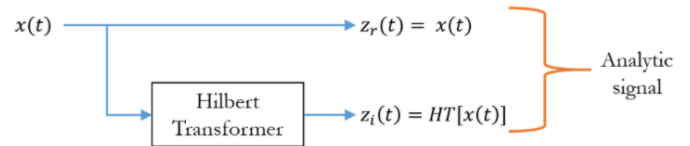


Figure 1: Converting a real-valued signal to complex plane using Hilbert Transform

If we express the real-valued modulated signal  $x(t)$  as an analytic signal, it is expressed in complex plane as

$$z(t) = z_r(t) + jz_i(t) = x(t) + jHT[x(t)]$$

where,  $(HT[\cdot])$  represents the Hilbert Transform operation. Now, the required parameters are very easy to obtain.

The instantaneous amplitude (*envelope extraction*) is computed in the complex plane as

$$a(t) = |z(t)| = \sqrt{z_r^2(t) + z_i^2(t)}$$

The instantaneous phase is computed in the complex plane as

$$\phi(t) = \angle z(t) = \arctan \left[ \frac{z_i(t)}{z_r(t)} \right]$$

The instantaneous temporal frequency is computed in the complex plane as

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t)$$

# ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑΣ - ΣΤΙΓΜΙΑΙΑΣ ΦΑΣΗΣ - ΣΤΙΓΜΙΑΙΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

<https://www.gaussianwaves.com/2017/04/extract-envelope-instantaneous-phase-frequency-hilbert-transform/>

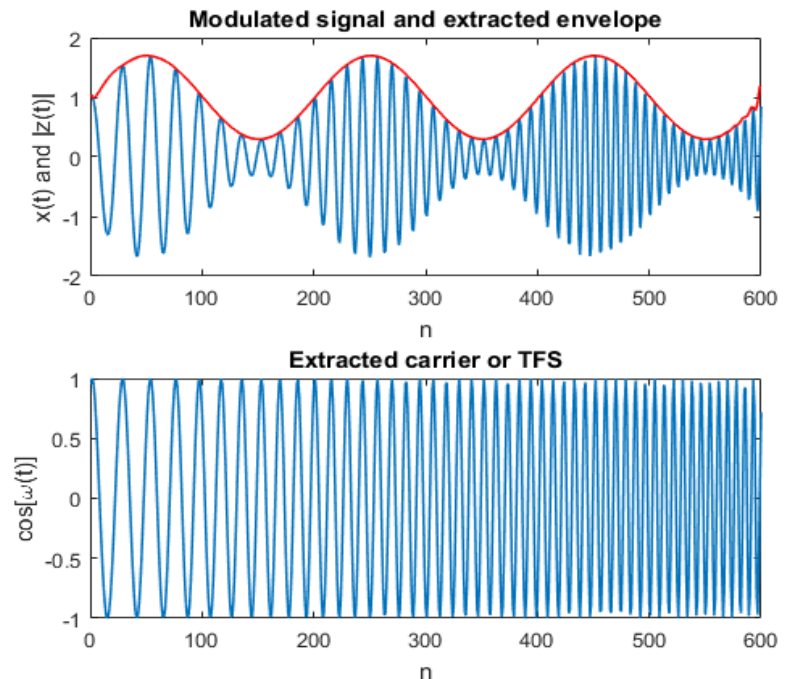
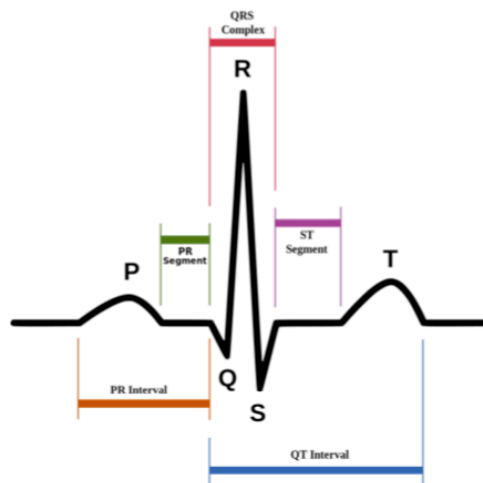


