2024 - 2025

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

1η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1.1 Δίνεται η τυχαία (στοχαστική) διαδικασία $X(t) = \alpha + b \sin(\Omega_0 t + \Theta)$, όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή $[-\pi, \pi]$.

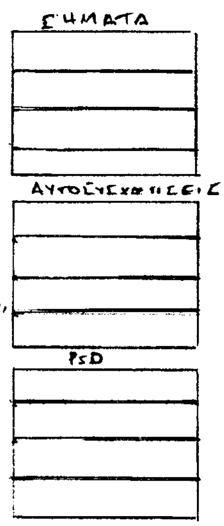
(i) Είναι η $X(t)$ στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS);

(ii) Ποια η αναμενόμενη τιμή της εξόδου ενός ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ όταν στην είσοδο αυτού εφαρμοστεί η $X(t)$;

Σημείωση: Οι τιμές των α, b είναι: $\alpha = 2 + (d_1 d_0) \bmod 4$, $b = 1 + (d_1 d_0) \bmod 5$ και $d_1 d_0$ τα δύο τελευταία ψηφία του ΑΜ σας. Τα ίδια α, b ισχύουν και για την άσκηση 1.2.

ΑΣΚΗΣΗ 1.2 Στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS) στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ έχει φασματική πυκνότητα ισχύος ίση με $\alpha^2/2$. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας $\{Y(t)\}$, όπου $Y(t) = X(t) - X(t-b)$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.3 Στα έγγραφα του eClass θα βρείτε το αρχείο 'Realisations.zip' το οποίο περιέχει 4 csv αρχεία. Κάθε αρχείο αποτελεί μία πραγματοποίηση καθεμιάς από 4 στάσιμες και εργοδικές τυχαίες διαδικασίες. Με χρήση Matlab / Octave / Python διαβάστε τα 4 σήματα.



(i) Σχεδιάστε τα σήματα το ένα μετά το άλλο, όπως δείχνεται στο σχήμα δεξιά. [π.χ. subplot(4,1,x);]. Σχολιάστε αν μοιάζουν (σχετίζονται) οπτικά.

(ii) Υπολογίστε την μέση τιμή κάθε σήματος.

(iii) Υπολογίστε και σχεδιάστε την αυτοσυσχέτιση κάθε σήματος. Σχολιάστε τα αποτελέσματα. Πόσο κοντά είναι σ' αυτά που "μαντέψατε" στο ερώτημα (i);
[Προσοχή: Το πλήθος των σημείων της αυτοσυσχέτισης είναι 2N-1, όπου N το πλήθος των σημείων κάθε σήματος].

(iv) Υπολογίστε και σχεδιάστε την φασματική πυκνότητα ισχύος (PSD) κάθε σήματος. Σχολιάστε.

ΑΣΚΗΣΗ 1.4 Να δώσετε μία άσκηση (της αρεσκείας σας) που να αναφέρεται σε ένα ή περισσότερα από τα αντικείμενα που καλύψαμε: στασιμότητα, εργοδικότητα, φάσμα ισχύος, επεξεργασία τυχ. σημάτων. [Η άσκηση και η λύση που θα προτείνετε να είναι πλήρης και να μην έχει προκύψει από απλή παραλλαγή γνωστής άσκησης]. Γ° (εκφώνηση και λύση)

- Προθεσμία: Τετάρτη 30.10.2024 @ 24:00
- Η υποβολή να γίνει στον αντίστοιχο χώρο "Εργασιών" του eClass.

20.10.2024

ΑΣΚΗΣΗ 1.1. Δίνεται η τυχαία (στοχαστική) διαδικασία $X(t) = \alpha + b\sin(\Omega_0 t + \Theta)$, όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή $[-\pi,\pi]$.

