ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Γ - ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023-2024

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ Ή ΤΥΧΑΙΑ ΣΗΜΑΤΑ

— STOCHASTIC / RANDOM SIGNALS —

Τα σήματα με τα οποία ασχοληθήκαμε μέχρι τώρα ήταν επακριβώς ορισμένα είτε μέσω μιας μαθηματικής έκφρασης, είτε ενός κανόνα, είτε ενός συγκεκριμένου πίνακα αναφοράς. Ένα τέτοιο σήμα ονομάζεται νομοτελειακό ή ντετερμινιστικό (deterministic signal), αφού όλες οι τιμές των δειγμάτων της ακολουθίας (του σήματος) είναι καλά ορισμένες για κάθε τιμή του χρόνου. Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι τα εκθετικά ή τα ημιτονοειδή σήματα.

Σήματα των οποίων τα δείγματα προκύπτουν με τυχαίο τρόπο και δεν μπορούν να προβλεφθούν, ονομάζονται τυχαία ή στοχαστικά σήματα. Τέτοια σήματα δεν μπορούν να αναπαραχθούν ακόμη και αν γνωρίζουμε τη διαδικασία δημιουργίας τους και γι' αυτό απαιτείται η μοντελοποίησή τους με βάση τη στατιστική πληροφορία του κάθε σήματος. Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι τα σεισμικά, η φωνή, η μουσική, ο θόρυβος κβάντισης, κ.ά.

Μια στοχαστική ή τυχαία διαδικασία (process) αποτελείται τυπικά από μια άπειρη συλλογή/σύνολο (collection/ensemble) σημάτων συνεχούς ή διακριτού χρόνου και συμβολίζεται ως $X(t)$ ή $\{X(n)\}$ αντίστοιχα. Ένα συγκεκριμένο σήμα της συλλογής αυτής $x(t)$ ή $\{x(n)\}$ ονομάζεται εμφάνιση ή δείγμα ή πραγματοποίηση (sample / realization) της στοχαστικής διαδικασίας. Σε μία χρονική στιγμή t ή n, η τιμή του δείγματος $x(t)$ ή $x(n)$ είναι αυτή που παίρνει η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ή $X(n)$. Επομένως, μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(t)$ ή $X(n)$.

Μια τυχαία διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως μια τυχαία μεταβλητή η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου.

Γενικά, μια τυχαία διαδικασία συμβολίζεται ως $X(t,s)$ και είναι μια οικογένεια (ένα σύνολο) συναρτήσεων ως προς τον χρόνο t και ως προς το αποτέλεσμα s του τυχαίου πειράματος. Τα t και s είναι μεταβλητές. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. t μεταβλητή και s σταθερά: πρόκειται για μια συνάρτηση μιας μεταβλητής, τον χρόνο, συμβολίζεται ως $x(t)$ και αποτελεί μια πραγματωση της τυχαίας (στοχαστικής) διαδικασίας.

β. t σταθερά και s μεταβλητή: πρόκειται για τυχαία μεταβλητή $X(t)$ η οποία μας δίνει την κατάσταση της τυχαίας διαδικασίας στον χρόνο t.

γ. t σταθερά και s σταθερά: πρόκειται για έναν αριθμό

Στα επόμενα για λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε την τυχαία (στοχαστική) διαδικασία ως $X(t)$ αντί για $X(t,s)$.

Συνεχής ή Διακριτός Χρόνος ή Τιμή

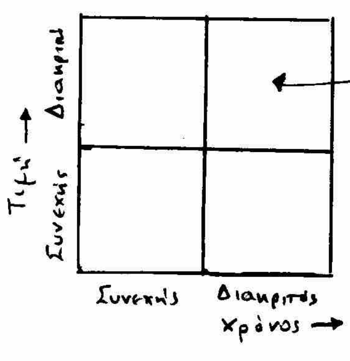
Στοχαστική διαδικασία (ΣΔ) συνεχούς χρόνου $X(t)$: ορίζεται για οποιαδήποτε χρονική τιμή

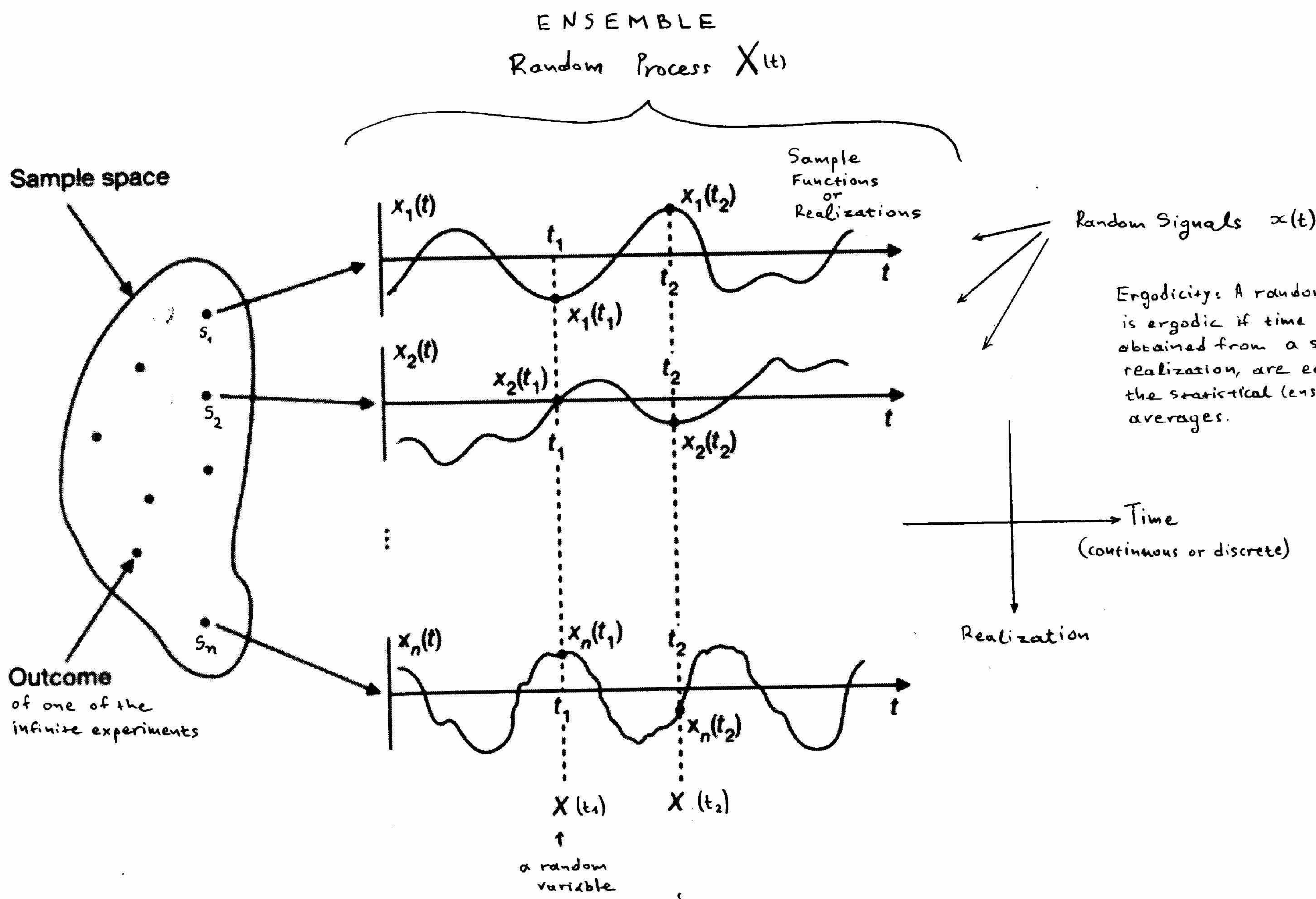
ΣΔ διακριτού χρόνου $X(n)$: ορίζεται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές

Συνεχής ΣΔ: Η τιμή της συνεχούς ΣΔ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Διακριτή ΣΔ: Η τιμή της διακριτής ΣΔ είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή.