Figure 2: Amplitude modulation using a chirp signal and extraction of envelope and TFS

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ QRS (QRS Complex Detection)



*Segments of a single heartbeat cycle from a sketch of an ECG-wave recorded of a normally functioning heart. The QRS complex is the most distinguishable segment*

## Hilbert Transform Instantaneous Trendline

Created by John Ehlers, the Hilbert Transform Instantaneous Trendline is a 5-period trendline of high/low price that uses signal processing to reduce noise. [\[Discuss\]](#)



```
// usage
IEnumerable<HtlResult> results =
    quotes.GetHtTrendline();
```

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Προσδιορισμός στιγμιαίας συχνότητας και πλάτους
- Διαμόρφωση Πλάτους
- Vibration signal analysis
- ECG: QRS complex detection
- ...

## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HILBERT (Hilbert Transform / Transformer)

$$H\{x(t)\} = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau} d\tau$$

- Πρόκειται για τη συνέλιξη του σήματος  $x(t)$  με το σήμα  $1/\pi t$ .  
Δηλαδή πρόκειται για την απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος με φρουετική απόκριση  $1/\pi t$ .
- Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Hilbert είναι ένα σήμα στον χρόνο (όχι στη συχνότητα), γι' αυτό και συνήθως το συμβολίζουμε ως  $\hat{x}(t)$ , δηλ.  $\hat{x}(t) = H\{x(t)\}$ .  
Για τον ίδιο λόγο τον αναφέρουμε και ως μετασχηματιστή Hilbert (Hilbert transformer).
- Η συνάρτηση  $1/\pi t$  παρουσιάζει ασυνέχεια για  $t=0$ .  
Αυτός είναι ο λόγος που στον ορισμό της συνέλιξης χρησιμοποιούμε την Cauchy principal value (p.v.).

## ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ

$$x(t) = -\hat{x}(t) * \frac{1}{\pi t} + c$$

όπου  $c$  σταθερά

## ΣΥΝΗΘΗ ΖΕΥΓΗ

$x(t)$	$\hat{x}(t)$
$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$	$\alpha_1 \hat{x}_1(t) + \alpha_2 \hat{x}_2(t)$
$x(t-t_0)$	$\hat{x}(t-t_0)$
$x(\alpha t), \alpha \neq 0$	$\text{sgn}(\alpha) \hat{x}(\alpha t)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$\frac{d}{dt} \hat{x}(t)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
$e^{jt}$	$-j e^{jt}$
$e^{-jt}$	$j e^{-jt}$
$\cos(t)$	$\sin(t)$
$\text{rect}(t)$	$\frac{1}{\pi} \ln  (2t+1)/(2t-1) $
$\text{sinc}(t)$	$\frac{\pi t}{2} \text{sinc}^2(t/2) = \sin(\frac{\pi t}{2}) \text{sinc}(\frac{t}{2})$

• Συμμεταστροφή:

$$\mathcal{H}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \hat{x}_1(t) * x_2(t) = x_1(t) * \hat{x}_2(t)$$

Απόδειξη:  $\mathcal{H}\{x_1(t) * x_2(t)\} = [x_1(t) * x_2(t)] * \frac{1}{\pi t} =$

$$= \underbrace{\left[ x_1(t) * \frac{1}{\pi t} \right]}_{\hat{x}_1(t)} * x_2(t) =$$

$$= x_1(t) * \underbrace{\left[ x_2(t) * \frac{1}{\pi t} \right]}_{\hat{x}_2(t)}$$

- Μετασχ. Hilbert σταθερού σήματος:  $x(t) = c \xrightarrow{H} \hat{x}(t) = \hat{c} = 0$

$$\text{Λόγω γραμμικότητας: } H\{x(t) + c\} = \hat{x}(t) + \hat{c} = \hat{x}(t)$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Hilbert "χάνει" την όποια σταθερή μετατόπιση (dc offset) του σήματος.

