ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Α. ΣΚΟΔΡΑΣ

ΖΩΝΤΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

ΠΕΜΠΤΗ 29.10.2020 ΩΡΑ 10:00-11:00

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ (Correlation Function)

$$\boxed{\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau} \qquad (1)$$

θέτοντας $t+\tau = l \Rightarrow \tau = l - t$ προκύπτει η ισοδύναμη έκφραση

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(l)\, y(l-t)\, dl$$

ή για $l=\tau$

$$\boxed{\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(\tau-t)\, d\tau} \qquad (2)$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Υπενθυμίζεται ότι η συνέλιξη (convolution) των $x(t)$ και $y(t)$ ισούται με:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \qquad (3)$$

Άρα η συνέλιξη των σημάτων $x(t)$ και $y(-t)$ είναι:

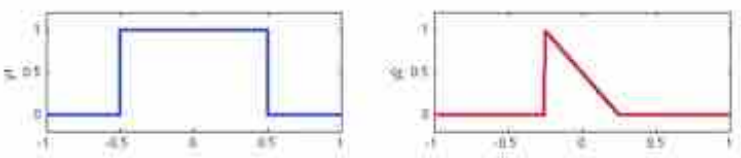
$$x(t) * y(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(\tau-t)\, d\tau \qquad (4)$$

Από τις (2), (4) προκύπτει ότι:

$$\boxed{\Phi_{xy}(t) = x(t) * y(-t)} \qquad (5)$$

Visualization of Cross Correlation and Convolution

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ



Source - https://www.youtube.com/watch?v=Ma0YONjMZLI

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Συσχέτιση ή ετεροσυσχέτιση:
(Correlation or cross-correlation)

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\; y(\tau)\, d\tau$$

$$\phi_{yx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)\; x(\tau)\, d\tau \qquad (6)$$

Ισχύει: $$\boxed{\phi_{xy}(t)=\phi_{yx}(-t)} \qquad (7)$$

Απόδειξη: $$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\; y(\tau)\, d\tau = \langle \text{θέτω } t+\tau=\ell \Rightarrow \tau=-t+\ell \rangle =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\ell)\; y(-t+\ell)\, d\ell =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} y(-t+\ell)\; x(\ell)\, d\ell =$$

$$=\phi_{yx}(-t)$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Αυτοσυσχέτιση:
(Auto-correlation)

$$\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\; x(\tau)\, d\tau \qquad (8)$$

$$\phi_{yy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)\; y(\tau)\, d\tau \qquad (9)$$

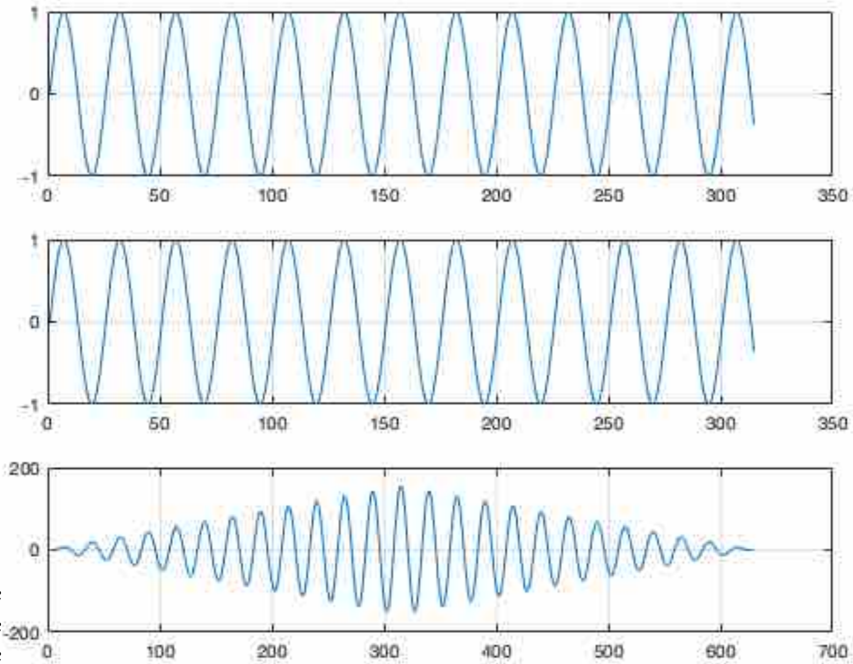
<u>Σημείωση</u>: Από τη σχέση (7) προκύπτει ότι

$$\boxed{\phi_{xx}(t)=\phi_{xx}(-t)} \qquad (10)$$

Άρα η αυτοσυσχέτιση είναι <u>άρτια</u> συνάρτηση!

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

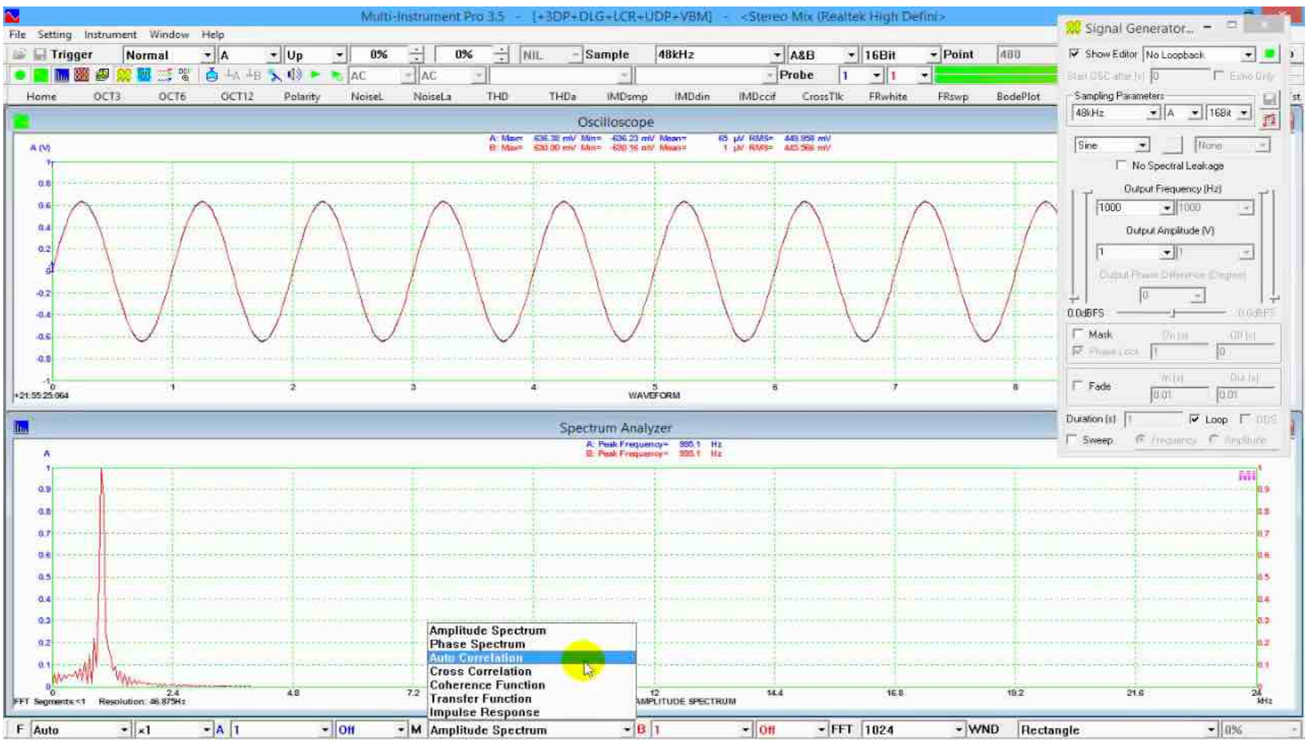
Auto-Correlation Example




```
n=0:0.04:pi*4;
x=sin(2*pi*n);
y=sin(2*pi*n);
f=xcorr(x,y);
subplot(311); plot(x); grid on
subplot(312); plot(y); grid on
subplot(313); plot(f); grid on
```


ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Auto-Correlation Examples

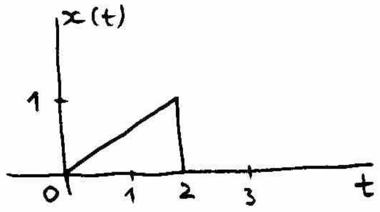


Source - https://www.youtube.com/watch?v=L6YJqhbsuFY

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η αυτοσυσχέτιση $\phi_{xx}(t)$ του σήματος $x(t)$.

ΛΥΣΗ

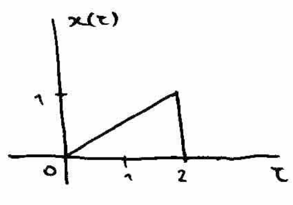


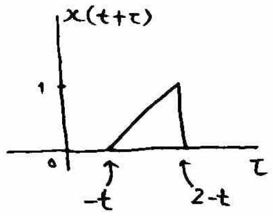
$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

Βήμα 1ο: Γράφουμε την εξίσωση του σήματος $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Βήμα 2ο: Γράφουμε τις εξισώσεις των $x(\tau)$ και $x(t+\tau)$ και σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις τους.



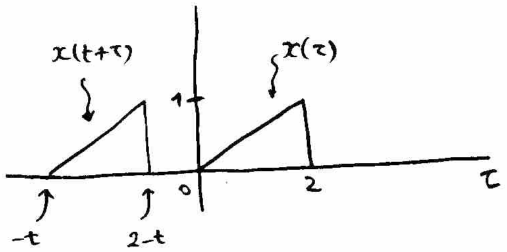


$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tau & 0 \le \tau \le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x(t+\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+\tau) & 0 \le t+\tau \le 2 \Rightarrow -t \le \tau \le 2-t \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

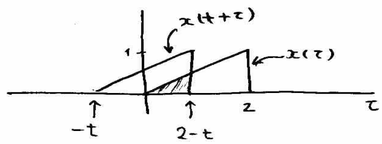
Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα (για τα διαφορετικά διαστήματα που το γινόμενο $x(t+\tau)x(\tau)$ είναι διάφορο του μηδενός).