(i) Είναι η $X(t)$ στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS);

(ii) Ποια η αναμενόμενη τιμή της εξόδου ενός ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $e^{-\alpha t}u(t)$, όταν στην είσοδο αυτού εφαρμοστεί η $X(t)$;

ΛΥΣΗ (i) Για να είναι στάσιμη θα πρέπει να έχει σταθερή μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση εξαρτώμενη από την διαφορά των χρόνων $\tau = t_1 - t_2 = t+\tau, t$.

$$m_x(t) = E\big(X(t)\big) = E\big(\alpha + b\sin(\Omega_0 t + \Theta)\big) = E(\alpha) + b\,\underbrace{E\big(\sin(\Omega_0 t + \Theta)\big)}_{\substack{0 \\ \text{(έχει ήδη αποδειχθεί)}}} =$$

$$= \alpha + b\cdot 0 = \alpha = \text{σταθ.}$$

$$\phi_{xx}(t+\tau, t) = E\big(X(t+\tau)X^*(t)\big) = E\Big(\big[\alpha + b\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta)\big]\big[\alpha + b\sin(\Omega_0 t+\Theta)\big]\Big) =$$

$$= E\Big(\alpha^2 + \alpha b\sin(\Omega_0 t+\Theta) + \alpha b\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta) + b^2\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta)\sin(\Omega_0 t+\Theta)\Big) =$$

$$= E(\alpha^2) + \alpha b\,\underbrace{E\big(\sin(\Omega_0 t+\Theta)\big)}_{0} + \alpha b\,\underbrace{E\big(\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta)\big)}_{0} + b^2 E\Big(\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta)\sin(\Omega_0 t+\Theta)\Big) =$$

$$= \alpha^2 + \alpha b 0 + \alpha b 0 + \frac{b^2}{2}E\Big(\cos(\Omega_0\tau) - \cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\Theta)\Big) =$$

$$= \alpha^2 + 0 + 0 + \frac{b^2}{2}\underbrace{E\big(\cos(\Omega_0\tau)\big)}_{\substack{\cos(\Omega_0\tau) \\ \text{(ανεξάρτητο της τ.μ. }\Theta)}} - \frac{b^2}{2}\underbrace{E\Big(\cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\Theta)\Big)}_{0} =$$

$$= \underbrace{\alpha^2}_{\text{σταθ.}} + \underbrace{\frac{b^2}{2}\cos(\Omega_0\tau)}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{της διαφ. χρόνων } \tau}}$$

Άρα $\phi_{xx}(t+\tau) = \phi_{xx}(\tau)$ δηλαδή συνάρτηση μόνον της διαφοράς των χρόνων τ.

Συνεπώς η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια.

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$

(ii) $m_Y(t) = E(Y(t)) = m_X(t)\ H(0)$ όπου $H(0)$ η απόκριση συχνότητας για $\Omega=0$

Αλλά

$$m_X(t) = E(X(t)) = E\left(\alpha + \beta\sin(\Omega t+\theta)\right) = E(\alpha) + \beta E\left(\sin(\Omega t+\theta)\right) =$$

$$= \alpha + \beta \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega t+\theta)\ p(\theta)\ d\theta = \left\langle p(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{για } -\pi \le \theta < \pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \right\rangle$$

$$= \alpha + \beta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega t+\theta)\ d\theta =$$

$$= \alpha + \beta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega t+\theta)\ d(\Omega t+\theta) =$$

$$= \alpha + \beta \frac{1}{2\pi} \Big[-\cos(\Omega t+\theta) \Big]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \alpha - \beta \frac{1}{2\pi} \Big[\cos(\Omega t+\pi) - \cos(\Omega t-\pi) \Big] =$$

$$= \alpha - \beta \frac{1}{2\pi} \Big[\cos(\pi+\Omega t) - \cos(\pi-\Omega t) \Big] =$$

$$= \alpha - \beta \frac{1}{2\pi} \Big[\cancel{\cos(\Omega t)} - \cancel{\cos(\Omega t)} \Big] =$$

$$= \alpha$$

Επίσης $h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{F} H(\Omega) = \dfrac{1}{\alpha + j\Omega}$ οπότε $H(0) = \dfrac{1}{\alpha + j0} = \dfrac{1}{\alpha}$

Τελικά $m_Y(t) = m_X(t)\ H(0) = \alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} = 1$

ΘΕΜΑ 1 [25 *μονάδες*]

Η **τυχαία διαδικασία** ***X(t)*** είναι **στάσιμη** με την ευρεία έννοια (WSS – Wide-Sense Stationary) και η φασματική πυκνότητα ισχύος αυτής ισούται με ***α²/2***.

Να υπολογίσετε την φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας ***Y(t)=X(t)-X(t-τ)***.

ΛΥΣΗ

Η τυχαία διαδικασία $Y(t)$ μπορεί να περιγραφεί ως η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος κρουστικής απόκρισης $h(t)=\delta(t)-\delta(t-\tau)$, όταν στην είσοδο εφαρμόζεται η τυχαία διαδικασία $X(t)$.

