

Ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τα ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης. Στα φίλτρα αυτά, για τον υπολογισμό της εξόδου, χρησιμοποιούμε τιμές της εισόδου, καθώς και τιμές της εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Επομένως, αναφερόμαστε σε επαναληπτικά φίλτρα. Τα φίλτρα αυτά παρουσιάζουν μικρότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα έναντι των αντίστοιχων FIR φίλτρων, αλλά έχουν μη γραμμική απόκριση φάσης. Στόχος μας στο κεφάλαιο αυτό είναι η μελέτη των μεθόδων σχεδίασης των ψηφιακών IIR φίλτρων και των τρόπων υλοποίησής τους.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

- Σχεδιάζετε IIR φίλτρα με βάση τη γραφική μέθοδο, τη μέθοδο αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού
- Σχεδιάζετε οποιοδήποτε τύπο φίλτρου (βαθυπερατό, υψηπερατό, διέλευσης ζώνης και απόρριψης ζώνης)
- Μειώνετε τα σφάλματα λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης, πραγματοποιώντας τα φίλτρα ως δομές χαμηλής τάξης σε σειρά ή παράλληλα

Έννοιες κλειδιά

- Αναλογικά φίλτρα
- Μετασχηματισμοί συχνότητας
- Γραφική μέθοδος σχεδίασης
- Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής
- Διγραμμικός μετασχηματισμός
- Στρέβλωση συχνότητας
- Φαινόμενα πεπερασμένου μήκους λέξης
- Οριακοί κύκλοι

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Γνωρίσαμε τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR, Infinite Impulse Response) στην Ενότητα 3.4 του Κεφαλαίου 3. Είδαμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός τέτοιου φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (5.1)$$

όπου a_i, b_i οι συντελεστές του φίλτρου και τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές b_i είναι διάφορος του μηδενός. Ο αριθμός N προσδιορίζει την τάξη του φίλτρου, το οποίο για να είναι αιτιατό προϋποθέτει ότι $N \geq M$. Για να είναι ένα τέτοιο φίλτρο ευσταθές θα πρέπει όλοι οι πόλοι του να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο z . Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών του φίλτρου είναι:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i) \quad (5.2)$$

όπου $x(n)$ και $y(n)$ οι ακολουθίες εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα.

Είδαμε ότι για την υλοποίηση ενός φίλτρου χρειαζόμαστε πολλαπλασιαστές, αθροιστές και στοιχεία καθυστέρησης (Σχήμα 3.4), και αναφερθήκαμε στις διαφορετικές δομές πραγματοποίησής του (Σχήμα 3.5), καθώς και στις δομές πραγματοποίησης φίλτρων υψηλής τάξης ως συνδυασμού δομών πρώτης και δεύτερης τάξης σε σειρά ή παράλληλα (Σχήμα 3.6).

Από τη σχέση (5.2) γίνεται φανερό ότι τα IIR φίλτρα είναι επαναληπτικά ή αναδρομικά (recursive), με την έννοια ότι δείγματα της εξόδου χρησιμοποιούνται από το σύστημα για τον υπολογισμό των νέων τιμών της εξόδου σε επόμενες χρονικές στιγμές. Το γεγονός αυτό παρουσιάζει μεγάλο πλεονέκτημα από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας, σε σχέση με τα FIR φίλτρα. Με άλλα λόγια, για να επιτύχουμε μια επιθυμητή απόκριση χρειαζόμαστε σημαντικά λιγότερους συντελεστές για ένα IIR φίλτρο σε σχέση με το αντίστοιχο FIR φίλτρο. Από την άλλη πλευρά όμως, υπάρχουν δύο σοβαρά μειονεκτήματα: (α) τα IIR φίλτρα είναι ασταθή, αν οι συντελεστές δεν έχουν επιλεγεί σωστά, δηλαδή αν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου (βλ. ενότητα 3.4), και (β) τα IIR φίλτρα δεν έχουν γραμμική απόκριση φάσης στη ζώνη διέλευσης, όπως έχουν τα μη επαναληπτικά FIR φίλτρα με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.

Το κύριο αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η σχεδίαση IIR φίλτρων, ή με άλλα λόγια, ο υπολογισμός των συντελεστών a_i , b_i , όταν μας δίνονται οι προδιαγραφές του φίλτρου. Λέγοντας «προδιαγραφές του φίλτρου», εννοούμε κυρίως την επιθυμητή απόκριση στη συχνότητα (Σχήματα 3.8 και 3.9). Το θέμα της σχεδίασης τέτοιων φίλτρων το αντιμετωπίσαμε ήδη στην Ενότητα 3.4 με την τοποθέτηση των πόλων και των μηδενικών στο επίπεδο- z . Αυτή είναι η πρώτη μέθοδος σχεδίασης, η οποία όμως δεν είναι συστηματική, ειδικά για φίλτρα υψηλής τάξης. Έτσι, εκτός από αυτή, στο παρόν κεφάλαιο θα γνωρίσουμε και δύο άλλες μεθόδους: τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού. Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στη μετατροπή ενός αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό φίλτρο. Μια τέτοια προσέγγιση χρησιμοποιείται ευρέως για πολλούς λόγους καθώς: (α) οι τεχνικές σχεδίασης αναλογικών φίλτρων είναι πολύ ανεπτυγμένες, (β) καταλήγουν συνήθως σε λύσεις κλειστής μορφής, (γ) διατίθενται έτοιμοι πίνακες για τη σχεδίαση αναλογικών φίλτρων, και (δ) σε πολλές εφαρμογές απαιτούνται ψηφιακά φίλτρα τα οποία να προσομοιώνουν γνωστά αναλογικά φίλτρα. Έτσι, αρχίζουμε το σχεδιασμό ενός ψηφιακού φίλτρου από το «αντίστοιχο» αναλογικό και στη συνέχεια κάνουμε την κατάλληλη μετατροπή του σε ψηφιακό. Για την καλύτερη κατανόηση των σχετικών εννοιών, θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στα αναλογικά φίλτρα, στην αμέσως επόμενη ενότητα. Στη συνέχεια, θα γνωρίσουμε τις διάφορες μεθόδους σχεδίασης των IIR φίλτρων (Ενότητα 5.2) και θα συζητήσουμε για θέματα σχετικά με την υλοποίησή τους (Ενότητα 5.3).

5.1 Αναλογικά φίλτρα

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, τα IIR ψηφιακά φίλτρα μπορούν εύκολα να σχεδιαστούν αρχίζοντας από ένα αναλογικό φίλτρο και κατόπιν χρησιμοποιώντας κατάλληλη απεικόνιση του επιπέδου- s στο επίπεδο- z . Έτσι, η σχεδίαση ενός ψηφιακού φίλτρου ανάγεται ουσιαστικά στη σχεδίαση του κατάλληλου αναλογικού φίλτρου και στην μετέπειτα μετάβαση από το $H(s)$ στο $H(z)$, έτσι ώστε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του αναλογικού φίλτρου να διατηρούνται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Η σχεδίαση αναλογικών φίλτρων είναι ένας τομέας για τον οποίο υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία. Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε σε συντομία τα χαρακτηριστικά των πλέον γνωστών βαθυπερατών (lowpass) αναλογικών φίλτρων. Ακολουθώντας, θα αναφέρουμε τους μετασχηματισμούς συχνότητας με τους οποίους ένα αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο μετατρέπεται σε υψηπερατό (highpass), ζωνοδιαβατό (bandpass) ή φίλτρο απόρριψης ζώνης (bandstop).

Πριν όμως προχωρήσουμε, ας δούμε τη γενική μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου, ώστε να εξοικειωθούμε με τις έννοιες και τους συμβολισμούς. Η απόκριση συχνότητας ενός αναλογικού φίλτρου (αναλογικού συστήματος) προκύπτει από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ αυτού για τιμές του s πάνω στον άξονα των φανταστικών $j\Omega$, δηλαδή:

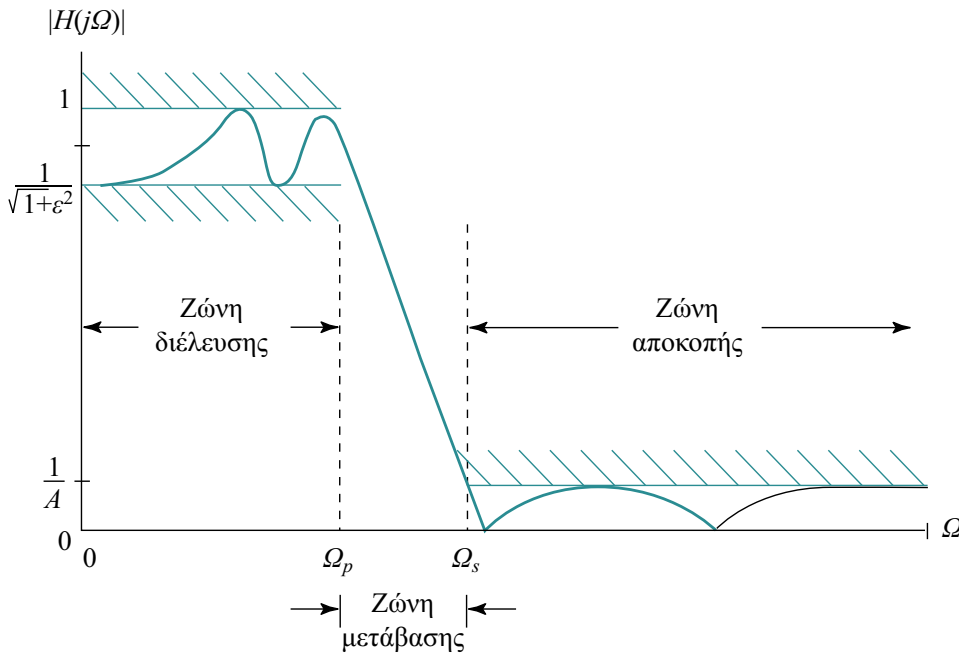
$$H(j\Omega) = H(s) \Big|_{s=j\Omega} \quad (5.3)$$

Το μέτρο της κανονικοποιημένης απόκρισης συχνότητας (normalised magnitude response) ενός μη ιδανικού αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Η μορφή της απόκρισης είναι παρόμοια με εκείνη του Σχήματος 3.9 για την περίπτωση των ψηφιακών φίλτρων.

Η απόκριση αυτή ονομάζεται «κανονικοποιημένη», επειδή η μέγιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη διέλευσης είναι ίση με τη μονάδα (ή ίση με 0 dB). Η κυμάτωση (ripple)

στη ζώνη διέλευσης συμβολίζεται με $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ και αντιπροσωπεύει την ελάχιστη τιμή

του μέτρου στη ζώνη διέλευσης. Η μέγιστη τιμή της κυμάτωσης στη ζώνη αποκοπής συμβολίζεται με $1/A$. Η τιμή αυτή σε dB ισούται με $-20 \log(1/A)$. Οι συχνότητες Ω_p και Ω_s αποτελούν τις συχνότητες στοόριο της ζώνης διέλευσης (passband edge frequency) και στο όριο της ζώνης αποκοπής (stopband edge frequency), αντίστοιχα. Ο λόγος των δύο αυτών συχνοτήτων ονομάζεται *λόγος μετάβασης* (transition ratio) ή *παράμετρος επιλεκτικότητας* (selectivity parameter) και συμβολίζεται συνή-

**Σχήμα 5.1**

Κανονικοποιημένη απόκριση συχνότητας βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου.

θως ως k , δηλαδή $k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$. Για ένα βαθυπερατό φίλτρο ισχύει $k < 1$. Τέλος, ο λόγος

$\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$ ονομάζεται *παράμετρος διακριτότητας* (discrimination parameter) και

συμβολίζεται ως k_1 , δηλαδή $k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$. Συνήθως ισχύει $k_1 \ll 1$.