Περίπτωση 1η: $2-t<0 \Rightarrow t>2$



$$\Phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau = 0$$ αφού οι $x(t+\tau)$ και $x(\tau)$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο στο διάστημα αυτό.

Περίπτωση 2η: $0\leq 2-t<2 \Rightarrow 0<t\leq 2$



$$\Phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{0} x(t+\tau)\cdot 0\cdot d\tau + \int_{0}^{2-t} x(t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_{2-t}^{+\infty} 0\cdot x(\tau)\,d\tau = 0+\int_{0}^{2-t}\frac{1}{2}(t+\tau)\cdot\frac{1}{2}\tau\,d\tau + 0 =$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{2-t}(t+\tau)\tau\,d\tau = \frac{1}{4}\int_{0}^{2-t} t\tau\,d\tau + \frac{1}{4}\int_{0}^{2-t}\tau^2\,d\tau =$$

$$=\frac{1}{4}t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{0}^{2-t} + \frac{1}{4}\,\frac{\tau^3}{3}\Big|_{0}^{2-t} =$$

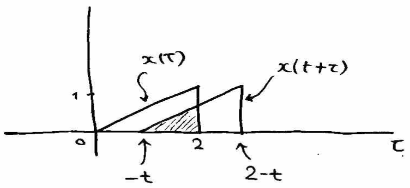
$$=\frac{1}{8}t\left[(2-t)^2-0^2\right] + \frac{1}{12}\left[(2-t)^3-0^3\right] =$$

$$=\frac{1}{8}t\left(4-4t+t^2\right) + \frac{1}{12}\left(8-3\cdot 2^2 t+3\cdot 2t^2-t^3\right) =$$

$$=\frac{1}{2}t-\cancel{\frac{1}{2}t^2}+\frac{t^3}{8}+\frac{2}{3}-t+\cancel{\frac{t^2}{2}}-\frac{t^3}{12} =$$

$$=\frac{1}{24}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{2}{3} \quad \text{για} \quad 0<t\leq 2$$

Περίπτωση 3η: $0 \leq -t < 2 \Rightarrow -2 < t \leq 0$



$$\Phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{-t} 0 \cdot x(\tau)\, d\tau + \int_{-t}^{2} x(t+\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \int_{2}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot 0\, d\tau$$

$$= 0 + \int_{-t}^{2} \frac{1}{2}(t+\tau)\, \frac{1}{2}\tau\, d\tau + 0 =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-t}^{2} (t\tau + \tau^2)\, d\tau = \frac{1}{4}\left[t \frac{\tau^2}{2}\Big|_{-t}^{2} + \frac{\tau^3}{3}\Big|_{-t}^{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}\left[2^2 - (-t)^2\right] + \frac{1}{3}\left[2^3 - (-t)^3\right] \right] =$$

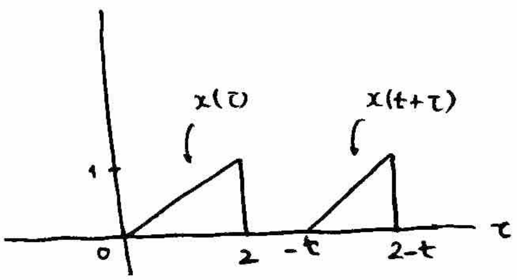
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}(4 - t^2) + \frac{1}{3}(8 + t^3) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2t - \frac{t^3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{t^3}{3} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{t^3}{6} + 2t + \frac{8}{3} \right] =$$

$$= \frac{-1}{24} t^3 + \frac{t}{2} + \frac{2}{3} \qquad \text{για } -2 < t \leq 0$$

Περίπτωση 4η: $-t \geq 2 \Rightarrow t \leq -2$

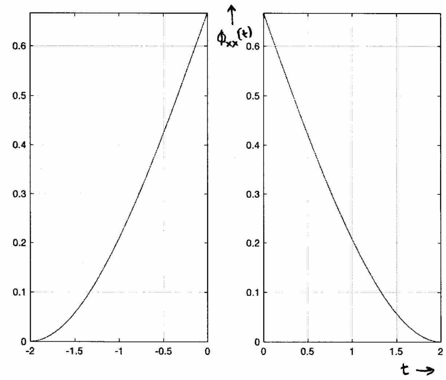


Τα $x(\tau)$ και $x(t+\tau)$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο στο διάστημα αυτό, οπότε το γινόμενό τους είναι μηδέν και άρα $\Phi_{xx}(t) = 0$.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Τελικά η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ισούται με:

$$\phi_{xx}(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3} & 0 < t \le 2 \\ -\frac{1}{24}t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{2}{3} & -2 < t \le 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Σημαντική παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι $\phi_{xx}(t) = \phi_{xx}(-t)$

Θυμηθείτε, όπως είχαμε δει και στη σχέση (10) προηγουμένως, ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει άρτια συμμετρία!

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι $y(t) = x(t+T)$. Να εκφραστούν οι $\phi_{xy}(t)$ και $\phi_{yy}(t)$ συναρτήσει της $\phi_{xx}(t)$.

ΛΥΣΗ

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, x(\tau+T)\, d\tau = \langle \text{θέτω } \tau + T = l \Rightarrow \tau = l - T \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+l-T)\, x(l)\, dl =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\underset{\sim}{t-T}+l)\, x(l)\, dl =$$

$$= \phi_{xx}(\underset{\sim}{t-T})$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

$$\phi_{yy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau+T)\, x(\tau+T)\, d\tau = \langle \text{θέτω } \tau+T = l \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+l)\, x(l)\, dl =$$

$$= \phi_{xx}(t)$$

Παρατηρούμε ότι η αυτοσυσχέτιση ενός σήματος και η αυτοσυσχέτιση μιας μετατοπισμένης εκδοχής του, δηλαδή του ίδιου σήματος το οποίο όμως έχει υποστεί καθυστέρηση ή προήγηση, είναι ίσες.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $x(t)$ σήμα πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή $x(t)=0$ για $t<0$ και $t>T$. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος για την οποία, για είσοδο $x(t)$ η έξοδος να ισούται με $\Phi_{xx}(t-T)$.

ΛΥΣΗ Γνωρίζουμε ότι $$\Phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(\tau-t)\, d\tau \qquad (1)$$

και συνεπώς $$\Phi_{xx}(t-T)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(\tau-(t-T))\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(\tau-t+T)\, d\tau \qquad (2)$$

Η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ σε είσοδο $x(t)$ ισούται με:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad (3)$$

Συνεπώς για να είναι οι σχέσεις (2), (3) ίσες, όπως για να ισχύει $y(t)=\Phi_{xx}(t-T)$, θα πρέπει

$$h(t-\tau)=x(\tau-t+T)=$$
$$=x(T-(t-\tau))$$

Συνεπώς η $h(t)$ θα ισούται με $x(T-t)$, δηλαδή

$$\boxed{h(t)=x(T-t)}$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

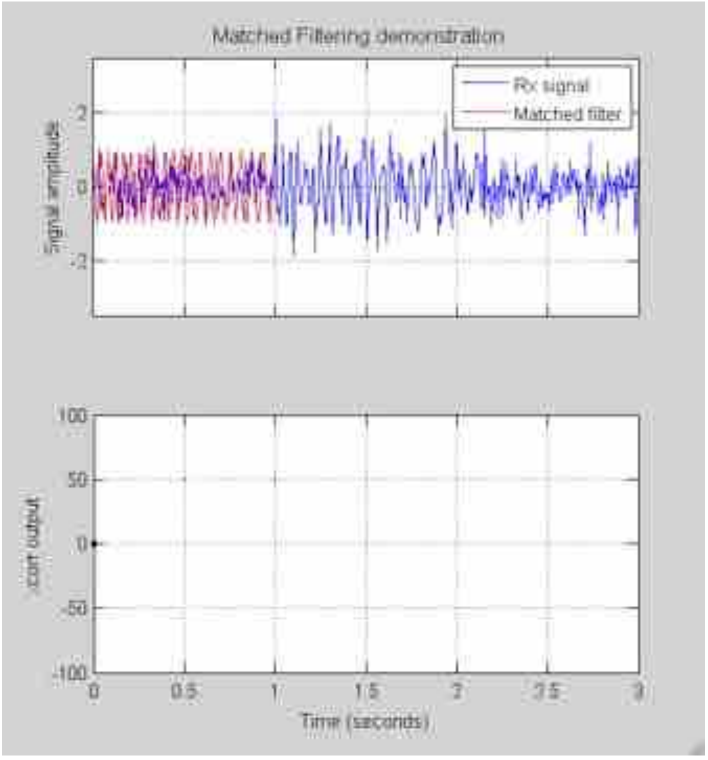
Σημείωση: Το σύστημα που έχει την ιδιότητα αυτή ονομάζεται ταιριαστό φίλτρο (matched filter) για το σήμα $x(t)$.

Το χαρακτηριστικό αυτού του φίλτρου είναι ότι παράγει τη μέγιστη έξοδο μόνον όταν το σήμα $x(t)$ εφαρμόζεται στην είσοδο. Για οποιαδήποτε άλλη είσοδο, η παραγόμενη έξοδος έχει μικρότερη τιμή.

Οι κύριες εφαρμογές του φίλτρου είναι στις επικοινωνίες και στα συστήματα radar.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Matched filter demo



Source - https://www.youtube.com/watch?v=voh0UmXp_B4

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ Έστω ο παλμός $p(t)$. Ν.δ.ο. $\phi_{pp}(0)=\max\limits_t \phi_{pp}(t)$, δηλαδή ότι η $\phi_{pp}(0)$ είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το σήμα $\phi_{pp}(t)$.