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος ισούται με τον μετασχ. Fourier της $h(t)$

$$
\begin{aligned}
H(\Omega) &= F\{h(t)\} = \\
&= F\{\delta(t)-\delta(t-\tau)\} = F\{\delta(t)\} - F\{\delta(t-\tau)\} = \\
&= 1 - e^{-j\Omega\tau}
\end{aligned}
$$

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας υπολογίζεται ως

$$
\begin{aligned}
|H(\Omega)| &= \left|1-e^{-j\Omega\tau}\right| = \\
&= \left|1-(\cos\Omega\tau - j\sin\Omega\tau)\right| = \\
&= \left|(1-\cos\Omega\tau) - j\sin\Omega\tau\right| = \\
&= \sqrt{(1-\cos\Omega\tau)^2+\sin^2\Omega\tau} = \\
&= \sqrt{1-2\cos\Omega\tau+\underbrace{\cos^2\Omega\tau+\sin^2\Omega\tau}_{1}} = \\
&= \sqrt{2-2\cos\Omega\tau}
\end{aligned}
$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος της $Y(t)$ είναι:

$$
\begin{aligned}
S_{YY}(\Omega) &= |H(\Omega)|^2 S_{XX}(\Omega) = \\
&= (2-2\cos\Omega\tau)\,\alpha^2/2 = \\
&= (1-\cos\Omega\tau)\,\alpha^2
\end{aligned}
$$

Εφαρμογή: Για $\tau=\alpha$, $F_1=1/2\alpha$ $\rightsquigarrow$ $S_{YY}(\Omega)\Big|_{\Omega=2\pi F_1} = \left[1-\cos\left(2\pi\frac{1}{2\alpha}\alpha\right)\right]\alpha^2 = \left[1-\cos(\pi)\right]\alpha^2 = \left[1-(-1)\right]\alpha^2 = 2\alpha^2$

Για $\tau=\alpha$, $F_2=1/\alpha$ $\rightsquigarrow$ $S_{YY}(\Omega)\Big|_{\Omega=2\pi F_2} = \left[1-\cos\left(2\pi\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\right]\alpha^2 = \left[1-\cos(2\pi)\right]\alpha^2 = (1-1)\alpha^2 = 0$

Εναλλακτικά, η άσκηση θα μπορούσε να λυθεί ως εξής:

Γνωρίζουμε την $S_{xx}(\Omega) = \alpha^2/2$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος της $Y(t)$ υπολογίζεται ως ο MF της αυτοσυσχέτισης $\phi_{YY}(t)$ της τυχαίας διαδικασίας $Y(t)$

$$\phi_{YY}(t_1,t_2) = E\left(Y(t_1)\,Y^*(t_2)\right) = E\left(\left(X(t_1) - X(t_1-\tau)\right)\left(X(t_2) - X(t_2-\tau)\right)^*\right) =$$

$$= E\left(X(t_1)\,X^*(t_2)\right) - E\left(X(t_1)\,X^*(t_2-\tau)\right) - E\left(X(t_1-\tau)\,X^*(t_2)\right) +$$

$$+ E\left(X(t_1-\tau)\,X^*(t_2-\tau)\right)$$

Αλλά

$$E\left(X(t_1)\,X^*(t_2)\right) = \phi_{XX}(\upsilon)$$, όπου $\upsilon = t_1 - t_2$ αφού $X(t)$ είναι WSS

$$E\left(X(t_1-\tau)\,X^*(t_2-\tau)\right) = \phi_{XX}(\upsilon)$$, όπου $\upsilon = t_1 - t_2 = (t_1-\tau)-(t_2-\tau)$

$$E\left(X(t_1)\,X^*(t_2-\tau)\right) = \phi_{XX}(\upsilon+\tau)$$

$$E\left(X(t_1-\tau)\,X^*(t_2)\right) = \phi_{XX}(\upsilon-\tau)$$

Με βάση αυτά η $\phi_{YY}(t_1,t_2)$ γίνεται:

$$\phi_{YY}(t_1,t_2) = \phi_{XX}(\upsilon) - \phi_{XX}(\upsilon+\tau) - \phi_{XX}(\upsilon-\tau) + \phi_{XX}(\upsilon) =$$

$$= 2\,\phi_{XX}(\upsilon) - \phi_{XX}(\upsilon+\tau) - \phi_{XX}(\upsilon-\tau)$$