Οι διακριτές ΣΔ διακριτού χρόνου ονομάζονται και αλυσίδες.



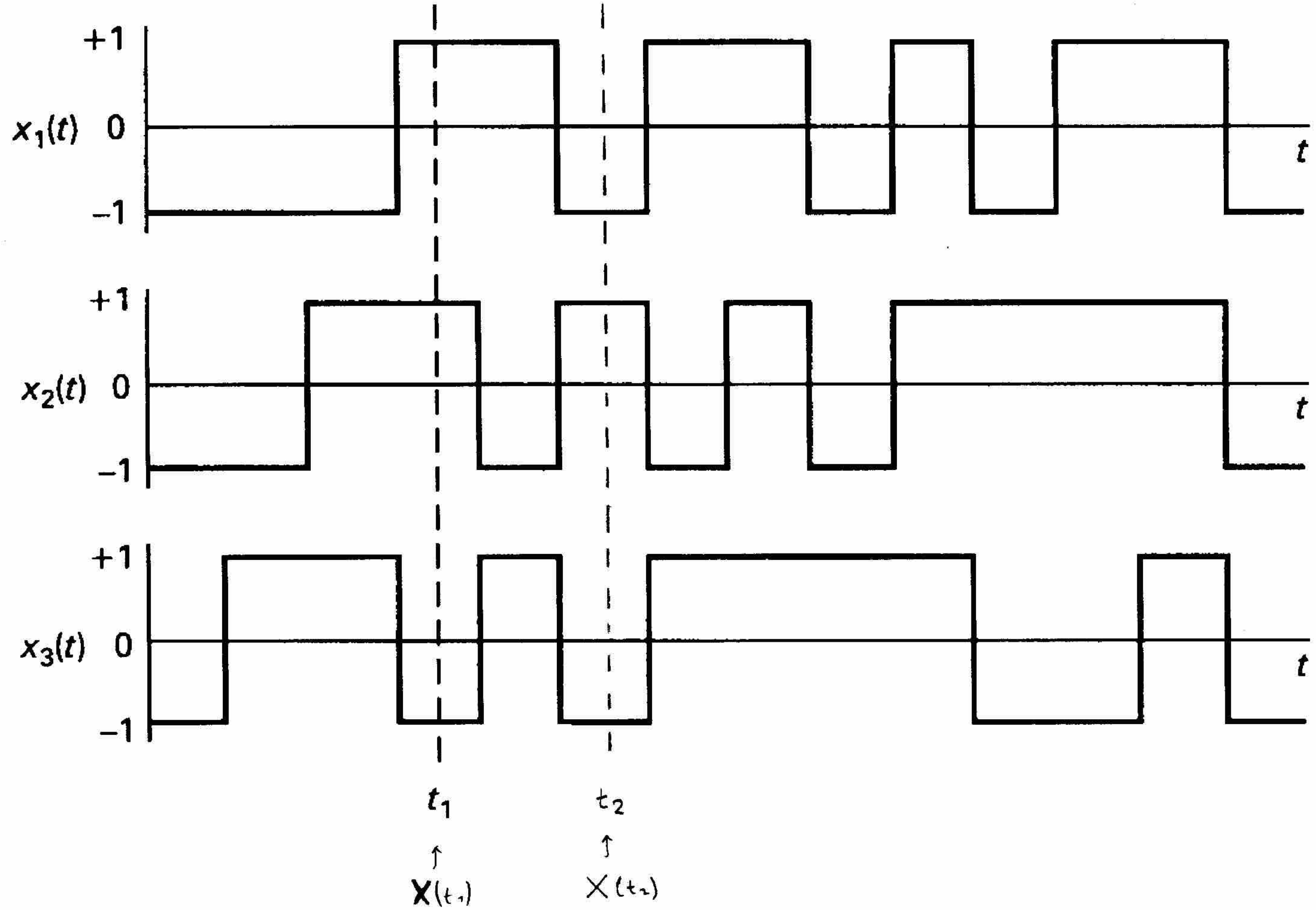


Ergodicity: A random process is ergodic if time averages, obtained from a single realization, are equal to the statistical (ensemble) averages.

Statistical or Ensemble averages: A signal whose ensemble averages do not change with time is known as stationary signal.

Παράδειγμα τυχαίας διαδικασίας: Ρίψη νομίσματος κάθε 10 sec. Εάν το αποτέλεσμα είναι 'κεφάλι,' τότε +1.
Εάν το αποτέλεσμα είναι "γράμματα", τότε −1.

Σημείωση: Στην διακριτού χρόνου περίπτωση, εάν η μία ρίψη δεν επηρεάζει καμία άλλη ρίψη, η παραγόμενη τυχαία διαδικασία ονομάζεται Bernulli.



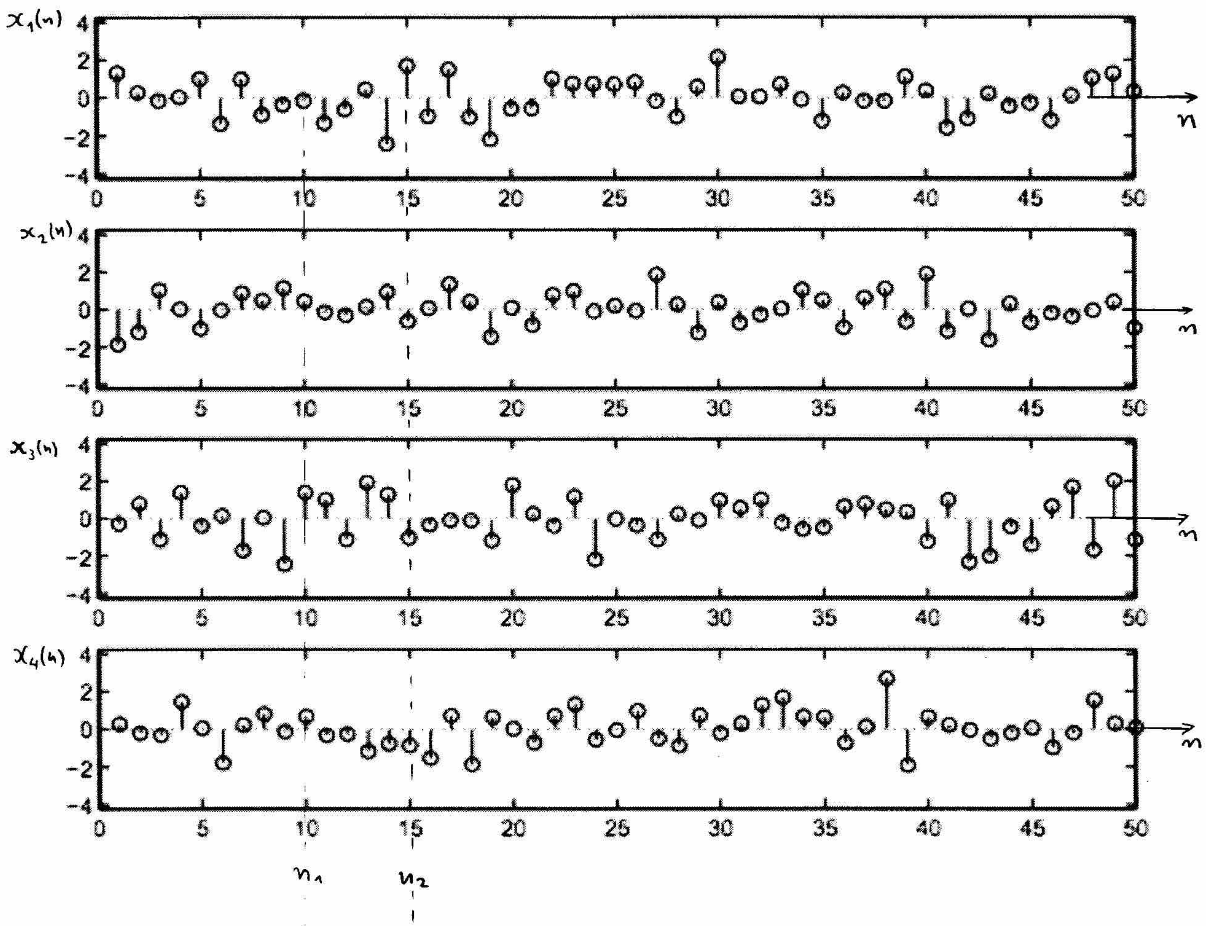
Realization means = σταθ.