5.1.1 Γνωστά βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα

Σε όλες τις περιπτώσεις των φίλτρων που θα αναφέρουμε αμέσως τώρα, ο στόχος μας θα είναι ο εξής: να προσεγγίσουμε κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο την απόκριση ενός ιδανικού φίλτρου το οποίο έχει κέρδος ίσο με 1 σε όλη τη ζώνη διέλευσης, κέρδος ίσο με 0 σε όλη τη ζώνη αποκοπής, και η ζώνη μετάβασης είναι μηδενικού εύρους, δηλαδή δεν υπάρχει ζώνη μετάβασης. Τα πιο γνωστά βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα είναι τα ακόλουθα:

Φίλτρα Butterworth. Τα βαθυπερατά φίλτρα Butterworth έχουν μόνο πόλους και το μέτρο της απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}\right)^{1/2}} \quad (5.4)$$

όπου N η τάξη του φίλτρου, Ω_c η συχνότητα αποκοπής (cut-off frequency), Ω_p η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης και $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στο όριο της ζώνης διέλευσης. Παρατηρούμε ότι:

α. Για $\Omega = \Omega_c$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισούται με $\frac{1}{\sqrt{2}}$, δηλαδή

$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ανεξάρτητα από την τιμή του N . Αυτό σημαίνει ότι η ισχύς του σήματος υποδιπλασιάζεται για τη συγκεκριμένη συχνότητα. Η τιμή αυτή εκφρασμένη σε decibels (dB) ισούται με -3 , δηλαδή:

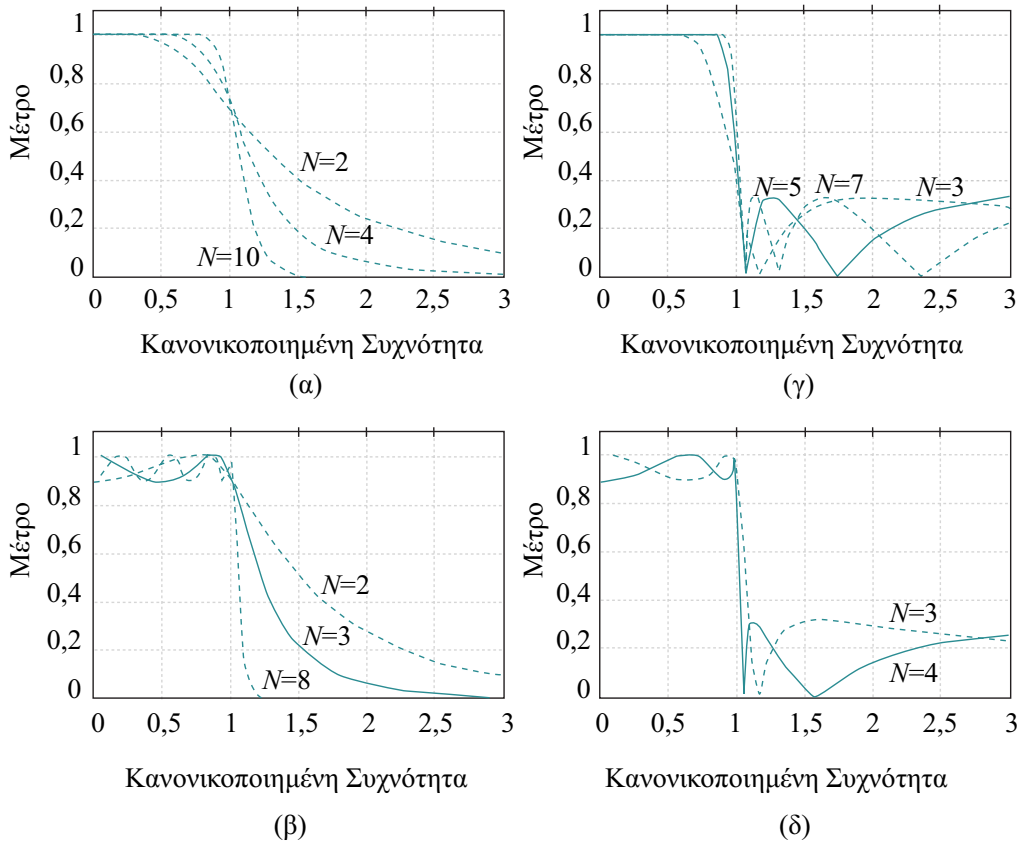
$$|H(j\Omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\Omega)| = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3.0103 \cong -3 \text{ dB}.$$

β. Για $\Omega = 0$ το μέτρο της απόκρισης ισούται με 1, δηλαδή με 0 dB, ανεξάρτητα από την τιμή του N .

γ. Επειδή η παράγωγος του μέτρου της απόκρισης είναι πάντοτε αρνητική για θετικές τιμές του Ω , συνεπάγεται ότι η απόκριση συχνότητας μειώνεται μονοτονικά καθώς το Ω αυξάνεται. Με άλλα λόγια $|H(j\Omega_2)| < |H(j\Omega_1)|$ για $0 \leq \Omega_1 < \Omega_2$.

Για συχνότητα αποκοπής Ω_c ίση με 1 rad/sec ($\Omega_c = 1$) παίρνουμε από τη σχέση (5.4) το ονομαζόμενο «πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο» (prototype lowpass filter). Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του κανονικοποιημένου Butterworth βαθυπερατού φίλτρου με $\Omega_c = 1$ (πρωτότυπου) για διαφορετικές τιμές του N , φαίνεται στο Σχήμα 5.2α. Παρατηρούμε ότι αύξηση της τάξης N του φίλτρου οδηγεί σε βελτίωση των ζωνών διέλευσης και αποκοπής με ταυτόχρονη μείωση της ζώνης μετάβασης.

Οι δύο παράμετροι οι οποίες χαρακτηρίζουν πλήρως ένα φίλτρο Butterworth είναι η συχνότητα αποκοπής Ω_c στα -3 dB και η τάξη του φίλτρου N (βλ. σχέση 5.4). Αυτές οι παράμετροι μπορούν να προσδιοριστούν από τις προδιαγραφές του φίλτρου, όπως αυτές φαίνονται στο Σχήμα 5.1, δηλαδή το όριο της ζώνης διέλευσης Ω_p , την ελάχιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη διέλευσης $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$, το όριο της ζώνης αποκοπής Ω_s και τη μέγιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη αποκοπής $1/A$. Έτσι, από την εξίσωση (5.4) έχουμε:

**Σχήμα 5.2**

Απόκριση συχνότητας βαθυπερατών αναλογικών φίλτρων τύπου (α) Butterworth, (β) Chebyshev τύπου I, (γ) Chebyshev τύπου II και (δ) ελλειπτικού.

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (5.5\alpha)$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{A^2} \quad (5.5\beta)$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό των εξισώσεων ως προς την τάξη N του φίλτρου καταλήγουμε στη σχέση:

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log_{10}[(A^2 - 1) / \varepsilon^2]}{\log_{10}(\Omega_s / \Omega_p)} = \frac{\log_{10}(1 / k_1)}{\log_{10}(1 / k)} \quad (5.6)$$

Εξυπακούεται ότι η τιμή του N πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός. Στην περίπτωση όπου η τιμή που υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση δεν είναι ακέραιος, τότε αυτή στρογγυλεύεται στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο.

Τέλος, όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου, τα φίλτρα Butterworth έχουν μόνο πόλους. Αυτό φαίνεται από τη σχέση (5.4). Οι θέσεις των πόλων πάνω

στο μιγαδικό επίπεδο μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

Αφού $H(s)H(-s) = |H(j\Omega)|^2$ για $s = j\Omega$, η εξίσωση (5.4) γράφεται ως:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2 / \Omega_c^2)^N} \quad (5.7)$$

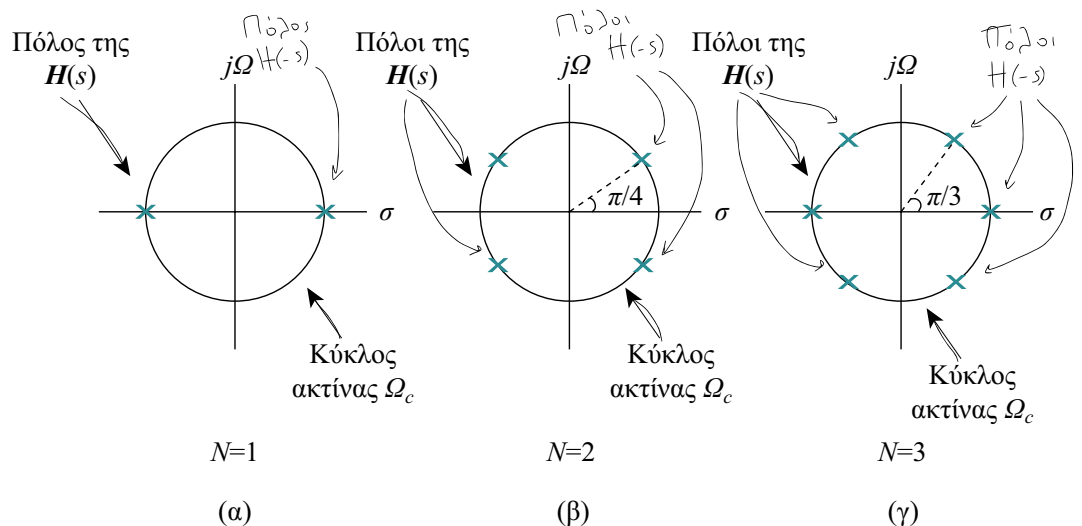
Οι πόλοι της $H(s)H(-s)$ βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας Ω_c και σε σημεία που ισαπέχουν το ένα από το άλλο. Αυτό προκύπτει από την εξίσωση (5.7) με μηδενισμό του παρανομαστή της, δηλαδή:

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2q+1)\pi/N}, \quad q = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.8)$$

και συνεπώς

$$s_q = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2q+1)\pi/2N}, \quad q = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.9)$$

Στο Σχήμα 5.3 δείχνονται οι θέσεις των πόλων διαφόρων φίλτρων Butterworth τάξης $N = 1$, $N = 2$ και $N = 3$. Οι πόλοι που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο είναι αυτοί που αντιστοιχούν στην $H(s)$, ενώ εκείνοι του δεξιού ημιεπιπέδου αντιστοιχούν στην $H(-s)$. Υπενθυμίζεται ότι για να είναι ένα αναλογικό σύστημα ευσταθές, πρέπει οι πόλοι του να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο.



Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς των πρωτότυπων ($\Omega_c = 1$) βαθυπερατών φίλτρων Butterworth πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης είναι αντίστοιχα:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad \text{και} \quad H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Παράδειγμα 5.1

Υπολογίστε την τάξη ενός βαθυπερατού Butterworth φίλτρου το οποίο παρουσιάζει εξασθένιση 1 dB στο 1 kHz και 40 dB στα 5 kHz.

Λύση

Από τις προδιαγραφές που μας δίνονται και με βάση τη γενική μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός βαθυπερατού φίλτρου (Σχήμα 5.1) έχουμε ότι:

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = -1 \text{ dB}, \quad \text{οπότε προκύπτει } \varepsilon^2 = 0,2589$$

$$F_p = 1 \text{ kHz}, \quad \text{οπότε } \Omega_p = 2\pi F_p = 2\pi 1000 \text{ rad/s}$$

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = -40 \text{ dB}, \quad \text{οπότε } A^2 = 10^4$$

$$F_s = 5 \text{ kHz}, \quad \text{οπότε } \Omega_s = 2\pi F_s = 2\pi 5000 \text{ rad/s}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση (5.6) βρίσκουμε ότι:

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = \frac{\log_{10} \left[\frac{(A^2 - 1)/\varepsilon^2}{2 \log_{10}(\Omega_s / \Omega_p)} \right]}{2 \log_{10}(5)} = \frac{\log_{10}(38621)}{2 \log_{10}(5)} = 3,281$$

Αφού η τάξη του φίλτρου πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, στρογγυλεύουμε το αποτέλεσμα αυτό στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο, $N = 4$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.1

Υπολογίστε την τάξη και τους πόλους ενός βαθυπερατού φίλτρου Butterworth το οποίο παρουσιάζει εξασθένιση 3 dB στα 500 Hz και 40 dB στα 1000 Hz.

Φίλτρα Chebyshev. Υπάρχουν δύο τύποι φίλτρων Chebyshev. Τα φίλτρα τύπου I είναι φίλτρα μόνο με πόλους τα οποία παρουσιάζουν ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης και μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 5.2β). Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας των βαθυπερατών φίλτρων Chebyshev τύπου I δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega / \Omega_p)\right)^{1/2}} \quad (5.10)$$

όπου ε η παράμετρος του φίλτρου που σχετίζεται με την κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης, Ω_p η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης και $T_N(x)$ πολυώνυμο Chebyshev τάξης N , το οποίο ορίζεται ως:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| < 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & |x| > 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Τα φίλτρα Chebyshev τύπου II είναι φίλτρα με πόλους και μηδενικά, παρουσιάζουν μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη διέλευσης και ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 5.2γ). Τα μηδενικά στην περίπτωση αυτών των φίλτρων βρίσκονται πάνω στο φανταστικό άξονα του επιπέδου- s . Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 \left[T_N^2(\Omega_s / \Omega_p) / T_N^2(\Omega_s / \Omega) \right]\right)^{1/2}} \quad (5.12)$$

όπου $T_N(x)$ είναι και πάλι το πολυώνυμο Chebyshev τάξης N , και Ω_s η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής.

Ελλειπτικά φίλτρα. Τα ελλειπτικά φίλτρα ή φίλτρα Caueer παρουσιάζουν ομοιόμορφη κυμάτωση τόσο στη ζώνη διέλευσης, όσο και στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 5.2δ). Τα φίλτρα αυτά έχουν πόλους και μηδενικά και το μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 U_N(\Omega / \Omega_p)\right)^{1/2}} \quad (5.13)$$

όπου $U_N(x)$ η Ιακωβιανή (Jacobian) ελλειπτική συνάρτηση τάξης N . Τα μηδενικά βρίσκονται πάνω στον άξονα των φανταστικών του επιπέδου- s .

Τα ελλειπτικά φίλτρα είναι καλύτερα των φίλτρων Butterworth και Chebyshev, ως προς το γεγονός ότι απαιτούνται φίλτρα μικρότερης τάξης, δηλαδή λιγότεροι συντελεστές, για να ικανοποιήσουν τις ίδιες προδιαγραφές. Με άλλα λόγια, για δεδομένη τάξη του φίλτρου και δεδομένες προδιαγραφές, ένα ελλειπτικό φίλτρο θα παρουσιάζει την στενότερη ζώνη μετάβασης. Από την άλλη πλευρά όμως, η απόκριση φάσης των ελλειπτικών φίλτρων παρουσιάζει περισσότερες μη γραμμικότητες στη ζώνη διέλευσης σε σχέση με τα αντίστοιχα φίλτρα Butterworth ή Chebyshev.