$$\xrightarrow{F}$$

$$S_{YY}(\Omega) = 2\,S_{XX}(\Omega) - e^{j\Omega\tau}\,S_{XX}(\Omega) - e^{-j\Omega\tau}\,S_{XX}(\Omega) =$$

$$= 2\,S_{XX}(\Omega) - \left(e^{j\Omega\tau} + e^{-j\Omega\tau}\right) S_{XX}(\Omega) =$$

$$= 2\,S_{XX}(\Omega) - 2\cos(\Omega\tau)\,S_{XX}(\Omega) =$$

$$= 2\left[1 - \cos(\Omega\tau)\right] S_{XX}(\Omega)$$

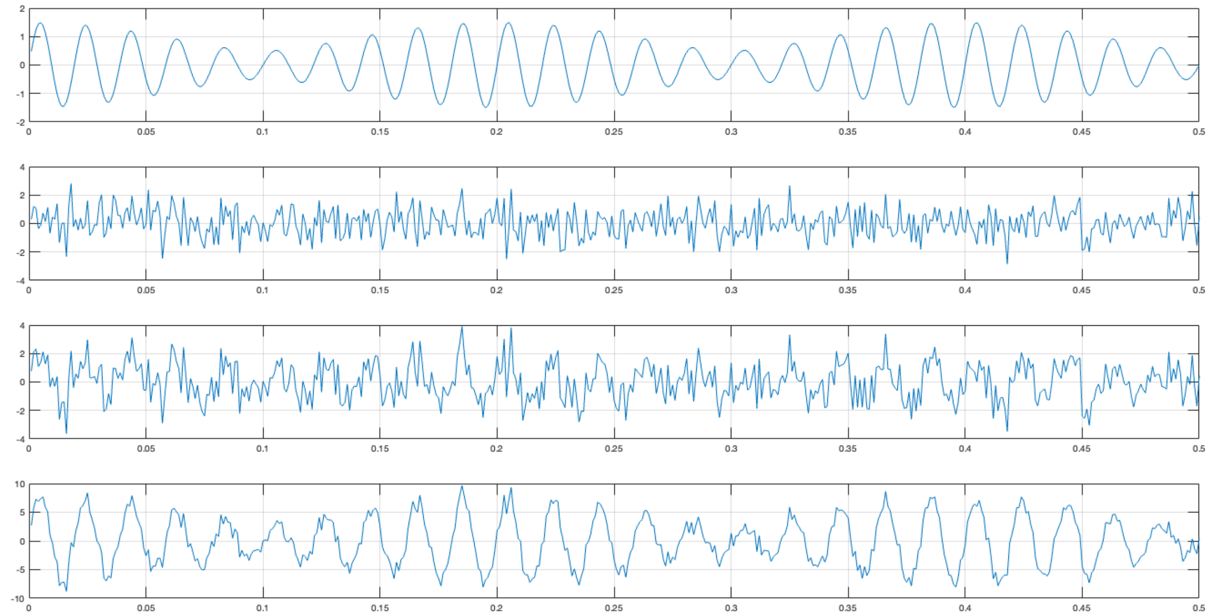
Για $S_{XX}(\Omega) = \alpha^2/2$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$S_{YY}(\Omega) = 2\left[1 - \cos(\Omega\tau)\right]\frac{\alpha^2}{2} =$$