## Hilbert of DC signal

**The Hilbert transform of a constant signal:** Note that, for any constant  $c$ , the Hilbert transform of the constant signal  $g(t) = c$  is  $\hat{g}(t) = \hat{c} = 0$ . (See Exercise 2.) From linearity it follows that  $\mathcal{H}[g(t) + c] = \hat{g}(t) + \hat{c} = \hat{g}(t)$ . Thus, like an ideal differentiator, a Hilbert transformer "loses" dc offsets. Later we will define an inverse Hilbert transform which can recover the original signal up to an additive constant (in the same way that integration can undo differentiation only up to an additive constant).

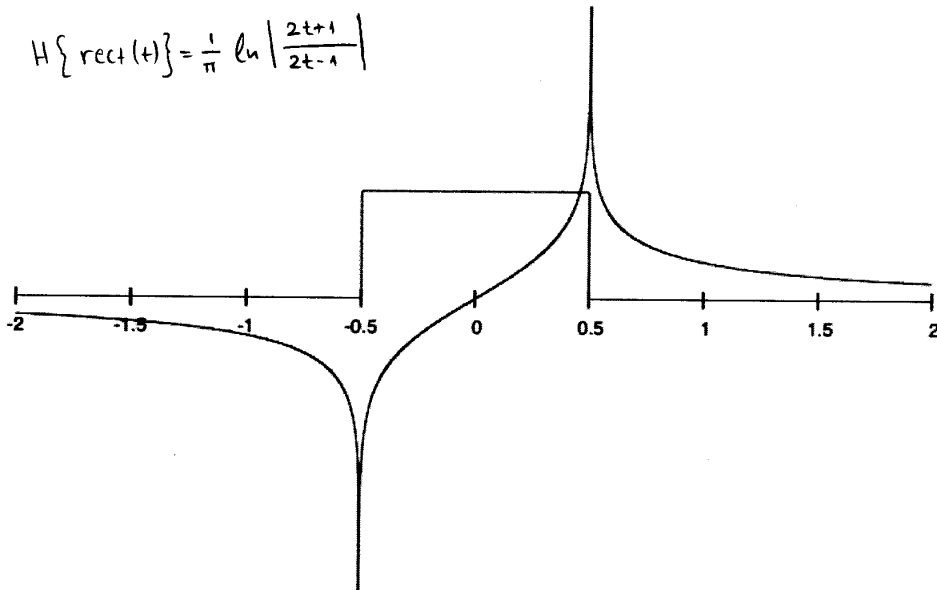
### Proof

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1/\epsilon}^{-\epsilon} \frac{c}{\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{c}{\tau} d\tau \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{-1}{\pi} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{c}{\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{c}{\tau} d\tau \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \left( \frac{c}{\tau} - \frac{c}{\tau} \right) d\tau \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

<https://www.comm.utoronto.ca/frank/notes/hilbert.pdf>

- Ο μετασχ. Hilbert του τετραγωνικού παλμού δίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$H\{\text{rect}(t)\} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{2t+1}{2t-1} \right|$$



- Ο μετασχ. Hilbert στον χώρο Fourier

- Ο μετασχ. Fourier του σήματος  $1/\pi t$  ισούται με

$$-j \operatorname{sgn}(\Omega) = \begin{cases} -j & \text{εάν } \Omega > 0 \\ 0 & \text{εάν } \Omega = 0 \\ j & \text{εάν } \Omega < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{εάν } \Omega > 0 \\ 0 & \text{εάν } \Omega = 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & \text{εάν } \Omega < 0 \end{cases} = e^{-j\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\Omega)} \quad \gamma \mu \quad \Omega \neq 0$$

- Εάν  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$   
τότε  $\hat{x}(t) \xleftrightarrow{F} -j \operatorname{sgn}(\Omega) X(\Omega) = \hat{X}(\Omega)$

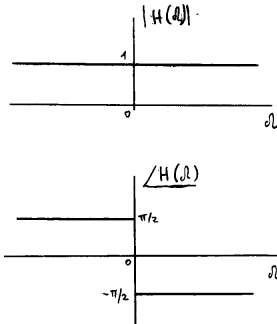
Απόδειξη:  $F\{\hat{x}(t)\} = F\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\} = -j \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot X(\Omega)$

- Η σχέση

$$\hat{X}(\Omega) = -j \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot X(\Omega)$$

$$\hat{X}(\omega) = \underbrace{-j \operatorname{sgn}(\omega)}_{H(\omega)} \cdot X(\omega)$$

Ο φάσας Hilbert δεν αλλάζει το μέτρο του  $X(\omega)$ , αλλά μόνο τη φάση.