ergodic

Ensemble averages = σταθ. → στάσιμο

ENSEMBLE

Stochastic or Random Process $X(n)$



Stochastic or Random signals $x(n)$ (Realizations)

$X(n_1)$ $X(n_2)$

Random Variables

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. Μια τυχαία μεταβλητή X

Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει τιμή στην περιοχή από $-\infty$ έως α, δίνεται από τη <u>συνάρτηση κατανομής πιθανότητας</u> (probability distribution function or cumulative distribution function - cdf)

$$P_x(\alpha) = \text{Πιθανότητα}[X \le \alpha] \quad \text{ή} \quad P_x(\alpha) = Pr[X \le \alpha]$$

Η <u>συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας</u> (probability density function - pdf) του X ορίζεται ως

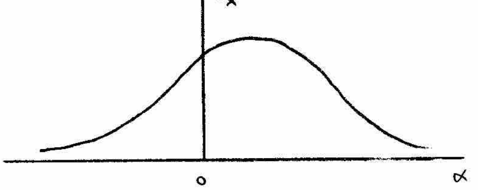
$$p_x(\alpha) = \frac{\partial P_x(\alpha)}{\partial \alpha}$$

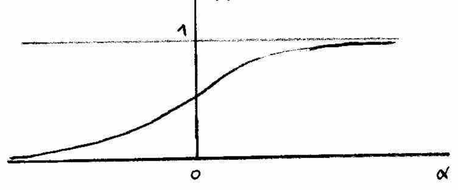
όπου θεωρήσαμε ότι η X μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή (συνεχές διάστημα τιμών).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας ισούται με:

$$P_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} p_x(u)\, du$$

Ιδιότητες της pdf $p_x(\alpha)$	Ιδιότητες της $P_x(\alpha)$
$p_x(\alpha) \geq 0$ (αφού η $P_x(\alpha)$ είναι μονοτονικά αύξουσα)	$0 \le P_x(\alpha) \le 1$
$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(\alpha)\, d\alpha = 1$	$P_x(\alpha_1) \le P_x(\alpha_2) \quad \forall\ \alpha_1 \le \alpha_2$
	$P_x(-\infty) = 0 \qquad P_x(+\infty) = 1$
	$Pr[\alpha_1 \le X \le \alpha_2] = P_x(\alpha_2) - P_x(\alpha_1)$





Μια τυχαία μεταβλητή χαρακτηρίζεται από διάφορες στατιστικές ιδιότητες, όπως τις ροπές n τάξης (n^{th} moments):

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n p_x(\alpha)\, d\alpha$$

όπου n ένας μη αρνητικός ακέραιος και $E(\cdot)$ ο τελεστής της αναμενόμενης τιμής.

Μια τυχαία μεταβλητή χαρακτηρίζεται <u>πλήρως</u> από <u>όλες τις ροπές της.</u>

Στις περισσότερες των περιπτώσεων όμως, και με δεδομένο ότι όλες οι ροπές δεν είναι εύκολο ή είναι αδύνατον να υπολογιστούν, χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες τρεις:

Μέσος όρος ή Μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή (mean or expected or average value or first moment)	$m_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, p_x(\alpha)\, d\alpha$	(1)
Μέση τετραγωνική τιμή (mean-square value or second moment)	$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2\, p_x(\alpha)\, d\alpha$	
Διασπορά ή Διακύμανση (variance or centered second moment)	$\sigma_x^2 = E([X-m_x]^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - m_x)^2\, p_x(\alpha)\, d\alpha$	

- Αποδεικνύεται εύκολα ότι: (2) $\quad \sigma_x^2 = E(X^2) - (m_x)^2$

- Παρατηρούμε ότι για μια τυχαία μεταβλητή με μηδενική μέση τιμή, η διασπορά και η μέση τετραγωνική τιμή ταυτίζονται.

- Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, σ_x, ονομάζεται τυπική απόκλιση (standard deviation) της τυχαίας μεταβλητής.

---

(1) $E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) p_x(\alpha)\, d\alpha$

(2) $\sigma_x^2 = E([X-m_x]^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - m_x)^2 p_x(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 - 2\alpha m_x + m_x^2)\, p_x(\alpha)\, d\alpha =$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 p_x(\alpha)\, d\alpha}_{E(X^2)} - 2 m_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, p_x(\alpha)\, d\alpha}_{m_x} + m_x^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_x(\alpha)\, d\alpha}_{1} =$$

$$= E(X^2) - 2 m_x^2 + m_x^2 =$$

$$= E(X^2) - m_x^2$$

- Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή m_x είναι η βέλτιστη σταθερά που αναπαριστά την τυχαία μεταβλητή X, κατά την έννοια του ελάχιστου μέσου-τετραγωνικού σφάλματος.

  Με άλλα λόγια, η ποσότητα $E([X-m]^2)$ είναι ελάχιστη για $m=m_x$ και το ελάχιστο μέσο-τετραγωνικό σφάλμα δίνεται από τη διασπορά αυτού σ_x^2.

  Αυτό σημαίνει ότι εάν η διασπορά είναι μικρή, τότε μια τιμή του X είναι πολύ πιθανόν ότι είναι πλησίον της m_x, ενώ εάν η διασπορά είναι μεγάλη, τότε μια τιμή του X είναι πολύ πιθανόν να βρίσκεται μακριά από την m_x.

- Η μέση τιμή του αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών ισούται με το άθροισμα των μέσων τιμών καθεμιάς:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Ιδιότητες της αναμενόμενης τιμής

Έστω X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές και α, b, c σταθερές.
Ισχύει η ιδιότητα της γραμμικότητας

$$\boxed{E(\alpha Y + bZ) = \alpha E(Y) + bE(Z)}$$

Με βάση την σχέση αυτή και το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα της pdf ισούται με 1, έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} &E(c) = c \\ &E(X+c) = E(X) + c \\ &E(cX) = cE(X) \\ &E(E(X)) = E(X) \end{aligned}}$$

Ροπές μιας κατανομής

Είδαμε ότι $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\, p_X(\alpha)\, d\alpha$$

Για $g(X) = X^n$, για $n=1,2,3,\ldots$ έχουμε την n-στή ροπή της κατανομής

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n\, p_X(\alpha)\, d\alpha$$

Από την σχέση αυτή προκύπτουν οι ροπές 1ης, 2ης, 3ης, ... τάξης, όπως έχουμε ήδη δει στα προηγούμενα.