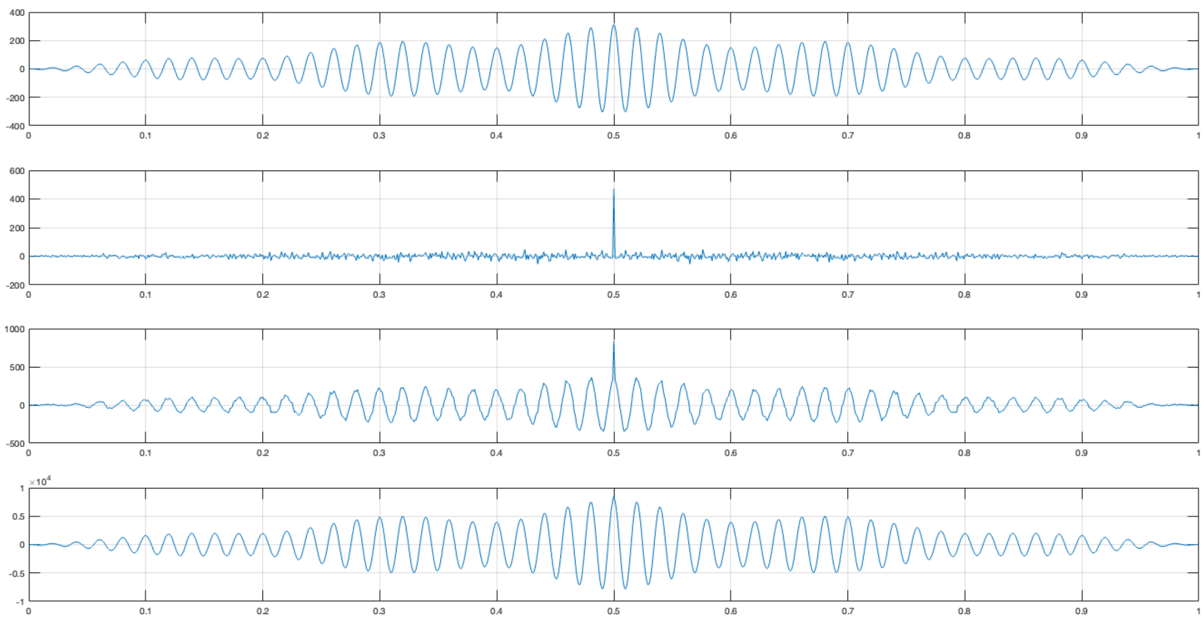
$$= \left[1 - \cos(\Omega\tau)\right]\alpha^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.3

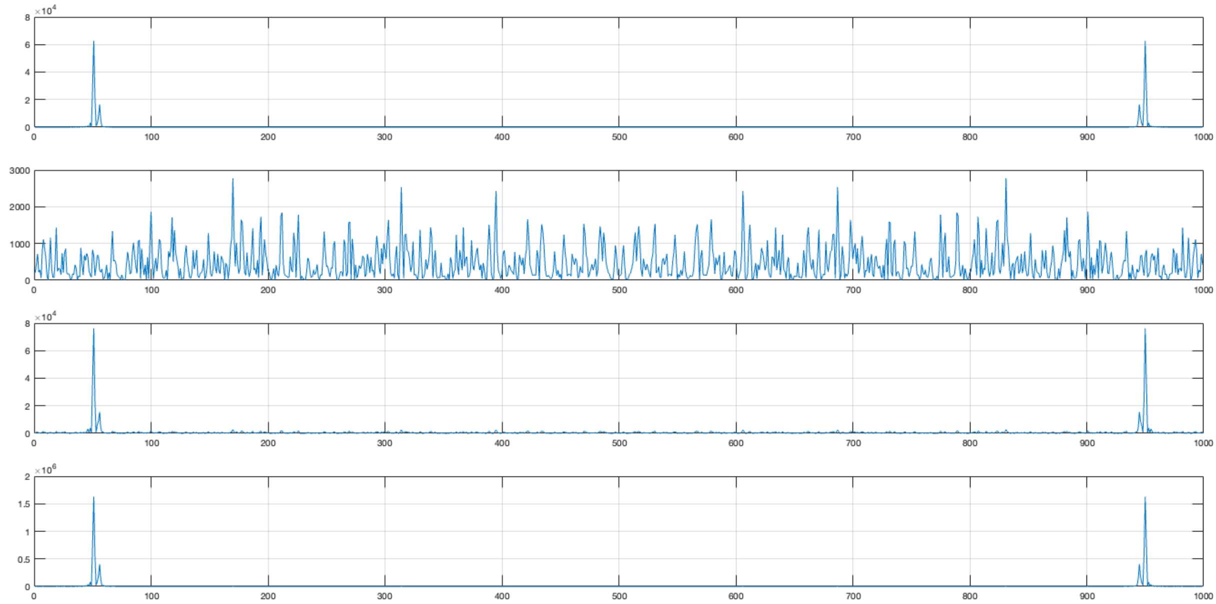
The realisations



The autocorrelations



The PSD



×10^4
8
6
4
2
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
3000
2000
1000
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
×10^4
8
6
4
2
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
×10^6
2
1.5
1
0.5
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