Για τις θετικές συχνότητες, οι τιμές του φάσας Fourier πολλαπλασιάζονται επί  $-j$  (το οποίο ισοδυναμεί με αλλαγή φάσης κατά  $-\pi/2$ ), ενώ για τις αρνητικές συχνότητες, οι τιμές του φάσας Fourier πολλαπλασιάζονται επί  $j$  (το οποίο ισοδυναμεί με αλλαγή φάσης κατά  $\pi/2$ ).

Με άλλα λόγια ο φάσας Hilbert ουσιολογικά προσαρτά την αντιστροφή του πραγματικού και φανταστικού μέρους της  $X(\omega)$ , με ταυτόχρονη αλλαγή προσήμων στο ένα από αυτά.

### - Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

Έστω  $x(t)$  ένα σήμα ενέργειας. Αφού  $|X(\omega)| = |X(\omega)|$ , συνεπώς ότι τα  $\hat{X}(\omega)$  και  $X(\omega)$  έχουν την ίδια Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας. Με άλλα λόγια, εάν το εύρος των συχνοτήτων του  $X(\omega)$  περιορίζεται στα  $B$  Hz, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το  $\hat{X}(\omega)$ .

Το σήμα  $\hat{x}(t)$  έχει ακριβώς την ίδια ενέργεια με το σήμα  $x(t)$

$$H\{\hat{x}(t)\} = -x(t) \quad \text{δηλ.} \quad H\{H\{x(t)\}\} = -x(t) \quad \text{ή} \quad \hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$

Απόδειξη:

$$F\{\hat{\hat{x}}(t)\} = [-j \operatorname{sgn}(\omega)]^2 X(\omega) = -X(\omega)$$

Άρα

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$



- **Ορθογωνιότητα**  
 Εάν το  $x(t)$  είναι ένα πραγματικό σήμα ενέργειας, τότε τα σήματα  $x(t)$  και  $\hat{x}(t)$  είναι ορθογώνια.

Απόδειξη: 
$$\begin{aligned} \langle x(t), \hat{x}(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \hat{X}^*(-\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \hat{X}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) [-j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega)]^* d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j \operatorname{sgn}(\omega) |X(\omega)|^2 d\omega = \\ &= 0 \end{aligned}$$

αφού  $|X(\omega)|^2$  άρτια συνάρτηση του  $\omega$ ,  
 η  $\operatorname{sgn}(\omega) |X(\omega)|^2$  είναι περιττή συνάρτηση του  $\omega$ ,  
 και συνεπώς η τιμή του ολοκληρώματος  
 είναι μηδέν.

**ΑΣΚΗΣΗ** Να υπολογιστεί ο μετασχη. Hilbert των σήματος  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$  για  $\omega_0 > 0$ .

**ΛΥΣΗ** 
$$H\{x(t)\} \hat{=} \hat{x}(t) = \cos(\omega_0 t) * \frac{1}{\pi t}$$

Λαμβάνοντας τον μετασχ. Fourier και των δύο μελών έχουμε:

$$F\{\hat{x}(t)\} = F\left\{\cos(\omega_0 t) * \frac{1}{\pi t}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(\omega) &= F\{\cos(\omega_0 t)\} \cdot F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \langle \text{Bz. επιπλέον για υπολογισμό } F\{\cos(\omega_0 t)\} \rangle = \\ &= \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \cdot [-j \operatorname{sgn}(\omega)] = \\ &= -j\pi \operatorname{sgn}(\omega) [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \\ &= \frac{\pi}{j} [\operatorname{sgn}(\omega) \delta(\omega - \omega_0) + \operatorname{sgn}(\omega) \delta(\omega + \omega_0)] = \\ &= \frac{\pi}{j} [\operatorname{sgn}(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) + \operatorname{sgn}(-\omega_0) \delta(\omega + \omega_0)] = \\ &= \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και των δύο τριγώνων:

$$F^{-1}\{\hat{X}(\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)]\right\} \Rightarrow$$

$$\hat{x}(t) = \sin(\omega_0 t)$$

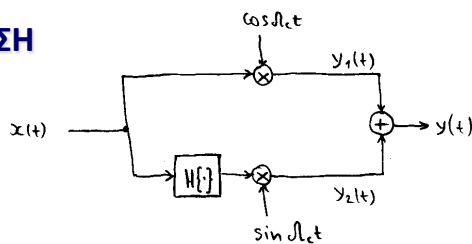
Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού ο μετασχη. Hilbert επιφέρει αλλαγή φάσης  $90^\circ$ , οπότε το συνυψισμένο γίνεται υψισμένο.

$$\begin{aligned} \text{Σημείωση 1: } F\{\cos(\omega_0 t)\} &= F\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right\} = \\ &= \frac{1}{2}[F\{e^{j\omega_0 t}\} + F\{e^{-j\omega_0 t}\}] = \\ &= \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)] = \\ &= \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] \end{aligned}$$

Σημείωση 2: Ο μετασχη. Hilbert του σήματος  $x(t) = \sin \omega_0 t$  προκύπτει εύκολα, ως εξής:

$$\begin{aligned} H\{\sin \omega_0 t\} &= H\{H\{\cos \omega_0 t\}\} = -\cos \omega_0 t \quad \text{όπου έγινε χρήση των} \\ \sin \omega_0 t &= H\{\cos \omega_0 t\} \quad \text{και} \quad H\{H\{x(t)\}\} = -x(t). \end{aligned}$$

## ΛΥΣΗ



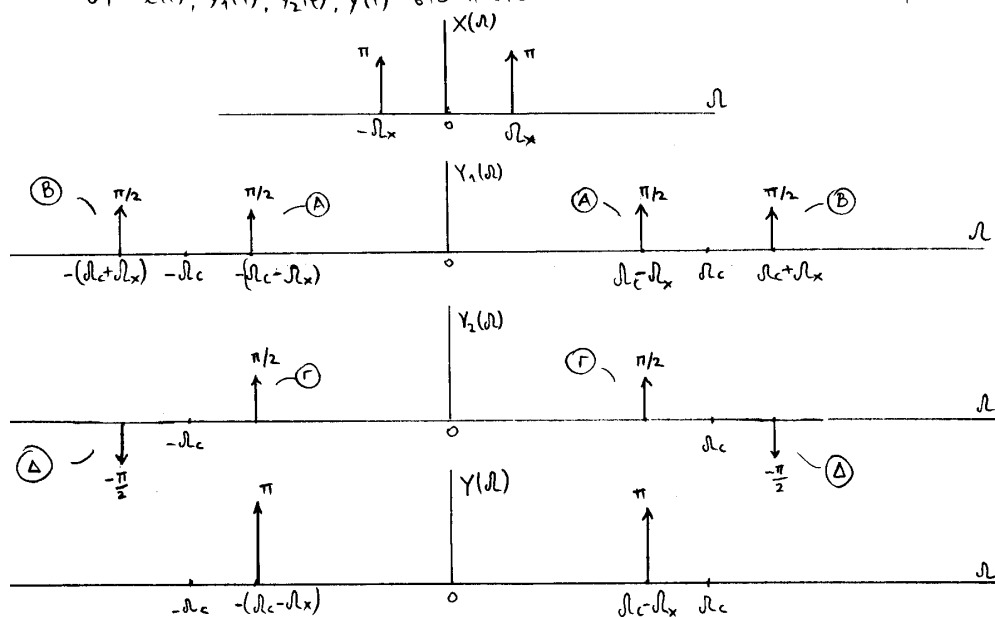
$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t) \cdot \cos \omega_c t = \cos \omega_x t \cdot \cos \omega_c t = \langle \text{λόγω τριγων. ταυτοτήτων } \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\cos(\omega_c - \omega_x) t}_A + \frac{1}{2} \underbrace{\cos(\omega_c + \omega_x) t}_B \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= H\{x(t)\} \cdot \sin \omega_c t = H\{\cos \omega_x t\} \cdot \sin \omega_c t = \\ &= \sin \omega_x t \cdot \sin \omega_c t = \langle \text{λόγω τριγων. ταυτοτήτων } \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\cos(\omega_c - \omega_x) t}_\Gamma - \frac{1}{2} \underbrace{\cos(\omega_c + \omega_x) t}_\Delta \quad (2) \end{aligned}$$