5.1.2 Μετασχηματισμοί συχνότητας αναλογικών φίλτρων

Τα φίλτρα που γνωρίσαμε στην προηγούμενη υποενότητα ήταν όλα βαθυπερατά. Αυτά αποτελούν τη βάση για τη σχεδίαση των υπολοίπων κατηγοριών φίλτρων. Για να σχεδιάσουμε ένα υψηπερατό, ζωνοδιαβατό ή απόρριψης ζώνης αναλογικό φίλτρο, βασιζόμαστε στο αντίστοιχο αναλογικό βαθυπερατό (τύπου Butterworth, Chebyshev ή Ελλειπτικό) και εκτελούμε ένα μετασχηματισμό συχνότητας. Αυτούς ακριβώς τους μετασχηματισμούς συχνότητας θα γνωρίσουμε στην παρούσα υποενότητα.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ

Εάν έχουμε ένα βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, και θέλουμε να το μετατρέψουμε σ' ένα άλλο βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα Ω'_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s \quad (\text{βαθυπερατό σε βαθυπερατό}) \quad (5.14)$$

Με άλλα λόγια, εάν $H_p(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, τότε η συνάρτηση μεταφοράς $H_{LP}(s)$ του νέου βαθυπερατού φίλτρου θα είναι:

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s} \quad (5.15)$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΥΨΗΠΕΡΑΤΟ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε υψηπερατό φίλτρο με συχνότητα Ω'_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s} \quad (\text{βαθυπερατό σε υψηπερατό}) \quad (5.16)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $H_{HP}(s)$ του υψηπερατού φίλτρου προκύπτει από την αντίστοιχη του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου σύμφωνα με τη σχέση:

$$H_{HP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}} \quad (5.17)$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΖΩΝΟΔΙΑΒΑΤΟ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε ζωνοδιαβατό φίλτρο με συχνότητες Ω_l και Ω_u στο κατώτερο και ανώτερο όριο της ζώνης διέλευσης αντίστοιχα, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \quad (\text{βαθυπερατό σε ζωνοδιαβατό}) \quad (5.18)$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση μεταφοράς $H_{BP}(s)$ του ζωνοδιαβατού φίλτρου προκύπτει από την αντίστοιχη του βαθυπερατού φίλτρου σύμφωνα με τη σχέση:

$$H_{BP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)}} \quad (5.19)$$

Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι η τάξη του ζωνοδιαβατού φίλτρου που προκύπτει είναι διπλάσια της τάξης του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΖΩΝΗΣ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε φίλτρο απόρριψης ζώνης με συχνότητες Ω_l και Ω_u στα όρια των ζωνών διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l} \quad (\text{βαθυπερατό σε απόρριψης ζώνης}) \quad (5.20)$$

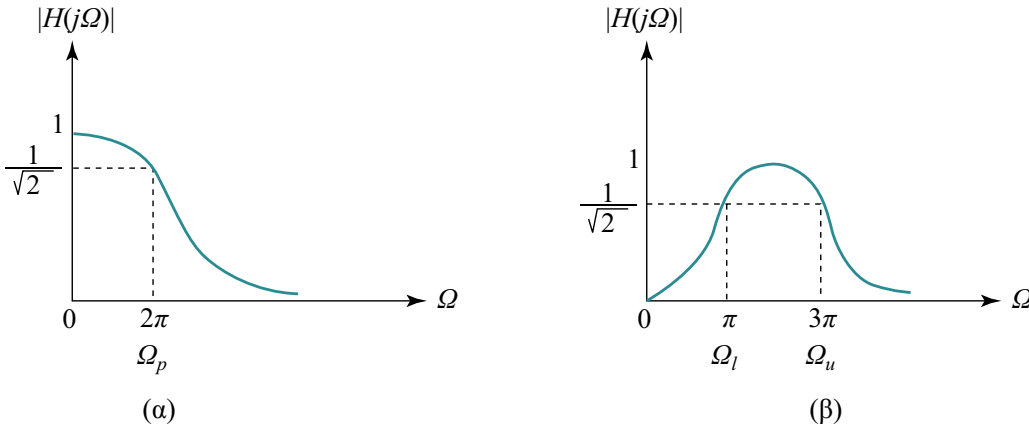
Η συνάρτηση μεταφοράς $H_{BS}(s)$ του φίλτρου απόρριψης ζώνης προκύπτει από την αντίστοιχη του βαθυπερατού φίλτρου με βάση τη σχέση:

$$H_{BS}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}} \quad (5.21)$$

Παράδειγμα 5.2

Να μετασχηματιστεί το πρώτης τάξης βαθυπερατό φίλτρο Butterworth με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \Omega_p / (s + \Omega_p)$, όπου $\Omega_p = 2\pi \text{ rad/s}$, σ' ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο με συχνότητες στα όρια της ζώνης διέλευσης $\Omega_l = \pi \text{ rad/s}$ και $\Omega_u = 3\pi \text{ rad/s}$.

Λύση

**Σχήμα 5.4**

Μέτρο της απόκρισης συχνότητας (α) του αρχικού βαθυπερατού και (β) του ζητούμενου ζωνοδιαβατού αναλογικού φίλτρου.

Τα μέτρα των αποκρίσεων συχνότητας του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου Butterworth και του ζητούμενου ζωνοδιαβατού φίλτρου, φαίνονται στο Σχήμα 5.4.

Εφόσον μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς του βαθυπερατού φίλτρου, ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς του ζητούμενου ζωνοδιαβατού φίλτρου γίνεται εύκολα με βάση το μετασχηματισμό συχνότητας της σχέσης (5.18).

$$s = \Omega_p \cdot \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)} = 2\pi \frac{s^2 + 3\pi \cdot \pi}{s(3\pi - \pi)} = \frac{s^2 + 3\pi^2}{s}$$

Άρα αντικαθιστώντας στη σχέση (5.19) βρίσκουμε τη ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοδιαβατού φίλτρου:

$$H_{BP}(s) = H(s) \Big|_{s = \frac{s^2 + 3\pi^2}{s}} = \frac{2\pi}{\left(\frac{s^2 + 3\pi^2}{s}\right) + 2\pi} = \frac{2\pi s}{s^2 + 2\pi s + 3\pi^2}$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του φίλτρου που προέκυψε είναι διπλάσια αυτής του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου. Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι για $s = 0$ έχουμε $H(s) = 0$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.2

Η συνάρτηση μεταφοράς του δεύτερης τάξης πρωτότυπου ($\Omega_c = 1$) βαθυπερατού φίλτρου Chebyshev τύπου I με κυμάτωση στη ζώνη διέλευσής του ίση με 1 dB, δίνεται από τη σχέση $H_p(s) = 1/(s^2 + 1,098s + 1,103)$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστοιχου υψηλερατού φίλτρου, το οποίο έχει συχνότητα αποκοπής 4 rad/s.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τα αναλογικά φίλτρα, τα οποία είναι κυρίως τεσσάρων τύπων: Butterworth, Chebyshev I & II και Ελλειπτικά. Πρόκειται στην ουσία, για τις μαθηματικές εκείνες συναρτήσεις οι οποίες, με διαφορετικό τρόπο η καθεμία, προσεγγίζουν την καμπύλη ενός ιδανικού φίλτρου. Γνωρίσαμε επίσης, τους μετασχηματισμούς στη συχνότητα τους οποίους χρησιμοποιούμε για να μπορέσουμε να πάρουμε ένα επιθυμητό βαθυπερατό, υψηπερατό, ζωνοδιαβατό ή απόρριψης ζώνης αναλογικό φίλτρο, έχοντας ως αναφορά ένα πρωτότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο.

5.2 Σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων

Όπως και στην περίπτωση των FIR φίλτρων, έτσι και εδώ, υπάρχουν πολλές μέθοδοι σχεδίασης IIR φίλτρων. Η πρώτη και πιο απλή από αυτές, μας είναι ήδη γνωστή από το Κεφάλαιο 3, και είναι αυτή της απευθείας τοποθέτησης των πόλων και μηδενικών του φίλτρου πάνω στο μιγαδικό επίπεδο- z , προσδιορίζοντας άμεσα τη συνάρτηση μεταφοράς και κατά συνέπεια, τους συντελεστές του φίλτρου. Η μέθοδος αυτή έχει περισσότερο θεωρητική και εκπαιδευτική σημασία παρά πρακτική αξία. Υπάρχουν και άλλες τεχνικές, κατά τις οποίες η σχεδίαση του φίλτρου γίνεται απευθείας στο πεδίο- z , όπως η μέθοδος των προσεγγίσεων Pade ή η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, τις οποίες όμως δε θα πραγματευτούμε.

Περισσότερο συνηθισμένο είναι να χρησιμοποιούμε τεχνικές οι οποίες μετατρέπουν ένα αναλογικό φίλτρο σε ψηφιακό. Και εδώ υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι μετατροπής ενός αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό. Εμείς θα αναφερθούμε στις δύο πιο γνωστές από αυτές, τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού.

Τέλος, θα πρέπει να επαναλάβουμε ότι υλοποιήσιμα και ευσταθή IIR φίλτρα δε μπορεί να έχουν γραμμική απόκριση φάσης. Έτσι, οι προδιαγραφές των φίλτρων θα αναφέρονται μόνο στο μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα. Αυτό δεν σημαίνει ότι η φάση δεν είναι ουσιώδους σημασίας. Σημαίνει απλώς πως, αφού μέτρο και φάση είναι αλληλένδετα, δεχόμαστε τη φάση όπως αυτή προκύπτει από τη διαδικασία σχεδίασης. Αν κάποια εφαρμογή απαιτεί γραμμική φάση, τότε θα πρέπει να σχεδιάσουμε ένα FIR φίλτρο με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.

5.2.1 Γραφική μέθοδος

Τη γραφική μέθοδο σχεδίασης φίλτρων τη γνωρίσαμε στο Κεφάλαιο 3 (ενότητα 3.4). Η μέθοδος αυτή αναφέρεται και ως *γεωμετρική* ή ως *μέθοδος σχεδίασης βασισμένη*

στους πόλους και στα μηδενικά. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η σχεδίαση ενός IIR ψηφιακού φίλτρου γίνεται με κατάλληλη τοποθέτηση των πόλων και των μηδενικών πάνω στο μοναδιαίο κύκλο στο επίπεδο z . Η τοποθέτηση ενός πόλου κοντά στο μοναδιαίο κύκλο οδηγεί σε μεγάλες τιμές για τη συνάρτηση μεταφοράς σε συχνότητες που βρίσκονται κοντά στον πόλο. Αντίστοιχα, η ύπαρξη ενός μηδενικού κοντά ή και πάνω στον μοναδιαίο κύκλο οδηγεί σε πολύ μικρές τιμές ή και μηδενισμό της συνάρτησης μεταφοράς και κατ' επέκταση της εξόδου του φίλτρου (συστήματος). Θυμηθείτε ότι, για να είναι ευσταθές το φίλτρο που θα σχεδιαστεί, θα πρέπει οι πόλοι του να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Τα μηδενικά μπορεί να βρίσκονται οπουδήποτε στο επίπεδο z . Τέλος, οι πόλοι και τα μηδενικά μπορεί να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Στην περίπτωση όμως που κάποιοι από τους πόλους ή τα μηδενικά είναι μιγαδικοί, τότε αυτοί θα πρέπει να εμφανίζονται ως ζεύγη συζυγών.

Το Παράδειγμα 3.10 αναφέρεται στο σχεδιασμό ενός IIR φίλτρου με τη γραφική μέθοδο. Ας προσπαθήσουμε να τη θυμηθούμε σχεδιάζοντας τη φορά αυτή ένα απλό ζωνοδιαβατό φίλτρο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.3

Σχεδιάστε ψηφιακό φίλτρο το οποίο να εξασθενίζει τις συχνότητες 0 και π και να επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων γύρω από τη συχνότητα $\pi/2$.

5.2.2 Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής

Σκοπός μας σύμφωνα με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής (impulse invariance method) είναι να σχεδιάσουμε ένα IIR φίλτρο του οποίου η μοναδιαία κρουστική απόκριση $h(n)$ να ισοδυναμεί με τη δειγματοληπτημένη κρουστική απόκριση ενός κατάλληλα επιλεγμένου αναλογικού φίλτρου, δηλαδή:

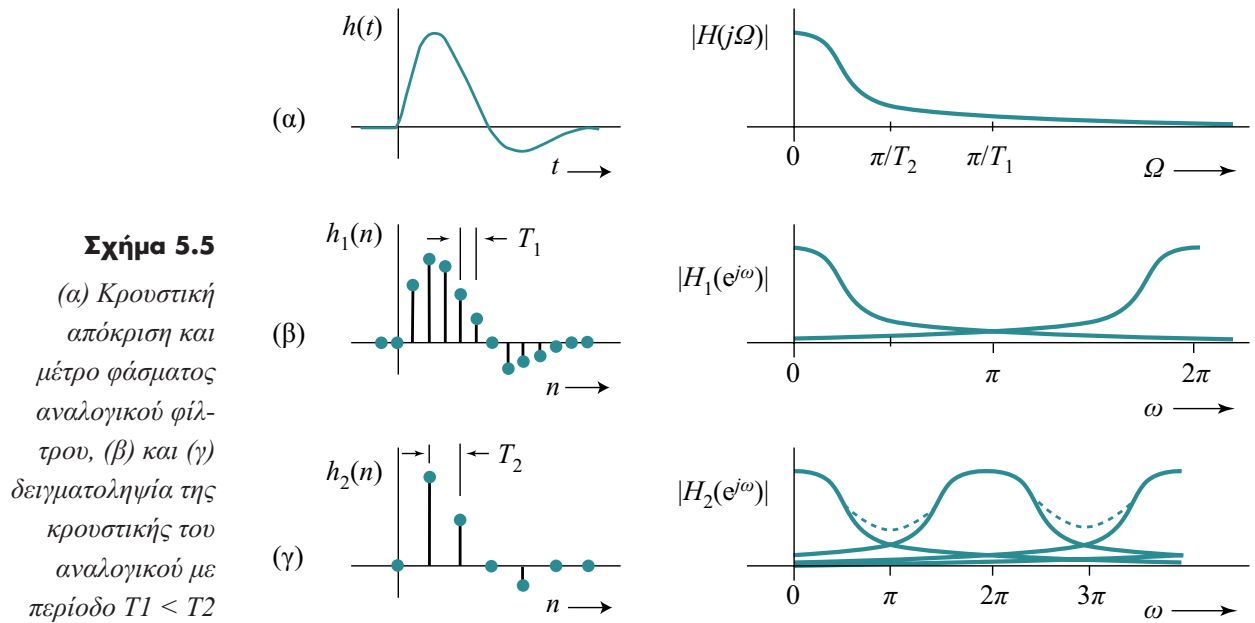
$$h(n) \equiv h(nT) = h(t) \Big|_{t=nT} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

όπου T η περίοδος δειγματοληψίας (βλ. Σχήμα 5.5α, β).