ΛΥΣΗ

$$\phi_{pp}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau+t)\,p(\tau)\,d\tau \overset{①}{\leq} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau+t)\,d\tau\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau)\,d\tau\right]^{1/2} = \langle \text{για } t=0 \rangle =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau)\,d\tau = \phi_{pp}(0)$$

Συνεπώς $\phi_{pp}(0) \geq \phi_{pp}(t)$ ή $\phi_{pp}(0)=\max\limits_t \phi_{pp}(t)$

Με άλλα λόγια, η μέγιστη τιμή της αυτοσυσχέτισης παρουσιάζεται στη θέση $t=0$.

① Ανισότητα Schwarz: $\int_{\alpha}^{b} u(t)\,v(t)\,dt \leq \left[\int_{\alpha}^{b} u^2(t)\,dt\right]^{1/2}\left[\int_{\alpha}^{b} v^2(t)\,dt\right]^{1/2}$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $x(t) = \alpha p(t-t_0)$, όπου α θετική σταθερά. Νδο $\phi_{xp}(t_0) = \max_t \phi_{xp}(t)$.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΛΥΣΗ

$$\phi_{xp}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t)\, p(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, p(\tau - t_0 + t)\, p(\tau)\, d\tau$$

$$\leq \left[\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau+t-t_0)\, d\tau\right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2} = \langle \gamma\iota\alpha\ t = t_0 \rangle =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau)\, d\tau = \phi_{xp}(t_0)$$

Συνεπώς $\phi_{xp}(t_0) \geq \phi_{xp}(t)$ ή $\phi_{xp}(t_0) = \max_t \phi_{xp}(t)$

Με άλλα λόγια, η μέγιστη τιμή στην περίπτωση που το σήμα είναι ολισθημένο κατά t_0, παρουσιάζεται στη θέση (χρόνο) t_0.

Η ιδιότητα αυτή βρίσκει εφαρμογή στα radar, όπου το λαμβανόμενο σήμα μετά την ανάκλαση στον στόχο, είναι μια καθυστερημένη (delayed) και σταθμισμένη (scaled) εκδοχή του σήματος που μεταδόθηκε. Υπολογίζοντας τη μέγιστη τιμή της ετεροσυσχέτισης, προσδιορίζουμε τον χρόνο t_0 και κατά συνέπεια την απόσταση του στόχου από το radar.

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΙΣΧΥΟΣ
(ΓΙΑ ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ)

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Εάν τα συνεχούς χρόνου σήματα $x(t)$, $y(t)$ είναι ισχύος, τότε οι συναρτήσεις ετεροσυσχέτισης και αυτοσυσχέτισης ορίζονται ως

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

$$\phi_{xx}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Στην περίπτωση που τα σήματα $x(t)$, $y(t)$ είναι περιοδικά με την ίδια περίοδο T, οι παραπάνω ορισμοί γίνονται

$$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{T}\int_T x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

$$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{T}\int_T x(t+\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

Οι συναρτήσεις συσχέτισης $\phi_{xy}(t)$, $\phi_{xx}(t)$ είναι επίσης περιοδικές με περίοδο T.

Η ιδιότητα αυτή μας βοηθά στο να αποκαλύπτουμε την ύπαρξη ενός περιοδικού σήματος το οποίο είναι "χαμένο" σε θόρυβο.

<u>Σημείωση</u>: Το σύμβολο $\int_T$ ισοδυναμεί με $\int_{T_0}^{T_0+T}$, δηλαδή με ολοκλήρωση σε οποιοδήποτε διάστημα μιας περιόδου T.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t)=\sin(\Omega t+\theta)$.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για περιοδικό σήμα με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\Omega}$, οπότε έχουμε:

$$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{T}\int_T x(t+\tau)\, x(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \sin[\Omega(t+\tau)+\theta]\,\sin(\Omega\tau+\theta)\, d\tau =$$

$$= \left\langle \sin A\cdot\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]\right\rangle =$$

$$= \frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \frac{1}{2}\left[\cos(\Omega t) - \cos(\Omega t + 2\Omega\tau + 2\theta)\right] d\tau =$$

$$= \frac{\Omega}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \cos(\Omega t)\cdot d\tau - \frac{\Omega}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \cos(\Omega t + 2\Omega\tau + 2\theta)\, d\tau =$$

$$= \frac{\Omega}{4\pi}\cos(\Omega t)\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} d\tau - \frac{\Omega}{4\pi}\cdot\frac{1}{2\Omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \cos(\Omega t+2\Omega\tau+2\theta)\, d(\Omega t+2\Omega\tau+2\theta) =$$

$$= \frac{\Omega}{4\pi} \cos(\Omega t)\, \tau \Big|_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} - \frac{1}{8\pi} \sin(\Omega t + 2\Omega\tau + 2\theta) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} =$$

$$= \frac{\Omega}{4\pi} \cos(\Omega t) \left(\frac{2\pi}{\Omega} - 0\right) - \frac{1}{8\pi}\left[\sin\left(\Omega t + 2\Omega \cdot \frac{2\pi}{\Omega} + 2\theta\right) - \sin(\Omega t + 0 + 2\theta)\right] =$$

$$= \frac{\Omega}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{\Omega} \cos(\Omega t) - \frac{1}{8\pi} \underbrace{\left[\underbrace{\sin(4\pi + \Omega t + 2\theta)}_{\sin(\Omega t + 2\theta)} - \sin(\Omega t + 2\theta)\right]}_{0} =$$

$$= \frac{1}{2} \cos(\Omega t)$$

Παρατηρούμε ότι η $\phi_{xx}(t)$ είναι επίσης περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ και ανεξάρτητη της φάσης θ.

Ιδιότητες της Συνάρτησης Αυτο-Συσχέτισης

1. Η αυτο-συσχέτιση είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή $\phi_{xx}(t) = \phi_{xx}(-t)$
2. Η μέγιστη τιμή της αυτο-συσχέτισης $\phi_{xx}(t)$ συμβαίνει για $t=0$,

$$|\phi_{xx}(t)| \le \phi_{xx}(0)$$

Παρατηρείστε ότι

$$\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(\tau)\, d\tau = E_x$$

όπου E_x η ενέργεια του σήματος, για την περίπτωση σημάτων ενέργειας.

Όταν πρόκειται για σήματα ισχύος, τότε

$$\phi_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(\tau)\, d\tau = P_x$$

όπου P_x η μέση ισχύς του σήματος.

3. Η αυτοσυσχέτιση $\phi_{xx}(t)$ δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση και είναι ανεξάρτητη της αρχής του χρόνου.

4. Εάν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, τότε και η αυτοσυσχέτιση $\phi_{xx}(t)$ είναι επίσης περιοδική με περίοδο T.

5. Εάν το σήμα $x(t)$ (α) έχει μέση τιμή μηδέν $(\mu=0)$ και
(β) είναι μη περιοδικό, τότε

$$\lim_{t\to\infty} \phi_{xx}(t) = 0$$

Ιδιότητες της Συνάρτησης Ετερο-Συσχέτισης

1. $\phi_{xy}(t) = \phi_{yx}(-t)$, καθώς επίσης η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης <u>δεν</u> είναι κατ' ανάγκη άρτια.

2. Εάν $\phi_{xy}(t) = 0 \;\; \forall\, t$, τότε τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ είναι ασυσχέτιστα.

3. Εάν $y(t) = \alpha\, x(t-t_0)$, όπου α σταθερά, δηλαδή η $y(t)$ είναι μια σταθμισμένη (scaled) και μετατοπισμένη εκδοχή της $x(t)$, τότε η $\phi_{xy}(t)$ θα παρουσιάζει το μέγιστό της στη θέση $t=t_0$.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Σημείωση

Η ετερο-συσχέτιση χρησιμοποιείται συχνά για τον υπολογισμό της καθυστέρησης σε συστήματα προσδιορισμού θέσης μέσω της ηχούς (radar, sonar) και σε δέκτες GPS.

Συντελεστής ετεροσυσχέτισης: $\rho_{xy}(t) = \dfrac{\phi_{xy}(t)}{\sqrt{\phi_{xx}(0)\,\phi_{yy}(0)}}$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Συντελεστής αυτοσυσχέτισης: $\rho_{xx}(t) = \dfrac{\phi_{xx}(t)}{\phi_{xx}(0)}$