Όταν η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής δεν είναι 0 (μηδέν), τότε είναι πιο χρήσιμο να χρησιμοποιούμε τις ροπές που έχουν ως αναφορά (ως κέντρο) την μέση τιμή. Αυτές οι ροπές ονομάζονται κεντρικές (central moments) και ορίζονται ως:

$$E\left((X-m_X)^n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - m_X)^n\, p_X(\alpha)\, d\alpha$$

όπου $m_X = E(X)$ η πρώτη ροπή ή μέση τιμή, δηλ. $m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, p_X(\alpha)\, d\alpha$

Η δεύτερη κεντρική ροπή ονομάζεται διασπορά ή διακύμανση (variance) και ορίζεται ως:

$$\sigma_X^2 = Var[X] = E\left((X-m_X)^2\right)$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, σ_X, ονομάζεται τυπική απόκλιση (standard deviation) και έχει τις ίδιες μονάδες με την τυχαία μεταβλητή X. Αυτή είναι σημαντική διότι δείχνει το εύρος της συνάρτησης κατανομής.

Ιδιότητες της διασποράς

$$\boxed{\begin{aligned} Var[c] &= 0 \quad \text{όπου } c = \text{σταθερά} \\ Var[X+c] &= Var[X] \\ Var[cX] &= c^2\, Var[X] \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Var[X] &= E(X^2) - m_x^2 \\ &\text{ή} \\ \sigma_x^2 &= E(X^2) - m_x^2 \end{aligned}}$$

Κεντρικές ροπές υψηλότερης τάξης

Πρόκειται για κανονικοποιημένες ποσότητες που σχετίζονται με την τρίτη και τέταρτη κεντρική ροπή και οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά στην ανάλυση μη-Γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών.

Λοξότητα (skewness)

$$\alpha_3 = \frac{E\left((x-m_x)^3\right)}{\sigma_x^3}$$

Κύρτωση (kurtosis)

$$\alpha_4 = \frac{E\left((x-m_x)^4\right)}{\sigma_x^4} - 3$$

Η λοξότητα και η κύρτωση για Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές είναι μηδενικές.

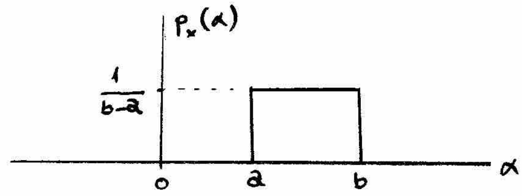
Η λοξότητα χρησιμοποιείται για την μέτρηση της ασυμμετρίας μιας κατανομής. Οι συμμετρικές κατανομές (pdf) γύρω από την μέση τιμή τους, έχουν μηδενική λοξότητα.

Η κύρτωση χρησιμοποιείται συνήθως για την μέτρηση της απόκλισης μιας κατανομής από την Γκαουσιανή pdf. Κατανομές που είναι "πιο κοντά στην Γκαουσιανή" έχουν μικρότερες τιμές κύρτωσης.

- Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (pdf) που απαντώνται πιο συχνά στις εφαρμογές της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων είναι:

  - συνάρτηση ομοιόμορφης πυκνότητας (uniform density function)

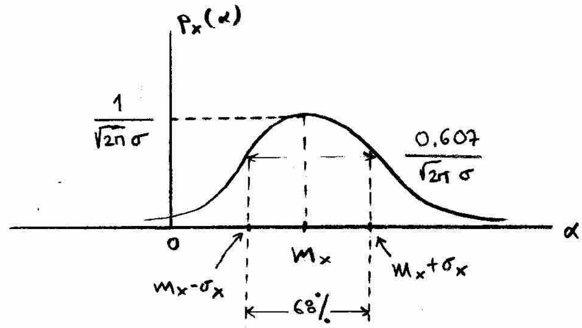
$$p_x(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{για } a \le \alpha \le b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



  - συνάρτηση Γκαουσιανής πυκνότητας (Gaussian density function) ή συνάρτηση κανονικής πυκνότητας (normal density function)

$$p_x(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(\alpha - m_x)^2}$$

όπου $-\infty < m_x < \infty$
$\sigma_x > 0$



Σημείωση: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

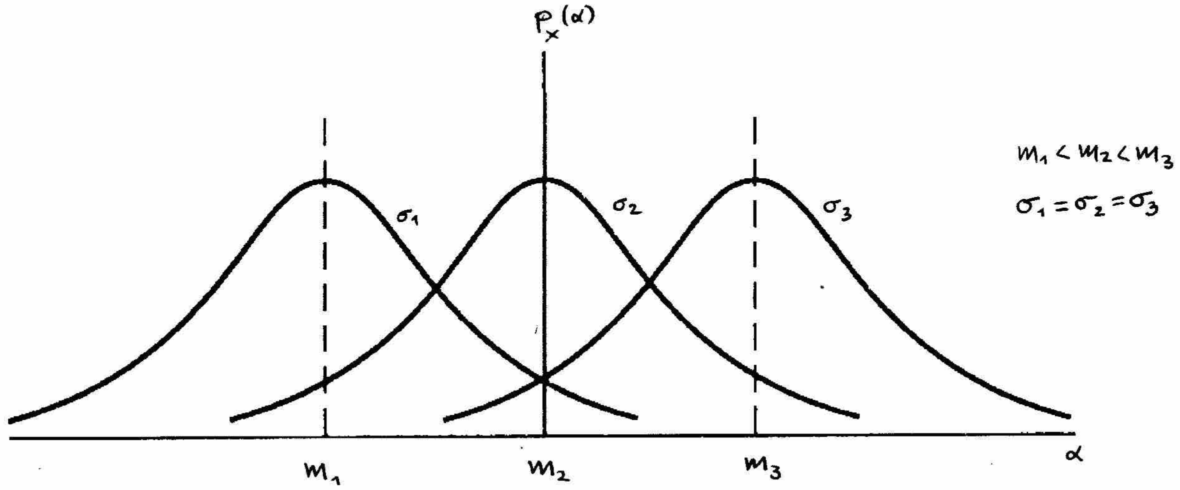
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \xrightarrow{\text{για } \alpha = 1/2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}} = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