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ισούται με τον μετασχηματισμό z της δειγματοληπτημένης μοναδιαίας κρουστικής απόκρισης $h(nT)$, δηλαδή:

$$H(z) = Z\{h(nT)\} \quad (5.23)$$

Η αναλογική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.



Στο σημείο αυτό θα πρέπει να εξετάσουμε το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας της αναλογικής κρουστικής απόκρισης, δηλαδή το αποτέλεσμα της σχέσης (5.22). Ας θυμηθούμε ότι, όταν λαμβάνουμε από ένα αναλογικό σήμα δείγματα με ρυθμό $F_s = 1/T$ δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο, το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος που προκύπτει είναι μια περιοδική επανάληψη του αναλογικού φάσματος, με περίοδο F_s . Συνεπώς, αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μικρότερος από το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας που υπάρχει στο αναλογικό φάσμα, τότε θα παρουσιαστεί το φαινόμενο του ανεπαρκούς ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing), όπως αυτό δείχνεται στο Σχήμα 5.5γ. Γίνεται φανερό ότι η περίοδος δειγματοληψίας T θα πρέπει να είναι αρκετά μικρή, για να αποφύγουμε ή τουλάχιστον να ελαχιστοποιήσουμε το φαινόμενο αυτό. Επίσης, καταλαβαίνουμε ότι η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής δεν είναι κατάλληλη για τη σχεδίαση υπερυπερατάτων φίλτρων, εξαιτίας του φαινομένου aliasing που παρουσιάζεται στο φάσμα λόγω της δειγματοληψίας. Για τους λόγους αυτούς, η μέθοδος χρησιμοποιείται κυρίως για την σχεδίαση βαθυπερατών και ζωνοδιαβατών ψηφιακών φίλτρων.

Η απεικόνιση των σημείων από το επίπεδο- s στο επίπεδο- z με την αμετάβλητη κρουστική απόκριση γίνεται μέσω της σχέσης:

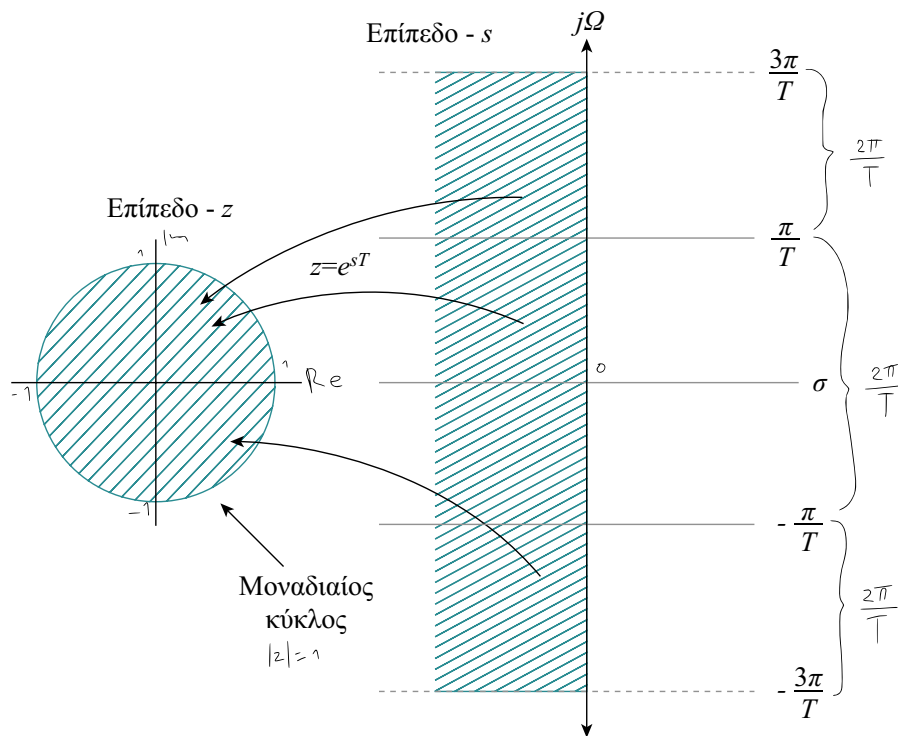
$$z = e^{sT} \quad (5.24)$$

Για $s = \sigma + j\Omega$ και $z = re^{j\omega}$ βρίσκουμε ότι:

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\omega = \Omega T \quad (5.25)$$

Επομένως, για $\sigma < 0$ έχουμε $0 < r < 1$, ενώ για $\sigma > 0$ έχουμε $r > 1$. Όταν $\sigma = 0$, τότε $r = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο z , ενώ το δεξί ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο z . Επίσης, ο άξονας $j\Omega$ απεικονίζεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου z . Η απεικόνιση αυτή όμως δεν είναι απεικόνιση ένα προς ένα. Αφού το ω είναι μοναδικό στην περιοχή $(-\pi, \pi)$, η απεικόνιση $\omega = \Omega T$ συνεπάγεται ότι η περιοχή των συχνοτήτων $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$ απεικονίζεται στις αντίστοιχες τιμές $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Επιπλέον, όμως, και η περιοχή συχνοτήτων $\pi/T \leq \Omega \leq 3\pi/T$ απεικονίζεται επίσης στην ίδια περιοχή $-\pi \leq \omega \leq \pi$, και γενικά το ίδιο συμβαίνει για τις συχνότητες $(2k-1)\pi/T \leq \Omega \leq (2k+1)\pi/T$, όπου k ακέραιος. Άρα, η απεικόνιση της αναλογικής συχνότητας Ω στη συχνότητα ω του ψηφιακού χώρου είναι μία πολλά-σε-ένα απεικόνιση, γεγονός που αντικατοπτρίζει το φαινόμενο του ανεπαρκούς ρυθμού δειγματοληψίας. Η όλη απεικόνιση του επιπέδου s στο επίπεδο z φαίνεται στο Σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6

Η απεικόνιση του επιπέδου s στο επίπεδο z σύμφωνα με τη σχέση $z = e^{sT}$. Λωρίδες εύρους $2\pi/T$ (για $\sigma < 0$) του επιπέδου s απεικονίζονται σε σημεία του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z .

Παράδειγμα 5.3

Αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού IIR φίλτρου το οποίο προκύπτει με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης.

Λύση

α. Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του αναλογικού φίλτρου από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $H(s)$, δηλαδή:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

β. Λαμβάνουμε δείγματα από την $h(t)$ αντικαθιστώντας το t με το nT . Τα δείγματα που προκύπτουν αντιστοιχούν στα στοιχεία της ακολουθίας $h(n)$, σύμφωνα με τη σχέση (5.22):

$$h(n) = h(t) \Big|_{t=nT} = e^{-nT} - e^{-2nT}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

γ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από τον μετασχηματισμό- z της $h(nT)$, όπως υπαγορεύεται από τη σχέση (5.23):

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2T}z^{-1}} = \frac{(e^{-T} - e^{-2T})z^{-1}}{(1 - e^{-T}z^{-1})(1 - e^{-2T}z^{-1})}, \quad |z| > e^{-T}$$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να γενικεύσουμε τη διαδικασία σχεδίασης και ταυτόχρονα να αποδείξουμε ότι η $H(z)$ μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από την $H(s)$, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε την $h(t)$ και την $h(nT)$. Ας θεωρήσουμε ένα αναλογικό φίλτρο το οποίο έχει N διαφορετικούς πόλους. Η συνάρτηση μεταφοράς του μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων με τη μορφή:

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{s - p_{\xi}} \quad (5.26)$$

όπου p_{ξ} οι πόλοι του αναλογικού φίλτρου και C_{ξ} οι συντελεστές του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα.

Η αντίστοιχη κρουστική απόκριση θα είναι:

$$h(t) = \sum_{\xi=1}^N C_{\xi} e^{p_{\xi} t} \quad (5.27)$$

Αν από αυτή την κρουστική απόκριση λάβουμε δείγματα ανά T δευτερόλεπτα ($t = nT$), τότε θα πάρουμε την δειγματοληπτημένη απόκριση:

$$h(nT) = \sum_{\xi=1}^N C_{\xi} e^{p_{\xi} nT} \quad (5.28)$$

Τέλος, ο μετασχηματισμός- z της σχέσης (5.28) θα μας δώσει την επιθυμητή συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου:

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}} \quad (5.29)$$

Παρατηρώντας τη διαδικασία που περιγράφεται από τις σχέσεις (5.26) έως (5.29), διαπιστώνουμε ότι τα δύο ενδιάμεσα στάδια υπολογισμού της $h(t)$ και της $h(nT)$ θα μπορούσαν να παραλειφθούν και να υπολογίσουμε απευθείας την $H(z)$ (σχέση 5.29) από την $H(s)$ (σχέση 5.26) αντικαθιστώντας το $s - p_{\xi}$ με το $1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}$, δηλαδή:

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{s - p_{\xi}} \longrightarrow H(z) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}} \quad (5.30)$$

Η σχέση (5.30) αναφέρεται στην περίπτωση ενός φίλτρου του οποίου οι πόλοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή έχει πόλους πολλαπλότητας 1. Η περίπτωση φίλτρου με πόλους μεγαλύτερης πολλαπλότητας ξεφεύγει από τους στόχους του παρόντος κεφαλαίου, και δε θα μας απασχολήσει.

Παράδειγμα 5.4

Από το αναλογικό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = (s + 0,1)/[(s + 0,1)^2 + 9]$ να προσδιοριστεί αντίστοιχο ΠΡ ψηφιακό φίλτρο με χρήση της μεθόδου της αμετάβλητης κρουστικής.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το αναλογικό φίλτρο έχει ένα μηδενικό στο σημείο $s = -0,1$ και ένα ζεύγος συζυγών πόλων $p_{\xi} = -0,1 \pm j3$. Εκφράζουμε την $H(s)$ ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s) = \frac{0,5}{s + 0,1 - j3} + \frac{0,5}{s + 0,1 + j3}$$

και υπολογίζουμε την $H(z)$ με βάση τη σχέση (5.30):

$$H(z) = \frac{0,5}{1 - e^{(-0,1+j3)T} z^{-1}} + \frac{0,5}{1 - e^{(-0,1-j3)T} z^{-1}} = \frac{1 - (e^{-0,1T} \cos 3T)z^{-1}}{1 - (2e^{-0,1T} \cos 3T)z^{-1} + e^{-0,2T} z^{-2}}$$

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.4

Με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ψηφιακού IIR φίλτρου που αντιστοιχεί στο αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο $H(s) = 1/(s + 1)(s^2 + s + 1)$.