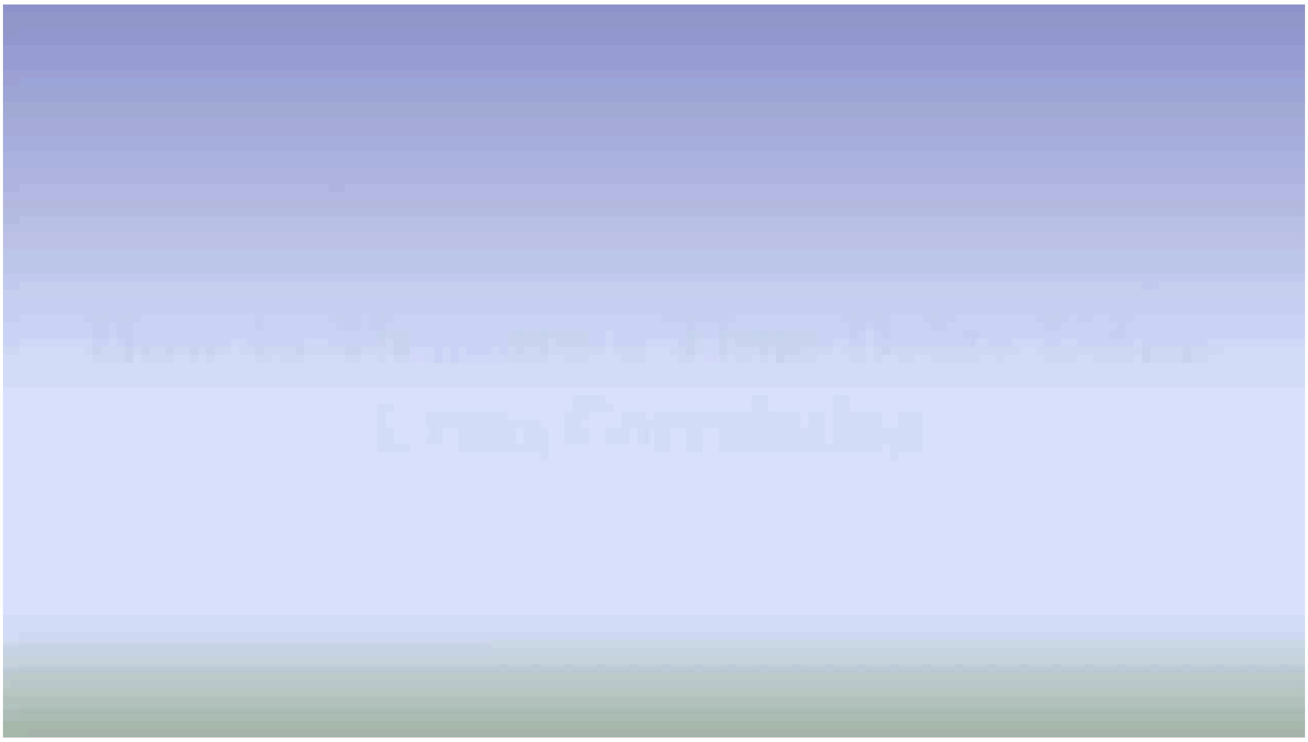
Ο συντελεστής (αυτο/ετερο)συσχέτισης ονομάζεται και κανονικοποιημένος συντελεστής συσχέτισης (Normalised Correlation Coefficient, NCC) και οι τιμές του κυμαίνονται μεταξύ $[-1, 1]$.

Τιμή του συντελεστή ίση με 1 σημαίνει ότι τα σήματα είναι ίδια.

Τέλος, θυμηθείτε ότι $\phi_{xx}(0) = E_x$ και $\phi_{yy}(0) = E_y$ όπου E_x, E_y οι ενέργειες των σημάτων.

How to Measure Time Delay Using Cross Correlation

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ



Source - https://www.youtube.com/watch?v=L6YJqhbsuFY

ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

Έστω τα πραγματικά σήματα $x(t)$, $y(t)$. Η ετεροσυσχέτισή τους ορίζεται ως

$$\Phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t)\,y(\tau)\,d\tau$$

Παρόμοια ορίζονται και οι $\Phi_{yx}(t)$, $\Phi_{xx}(t)$, $\Phi_{yy}(t)$.

Έστω $\Phi_{xy}(\Omega)$, $\Phi_{yx}(\Omega)$, $\Phi_{xx}(\Omega)$, $\Phi_{yy}(\Omega)$ οι μετασχηματισμοί Fourier καθεμιάς από τις παραπάνω συναρτήσεις.

Ισχύει:

- $\boxed{\Phi_{xy}(\Omega)=\Phi_{yx}(-\Omega)}$ και αφού η $\Phi_{yx}(t)$ είναι πραγματική $\boxed{\Phi_{xy}(\Omega)=\Phi^{*}_{yx}(\Omega)}$

  Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $\Phi_{xy}(t)=\Phi_{yx}(-t) \xrightarrow{F} \Phi_{xy}(\Omega)=\Phi_{yx}(-\Omega)$

- $\boxed{\Phi_{xy}(\Omega)=X(\Omega)\cdot Y^{*}(\Omega)}$

  Απόδειξη: $\Phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t)\,y(\tau)\,d\tau = x(t) * y(-t)$

  $\xrightarrow{F}$ $\Phi_{xy}(\Omega)=X(\Omega)\cdot Y(-\Omega) = \langle$αφού $y(t)$ πραγματική$\rangle = X(\Omega)\cdot Y^{*}(\Omega)$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

- $\boxed{\Phi_{xx}(\Omega) \geq 0}$ δηλαδή ο ΜF της αυτοσυσχέτισης είναι πραγματικός και μη αρνητικός για κάθε Ω.

Απόδειξη: Από την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε:

$$\Phi_{xx}(\Omega) = X(\Omega) \cdot X^*(\Omega) = |X(\Omega)|^2 \geq 0$$

- $$\boxed{\Phi_{xx}(\Omega) = |X(\Omega)|^2 \quad \xleftrightarrow{F} \quad \phi_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 e^{j\Omega t}\, d\Omega}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί το θεώρημα Wiener-Khintchine και μας επιτρέπει τον προσδιορισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης γνωρίζοντας τον ΜF.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ Έστω ότι το πραγματικό σήμα $x(t)$ εφαρμόζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με πραγματική κρουστική απόκριση $h(t)$ και παράγει την έξοδο $y(t)$. Να εκφραστούν οι $\Phi_{xy}(\Omega)$ και $\Phi_{yy}(\Omega)$ συναρτήσει των $\Phi_{xx}(\Omega)$ και $H(\Omega)$, όπου $H(\Omega)$ η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

ΛΥΣΗ

$$\Phi_{xy}(\Omega) = X(\Omega)\, Y^*(\Omega) = X(\Omega)\,[H(\Omega)X(\Omega)]^* = X(\Omega)\, X^*(\Omega)\, H^*(\Omega) = \boxed{\Phi_{xx}(\Omega)\cdot H^*(\Omega)}$$

$$\Phi_{yy}(\Omega) = Y(\Omega)\, Y^*(\Omega) = [H(\Omega)X(\Omega)]\,[H(\Omega)X(\Omega)]^* = \underbrace{X(\Omega)\,X^*(\Omega)}_{\Phi_{xx}(\Omega)}\;\underbrace{H(\Omega)\,H^*(\Omega)}_{|H(\Omega)|^2} = \boxed{\Phi_{xx}(\Omega)\cdot|H(\Omega)|^2}$$

- $\Phi_{xx}(\Omega) = |X(\Omega)|^2$

  Η $\Phi_{xx}(\Omega)$ είναι γνωστή και ως <u>φάσμα πυκνότητας ενέργειας</u> (energy density spectrum) για <u>σήματα ενέργειας</u> ή ως <u>φάσμα πυκνότητας ισχύος</u> (power density spectrum) για <u>σήματα ισχύος</u>.

  Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier και δεδομένου ότι η συνάρτηση αυτο-συσχέτισης είναι <u>πραγματική</u> και <u>άρτια</u>, προκύπτει ότι το φάσμα πυκνότητας ενέργειας ή ισχύος θα είναι <u>πραγματική</u> και <u>άρτια</u> συνάρτηση του Ω και <u>δεν</u> περιέχει πληροφορία για την <u>φάση</u>.

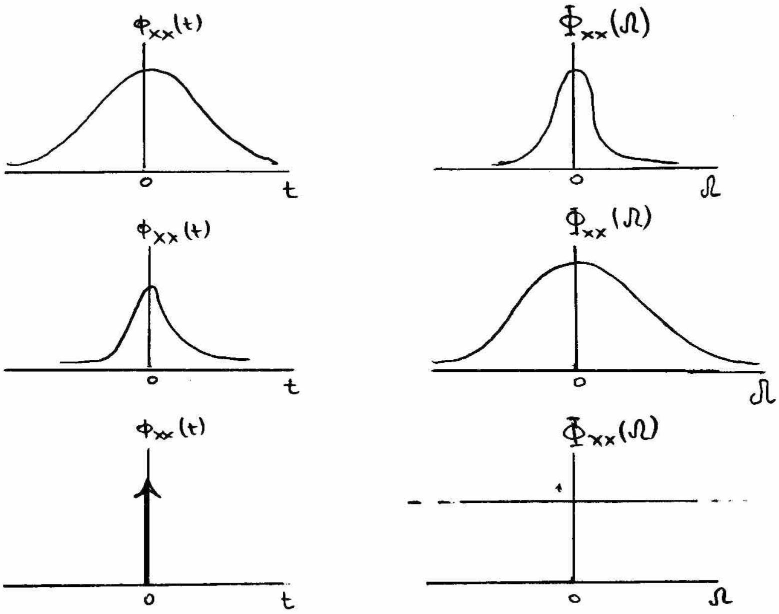
Δ <u>Σημείωση αναφορικά με το "εύρος" της αυτο-συσχέτισης και του αντίστοιχου φάσματος ενέργειας ή ισχύος</u>

$$\phi_{xx}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \Phi_{xx}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

Μεγάλου εύρους αυτοσυσχέτιση συνεπάγεται μικρού εύρους φάσμα.

Μικρού εύρους αυτοσυσχέτιση συνεπάγεται μεγάλου εύρους φάσμα.

Στην οριακή περίπτωση που $\phi_{xx}(t) = \delta(t)$, τότε $\Phi_{xx}(\Omega) = 1$ και το φάσμα ορίζεται ως "λευκό".



ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι το πραγματικό σήμα $x(t)$ εφαρμόζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με πραγματική κρουστική απόκριση $h(t)$ και παράγει την έξοδο $y(t)$. Να εκφραστούν οι $\Phi_{xy}(\Omega)$ και $\Phi_{yy}(\Omega)$ συναρτήσει των $\Phi_{xx}(\Omega)$ και $H(\Omega)$, όπου $H(\Omega)$ η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

ΛΥΣΗ

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{xy}(\Omega) &= X(\Omega)\, Y^*(\Omega) = \\
&= X(\Omega)\, [H(\Omega)\, X(\Omega)]^* = \\
&= X(\Omega)\, X^*(\Omega)\, H^*(\Omega) = \\
&= \Phi_{xx}(\Omega) \cdot H^*(\Omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{yy}(\Omega) &= Y(\Omega)\, Y^*(\Omega) = \\
&= [H(\Omega)\, X(\Omega)]\, [H(\Omega)\, X(\Omega)]^* = \\
&= \underbrace{X(\Omega)\, X^*(\Omega)}_{\Phi_{xx}(\Omega)}\ \underbrace{H(\Omega)\, H^*(\Omega)}_{|H(\Omega)|^2} = \\
&= \Phi_{xx}(\Omega) \cdot |H(\Omega)|^2
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι το πραγματικό σήμα $x(t)$ εφαρμόζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με πραγματική κρουστική απόκριση $h(t)$ και παράγει την έξοδο $y(t)$. Να εκφραστεί η $\phi_{yy}(t)$ συναρτήσει των $\phi_{xx}(t)$ και $h(t)$.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΛΥΣΗ

$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow$ <Λαμβάνοντας τον MF και των δύο μελών>

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega) \Rightarrow$$

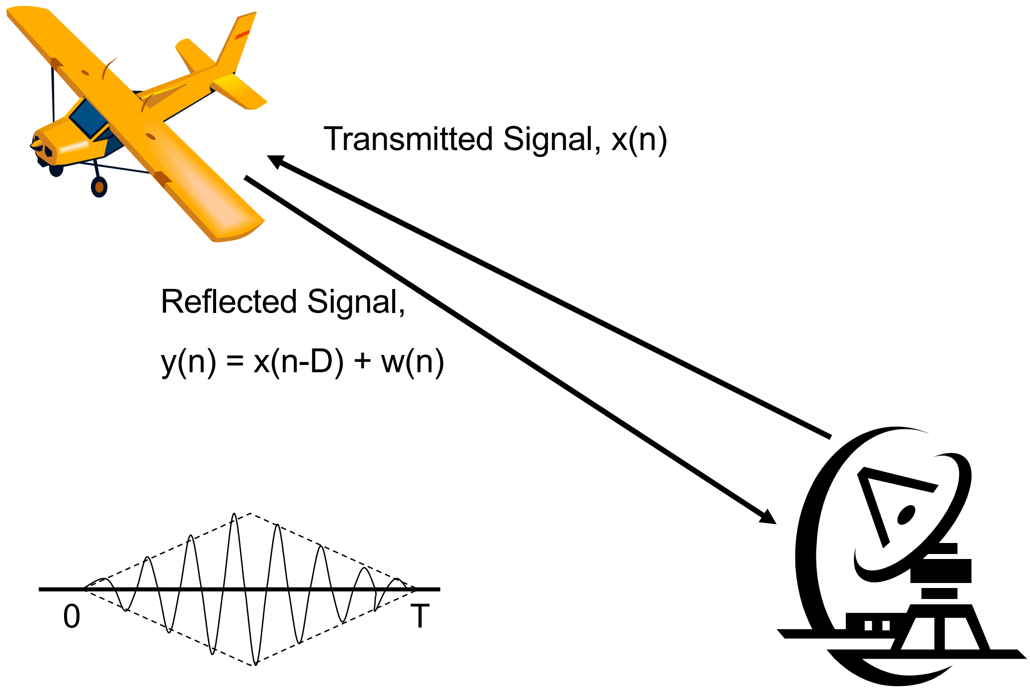
$$\begin{array}{ccccc}
|Y(\Omega)|^2 = |X(\Omega)|^2\, |H(\Omega)|^2 = & |X(\Omega)|^2 & H(\Omega) & H^*(\Omega) \\
\updownarrow F & \updownarrow F & \updownarrow F & \updownarrow F \\
\phi_{yy}(t) & \phi_{xx}(t) & h(t) & h(-t)
\end{array}$$

Άρα:

$$\phi_{yy}(t) = \phi_{xx}(t) * h(t) * h(-t)$$

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ετεροσυσχέτιση (cross-correlation)

$$\phi_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+m)\, y(m), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ή ισοδύναμα

$$\phi_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, y(m-n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\boxed{\phi_{xy}(n) = x(n) * y(-n)}$$

Η σχέση (2) προέκυψε από την (1) θέτοντας $n+m=\ell$, οπότε $m=\ell-n$:

$$(1) \xrightarrow{\text{για } n+m=\ell} \quad \Phi_{xy} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)\, y(\ell-n)$$

ή ισοδύναμα θέτοντας $\ell=m$ προκύπτει η (2).

Ισχύει: $\boxed{\Phi_{xy}(n) = \Phi_{yx}(-n)}$

Απόδειξη: $\Phi_{yx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)\, x(m-n)$

Για $-n$ αυτή γίνεται:

$$\Phi_{yx}(-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)\, x(m+n) = \Phi_{xy}(n) \quad (\text{B})$$

Αυτοσυσχέτιση
(Auto-correlation)

$$\boxed{\Phi_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+m)\, x(m)}$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\Phi_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, x(m-n)}$$

$$\boxed{\Phi_{xx}(n) = \Phi_{xx}(-n)}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(n)=\alpha^n u(n)$, $0<\alpha<1$

ΛΥΣΗ Δεδομένου ότι η αυτοσυσχέτιση είναι άρτια συνάρτηση, αρκεί ο υπολογισμός αυτής για $n\geq 0$.

Το σήμα $x(n)$ είναι ένα σήμα ενέργειας (δηλ. πεπερασμένης ενέργειας) και άπειρης διάρκειας. Το σήμα αυτοσυσχέτισης που θα προκύψει θα είναι επίσης άπειρης διάρκειας.

Για $n\geq 0$ έχουμε επομένως:

$$\phi_{xx}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,x(m-n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha^m u(m)\,\alpha^{m-n}u(m-n)=$$

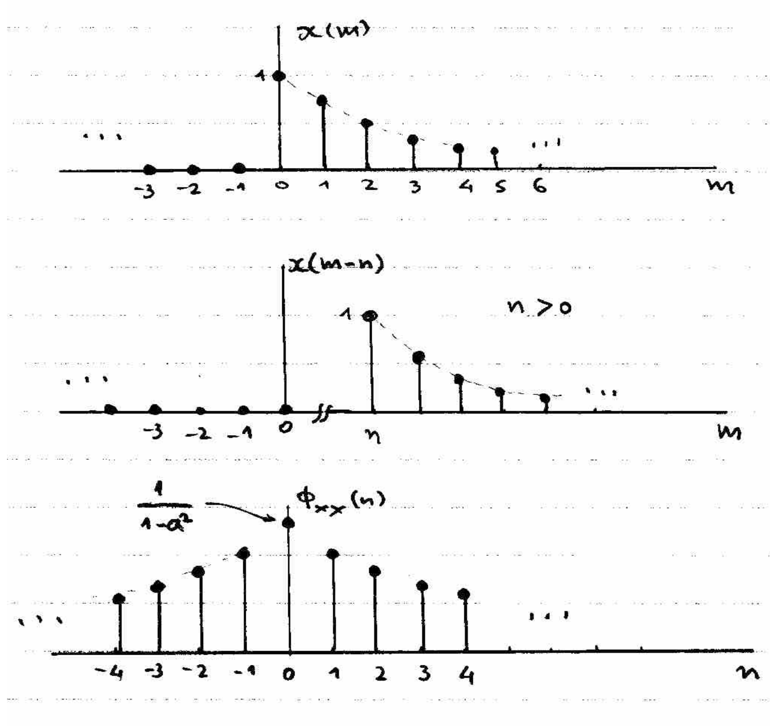
$$=\sum_{m=n}^{\infty}\alpha^m\alpha^{m-n}=\alpha^{-n}\sum_{m=n}^{\infty}\alpha^{2m}=\langle \text{θέτω } m-n=\ell \rightarrow m=\ell+n\rangle=$$

$$=\alpha^{-n}\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha^{2(\ell+n)}=\alpha^{-n}\alpha^{2n}\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha^{2\ell}=\alpha^{n}\sum_{\ell=0}^{\infty}(\alpha^2)^{\ell}=\langle \text{αφού } \alpha<1\rangle=$$

$$=\alpha^n\frac{1}{1-\alpha^2}$$

Για $n=0$ έχουμε τη μέγιστη τιμή της αυτοσυσχέτισης, η οποία συμπίπτει και με την ενέργεια του σήματος $x(n)$, δηλαδή

$$\phi_{xx}(0)=\frac{1}{1-\alpha^2}=E_x$$



Η $\phi_{xx}(n)$ είναι συμμετρική και ισούται με: $\phi_{xx}(n)=\alpha^{|n|}\dfrac{1}{1-\alpha^2}$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τα σήματα της συνέλιξης $y_i(n)$ και της συσχέτισης $\phi_i(n)$ των παρακάτω σημάτων. Σχολιάστε.