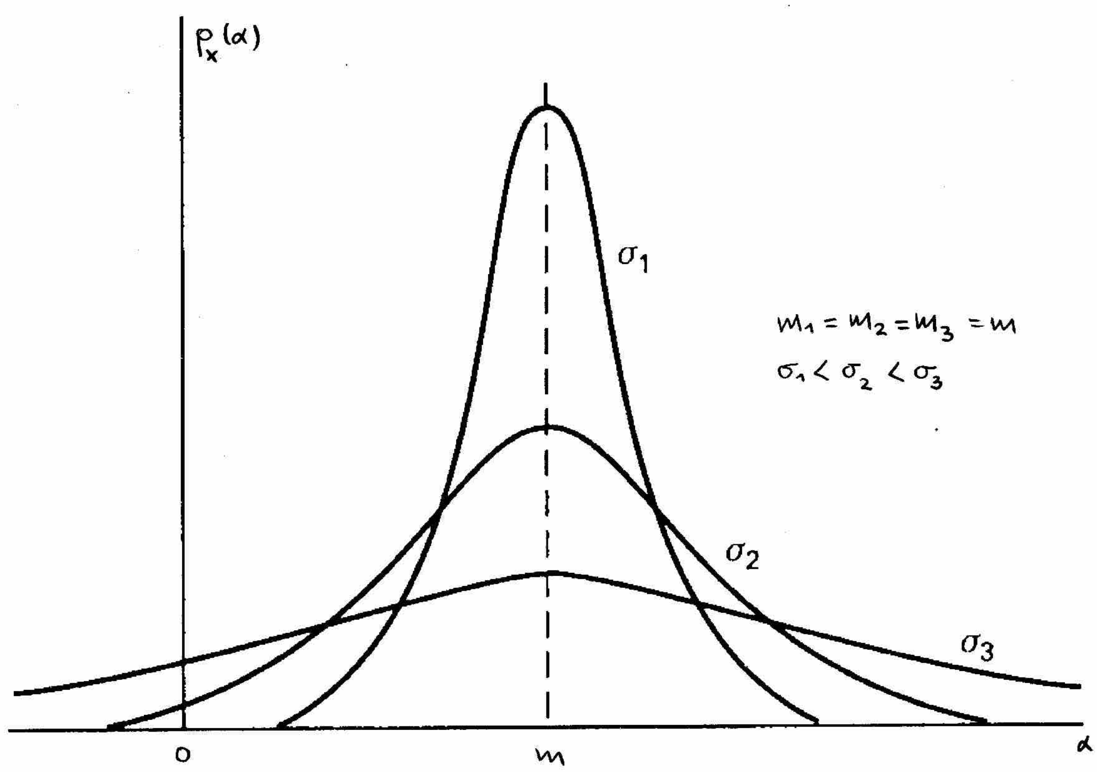
Διαιρούμε με αυτή την τιμή ώστε η πιθανότητα να γίνει μονάδα.

Σημείωση Η συνάρτηση κανονικής πυκνότητας πιθανότητας ή Gaussian δίνεται από τη σχέση

$$p_x(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(\alpha - m_x)^2}$$

Η μέση τιμή m_x προσδιορίζει το "κέντρο βάρους" της συνάρτησης, ενώ η διασπορά σ_x^2 την έκταση που καταλαμβάνουν οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής γύρω από το "κέντρο βάρους".

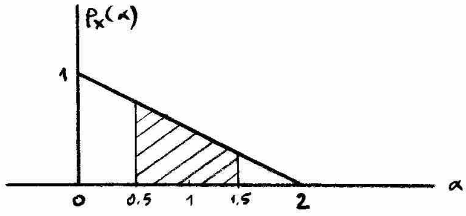




Παράδειγμα Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $P_x(\alpha)$, η μέση τιμή m_x, η μέση τετραγωνική τιμή $E(X^2)$ και η διασπορά σ_x^2 μιας τυχαίας μεταβλητής X της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι $p_x(\alpha) = \begin{cases} 1-\frac{\alpha}{2} & \text{για } 0 \le \alpha \le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας είναι αυτή του σχήματος. (Αγνοείστε προς στιγμήν το γραμμοσκιασμένο τμήμα).



Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, με βάση τον ορισμό ισούται με:

$$P_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} p_x(u)\, du = \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{u}{2}\right) du = \alpha - \frac{\alpha^2}{4} \qquad \text{για } 0 < \alpha \le 2$$

Η μέση (αναμενόμενη) τιμή της μεταβλητής X είναι:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, p_x(\alpha)\, d\alpha = \int_0^2 \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = \frac{2}{3}$$

Η μέση τετραγωνική τιμή είναι:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 p_x(\alpha)\, d\alpha = \int_0^2 \alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = \frac{2}{3}$$

Η διασπορά υπολογίζεται εύκολα από τα πιο πάνω αποτελέσματα:

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - (m_x)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

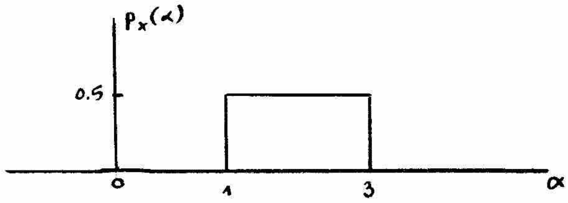
Σημείωση: Από τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας θα μπορούσαμε εύκολα να υπολογίσουμε την πιθανότητα η τιμή της X να βρίσκεται μέσα σε μια περιοχή τιμών.

Για παράδειγμα, η πιθανότητα η X να βρίσκεται μεταξύ 0.5 και 1.5, δηλαδή $0.5 < X \le 1.5$, υπολογίζεται ως:

$$\text{Πιθανότητα}\left[0.5 < X \le 1.5\right] = P_x(1.5) - P_x(0.5) =$$
$$= \frac{15}{16} - \frac{7}{16} = \frac{1}{2}$$

Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στο εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής του σχήματος.

Παράδειγμα Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής X της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι ομοιόμορφη και δίνεται στο σχήμα.



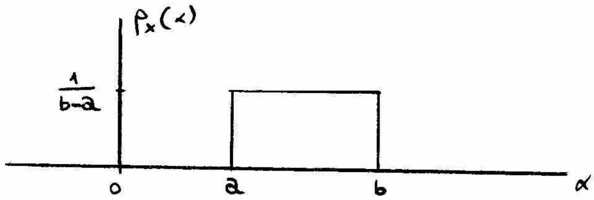
Λύση

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, p_x(\alpha)\, d\alpha = \int_1^3 0.5\, \alpha\, d\alpha = 0.5 \left.\frac{\alpha^2}{2}\right|_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 p_x(\alpha)\, d\alpha = \int_1^3 0.5\, \alpha^2 d\alpha = 0.5 \left.\frac{\alpha^3}{3}\right|_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

Άρα $\sigma_x^2 = E(X^2) - (m_x)^2 = \frac{13}{3} - 2^2 = \frac{13}{3} - \frac{12}{3} = \frac{1}{3}$

<u>Γενίκευση:</u> Για τη συνάρτηση ομοιόμορφης πυκνότητας έχουμε:

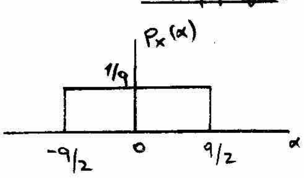


$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, p_x(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha\, d\alpha = \frac{1}{b-a} \left.\frac{\alpha^2}{2}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 p_x(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha^2 d\alpha = \frac{1}{b-a}\left.\frac{\alpha^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - (m_x)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

<u>Εφαρμογή:</u> Ο θόρυβος κβάντισης (quantization noise) για στρογγύλευση (rounding) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος μεταξύ $-q/2$ και $q/2$, όπου q το βήμα κβάντισης. Άρα η μέση τιμή αυτού είναι μηδέν και η διασπορά $q^2/12$, λόγω με βάση τα παραπάνω $a = -q/2$ και $b = q/2$.

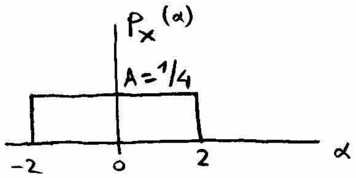


ΑΣΚΗΣΗ Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν τις ακόλουθες ομοιόμορφες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_X(\alpha) = \begin{cases} A & \text{για } -2 \le \alpha \le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad p_Y(\beta) = \begin{cases} B & \text{για } -1 \le \beta \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή, η μέση τετραγωνική τιμή και η διασπορά καθεμιάς.