5.2.3 Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού

Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης για τη σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων είναι κατάλληλη για βαθυπερατά και ορισμένα ζωνοδιαβατά φίλτρα. Θα ασχοληθούμε τώρα με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear transformation method), η οποία τουλάχιστον δεν θέτει τέτοιους περιορισμούς. Πρόκειται για έναν μαθηματικό μετασχηματισμό του πεδίου- s στο πεδίο- z . Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό αυτό, όταν μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του αναλογικού φίλτρου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του αντίστοιχου ψηφιακού φίλτρου, αντικαθιστώντας το s με το $(z - 1)/(z + 1)$, δηλαδή:

$$H(z) = H(s) \Bigg|_{s = \frac{z-1}{z+1}} \quad (5.31)$$

Με άλλα λόγια, η απεικόνιση από το επίπεδο s στο επίπεδο z γίνεται με βάση τη σχέση^[1]:

$$s = \frac{z-1}{z+1} \quad (5.32)$$

Για να διερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά του διγραμμικού μετασχηματισμού, ας θεωρήσουμε ότι $z = re^{j\omega}$ και $s = \sigma + j\Omega$. Τότε, η σχέση (5.32) μπορεί να εκφραστεί ως:

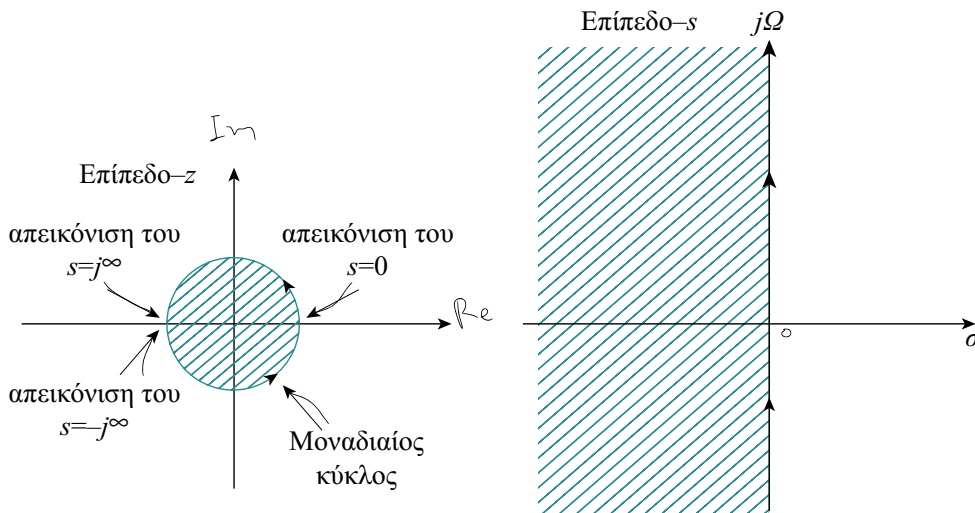
$$s = \frac{re^{j\omega} - 1}{re^{j\omega} + 1} = \frac{r^2 - 1}{\underbrace{1 + r^2 + 2r \cos \omega}_{\sigma}} + j \frac{2r \sin \omega}{\underbrace{1 + r^2 + 2r \cos \omega}_{\Omega}} \quad (5.33)$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι, εάν $r < 1$, τότε $\sigma < 0$ και εάν $r > 1$, τότε $\sigma > 0$. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό ημιπίεδο του s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο- z , ενώ το δεξί ημιπίεδο του s απεικονίζεται στο

[1] Η σχέση $s = (z - 1)/(z + 1)$ μπορεί να γραφεί και ως $sz + s - z + 1 = 0$. Παρατηρούμε ότι η τελευταία σχέση είναι γραμμική ως προς s και γραμμική ως προς z ή διγραμμική ως προς s και z .

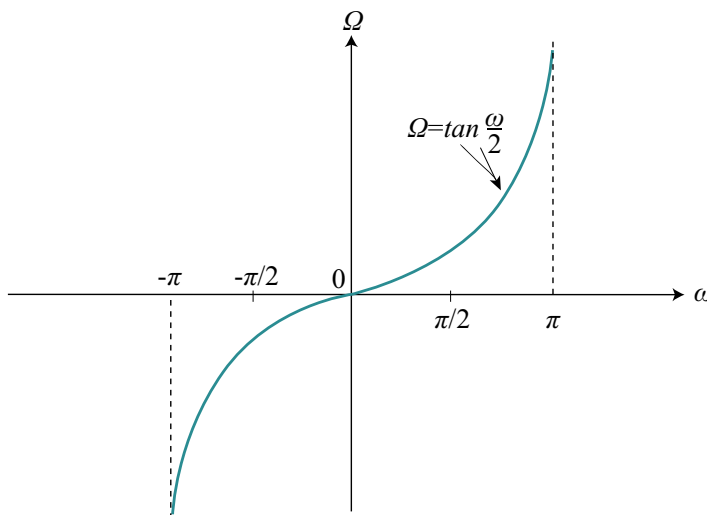
εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (βλ. Σχήμα 5.7). Άρα, από ένα ευσταθές αναλογικό φίλτρο παίρνουμε ένα ευσταθές ψηφιακό φίλτρο. Όταν $r = 1$, τότε $\sigma = 0$ και:

$$\Omega = \tan \frac{\omega}{2} \quad (5.34)$$



Σχήμα 5.7

Απεικόνιση του επιπέδου-s στο επίπεδο-z μέσω του διγραμμικού μετασχηματισμού



Σχήμα 5.8

Μη γραμμική σχέση μεταξύ των αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων λόγω του διγραμμικού μετασχηματισμού

Η σχέση μεταξύ των συχνοτήτων στα δύο πεδία s και z φαίνεται στο Σχήμα 5.8. Γίνεται φανερό ότι όλη η περιοχή των συχνοτήτων Ω απεικονίζεται μόνο μία φορά στην περιοχή $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Πρόκειται επομένως, για μια ένα-προς-ένα απεικόνιση. Η απεικόνιση όμως, αυτή είναι μη γραμμική. Παρατηρείται, δηλαδή, μια παραμόρφωση ή *στρέβλωση* των συχνοτήτων (frequency warping), εξαιτίας της μη γραμμικότητας της

συνάρτησης της εφαπτομένης. Αυτή η στρέβλωση των συχνοτήτων θα πρέπει, όπως θα δούμε στη συνέχεια, να λαμβάνεται υπόψη κατά την σχεδίαση ενός IIR φίλτρου.

Σχόλια σχετικά με τον διγραμμικό μετασχηματισμό:

1. Σε ορισμένα βιβλία ο διγραμμικός μετασχηματισμός ορίζεται ως $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, όπου T η περίοδος δειγματοληψίας. Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής $\frac{2}{T}$ δεν είναι απαραίτητος, αφού απαλείφεται κατά τη διαδικασία αντιστάθμισης της στρέβλωσης, όπως θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.
2. Για τα βαθυπερατά και υψηπερατά φίλτρα, η τάξη της $H(z)$ που προκύπτει, είναι ίδια με την τάξη της $H(s)$. Για παράδειγμα, από ένα δεύτερης τάξης βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο θα πάρουμε ένα δεύτερης τάξης βαθυπερατό ψηφιακό φίλτρο. Όμως, για τα ζωνοδιαβατά φίλτρα και τα φίλτρα απόρριψης ζώνης αυτό δεν ισχύει. Στην περίπτωση αυτή, η τάξη της $H(z)$ είναι διπλάσια της τάξης της $H(s)$.
3. Ευσταθή αναλογικά φίλτρα οδηγούν σε ευσταθή ψηφιακά φίλτρα.

Παράδειγμα 5.5

Το πιο απλό αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο αποτελείται από έναν αντιστάτη και έναν πυκνωτή. Πρόκειται για το γνωστό «RC κύκλωμα», η έξοδος του οποίου λαμβάνεται από τα άκρα του πυκνωτή (Σχήμα 5.9α). Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού, να σχεδιαστεί το αντίστοιχο ψηφιακό φίλτρο, του οποίου η συχνότητα αποκοπής να είναι 30 Hz, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 150 Hz.

Λύση

Η συχνότητα αποκοπής του επιθυμητού ψηφιακού φίλτρου είναι (Βλ. σχέση 1.13)

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi 30 \frac{1}{150} = \frac{2}{5}\pi = 0,4\pi. \text{ Η συχνότητα αυτή του επιπέδου-} z$$

είναι η αντίστοιχη της συχνότητας $\Omega'_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{0,4\pi}{2}\right) = 0,73$ του επιπέδου- s

(Βλ. σχέση 5.34). Ο υπολογισμός που μόλις εκτελέσαμε αποτελεί τη λεγόμενη *αντιστάθμιση στρέβλωσης* (prewarping). Επομένως, αυτό που χρειάζεται να σχεδιάσουμε είναι ένα αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής Ω'_c . Το πρωτότυπο ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο το οποίο αντιστοιχεί στο απλό RC κύκλωμα έχει συνάρτηση μεταφοράς $H_p(s) = 1/(s + 1)$. Εκτελούμε, επομένως, έναν

μετασχηματισμό συχνότητας από βαθυπερατό σε βαθυπερατό (σχέση 5.15) για να υπολογίσουμε το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο το οποίο έχει $\Omega'_c = 0,73$.

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \left|_{s = \frac{1}{\Omega'_c} s} = \frac{1}{\frac{s}{0,73} + 1} = \frac{0,73}{s + 0,73}$$

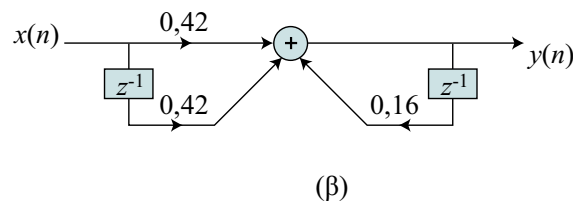
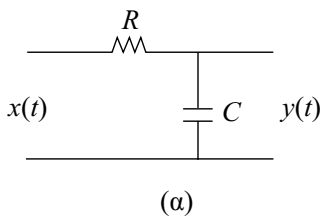
Γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς του αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου, εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό (σχέση 5.31) για να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς του επιθυμητού ψηφιακού φίλτρου:

$$H(z) = H_{LP}(s) \left|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,73}{\frac{z-1}{z+1} + 0,73} = \frac{0,42(1+z^{-1})}{1-0,16z^{-1}}$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα ψηφιακό φίλτρο πρώτης τάξης, όπως και το αντίστοιχο αναλογικό φίλτρο. Η εξίσωση διαφορών του φίλτρου που προκύπτει είναι

$$y(n) = 0,42[x(n) + x(n-1)] + 0,16y(n-1),$$

ενώ η δομή πραγματοποίησής του φαίνεται στο Σχήμα 5.9β.



Σχήμα 5.9

(α) Αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο πρώτης τάξης,
(β) ψηφιακό φίλτρο πρώτης τάξης του Παραδείγματος 5.5.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.5

Η συνάρτηση μεταφοράς του πρωτότυπου αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου πρώτης τάξης είναι $H_p(s) = 1/(s + 1)$. Σχεδιάστε το αντίστοιχο υπερπερατό ΠΡ ψηφιακό φίλτρο, το οποίο να έχει συχνότητα αποκοπής 30 Hz για συχνότητα δειγματοληψίας 150 Hz.

Πριν προχωρήσουμε στο σχεδιασμό ΠΡ φίλτρων τάξης μεγαλύτερης της πρώτης, θα ήταν καλό να συστηματοποιήσουμε τη διαδικασία σχεδίασης με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού. Η διαδικασία αυτή, όπως φάνηκε από το Παράδειγμα 5.5, αποτελείται από τα εξής στάδια:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο.

2. Μετασχηματίζουμε αυτό στο βαθυπερατό ή το υψηπερατό ή το ζωνοδιαβατό ή το απόρριψης ζώνης φίλτρο το οποίο έχει χαρακτηριστικές συχνότητες Ω' , που αντιστοιχούν στις επιθυμητές συχνότητες ω του ψηφιακού φίλτρου.
3. Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στη συνάρτηση μεταφοράς του αναλογικού φίλτρου που μόλις υπολογίσαμε.

Παράδειγμα 5.6

Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού να σχεδιαστεί βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 150 Hz για ρυθμό δειγματοληψίας 1,5 kHz. Η σχεδίαση να βασιστεί στο πρωτότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο δεύτερης τάξης τύπου Butterworth.

Λύση

Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ του επιθυμητού IIR ψηφιακού φίλτρου, ακολουθούμε τα παραπάνω στάδια σχεδίασης:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο. Στην προκειμένη περίπτωση είναι το δεύτερης τάξης Butterworth φίλτρο $H_p(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό με συχνότητα αποκοπής $\Omega'_c = \tan(\omega_c/2) = \tan(\Omega_c T/2) = \tan(2\pi 150(1/1500)/2) = \tan(0,1\pi) = 0,32$ εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό συχνότητας της σχέσης (5.15):

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Bigg|_{s = \frac{\Omega_c}{\Omega'_c} s = \frac{1}{0,32} s = \frac{s}{0,32}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{0,32}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{0,32}\right) + 1} = \frac{1}{9,47s^2 + 4,35s + 1}$$

3. Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στην τελευταία σχέση:

$$H(z) = H_{LP}(s) \Bigg|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{9,47\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 4,35\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} = \frac{0,07(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,14z^{-1} + 0,41z^{-2}}$$

Το ζητούμενο ψηφιακό φίλτρο είναι δεύτερης τάξης, όπως και το αναλογικό από το οποίο αρχίσαμε τη σχεδίαση, και έχει εξίσωση διαφορών:

$$y(n) = 0,07[x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)] + 1,14y(n-1) - 0,41y(n-2).$$

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.6

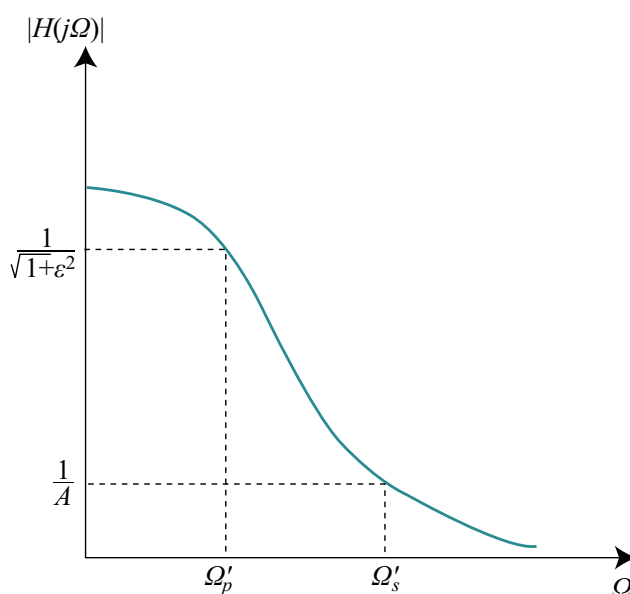
Σχεδιάστε ένα ζωνοδιαβατό IIR ψηφιακό φίλτρο δεύτερης τάξης του οποίου η ζώνη διέλευσης να κυμαίνεται μεταξύ 200 Hz και 300 Hz, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 2 kHz. Η σχεδίαση του φίλτρου να βασιστεί στη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού, εφαρμοσμένη σε αναλογικό φίλτρο Butterworth.