α. $x_1(n)=\{\underline{1},2,4\}$ $\qquad h_1(n)=\{\underline{1},1,1,1,1\}$

β. $x_2(n)=\{\underline{0},1,-2,3,-4\}$ $\qquad h_2(n)=\{\frac{1}{2},1,\underline{2},1,\frac{1}{2}\}$

γ. $x_3(n)=\{\underline{1},2,3,4\}$ $\qquad h_3(n)=\{\underline{4},3,2,1\}$

δ. $x_4(n)=\{\underline{1},2,3,4\}$ $\qquad h_4(n)=\{\underline{1},2,3,4\}$

$\uparrow n=0 \qquad\qquad \uparrow n=0$

ΛΥΣΗ Συνέλιξη: $$y_i(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_i(m)\,h_i(n-m)$$

Συσχέτιση: $$\phi_i(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_i(m)\,h_i(m-n)$$

α. Συνέλιξη

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 4 \\
\hline
 & & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
\underline{1} & 3 & 7 & 7 & 7 & 6 & 4
\end{array}$$

$\uparrow n=0$

$\rightsquigarrow y_1(n)=\{\underline{1},3,7,7,7,6,4\}$

$\uparrow n=0$

Εναλλακτικά

	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	4

άθροισμα

$\rightsquigarrow y_1(n)=\{\underline{1},3,7,7,7,6,4\}$

άθροισμα

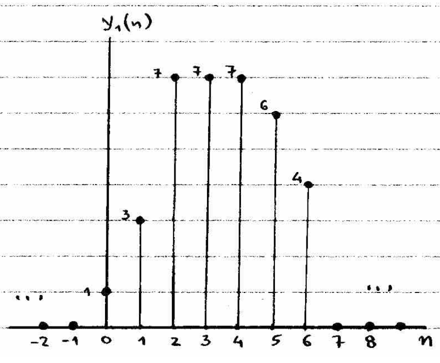
Εναλλακτικά (μέθοδος ολισθαίνουσας ράβδου)

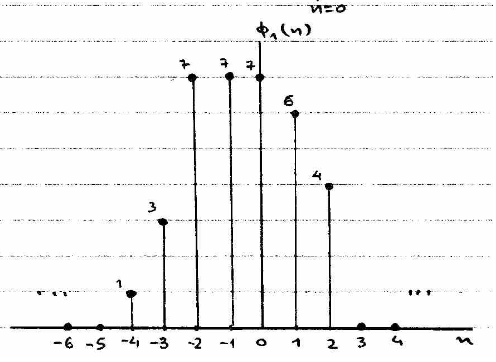
$x(m) \rightsquigarrow$	$\underline{1}$ 2 4	
$h(0-m) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 $\underline{1}$	$\rightsquigarrow y_1(0) = 1\cdot1 = 1$
$h(1-m) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow y_1(1) = 1\cdot1 + 2\cdot1 = 3$
$h(2-m) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow y_1(2) = 1\cdot1 + 2\cdot1 + 4\cdot1 = 7$
$h(3-m) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow y_1(3) = 1\cdot1 + 2\cdot1 + 4\cdot1 = 7$
$h(4-m) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow y_1(4) = 1\cdot1 + 2\cdot1 + 4\cdot1 = 7$
$h(5-m) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow y_1(5) = 2\cdot1 + 4\cdot1 = 6$
$h(6-m) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow y_1(6) = 4\cdot1 = 4$

Συσχέτιση

$x(m) \rightsquigarrow$	$\underline{1}$ 2 4	
$h(m+4) \rightsquigarrow$	$\underline{1}$ 1 1 1 1	$\rightsquigarrow \phi_1(-4) = 1\cdot1 = 1$
$h(m+3) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow \phi_1(-3) = 1\cdot1 + 2\cdot1 = 3$
$h(m+2) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow \phi_1(-2) = 1\cdot1 + 2\cdot1 + 4\cdot1 = 7$
$h(m+1) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow \phi_1(-1) = 1\cdot1 + 2\cdot1 + 4\cdot1 = 7$
$h(m+0) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow \phi_1(0) = 1\cdot1 + 2\cdot1 + 4\cdot1 = 7$
$h(m-1) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow \phi_1(1) = 2\cdot1 + 4\cdot1 = 6$
$h(m-2) \rightsquigarrow$	1 1 1 1 1	$\rightsquigarrow \phi_1(2) = 4\cdot1 = 4$

$$\phi_1(n) = \{1, 3, 7, 7, \underset{\uparrow\, n=0}{7}, 6, 4\}$$





β. $x_2(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{\underline{0}}, 1, -2, 3, -4\}$ $\qquad$ $h_2(n) = \{\frac{1}{2}, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{\underline{2}}, 1, \frac{1}{2}\}$

<u>Συνέλιξη</u>

				0	1	-2	3	-4
				1/2	1	2	1	1/2
				0	1/2	-1	3/2	-2
			0	1	-2	3	-4	
		0	2	-4	6	-8		
	0	1	-2	3	-4			
0	1/2	-1	3/2	-2				
0	1/2	0	3/2	-2	1/2	-6	-5/2	-2

$$\rightarrow y_2(n) = \{0, \tfrac{1}{2}, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0}, \tfrac{3}{2}, -2, \tfrac{1}{2}, -6, -\tfrac{5}{2}, -2\}$$

Εναλλακτικά

	0	1	-2	3	-4
1/2	0	1/2	-1	3/2	-2
1	0	1	-2	3	-4
2	0	2	-4	6	-8
1	0	1	-2	3	-4
1/2	0	1/2	-1	3/2	-2

$$\rightarrow y_2(n) = \{0, \tfrac{1}{2}, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0}, \tfrac{3}{2}, -2, \tfrac{1}{2}, -6, -\tfrac{5}{2}, -2\}$$

Ο υπολογισμός της συσχέτισης $\phi_2(n)$ θα δώσει τις ίδιες τιμές $\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}, -6, -\frac{5}{2}, -2\}$ όπως και η συνέλιξη.

Αυτό είναι αναμενόμενο από τη στιγμή που το σήμα $h_2(n)$ είναι συμμετρικό. Το ίδιο συνέβη και στην περίπτωση (α) προηγουμένως, αφού και το σήμα $h_1(n)$ ήταν συμμετρικό.

Θυμηθείτε ότι για τον υπολογισμό της συνέλιξης χρησιμοποιούμε το σήμα $h_i(-m)$ το οποίο και ολισθαίνουμε υπολογίζοντας τα επιμέρους γινόμενα με το σήμα $x_i(m)$, ενώ για την περίπτωση της συσχέτισης χρησιμοποιούμε το σήμα $h_i(m)$ το οποίο επίσης ολισθαίνουμε, υπολογίζοντας τα επιμέρους γινόμενα με το σήμα $x(m)$. Όταν το σήμα είναι συμμετρικό, τα γινόμενα θα είναι τα ίδια. Αυτό που πιθανόν αλλάζει είναι η τιμή του μηδενικού στοιχείου, $n=0$. Είχαμε δει ότι στη συνέλιξη αυτό υπολογίζεται ως το αλγεβρικό άθροισμα των δεικτών (θέσεων) των μηδενικών στοιχείων $(n=0)$ των $x_i(n)$ και $h_i(n)$. Στη περίπτωση της συνέλιξης ισχύει κάτι ανάλογο, μόνο που αθροίζουμε τις αποστάσεις του μηδενικού στοιχείου της $x_i(m)$ από την αρχή και του μηδενικού στοιχείου της $h_i(m)$ από το τέλος. Σχηματικά:

$x_i(n) = \{\square\ \square\ \underline{\square}\ \square\ \square \ldots\}$ ($\leftarrow l_1 \rightarrow$) $\qquad$ $h_i(n) = \{\square\ \square\ \underline{\square}\ \square \ldots \square\}$ ($\leftarrow l_2 \rightarrow$) $\qquad$ $\phi_i(n) = \{\square\ \square\ \square\ \underline{\square}\ \square\ \square \ldots \square\}$ ($\leftarrow l_1 + l_2 \rightarrow$)

γ. $x_3(n)=\{\underline{1}, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $h_3(n)=\{\underline{4}, 3, 2, 1\}$

Συνέλιξη

$$
\begin{array}{lccccccc}
x \rightarrow & & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
h \rightarrow & & & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & 2 & 4 & 6 & 8 & \\
 & & 3 & 6 & 9 & 12 & & \\
 & 4 & 8 & 12 & 16 & & & \\
\hline
 & 4 & 11 & 20 & 30 & 20 & 11 & 4
\end{array}
$$

$\rightsquigarrow y_3(n)=\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{\underline{4}}, 11, 20, 30, 20, 11, 4\}$

Εναλλακτικά

$h \searrow$ \ x	1	2	3	4
4	4	8	12	16
3	3	6	9	12
2	2	4	6	8
1	1	2	3	4

$\rightsquigarrow y_3(n)=\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{\underline{4}}, 11, 20, 30, 20, 11, 4\}$

Συσχέτιση

$$
\begin{array}{lccccccc}
x \rightarrow & & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
h \rightarrow & & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & & & & 4 & 8 & 12 & 16 \\
 & & & 3 & 6 & 9 & 12 & \\
 & & 2 & 4 & 6 & 8 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 10 & 20 & 25 & 24 & 16
\end{array}
$$

$\rightsquigarrow \phi_3(n)=\{1, 4, 10, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{\underline{20}}, 25, 24, 16\}$

Εναλλακτικά

$h \searrow$ \ x	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

$\rightsquigarrow \phi_3(n)=\{1, 4, 10, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{\underline{20}}, 25, 24, 16\}$

δ. $x_4(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$ $\qquad h_4(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$

Συνέλιξη

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & & & 4 & 8 & 12 & 16 \\
 & & 3 & 6 & 9 & 12 & \\
 & 2 & 4 & 6 & 8 & & \\
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
\hline
1 & 4 & 10 & 20 & 25 & 24 & 16
\end{array}
\rightarrow y_4(n)=\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1},4,10,20,25,24,16\}
$$

Συσχέτιση

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & 2 & 4 & 6 & 8 & \\
 & 3 & 6 & 9 & 12 & & \\
4 & 8 & 12 & 16 & & & \\
\hline
4 & 11 & 20 & 30 & 20 & 11 & 4
\end{array}
\rightarrow \phi_4(n)=\{4,11,20,\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{30},20,11,4\}
$$

Σχόλια: 1. Όπως ήταν αναμενόμενο η $\phi_4(n)$ είναι συμμετρική και παρουσιάζει το μέγιστο στο μεσαίο από τα στοιχεία, αφού πρόκειται ουσιαστικά για την αυτοσυσχέτιση του σήματος $\{1,2,3,4\}$.
Θυμηθείτε ότι $\phi_{xx}(n)=\phi_{xx}(-n)$.