Άρα

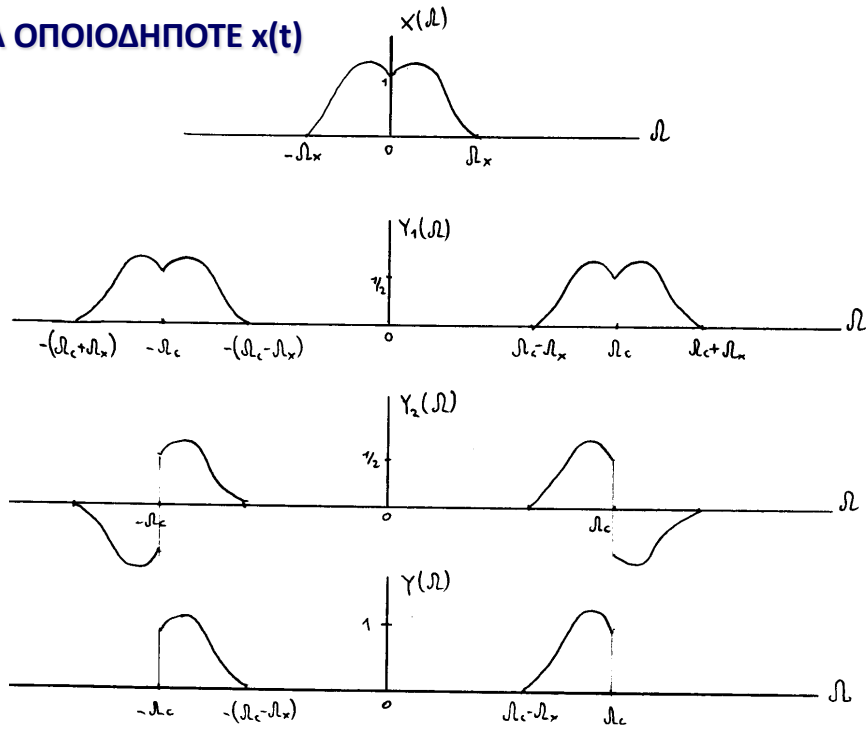
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \cos(\omega_c - \omega_x) t \quad (3)$$

Οι  $x(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y(t)$  στο πεδίο συχνοτήτων δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:

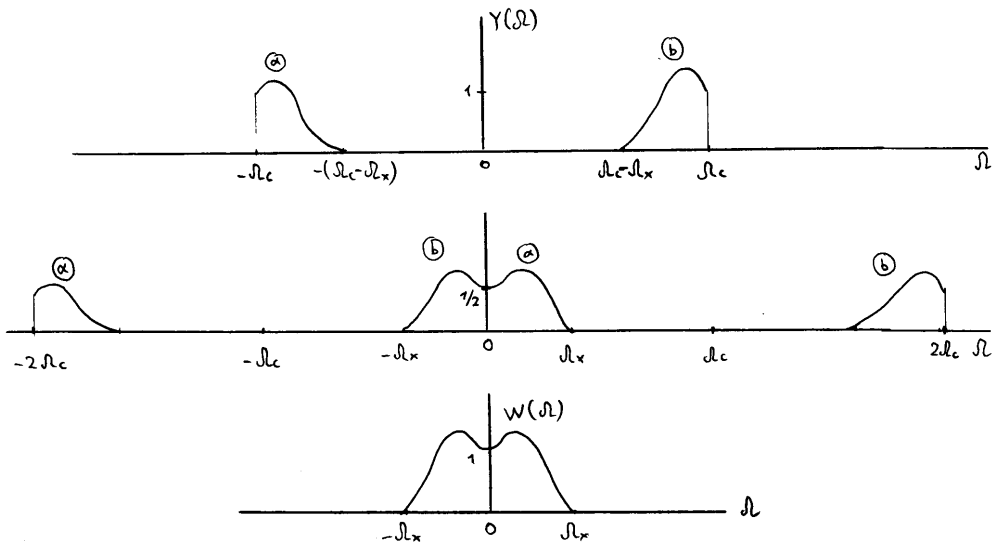
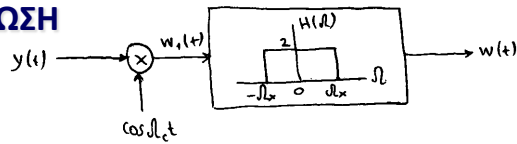