Παράδειγμα 5.7

Να σχεδιάσετε βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο το οποίο να εξασθενίζει μονοτονικά τις συχνότητες. Η ζώνη διέλευσης του φίλτρου να εκτείνεται μέχρι τα 125 Hz, ενώ η εξασθένιση στη ζώνη αυτή να μην υπερβαίνει τα 0,5 dB. Η μέγιστη εξασθένιση στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 15 dB, ενώ η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 275 Hz. Το όλο σύστημα λειτουργεί με συχνότητα δειγματοληψίας 1 kHz. Η σχεδίαση να γίνει με βάση τον διγραμμικό μετασχηματισμό.

Λύση

Από τις προδιαγραφές που μας δίνονται καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για κάποιο βαθυπερατό φίλτρο τύπου Butterworth (αφού πρέπει να παρουσιάζει μονοτονική εξασθένιση για όλες τις συχνότητες). Δεν γνωρίζουμε όμως την τάξη του φίλτρου. Αυτή μπορούμε να την προσδιορίσουμε από τις τιμές των συχνοτήτων και εξασθενίσεων που μας δίνονται. Το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο που ζητάμε να προσδιορίσουμε και στο οποίο θα εφαρμόσουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό, φαίνεται στο Σχήμα 5.10. Έχουμε γι' αυτό το φίλτρο:



Σχήμα 5.10

Το αρχικό αναλογικό φίλτρο από το οποίο θα προκύψει το ζητούμενο βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο.

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = 0 \text{ dB} \Rightarrow \varepsilon^2 = 0,122$$

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = 15 \text{ dB} \Rightarrow A^2 = 31,623$$

$$\Omega'_p = \tan \left(\frac{\omega_p}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_p T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 125(1/1000)}{2} \right) = \tan(0,125)\pi = 0,41$$

$$\Omega'_s = \tan \left(\frac{\omega_s}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_s T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 275(1/1000)}{2} \right) = \tan(0,275)\pi = 1,17$$

Η τάξη του φίλτρου μπορεί τώρα να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της σχέσης (5.6):

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log_{10} \left[\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2} \right]}{\log_{10} (\Omega'_s / \Omega'_p)} = \frac{\log_{10}(251)}{2 \log_{10}(2.85)} = \frac{2,40}{0,91} = 2,63$$

Άρα το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο πρέπει να είναι τρίτης τάξης ($N = 3$).

Από το σημείο αυτό πλέον, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα τρία στάδια σχεδίασης ενός ψηφιακού IIR φίλτρου, όπως τα γνωρίσαμε προηγουμένως:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο.

Είδαμε ότι το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο θα πρέπει να είναι τύπου Butterworth τρίτης τάξης. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού είναι (βλ. ενότητα 5.1)

$$H_p(s) = 1/(s^3 + 2s^2 + 2s + 1).$$

2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης ίση με $\Omega'_p = 0,41$. Για να εκφράσουμε όμως το μετασχηματισμό από βαθυπερατό σε βαθυπερατό της σχέσης (5.15), πρέπει να γνωρίζουμε τη συχνότητα Ω_p του πρωτότυπου φίλτρου, δηλαδή του φίλτρου που έχει $\Omega_c = 1$. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει με βάση τη σχέση (5.5α) και το γεγονός ότι $N = 3$.

$$\frac{1}{1 + (\Omega_p / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 + (\Omega_p / 1)^6} = \frac{1}{1 + 0,122} \Rightarrow \Omega_p = 0,702$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (5.15) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 H_{LP}(s) &= H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s = \frac{0,702}{0,41} s = 1,712s} = \\
 &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \Big|_{s = 1,712s} = \frac{1}{(1,712s)^3 + 2(1,712s)^2 + 2(1,712s) + 1} = \\
 &= \frac{1}{5,02s^3 + 5,86s^2 + 3,42s + 1}
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στην τελευταία σχέση:

$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{5,02 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + 5,86 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 + 3,42 \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + 1}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς του ζητούμενου IIR ψηφιακού φίλτρου.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τρεις διαφορετικές μεθόδους για το σχεδιασμό IIR ψηφιακών φίλτρων. Η πρώτη ήταν η γραφική μέθοδος κατά την οποία ο προσδιορισμός της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου γίνεται με απευθείας τοποθέτηση των πόλων και μηδενικών πάνω στο επίπεδο z . Η δεύτερη μέθοδος ήταν εκείνη της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης. Σύμφωνα με αυτή, το φίλτρο που σχεδιάζουμε έχει κρουστική απόκριση τη δειγματοληπτημένη κρουστική απόκριση του επιθυμητού αναλογικού φίλτρου. Διαπιστώσαμε ότι η μέθοδος αυτή είναι κατάλληλη για το σχεδιασμό κυρίως βαθυπερατών καθώς και ορισμένων ζωνοδιαβατών φίλτρων. Τέλος, η τρίτη μέθοδος ήταν εκείνη του διγραμμικού μετασχηματισμού. Πρόκειται για έναν μετασχηματισμό κατά τον οποίο το αριστερό ημιεπίπεδο του επιπέδου s απεικονίζεται μη γραμμικά, αλλά όμως με μία ένα-προς-ένα απεικόνιση, στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z . Η μέθοδος είναι κατάλληλη για τη σχεδίαση φίλτρων οποιουδήποτε τύπου.

5.3 Υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε τις τεχνικές σχεδίασης των IIR ψηφιακών φίλτρων και μάθαμε να προσδιορίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς και την εξίσωση

διαφορών LTI συστημάτων διακριτού χρόνου. Το τελευταίο στάδιο είναι η υλοποίηση των φίλτρων αυτών, ώστε να επιτελέσουν το σκοπό για τον οποίο αυτά σχεδιάστηκαν. Η υλοποίηση των IIR φίλτρων, όπως και αυτή των FIR φίλτρων, μπορεί να γίνει είτε σε κυκλωματική μορφή (hardware), είτε με προγραμματισμό (software) ενός υπολογιστικού συστήματος γενικού ή ειδικού σκοπού.

Γενικά, η εξίσωση διαφορών ενός φίλτρου είναι μια υπολογιστική διαδικασία (ένας αλγόριθμος) για τον υπολογισμό της ακολουθίας εξόδου $y(n)$ του συστήματος, από την ακολουθία εισόδου $x(n)$. Όμως, όπως είδαμε και στην ενότητα 3.4.4, οι υπολογισμοί αυτοί μπορούν να γίνουν με ένα διαφορετικό, αλλά ισοδύναμο, σύνολο εξισώσεων διαφορών. Κάθε ένα τέτοιο σύνολο εξισώσεων ορίζει μια υπολογιστική διαδικασία ή έναν αλγόριθμο για την υλοποίηση του συστήματος. Για κάθε ένα σύνολο εξισώσεων μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα βαθμίδων το οποίο να αποτελείται από στοιχεία καθυστέρησης, πολλαπλασιαστές και αθροιστές. Αυτό το διάγραμμα βαθμίδων το χαρακτηρίσαμε ως *δομή πραγματοποίησης* (realisation structure) του συστήματος. Στην περίπτωση κατά την οποία το σύστημα (φίλτρο) υλοποιηθεί προγραμματιστικά (software), το διάγραμμα βαθμίδων ή ισοδύναμο το σύνολο των εξισώσεων διαφορών, μετατρέπεται σε ένα σύνολο εντολών (πρόγραμμα) το οποίο «τρέχει» στο συγκεκριμένο υπολογιστικό σύστημα.

Το ερώτημα, βέβαια, που μπορεί να γεννηθεί στον αναγνώστη είναι το γιατί θα πρέπει να έχουμε διαφορετικές δομές πραγματοποίησης ενός φίλτρου, για παράδειγμα, άμεση μορφή τύπου 1 ή 2 (Σχήμα 3.5), σε σειρά ή παράλληλη (Σχήμα 3.6), από τη στιγμή που έχουμε σχεδιάσει το φίλτρο, γνωρίζουμε τους συντελεστές του και κατά συνέπεια μπορούμε να υλοποιήσουμε την εξίσωση διαφορών που έχει προκύψει ως έχει.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ότι οι διάφορες δομές πραγματοποίησης παρουσιάζουν διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την απαιτούμενη *υπολογιστική πολυπλοκότητα* (computational complexity), τη *μνήμη* (memory) και τα προβλήματα λόγω του *πεπερασμένου μήκους λέξης* (finite wordlength effects).

Όταν λέμε *υπολογιστική πολυπλοκότητα* εννοούμε το πλήθος των αριθμητικών πράξεων (πολλαπλασιασμών, διαιρέσεων και προσθέσεων) οι οποίες απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου $y(n)$. Πριν από λίγα χρόνια, αυτές οι τρεις πράξεις ήταν οι μοναδικές που χρησιμοποιούσαμε για να μετρήσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Στις μέρες μας όμως, με την εντυπωσιακή πρόοδο που έχει συντελεστεί στο σχεδιασμό και την κατασκευή πολύπλοκων και αποτελεσματικών προγραμματιζόμενων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (digital signal processors, DSPs), άλλοι παράγοντες παίζουν επίσης ρόλο στον

προσδιορισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, όπως για παράδειγμα, το πλήθος των προσπελάσεων της μνήμης ή το πλήθος των συγκρίσεων δύο αριθμών.

Όταν λέμε *μνήμη* εννοούμε το πλήθος των θέσεων μνήμης που απαιτούνται για την αποθήκευση των δειγμάτων εισόδου και εξόδου, των παραμέτρων του συστήματος, καθώς και των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων που τυχόν προκύπτουν.

Τέλος, τα προβλήματα λόγω του *πεπερασμένου μήκους λέξης*, ή αλλιώς λόγω της πεπερασμένης ακριβείας, αναφέρονται στα φαινόμενα κβάντισης τα οποία ενυπάρχουν σε οποιαδήποτε ψηφιακή υλοποίηση ενός συστήματος είτε κυκλωματική, είτε προγραμματιστική. Οι παράμετροι του συστήματος πρέπει απαραίτητα να αναπαρασταθούν με πεπερασμένη ακρίβεια. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν στη διαδικασία υπολογισμού κάθε δείγματος εξόδου του συστήματος, πρέπει να στρογγυλευθούν (rounded) ή να αποκοπούν (truncated) στο κατάλληλο μήκος λέξης (κατάλληλη ακρίβεια) που επιβάλλει ο υπολογιστής ή το κύκλωμα που χρησιμοποιούμε για την υλοποίηση. Όλα αυτά είναι προβλήματα τα οποία επηρεάζουν σημαντικά την τελική μας απόφαση σχετικά με το ποια δομή πραγματοποίησης θα πρέπει να επιλέξουμε. Αποδεικνύεται ότι οι διαφορετικές δομές πραγματοποίησης ενός συστήματος, ενώ είναι ισοδύναμες στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε άπειρη ακρίβεια, παρουσιάζουν πολύ διαφορετική συμπεριφορά μεταξύ τους για πεπερασμένη ακρίβεια.

5.3.1 Πεπερασμένη ακρίβεια και υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η πεπερασμένη ακρίβεια κατά την υλοποίηση ενός φίλτρου εισάγει σφάλματα τα οποία υποβαθμίζουν την απόδοση του φίλτρου ή και οδηγούν σε αστάθεια του όλου συστήματος. Για να γίνει κατανοητό αυτό, ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.8

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού IIR φίλτρου δεύτερης τάξης είναι:

$$H(z) = 1/(1 - 1,845z^{-1} + 0,850586z^{-2})$$

Να εξεταστεί η ευστάθεια του φίλτρου. Να επαναληφθεί η διαδικασία στην περίπτωση που οι συντελεστές αναπαριστάνονται με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

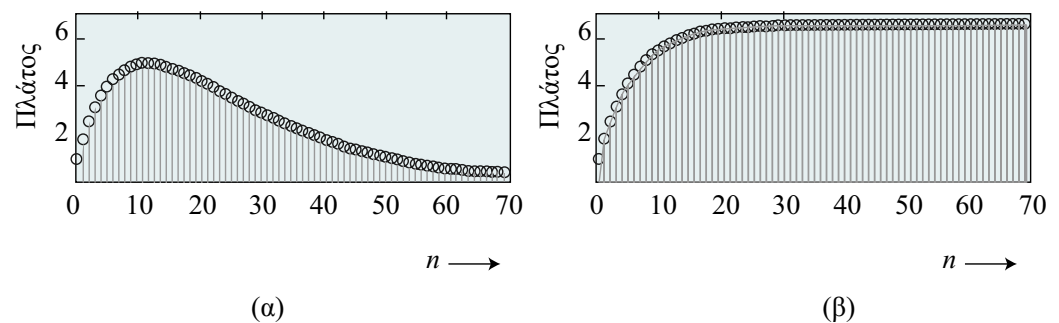
Λύση

Η παραγοντοποίηση του παρανομαστή οδηγεί στην ισοδύναμη μορφή για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = 1/(1 - 0,902z^{-1})(1 - 0,943z^{-1})$. Το σύστημα έχει δύο πραγματικούς πόλους στα σημεία $z = 0,902$ και $z = 0,943$. Αφού το μέτρο κάθε πόλου είναι

μικρότερο της μονάδας, δηλαδή οι πόλοι βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο- z , το σύστημα είναι ευσταθές. Παρατηρήστε ότι η κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος είναι φθίνουσα (Σχήμα 5.11α), όπως ακριβώς απαιτείται για ένα ευσταθές σύστημα. Ας στρογγυλεύσουμε τώρα τους συντελεστές της $H(z)$ στα δύο δεκαδικά ψηφία. Αυτή γίνεται $H(z) = 1/(1 - 1,85z^{-1} + 0,85z^{-2})$ ή μετά την παραγοντοποίηση $H(z) = 1/(1 - z^{-1})(1 - 0,85z^{-1})$. Παρατηρούμε ότι η νέα συνάρτηση έχει πόλους στα σημεία $z = 1$ και $z = 0,85$. Ο ένας πόλος βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο με συνέπεια το σύστημα να μην είναι πλέον ευσταθές! Πράγματι, σχεδιάζοντας και πάλι την κρουστική απόκριση $h(n)$ του νέου συστήματος (Σχήμα 5.11β), παρατηρούμε ότι αυτή πολύ σύντομα αυξάνεται μέχρι να φτάσει σε μια σταθερή τιμή, στην οποία και παραμένει. Κατά συνέπεια, η κρουστική απόκριση δεν είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή (σχέση 3.52) και το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

Σχήμα 5.11

Κρουστική απόκριση του συστήματος του Παραδείγματος 5.8 για ακρίβεια των συντελεστών (α) άπειρη και (β) δύο δεκαδικών ψηφίων.