ΛΥΣΗ



Το εμβαδόν της $p_X(\alpha)$ πρέπει να ισούται με τη μονάδα. Άρα η σταθερά $A = 1/4$

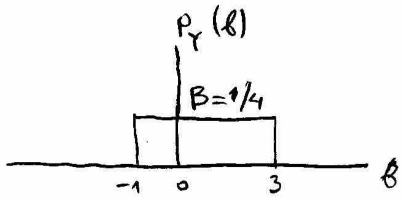
$$E(X) = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \, p_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{-2}^{2} \alpha \cdot \frac{1}{4}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{2} \Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{8}\left[2^2 - (-2)^2\right] = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 p_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{-2}^{2} \alpha^2 \frac{1}{4}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\alpha^3}{3} \Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{12}\left[2^3 - (-2)^3\right] = \frac{4}{3}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - m_X^2 = \frac{4}{3} - 0^2 = \frac{4}{3}$$



Από το εμβαδόν της $p_Y(\beta)$ που πρέπει να είναι μονάδα προκύπτει ότι $B = \frac{1}{4}$.

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \beta\, p_Y(\beta)\, d\beta = \int_{-1}^{3} \beta \frac{1}{4}\, d\beta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{2} \Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[3^2 - (-1)^2\right] = \frac{1}{8}[9-1] = 1$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 p_Y(\beta)\, d\beta = \int_{-1}^{3} \beta^2 \frac{1}{4}\, d\beta =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\beta^3}{3} \Big|_{-1}^{3} = \frac{1}{12}\left[3^3 - (-1)^3\right] = \frac{7}{3}$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - m_Y^2 = \frac{7}{3} - 1^2 = \frac{4}{3}$$

Παρατηρούμε ότι οι διασπορές των τυχαίων μεταβλητών είναι ίσες. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς τα σχήματα των $p_X(\alpha)$, $p_Y(\beta)$ είναι ίδια και διαφέρουν μόνο κατά μια μετατόπιση στη μέση τιμή τους.

Συμπεραίνεται ότι οι διασπορές θα μπορούσαν να υπολογιστούν κατ'ευθείαν από τον ορισμό τους

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - m_X)^2 p_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{-2}^{2} (\alpha - 0)^2 \frac{1}{4}\, d\alpha = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \alpha^2 d\alpha = \frac{1}{4}\frac{\alpha^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{12}\left[2^3 - (-2)^3\right] = \frac{4}{3}$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\beta - m_Y)^2 p_Y(\beta)\, d\beta = \int_{-1}^{3} (\beta - 1)^2 \frac{1}{4}\, d\beta = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{3} \beta^2 d\beta - 2\int_{-1}^{3} \beta\, d\beta + \int_{-1}^{3} 1^2\, d\beta\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{28}{3} - 8 + 4\right) = \frac{4}{3}$$

2. ΔΥΟ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ X, Y

Η πιθανότητα η X να λάβει μια τιμή στην περιοχή $-\infty$ έως α και η Y να λάβει μια τιμή στην περιοχή $-\infty$ έως b, δίνεται από την <u>συνάρτηση από κοινού κατανομής πιθανότητας</u> (joint probability distribution function)

$$P_{XY}(\alpha, b) = \text{Πιθανότητα}\,[X \le \alpha,\ Y \le b]$$

ή ισοδύναμα από τη <u>συνάρτηση από κοινού πυκνότητας πιθανότητας</u> (joint probability density function)

$$p_{XY}(\alpha, b) = \frac{\partial^2 P_{XY}(\alpha, b)}{\partial \alpha\, \partial b}$$

Συνεπώς η συνάρτηση από κοινού κατανομής πιθανότητας υπολογίζεται ως

$$P_{XY}(\alpha, b) = \int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{b} p_{XY}(u, v)\, du\, dv$$

Ιδιότητες της pdf $p_{XY}(\alpha, b)$	Ιδιότητες της $P_{XY}(\alpha, b)$
$p_{XY}(\alpha, b) \geq 0$	$0 \le P_{XY}(\alpha, b) \le 1$
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(\alpha, b)\, d\alpha\, db = 1$	$P_{XY}(\alpha_1, b_1) \le P_{XY}(\alpha_2, b_2)\ \forall\ \alpha_1 \le \alpha_2 \wedge b_1 \le b_2$
	$P_{XY}(-\infty, -\infty) = 0 \qquad P_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$

Οι κοινές στατιστικές ιδιότητες δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y εκφράζονται μέσω της ετερο-συσχέτισης (cross-correlation) και της ετερο-διασποράς (cross-covariance) τους:

Ετερο-συσχέτιση (cross-correlation)

$$r_{XY} = \phi_{XY} = E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha \beta \; p_{XY}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

Ετερο-συνδιασπορά (cross-covariance)

$$\sigma_{XY}^2 = \gamma_{XY} = E\left([X-m_X][Y-m_Y]\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha-m_X)(\beta-m_Y)\, p_{XY}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \phi_{XY} - m_X m_Y$$

- Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι <u>γραμμικά</u> ανεξάρτητες (linearly independent) ή <u>ασυσχέτιστες</u> (uncorrelated) εάν

$$E(XY) = E(X)\, E(Y) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \gamma_{XY} = 0$$

- Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι <u>στατιστικά</u> ανεξάρτητες (statistically independent) εάν

$$P_{XY}(\alpha,\beta) = P_X(\alpha)\, P_Y(\beta)$$

ή

$$p_{XY}(\alpha,\beta) = p_X(\alpha)\, p_Y(\beta)$$

- Αποδεικνύεται ότι οι <u>στατιστικά ανεξάρτητες</u> μεταβλητές είναι και <u>γραμμικά ανεξάρτητες</u>. Το αντίθετο δεν ισχύει πάντοτε.

- Η ιδιότητα της στατιστικής ανεξαρτησίας διευκολύνει τον υπολογισμό των στατιστικών ιδιοτήτων τυχαίας μεταβλητής η οποία μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών. Π.χ. εάν X, Y είναι στατιστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές m_X, m_Y αντίστοιχα, τότε για την $V = aX + bY$ ισχύει: $m_V = a\, m_X + b\, m_Y$ και $\sigma_V^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$.

- Όπως είδαμε, οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ασυσχέτιστες (uncorrelated) εάν $E(XY) = E(X)\,E(Y)$ ή ισοδύναμα εάν $\gamma_{XY} = 0$ $\left[\text{αφού } \gamma_{XY} = \phi_{XY} - m_X m_Y = E(XY) - E(X)\,E(Y) = E(X)\,E(Y) - E(X)\,E(Y) = 0\right]$.

Ασυσχέτιστες <u>δεν</u> σημαίνει μηδενική συσχέτιση, εκτός και αν μία από τις τυχαίες μεταβλητές έχει μηδενική μέση τιμή.

Ασυσχέτιστες σημαίνει <u>μηδενική ετερο-συνδιασπορά</u> (cross-covariance). Σωστότερο θα ήταν, αντί για ασυσχέτιστες, να ονομάζονται noncovariant, αλλά αυτός ο όρος δεν χρησιμοποιείται ευρέως.

Παράδειγμα Έστω ότι η συνάρτηση από κοινού πυκνότητας πιθανότητας των δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y είναι

$$p_{XY}(\alpha,\beta) = \begin{cases} A & \text{για } -1\le\alpha\le 1,\ 0\le\beta\le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς A και να υπολογιστεί η πιθανότητα τα X και Y να βρίσκονται στην περιοχή $0.5\le\alpha\le 1$, $0\le\beta\le 1$.