Επίσης $\phi_{xx}(0)=E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = 1^2+2^2+3^2+4^2=30$

2. Θυμηθείτε επίσης ότι $\phi_{xh}(n)=x(n)*h(-n)$

Παρατηρούμε ότι $h_3(-n)=h_4(n+3)$, οπότε

$$\phi_3(n)=x_3(n)*h_3(-n)=x_3(n)*h_4(n+3)=x_4(n)*h_4(n+3)=y_4(n+3)$$

Ομοίως $h_4(-n)=h_3(n+3)$, οπότε

$$\phi_4(n)=x_4(n)*h_4(-n)=x_4(n)*h_3(n+3)=x_3(n)*h_3(n+3)=y_3(n+3)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η αυτοσυσχέτιση καθενός από τα σήματα. Σχολιάστε.

$$x(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},\ 2,\ 1,\ 1\} \qquad y(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},\ 1,\ 2,\ 1\}$$

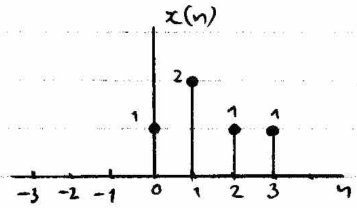
ΛΥΣΗ

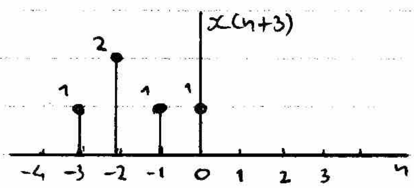
$$\begin{array}{rccccccc}
x(n)\rightarrow & & & & 1 & 2 & 1 & 1\\
 & & & & 1 & 1 & 2 & 1\\ \hline
 & & & & 1 & 2 & 1 & 1\\
 & & & 2 & 4 & 2 & 2 & \\
 & & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 1 & 1 & & & \\ \hline
 & 1 & 3 & 5 & 7 & 5 & 3 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccccccc}
y(n)\rightarrow & & & & 1 & 1 & 2 & 1\\
 & & & & 1 & 2 & 1 & 1\\ \hline
 & & & & 1 & 1 & 2 & 1\\
 & & & 1 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 2 & 2 & 4 & 2 & & \\
 & 1 & 1 & 2 & 1 & & & \\ \hline
 & 1 & 3 & 5 & 7 & 5 & 3 & 1
\end{array}$$

$$\phi_{xx}(n)=\{1,3,5,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{7},5,3,1\} \qquad \phi_{yy}(n)=\{1,3,5,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{7},5,3,1\}$$

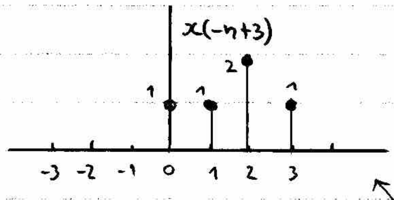
Παρατηρούμε ότι το σήμα αυτοσυσχέτισης είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι $y(n)=x(-n+3)$.

Σημείωση: Το σήμα $x(-n+3)$ υπολογίζεται σχηματικά ως εξής:





ολίσθηση κατά 3 θέσεις αριστερά (advance)



κατοπτρισμός (αναδίπλωση) ως προς άξονα

$x(-n+3) = y(n)$

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΙΣΧΥΟΣ

Εάν τα σήματα $x(n), y(n)$ είναι ισχύος, τότε οι συναρτήσεις ετεροσυσχέτισης και αυτοσυσχέτισης ορίζονται ως:

$$\phi_{xy}(n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} x(m)\, y(m-n)$$

$$\phi_{xx}(n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} x(m)\, x(m-n)$$

Στην περίπτωση που τα σήματα $x(n), y(n)$ είναι <u>περιοδικά</u> με περίοδο N, οι παραπάνω ορισμοί γίνονται:

$$\phi_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y(m-n)$$

$$\phi_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, x(m-n)$$

Οι ακολουθίες $\phi_{xy}(n)$, $\phi_{xx}(n)$ είναι <u>επίσης περιοδικές</u> με περίοδο N.

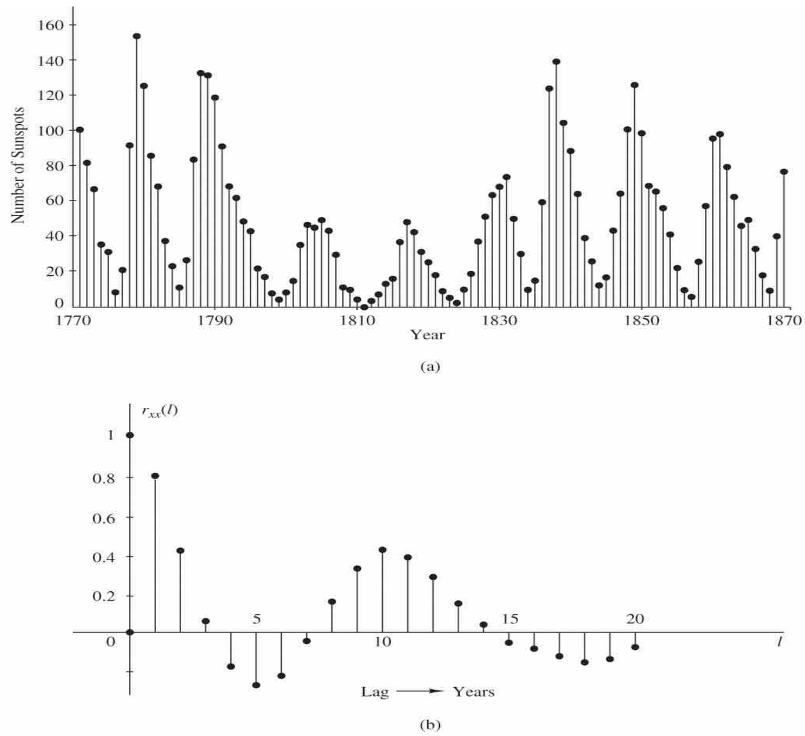


Figure 2.6.3 Identification of periodicity in the Wölfer sunspot numbers: (a) annual Wölfer sunspot numbers; (b) normalized autocorrelation sequence.

Η ιδιότητα αυτή μας βοηθάει στο να αποκαλύπτουμε την ύπαρξη ενός περιοδικού σήματος το οποίο είναι "χαμένο" μέσα σε θόρυβο.

Για παράδειγμα, έστω $y(n) = x(n) + w(n)$, όπου $x(n)$ περιοδικό σήμα με περίοδο N και $w(n)$ ένας τυχαίος προσθετικός θόρυβος. Έστω ότι έχουμε M δείγματα του σήματος $y(n)$, όπου $M \gg N$. Ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης του $y(n)$ δίνει:

$$\phi_{yy}(n) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} y(m)\,y(m-n) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\left[x(m)+w(m)\right]\left[x(m-n)+w(m-n)\right] =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(m)\,x(m-n) + \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(m)\,w(m-n) + \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} w(m)\,x(m-n) +$$

$$+ \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} w(m)\,w(m-n) =$$

$$= \phi_{xx}(n) + \phi_{xw}(n) + \phi_{wx}(n) + \phi_{ww}(n)$$

$\phi_{ww}(n)$: παντού μηδέν, εκτός του σημείου $n=0$ όπου $\phi_{ww}(0)=\sigma_w^2$, αφού τα δείγματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους

$\phi_{xw}(n)$, $\phi_{wx}(n)$: σχετικά μικρές τιμές λόγω της μικρής συσχέτισης των δειγμάτων $x(n)$ και $w(n)$

$\phi_{xx}(n)$: περιοδικό λόγω περιοδικότητας του $x(n)$ με μεγάλες τιμές για $n=0, N, 2N, \ldots$

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

y(n)=x(n)+w(n)