The Matlab code for the generation of the signals

```
% Sinusoidal signal as the sum of a 50Hz and a 75Hz with a duration of 0.5
second and a sampling rate of 1 kHz
% Parameters
frequency1 = 50; % Frequency in Hz
frequency2 = 55; % Frequency in Hz
duration = 0.5;  % Duration in seconds
sampling_rate = 1000; % Sampling rate in Hz

% Time vector
t = 1/sampling_rate:1/sampling_rate:duration;

% Generate the sinusoidal signals
sinusoidal_signal1 = sin(2*pi*frequency1*t);
sinusoidal_signal2 = 0.5 * sin(2*pi*frequency2*t);

x = sinusoidal_signal1 + sinusoidal_signal2;

% Stationary Gaussian white noise with zero mean and a variance of 1

% Parameters
variance = 1;

% Generate the Gaussian white noise
white_noise = sqrt(variance) * randn(1, duration * sampling_rate);
w = white_noise;

% Generate a signal as the sum of x plus noise
y1 = x + w;

% Generate a signal as the sum of an amplified x plus noise
y5 = 5 * x + w;

% Plot the signals (one realisation of each process)

figure;
subplot(4,1,1); plot(t, x); grid on;
subplot(4,1,2); plot(t, w); grid on;
subplot(4,1,3); plot(t, y1); grid on;
subplot(4,1,4); plot(t, y5); grid on;

% Calculate and display the mean value of each signal
mx = mean(x)
mw = mean(w)
my1 = mean(y1)
my5 = mean(y5)

% Calculate the autocorrelation functions of each signal (process)
rx = xcorr(x);
rw = xcorr(w);
ry1 = xcorr(y1);
ry5 = xcorr(y5);

% Time is doubled due to autocorrelation
tt = 1/sampling_rate:1/sampling_rate:2*duration - 1/sampling_rate;
```

```
% Plot the autocorrelation functions of each signal (process)
figure;
subplot(4,1,1); plot(tt, rx); grid on;
subplot(4,1,2); plot(tt, rw); grid on;
subplot(4,1,3); plot(tt, ry1); grid on;
subplot(4,1,4); plot(tt, ry5); grid on;


%%% Export each signal to a csv file

% Specify file name
filename = 'realisation1.csv';

% Export the data to a CSV file
csvwrite( filename , x' )

% Specify file name
filename = 'realisation2.csv';

% Export the data to a CSV file
csvwrite( filename , w' )

% Specify file name
filename = 'realisation3.csv';

% Export the data to a CSV file
csvwrite( filename , y1' )

% Specify file name
filename = 'realisation4.csv';

% Export the data to a CSV file
csvwrite( filename , y5' )
```

The Matlab code for the calculation of the autocorrelation and PSD

```
% Read data (realisations) from the csv files

x  = csvread( 'realisation1.csv' );
w  = csvread( 'realisation2.csv' );
y1 = csvread( 'realisation3.csv' );
y5 = csvread( 'realisation4.csv' );

t=1:1:length(x);

% Plot the signals (realisations)
figure;
subplot(4,1,1); plot(t, x); grid on;
subplot(4,1,2); plot(t, w); grid on;
subplot(4,1,3); plot(t, y1); grid on;
subplot(4,1,4); plot(t, y5); grid on;

% Calculate and display the mean value of each signal
mx = mean(x)
mw = mean(w)
my1 = mean(y1)
my5 = mean(y5)

% Calculate the autocorrelation functions of each signal (process)
rx = xcorr(x);
rw = xcorr(w);
ry1 = xcorr(y1);
ry5 = xcorr(y5);

% Time is doubled due to autocorrelation
tt=1:1:2*length(x)-1;;

% Plot the autocorrelation functions of each signal (realisation)
figure;
subplot(4,1,1); plot(tt, rx); grid on;
subplot(4,1,2); plot(tt, rw); grid on;
subplot(4,1,3); plot(tt, ry1); grid on;
subplot(4,1,4); plot(tt, ry5); grid on;

%%% Calculation of the PSD of each signal by computing the FFT of the
corresponding autocorrelations

Sx = fft(rx);
Sw = fft(rw);
Sy1 = fft(ry1);
Sy5 = fft(ry5);

% Plot the PSD
figure;
subplot(4,1,1); plot(tt, abs(Sx)); grid on;
subplot(4,1,2); plot(tt, abs(Sw)); grid on;
subplot(4,1,3); plot(tt, abs(Sy1)); grid on;
subplot(4,1,4); plot(tt, abs(Sy5)); grid on;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Results
% mx  = 0.0057
% mw  = 0.0284
% my1 = 0.0342
% my5 = 0.0571
```