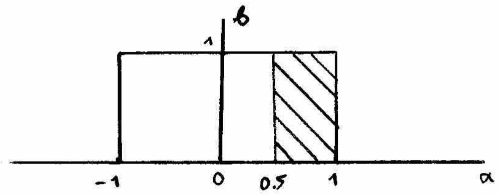
Λύση Από τη βασική ιδιότητα της συνάρτησης από κοινού πυκνότητας πιθανότητας έχουμε:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta}_{} = 1 \Rightarrow$$

$$\overbrace{A\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} d\alpha\, d\beta} = A\left[\int_{-1}^{1} d\alpha\right]\left[\int_{0}^{1} d\beta\right] = A\cdot\alpha\Big|_{-1}^{1}\ \beta\Big|_{0}^{1} = A\cdot 2\cdot 1 = 2A = 1$$

Συνεπώς $A = \frac{1}{2}$

Η πιθανότητα τα X, Y να βρίσκονται στην περιοχή $0.5\le\alpha\le 1$, $0\le\beta\le 1$ δείχνεται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος:



$$\text{Πιθανότητα}\left[0.5\le X\le 1,\ 0\le Y\le 1\right] = A\int_{0}^{1}\int_{0.5}^{1} d\alpha\, d\beta = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ΤΥΧΑΙΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

Μία διακριτού χρόνου τυχαία (στοχαστική) διαδικασία είναι μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και αποτελείται τυπικά από μία άπειρη συλλογή (collection / ensemble) ακολουθιών διακριτού χρόνου. [βλ. σχήμα επόμενης σελίδας]

Οι στατιστικές ιδιότητες της τυχαίας διαδικασίας $\{X(n)\}$ τη χρονική στιγμή n δίνονται από τις στατιστικές ιδιότητες της τυχαίας μεταβλητής $X(n)$.

Μέση ή αναμενόμενη τιμή του $\{X(n)\}$ στον χρόνο n:

$$m_{X(n)} = E(X(n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \, p_{X(n)}(\alpha; n) \, d\alpha$$

Μέση τετραγωνική τιμή του $\{X(n)\}$ στον χρόνο n:

$$E(X^2(n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \, p_{X(n)}(\alpha; n) \, d\alpha$$

Διασπορά του $\{X(n)\}$ στον χρόνο n:

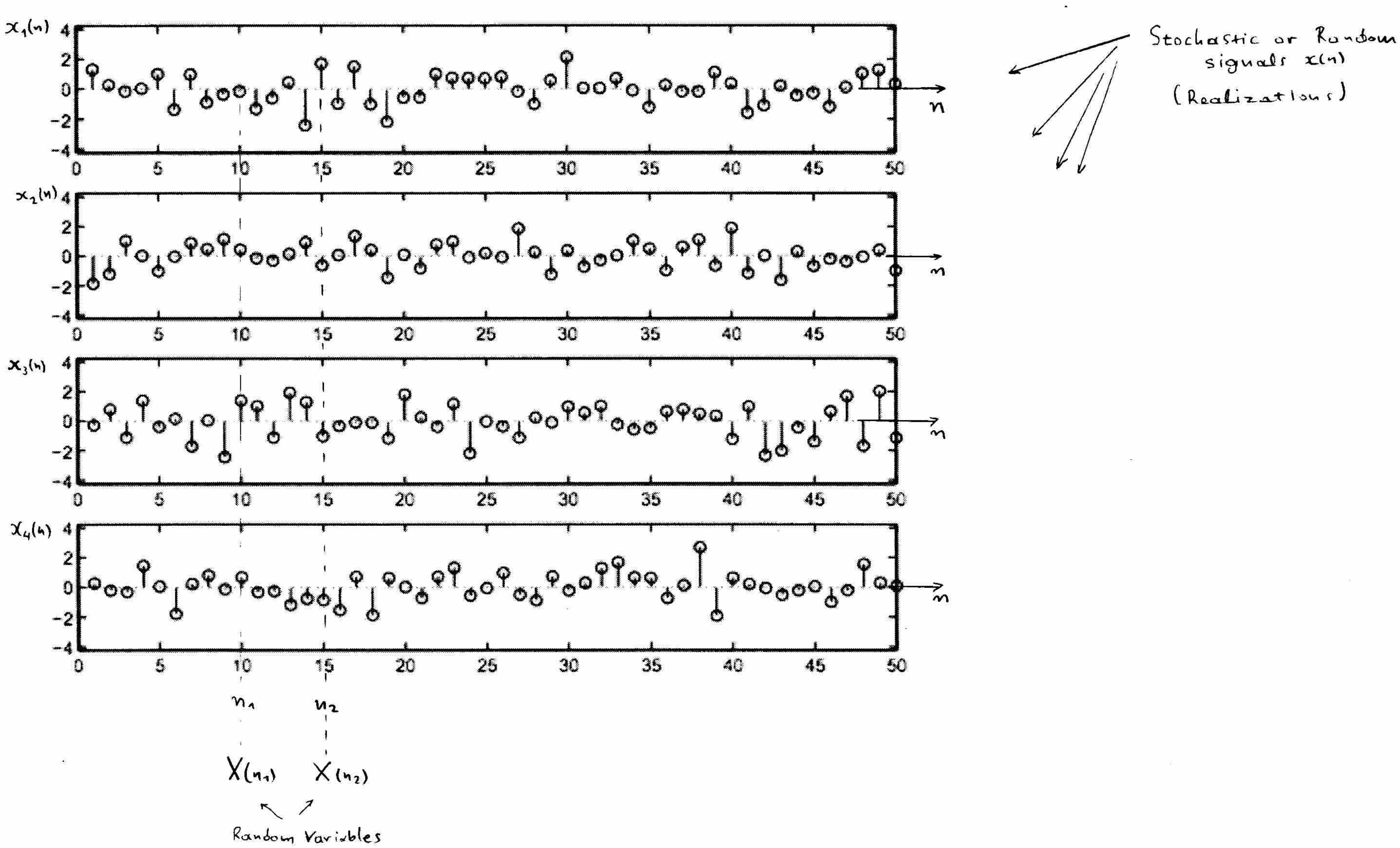
$$\sigma^2_{X(n)} = E\left(\left[X(n) - m_{X(n)}\right]^2\right) = E(X^2(n)) - \left(m_{X(n)}\right)^2$$

Γενικά η <u>μέση τιμή</u>, η <u>μέση τετραγωνική τιμή</u> και η <u>διασπορά</u> μίας τυχαίας διαδικασίας διακριτού χρόνου είναι συναρτήσεις του χρόνου n και μπορούν να θεωρηθούν ως ακολουθίες.

Γενική παρατήρηση: Πολύ συχνά στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται ο όρος τυχαίο ή στοχαστικό σήμα αντί του όρου τυχαία ή στοχαστική διαδικασία.

ENSEMBLE

Stochastic or Random Process $X(n)$



Συχνά είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τη στατιστική συσχέτιση των δειγμάτων μιας στοχαστικής διαδικασίας διακριτού χρόνου σε δύο διαφορετικούς χρόνους m και n.

Αυτοσυσχέτιση (autocorrelation): $\phi_{xx}(m,n) = E(X(m)\, X^*(n))$

όπου $*$ το συζυγές μιγαδικό

Αυτοσυνδιασπορά (autocovariance): $\gamma_{xx}(m,n) = E\left([X(m) - m_{X(m)}][X(n) - m_{X(n)}]^*\right) =$

$= \phi_{xx}(m,n) - m_{X(m)}\, m^*_{X(n)}$

- Παρατηρούμε ότι η αυτοσυσχέτιση και η ~~αυτο~~συνδιασπορά είναι συναρτήσεις των m και n, οπότε μπορούν να θεωρηθούν ως διοδιάστατες ακολουθίες.