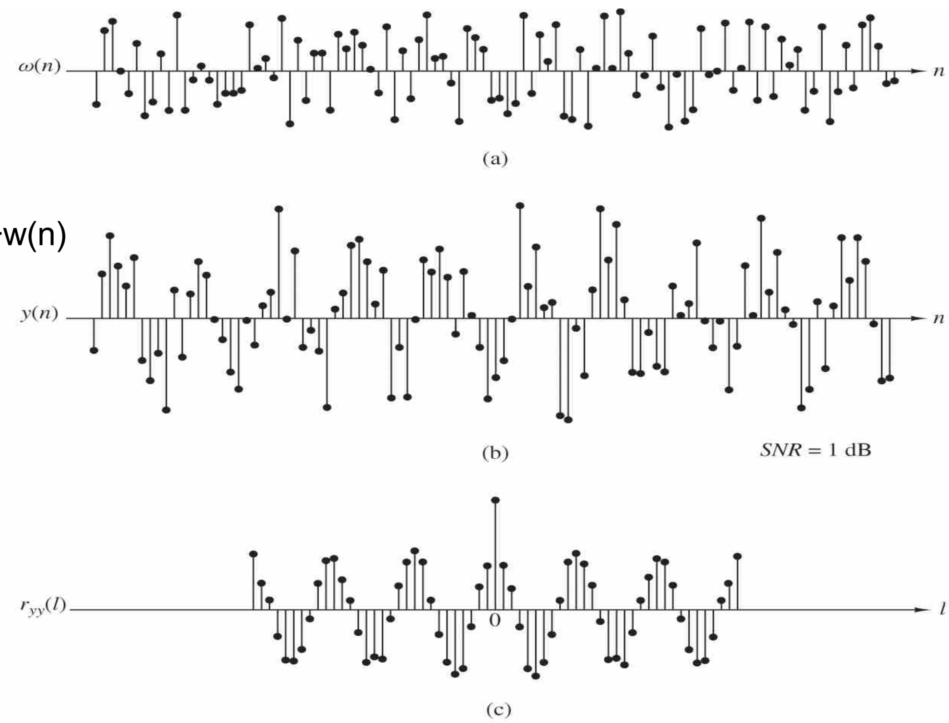
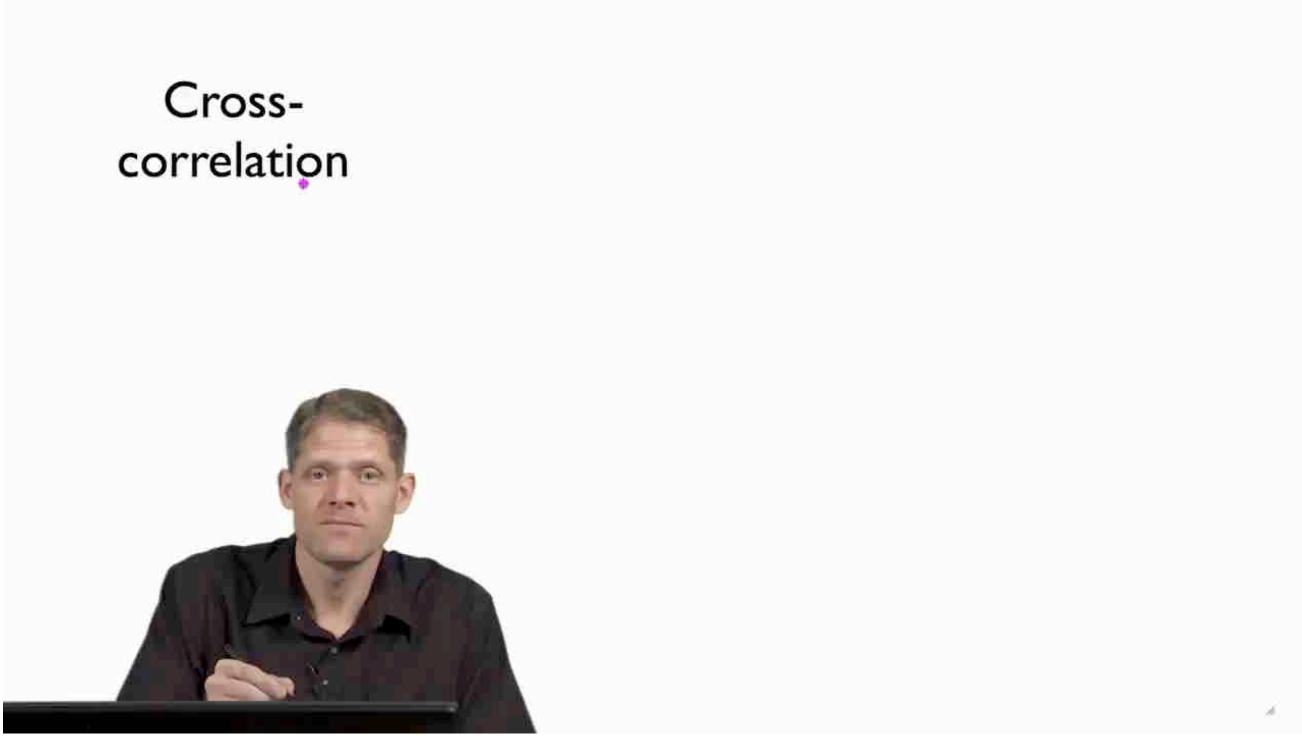


Figure 2.6.4 Use of autocorrelation to detect the presence of a periodic signal corrupted by noise.

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

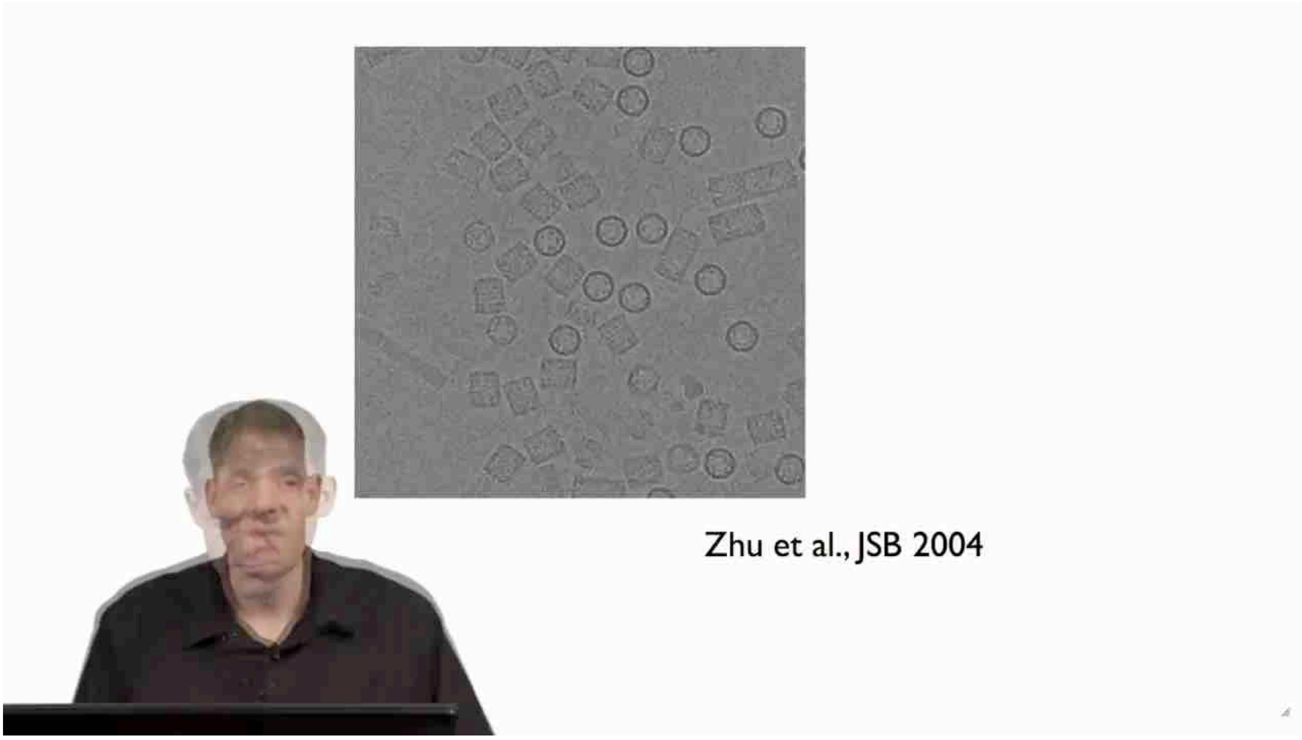
2D Cross-Correlation Example 1



Source - https://www.youtube.com/watch?v=MQm6ZP1F6ms

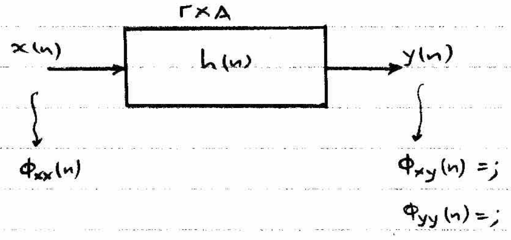
ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

2D Cross-Correlation Example 2



Source - https://www.youtube.com/watch?v=MQm6ZP1F6ms

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ



Ισχύει: $y(n) = h(n) * x(n)$ Επίσης είδαμε ότι: $\phi_{xy}(n) = x(n) * y(-n)$

οπότε και: $\phi_{xx}(n) = x(n) * x(-n)$

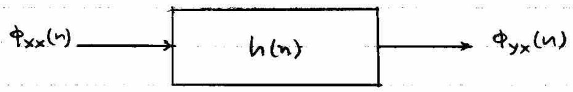
Άρα:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(n) &= x(n) * y(-n) = \\ &= x(n) * [h(-n) * x(-n)] = \\ &= h(-n) * \underbrace{x(n) * x(-n)}_{\phi_{xx}(n)} = h(-n) * \phi_{xx}(n)\end{aligned}$$

Επίσης, αφού $\phi_{yx}(n) = \phi_{xy}(-n)$ και $\phi_{xx}(n) = \phi_{xx}(-n)$ θα έχουμε:

$$\phi_{yx}(n) = \phi_{xy}(-n) = h(n) * \phi_{xx}(-n) = h(n) * \phi_{xx}(n)$$

Με άλλα λόγια, την ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(n)$ μπορεί να τη δει κάποιος ως την έξοδο ενός ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $h(n)$ στο οποίο εφαρμόζεται η ακολουθία εισόδου $\phi_{xx}(n)$.



Η αυτοσυσχέτιση του σήματος εξόδου $y(n)$ είναι:

$$\begin{aligned}\phi_{yy}(n) = y(n) * y(-n) &= [h(n) * x(n)] * [h(-n) * x(-n)] = \\ &= [h(n) * h(-n)] * [x(n) * x(-n)] = \\ &= \phi_{hh}(n) * \phi_{xx}(n)\end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι: (α) η αυτοσυσχέτιση $\phi_{hh}(n)$ της κρουστικής υπάρχει εάν το σύστημα είναι ευσταθές.

(β) η ευστάθεια διασφαλίζει ότι το σύστημα δεν αλλάζει τον τύπο του σήματος εισόδου, δηλαδή το σήμα ενέργειας παραμένει ως σήμα ενέργειας και το σήμα ισχύος παραμένει ως σήμα ισχύος.

Η ενέργεια (ή ισχύς) του σήματος εξόδου προκύπτει από την παραπάνω σχέση για $n=0$

$$\phi_{yy}(n) = \phi_{hh}(n) * \phi_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{hh}(m)\, \phi_{xx}(n-m) \Rightarrow \phi_{yy}(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{hh}(m)\, \phi_{xx}(m)$$