Από το παράδειγμα αυτό έγινε φανερό ότι τα σφάλματα λόγω της κβάντισης των συντελεστών του φίλτρου, μπορούν να επηρεάσουν δραστικά τη συμπεριφορά του. Αποδεικνύεται ότι η ευαισθησία της απόκρισης συχνότητας ενός φίλτρου, στην κβάντιση των συντελεστών του φίλτρου, μπορεί να ελαχιστοποιηθεί αν πραγματοποιήσουμε το υψηλής τάξης φίλτρο, (δηλαδή το φίλτρο με πολλούς πόλους και μηδενικά), ως συνδυασμό δομών δεύτερης τάξης σε σειρά ή παράλληλα (βλ. υποενότητα 3.4.4).

Γενικά, τα σφάλματα στα IIR είναι τριών ειδών:

1. Σφάλματα λόγω κβάντισης των συντελεστών του φίλτρου.
2. Σφάλματα λόγω υπερχείλισης (overflow), τα οποία προέρχονται από τις προσθήσεις των μερικών αποτελεσμάτων σε καταχωρητές περιορισμένου μήκους.
3. Σφάλματα λόγω στρογγύλευσης των γινομένων, τα οποία προέρχονται από την στρογγύλευση ή αποκοπή των ενδιάμεσων αριθμητικών πράξεων στο διαθέσιμο μήκος λέξης.

Ειδικά για τα επαναληπτικά φίλτρα που μελετάμε, οι μη γραμμικότητες οι οποίες

οφείλονται στις πράξεις με πεπερασμένη ακρίβεια, προκαλούν συνήθως κάποιες περιοδικές ταλαντώσεις στην έξοδο, ακόμη και όταν η είσοδος είναι μηδέν ή έχει μια σταθερή τιμή. Αυτές οι ταλαντώσεις ονομάζονται *οριακοί κύκλοι* (limit cycles) και οφείλονται στα σφάλματα στρογγύλευσης των γινομένων και στα σφάλματα υπερχειλίσης κατά την πρόσθεση.

Το κατά πόσο καθένα από τα σφάλματα αυτά επηρεάζει την τελική συμπεριφορά ενός φίλτρου, εξαρτάται από: (α) το μήκος λέξης και τον τύπο της αριθμητικής που χρησιμοποιείται για την υλοποίηση, (β) τη μέθοδο κβάντισης των συντελεστών (λ.χ. στρογγύλευση ή αποκοπή) και (γ) τη δομή πραγματοποίησης του φίλτρου.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή είδαμε ότι τα σφάλματα που παρουσιάζονται λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας αποτελούν ένα καθοριστικό παράγοντα στην επιλογή του τρόπου υλοποίησης ενός IIR φίλτρου. Τα σφάλματα αυτά αφορούν την κβάντιση των συντελεστών του φίλτρου, την υπερχειλίση κατά την εκτέλεση των προσθέσεων και τη στρογγύλευση κατά τον υπολογισμό των γινομένων. Ως γενικό κανόνα, είδαμε ότι τα υψηλής τάξης IIR ψηφιακά φίλτρα, θα πρέπει να υλοποιούνται ως συνδυασμός δομών δευτέρης τάξης, για την ελαχιστοποίηση των παραπάνω σφαλμάτων.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τα ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR). Η μελέτη αυτή αφορούσε κυρίως τη σχεδίαση και την υλοποίηση τέτοιων φίλτρων. Είδαμε ότι από όλες τις μεθόδους σχεδίασης IIR ψηφιακών φίλτρων, η πλέον συστηματική και γενική, δηλαδή η πλέον κατάλληλη για οποιοδήποτε τύπο φίλτρου, είναι η μέθοδος του διγραμμικού μετασχηματισμού. Με τη μέθοδο αυτή επιτυγχάνεται μια ένα-προς-ένα, αλλά μη γραμμική, απεικόνιση του φανταστικού άξονα του επιπέδου- s στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου- z . Επίσης, με τη μέθοδο αυτή από ευσταθή αναλογικά φίλτρα καταλήγουμε σε ευσταθή ψηφιακά φίλτρα.

Η ανάγκη σχεδίασης φίλτρων με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού μάς οδήγησε στο να κάνουμε μια μικρή αναφορά στα αναλογικά φίλτρα. Έτσι, γνωρίσαμε τα φίλτρα Butterworth, τα φίλτρα Chebyshev και τα Ελλειπτικά φίλτρα, καθώς και τους αναλογικούς μετασχηματισμούς συχνότητας, ώστε από ένα πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο να μπορούμε να παίρνουμε το επιθυμητό υψηπερατό, ζωνο-

διαβατό ή απόρριψης ζώνης φίλτρο.

Τέλος, γνωρίσαμε τα σχετικά με την υλοποίηση των IIR ψηφιακών φίλτρων που σχεδιάσαμε. Είδαμε ότι, κυρίως λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας, το ψηφιακό σύστημα μπορεί να μη συμπεριφέρεται όπως αρχικά είχε σχεδιαστεί. Ένα από τα βασικά μέτρα που πρέπει να λάβουμε, για να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα λόγω πεπερασμένης ακριβείας, είναι να υλοποιήσουμε τα υψηλής τάξης φίλτρα ως συνδυασμό (σε σειρά ή παράλληλα) δομών δεύτερης τάξης.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

E.C.Ifeachor, B.W. Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Second edition, Pearson Education Limited, 2002.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, McGraw Hill, 2001.

J.P.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, 1996.

R.D.Strum, D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

ΟΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ

J.P.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, 1996.

Στο βιβλίο αυτό θα βρείτε μια πολύ καλή παρουσίαση όλων των μεθόδων σχεδίασης IIR ψηφιακών φίλτρων. Επίσης γίνεται μια εξαιρετική παρουσίαση των αναλογικών φίλτρων.

R.D.Strum, D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988 .

Μια εκτεταμένη αναφορά στα αναλογικά φίλτρα και στις μεθόδους σχεδίασης IIR φίλτρων, με πολλά παραδείγματα, γίνεται στο δέκατο κεφάλαιο αυτού του βιβλίου.

Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

Aliasing	Φαινόμενο χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας
Analog filter	Αναλογικό φίλτρο
Bandpass filter	Ζωνοδιαβατό φίλτρο
Bandstop filter	Φίλτρο απόρριψης ζώνης
Bilinear transformation	Διγραμμικός μετασχηματισμός
Cascade realisation	Πραγματοποίηση σε σειρά
Computational complexity	Υπολογιστική πολυπλοκότητα
Elliptic	Ελλειπτικός
Finite wordlength effects	Φαινόμενα πεπερασμένου μήκους λέξης
FIR, Finite Impulse Response	Πεπερασμένη κρουστική απόκριση
Frequency warping	Στρέβλωση συχνότητας
Highpass filter	Υψηπερατό φίλτρο
IIR, Infinite Impulse Response	Άπειρη κρουστική απόκριση
Implementation	Υλοποίηση
Impulse invariance method	Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής
Limit cycles	Οριακοί κύκλοι
Lowpass filter	Βαθυπερατό φίλτρο
Parallel realisation	Παράλληλη πραγματοποίηση
Prewarping	Αντιστάθμιση στρέβλωσης
Prototype	Πρωτότυπο
Realisation structure	Δομή πραγματοποίησης
Recursive	Επαναληπτικός, αναδρομικός
Rounding	Στρογγύλευση
Truncation	Αποκοπή

5.1

Με βάση τους συμβολισμούς του Σχήματος 5.1 και τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε ότι:

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = -3 \text{ dB}, \text{ οπότε προκύπτει ότι } \varepsilon^2 = 1.$$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα -3 dB αντιστοιχούν στη συχνότητα Ω_c , για την οποία ξέρουμε ότι το μέτρο της απόκρισης ισούται με $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$F_p = 500 \text{ Hz}, \text{ οπότε } \Omega_p = 2\pi F_p = 2\pi 500 \text{ rad/sec.}$$

Σημειώστε ότι στην προκειμένη περίπτωση $\Omega_p \equiv \Omega_c$.

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = -40 \text{ dB}, \text{ οπότε } A^2 = 10^4$$

$$F_s = 1000 \text{ Hz}, \text{ οπότε } \Omega_s = 2\pi F_s = 2\pi 1000 \text{ rad/sec.}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.6) υπολογίζουμε την τάξη του φίλτρου:

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = \frac{\log_{10} \left[(A^2 - 1) / \varepsilon^2 \right]}{2 \log_{10}(\Omega_s / \Omega_p)} = \frac{\log_{10}(10^4 - 1)}{2 \log_{10}(2)} = 6,64$$

Άρα το φίλτρο το οποίο πληροί τις προδιαγραφές είναι έβδομης τάξης ($N = 7$).

Οι πόλοι του φίλτρου υπολογίζονται από τη σχέση (5.9)

$$s_q = 1000\pi e^{j\pi/2} e^{j(2q+1)\pi/14}, \quad q = 0, 1, \dots, 6.$$

Αν έχετε υπολογίσει τη σωστή τάξη του φίλτρου Butterworth, καθώς και τους πόλους του, τότε συγχαρητήρια. Είστε σε θέση να υπολογίζετε ένα από τα βασικότερα αναλογικά φίλτρα. Ουσιαστικά, έχετε κατανοήσει τη σημασία των διαφόρων παραμέτρων, γεγονός που θα σας διευκολύνει στους υπολογισμούς για τα επόμενα αναλογικά φίλτρα.

Σε αντίθετη περίπτωση, μην απογοητευθείτε. Μελετήστε και πάλι την υποενότητα 5.1.1 και στη συνέχεια διαβάστε με προσοχή το Παράδειγμα 5.1.

5.2

Η συνάρτηση μεταφοράς του πρωτότυπου αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου, που μας δίνεται, αντιπροσωπεύει ένα φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 1 \text{ rad/s}$, δηλ. $\Omega_p = \Omega_c = 1$. Αυτό που μας ζητείται είναι να σχεδιάσουμε και πάλι ένα φίλτρο

Chebyshev τύπου I, το οποίο όμως να είναι υψηλερατό και να έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega'_p = \Omega'_s = 4 \text{ rad/s}$. Το φίλτρο αυτό προκύπτει εύκολα με αντικατάσταση της μεταβλητής s του πρωτότυπου βαθυπερατού φίλτρου με $\Omega_p \Omega'_p / s = 4/s$, όπως υπολογεύεται από τη σχέση (5.16). Άρα η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς του υψηλερατού φίλτρου Chebyshev θα είναι:

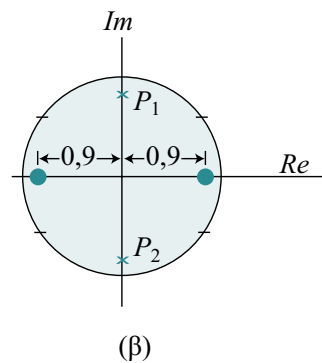
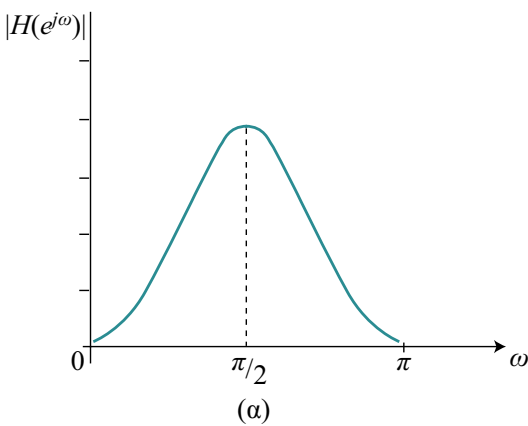
$$\begin{aligned} H_{HP}(s) &= H_p(s) \Big|_{s = \frac{4}{s}} = \frac{1}{s^2 + 1,098s + 1,103} \Big|_{s = \frac{4}{s}} = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{4}{s}\right)^2 + 1,098\left(\frac{4}{s}\right) + 1,103} = \frac{s^2}{1,103s^2 + 4,392s + 16} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το υψηλερατό φίλτρο που προέκυψε είναι ίδιας τάξης με το αρχικό βαθυπερατό φίλτρο, δηλαδή δεύτερης τάξης. Το φίλτρο αυτό παρουσιάζει ένα μηδενικό για $s = 0$. Με άλλα λόγια, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για $\Omega = 0$ η απόκριση είναι $H(j\Omega) = 0$, γεγονός που συμφωνεί με την υψηλερατή ιδιότητα του φίλτρου.