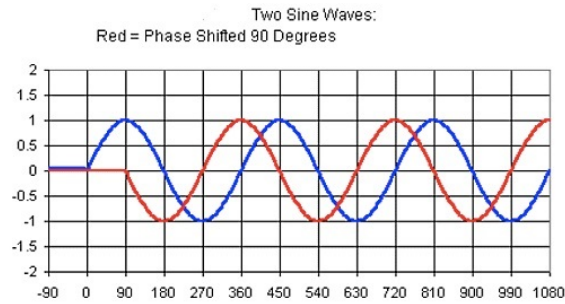
Συμπέρασμα 1: Το σύστημα αυτό ονομάζεται "σύστημα μονόπλευρης διαμόρφωσης πλάτους" (single-sided amplitude modulation system) και προέρχεται έναντι του αντίστοιχου αμφίπλευρου συστήματος ως προς το ότι απαιτεί λιγότερη ενέργεια για την μετάδοση, γιατί συχνά χρησιμοποιείται σε φορητούς πομπούς AM (Amplitude Modulation).

**ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ  $x(t)$**

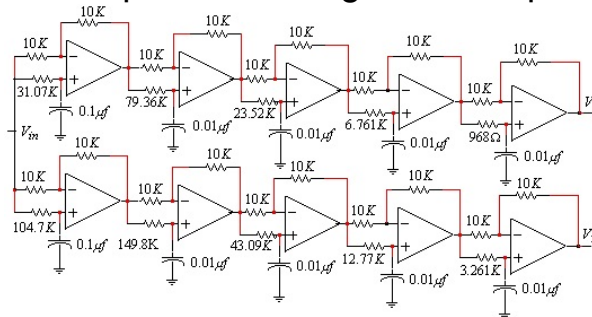


**ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ**

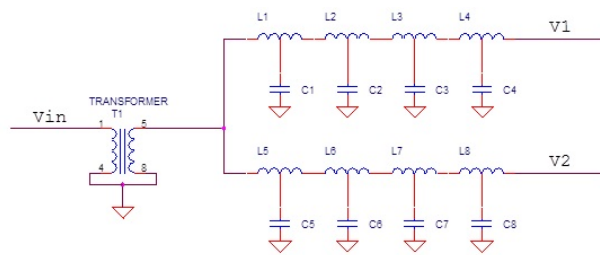




### Example of a 90 degree active phase splitter



### Example of a 90-degree passive phase splitter



## ΠΗΓΕΣ

1. <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:872439/FULLTEXT02.pdf>
2. <https://www.bksv.com/media/doc/bo0437.pdf>
3. <https://in.mathworks.com/help/signal/ug/single-sideband-modulation-via-the-hilbert-transform.html;jsessionid=f40372491837767a5dee593e79b>
4. <https://www.gaussianwaves.com/2017/04/extract-envelope-instantaneous-phase-frequency-hilbert-transform/> (demo in Matlab & Python)
5. <https://www.researchgate.net/publication/257547765> Envelope Calculation from the Hilbert Transform (Matlab)