Στην περίπτωση που έχετε απαντήσει σωστά, μπράβο σας, γιατί κατανοήσατε το μηχανισμό μετασχηματισμού από τον ένα τύπο αναλογικού φίλτρου στον άλλον. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο και απαραίτητο για την όλη σχεδίαση των ψηφιακών IIR φίλτρων. Αν δεν βρήκατε τη σωστή απάντηση, προσπαθήστε πάλι χρησιμοποιώντας με προσοχή τις σχέσεις (5.16) και (5.17). Προσπαθήστε επίσης να καταλάβετε το Παράδειγμα 5.2.

5.3

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου πρέπει να έχει τη μορφή του Σχήματος 5.12α. Αφού η απόκριση θα πρέπει σχεδόν να μηδενίζεται για $\omega = 0$ και $\omega = \pi$, συνεπάγεται ότι στα σημεία αυτά θα πρέπει να υπάρχουν κάποια μηδενικά.



Σχήμα 5.12

(α) Επιθυμητή απόκριση του ζωνοδιαβατού ψηφιακού φίλτρου, (β) πόλοι και μηδενικά στο επίπεδο z

Έστω ότι τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις $z = 0,9$ και $z = -0,9$ (Σχήμα 5.12β). Από την άλλη πλευρά, για $\omega = \pi/2$ η απόκριση παρουσιάζει μέγιστο και άρα η συνάρτηση μεταφοράς θα πρέπει να έχει κάποιον πόλο στο σημείο αυτό. Έστω ότι ο πόλος αυτός βρίσκεται στο σημείο $z = 0,9e^{j\frac{\pi}{2}}$, δηλαδή εντός του μοναδιαίου κύκλου, ώστε το φίλτρο να είναι ευσταθές (σημείο P_1 στο Σχήμα 5.12β). Αφού ο πόλος είναι μιγαδικός, θα πρέπει να υπάρχει και ο συζυγής αυτού $z = 0,9e^{-j\frac{\pi}{2}}$ (σημείο P_2 στο Σχήμα 5.12β), ώστε οι τελικοί συντελεστές του φίλτρου που θα προκύψει, να είναι πραγματικοί. Άρα η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου θα είναι:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} = \frac{a_0z^2 + a_1z + a_2}{z^2 + b_1z + b_2} = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} = \\ &= \frac{(z - 0,9)(z + 0,9)}{(z - 0,9e^{j\pi/2})(z - 0,9e^{-j\pi/2})} = \frac{z^2 - 0,81}{z^2 + 0,81} = \frac{1 - 0,81z^{-2}}{1 + 0,81z^{-2}} \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ζητούμενοι συντελεστές του φίλτρου είναι: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -0,81$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0,81$. Η εξίσωση διαφορών του επιθυμητού φίλτρου θα ισούται με (βλ. σχέση 3.59): $y(n) = x(n) - 0,81x(n-2) - 0,81y(n-2)$.

Αν έχετε υπολογίσει σωστά το ζωνοδιαβατό ψηφιακό φίλτρο, τότε συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει τη χρησιμότητα του μοναδιαίου κύκλου και του μιγαδικού επιπέδου. Αυτό θα σας φανεί χρήσιμο και στις υπόλοιπες μεθόδους σχεδίασης ψηφιακών IIR φίλτρων. Αν δεν υπολογίσατε σωστά το φίλτρο, ξαναπροσπαθήστε αφού μελετήσετε πρώτα το Παράδειγμα 3.10.

5.4

Η συνάρτηση $H(s)$ έχει τρεις διαφορετικούς πόλους $p_1 = -1$, $p_2 = -0,5 + j0,87$, $p_3 = -0,5 - j0,87$. Εκφράζουμε την $H(s)$ ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+0,5-j0,87} + \frac{C_3}{s+0,5+j0,87} \text{ και βρίσκουμε ότι:}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 0,6e^{-j2,6}, C_3 = 0,6e^{j2,6}$$

Υπολογίζουμε την $H(z)$ με βάση τη σχέση (5.30), αντικαθιστώντας το $s - p_\xi$ με το $1 - e^{p_\xi T} z^{-1}$, δηλαδή:

$$H(z) = \frac{C_1}{1 - e^{-T} z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - e^{(-0,5+j0,87)T} z^{-1}} + \frac{C_3}{1 - e^{(-0,5-j0,87)T} z^{-1}}$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στη συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου:

$$H(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z}{z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}$$

$$\text{όπου } a_0 = -2e^{-0,5T} \cos(0,87T) + e^{-T} + 1,15e^{-0,5T} \cos(5\pi/6 + 0,87T)$$

$$a_1 = e^{-T} + 1,15e^{-1,5T} \cos(5\pi/6 + 0,87T)$$

$$b_1 = -e^{-T} - 2e^{-0,5T} \cos(0,87T)$$

$$b_2 = e^{-T} + 2e^{-1,5T} \cos(0,87T)$$

$$b_3 = -e^{-2T}$$

Αν έχετε βρει τη σωστή συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου, τότε αξίζετε συγχαρητήρια, γιατί η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής αποτελεί μία σχετικά πολύπλοκη διαδικασία μετάβασης από τον αναλογικό στον ψηφιακό χώρο.

Αν δεν βρήκατε τη σωστή συνάρτηση μεταφοράς τότε προσπαθήστε πάλι. Χρειάζεται επιμονή. Θυμηθείτε ότι πρέπει πρώτα να αναπτύξετε την $H(s)$ σε μερικά κλάσματα με διαφορετικούς πόλους σύμφωνα με τη σχέση (5.26) και στη συνέχεια να κάνετε τη μετατροπή που δείχνει η σχέση (5.30). Προτείνουμε, πριν ξεκινήσετε, να μελετήσετε και πάλι το Παράδειγμα 5.4.

5.5

Θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα υψηλερατό φίλτρο του οποίου η συχνότητα αποκοπής να είναι 30 Hz, όταν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 150 Hz. Η διαδικασία σχεδίασης, όπως και οι συχνότητες ω_c και Ω'_c είναι ίδιες με εκείνες του Παραδείγματος 5.5. Το μόνο που θα πρέπει να αλλάξει είναι ο μετασχηματισμός συχνότητας, ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση θα είναι από βαθυπερατό σε υψηλερατό αναλογικό φίλτρο, όπως μας υπαγορεύει η σχέση (5.17), δηλαδή:

$$H_{HP}(s) = H_p(s) \Bigg|_{s = \frac{\Omega_c \Omega'_c}{s}} = \frac{1 \cdot \Omega'_c}{s} = \frac{0,73}{s} = \frac{1}{\frac{0,73}{s} + 1} = \frac{s}{s + 0,73}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση το s με το $(z - 1)/(z + 1)$ καταλήγουμε στη

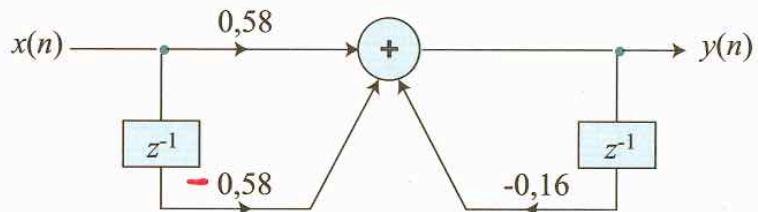
ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς του υπερπαρατού ψηφιακού φίλτρου:

$$H(z) = H_{HP}(s) \Bigg|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + 0,73} = \frac{z-1}{1,73z + 0,27} = \frac{0,58(1-z^{-1})}{1 + 0,16z^{-1}}$$

Η εξίσωση διαφορών του φίλτρου είναι $y(n) = 0,58[x(n) - x(n-1)] + 0,16y(n-1)$. Πρόκειται και πάλι για ένα ψηφιακό φίλτρο πρώτης τάξης, όπως και το αντίστοιχο αναλογικό, στο οποίο βασίσαμε τη σχεδίασή μας. Η δομή πραγματοποίησής του φαίνεται στο Σχήμα 5.13. Παρατηρούμε ότι η κύρια διαφορά με το βαθυπερατό φίλτρο του Σχήματος 5.9β βρίσκεται στα πρόσημα των συντελεστών του φίλτρου.

Σχήμα 5.13

Δομή πραγματοποίησης του πρώτης τάξεως υπερπαρατού φίλτρου της Άσκησης Αυτοαξιολόγησης 5.5



Αν απαντήσατε σωστά στην άσκηση αυτή, σημαίνει ότι καταλάβατε την πιο διαδομένη μέθοδο σχεδίασης IIR φίλτρων. Μπράβο σας! Στην αντίθετη περίπτωση μελετήστε ξανά το Παράδειγμα 5.5 και προσέξτε τον μετασχηματισμό που θα κότε αρχικά από το βαθυπερατό αναλογικό σε υπερπαρατό αναλογικό φίλτρο με τις σχέσεις (5.16) και (5.17).

5.6

Για να σχεδιάσουμε το ζητούμενο ζωνοδιαβατό φίλτρο, ακολουθούμε τα τρία σβδια σχεδίασης της ενότητας 5.2.3:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο. Στην άσκηση αυτή ζητείται να σχεδιάσουμε ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο δεύτερης τάξης. Με βάση δεύτερο σχόλιο της υποενότητας 5.2.3, καταλαβαίνουμε ότι το αναλογικό βαθυπερατό Butterworth φίλτρο από το οποίο θα προέλθει το ψηφιακό φίλτρο, θα ππει να είναι πρώτης τάξης, δηλαδή της μορφής $H_p(s) = 1/(s + 1)$.
2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο σε ζωνοδιαβατό με συχνότητες Ω_l' και Ω_u' στα όρια της ζώνης διέλευσης.

$$\Omega_l' = \tan(\omega_l/2) = \tan(\Omega_l T/2) = \tan(2\pi 200(1/2000)/2) = \tan(0,1\pi) = 0,32$$

$$\Omega_u' = \tan(\omega_u/2) = \tan(\Omega_u T/2) = \tan(2\pi 300(1/2000)/2) = \tan(0,15\pi) = 0,51.$$

Ο μετασχηματισμός συχνότητας στον αναλογικό χώρο από βαθυπερατό σε ζωνοδιαβατό επιτυγχάνεται με βάση τη σχέση (5.19) και μας δίνει:

$$H_{BP}(s) = H_p(s) \Bigg|_{s = \Omega_c \frac{s^2 + \Omega_l' \Omega_u'}{s(\Omega_u' - \Omega_l')}} = \frac{s^2 + 0,32 \cdot 0,51}{s(0,51 - 0,32)} = \frac{s^2 + 0,17}{s \cdot 0,19}$$

$$= \frac{1}{s+1} \Bigg|_{s = \frac{s^2 + 0,17}{0,19s}} = \frac{1}{\left(\frac{s^2 + 0,17}{0,19s}\right) + 1} = \frac{0,19s}{s^2 + 0,19s + 0,17}$$

3. Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στη συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοδιαβατού αναλογικού φίλτρου, που μόλις υπολογίσαμε, αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση όπου s το $(z-1)/(z+1)$

$$H(z) = H_{BP}(s) \Bigg|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,19s}{s^2 + 0,19s + 0,17} \Bigg|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,19 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0,19 \left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 0,17} =$$

$$= \frac{0,19(z^2 - 1)}{1,36z^2 - 1,66z + 0,98} = \frac{0,14(1 - z^{-2})}{1 - 1,22z^{-1} + 0,72z^{-2}}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών του IIR ψηφιακού φίλτρου είναι:

$$y(n) = 0,14[x(n) - x(n-2)] + 1,22y(n-1) - 0,72y(n-2).$$

Σας αξίζουν συγχαρητήρια αν απαντήσατε στην άσκηση αυτή. Πρόκειται για σχετικά δύσκολη άσκηση, αφού η διαδικασία απαιτεί τη μετατροπή από αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο πρώτης τάξης σε αναλογικό ζωνοδιαβατό φίλτρο δεύτερης τάξης.

Στην περίπτωση που δεν τα καταφέρατε, μην απογοητευθείτε. Καταρχήν διαβάστε και πάλι το Παράδειγμα 5.2. Στη συνέχεια, επικεντρώστε τη προσοχή σας στις σχέσεις (5.18) και (5.19) και στα σχόλια που τις συνοδεύουν. Θα διαπιστώσετε ότι σε δεύτερης τάξης ζωνοδιαβατό φίλτρο καταλήγουμε από πρώτης τάξης βαθυπερατό φίλτρο. Τα υπόλοιπα βήματα είναι τα ίδια με εκείνα που είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα. Ξαναπροσπαθήστε...

6.1

Η ασπρόμαυρη εικόνα χρειάζεται συνολικά $128 \times 128 = 16.384$ bytes μνήμης. Αντίθετα, η έγχρωμη απαιτεί 3 bytes/εικονοστοιχείο, δηλαδή συνολικά $512 \times 512 \times 3 =$