Η συσχέτιση μεταξύ δύο διαφορετικών τυχαίων διαδικασιών διακριτού χρόνου $\{X(n)\}$ και $\{Y(n)\}$ περιγράφεται από τις συναρτήσεις ετερο-συσχέτισης (cross-correlation) και ετεροσυνδιασποράς (cross-covariance).

Ετερο-συσχέτιση (cross-correlation): $\phi_{xy}(m,n) = E\left(X(m)\, Y^*(n)\right) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, \beta^*\, p_{X(m)Y(n)}(\alpha,\beta; m,n)\, d\alpha\, d\beta$$

Ετερο-συνδιασπορά (cross-covariance): $\gamma_{xy}(m,n) = E\left([X(m) - m_{X(m)}][Y(n) - m_{Y(n)}]^*\right) =$

$= \phi_{xy}(m,n) - m_{X(m)}\, m^*_{Y(n)}$

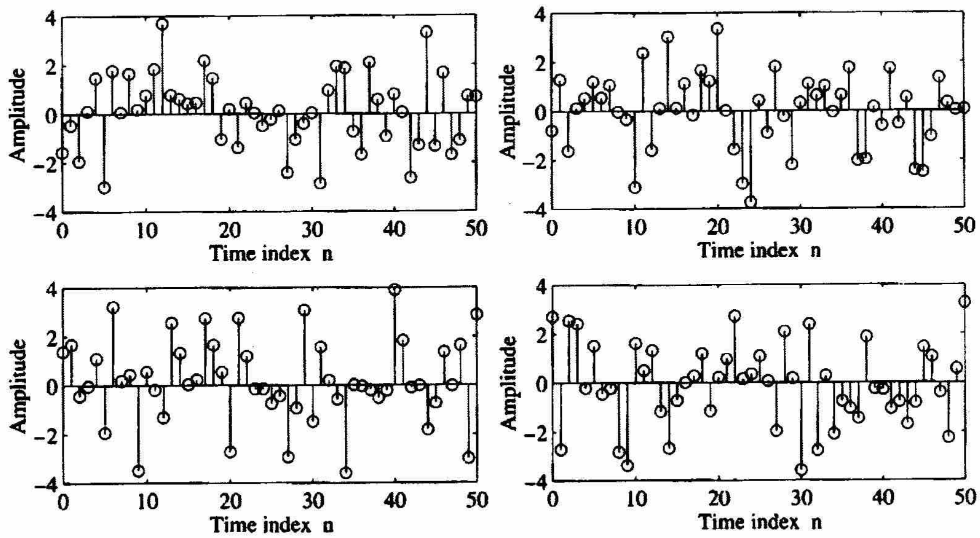
- Παρατηρούμε ότι η ετερο-συσχέτιση και η ετεροσυνδιασπορά είναι συναρτήσεις των m και n, οπότε μπορούν να θεωρηθούν ως διοδιάστατες ακολουθίες.
- Οι στοχαστικές διαδικασίες $\{X(n)\}, \{Y(n)\}$ είναι ασυσχέτιστες εάν $\gamma_{xy}(m,n) = 0$ για όλες τις τιμές του χρόνου m και n. Εάν $\phi_{xy}(m,n) = 0$, τότε αυτές ονομάζονται ορθογώνιες.

Παράδειγμα Έστω το τυχαίο ημιτονοειδές σήμα $\{X(n)\} = \{A\cos(\omega_0 n + \Phi)\}$

με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για τα A, Φ:

$$p_A(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \le \alpha \le 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad p_\Phi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι στατιστικές του ιδιότητες.



Τέσσερεις δυνατές πραγματώσεις (realisations) του τυχαίου σήματος $\{X(n)\}$ για $\omega_0 = 0.06\pi$, πλάτος A ομοιόμορφα κατανεμημένο στην περιοχή $0 \le \alpha \le 4$ και φάση Φ ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Λύση Οι δύο τυχαίες μεταβλητές A, Φ είναι στατιστικά ανεξάρτητες, οπότε η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας ισούται με το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας.

$$p_{A\Phi}(\alpha, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} & 0 \le \alpha \le 4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η μέση τιμή του $\{X(n)\}$ στον χρόνο n είναι:

$$m_{X(n)} = \frac{1}{8\pi} \int_0^4 \int_0^{2\pi} \alpha \cos(\omega_0 n + \varphi)\, d\alpha\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^4 \alpha\, d\alpha \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 n + \varphi)\, d\varphi \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\sin(\omega_0 n + 2\pi) - \sin(\omega_0 n) \right] = 0$$

Η μέση τετραγωνική τιμή του $\{X(n)\}$ στον χρόνο n είναι:

$$E(X^2_{(n)}) = \frac{1}{8\pi}\int_0^4\int_0^{2\pi} \alpha^2 \cos^2(\omega_0 n+\varphi)\, d\alpha\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(\int_0^4 \alpha^2 d\alpha\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\omega_0 n+\varphi)\, d\varphi\right) = \frac{8}{3}$$

Η διασπορά του $\{X(n)\}$ στον χρόνο n είναι ίση με τη μέση τετραγωνική τιμή, αφού η μέση τιμή είναι 0.

$$\sigma^2_{X(n)} = E\left(\left[X(n) - m_{X(n)}\right]^2\right) = E\left(X^2_{(n)}\right) - m^2_{X(n)} = E\left(X^2_{(n)}\right) - 0 = \frac{8}{3}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι:

$$\phi_{xx}(m,n) = E\left(X(m)\, X^*_{(n)}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^4 \alpha^2 d\alpha \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 m+\varphi)\cos(\omega_0 n+\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\cos\left(\omega_0(m-n)\right)$$

Σημείωση: Όπως θα δούμε αμέσως μετά, το ημιτονοειδές αυτό σήμα είναι στάσιμο υπό την ευρεία έννοια (wide-sense stationary signal) αφού έχει σταθερή μέση τιμή $[m_x = 0]$ και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρόνων m και n $\left[\phi_{xx}(m,n) = \frac{8}{3}\cos(\omega_0(m-n))\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή $m_x(n)$ και την αυτο-συσχέτιση $\phi_{xx}(n,m)$ της τυχαίας ακολουθίας διακριτού χρόνου $X(n) = A^n$, $n \geq 0$, όπου A τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1).

ΛΥΣΗ

$$p_A(\alpha) = \begin{cases} 1, & 0<\alpha<1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$m_x(n) = E(X(n)) = E(A^n) = \int_0^1 \alpha^n d\alpha = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\phi_{xx}(n,m) = E(X(n)X^*(m)) = E(A^n A^m) = E(A^{n+m}) = \int_0^1 \alpha^{n+m} d\alpha = \frac{1}{n+m+1}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να αποδείξετε ότι $\phi_{xx}(n,n) \geq 0$

ΛΥΣΗ $\phi_{xx}(n,n) = E(X(n)X^*(n)) = E(|X(n)|^2) \geq 0$ ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΗ Έστω η τυχαία ακολουθία $X(n) = An + B$, όπου A, B ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές κανονικής κατανομής με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_A^2, σ_B^2 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α. τη μέση τιμή $m_x(n)$ και την αυτοσυσχέτιση $\phi_{xx}(n,m)$.

β. τη μέση τετραγωνική τιμή $E(X^2(n))$.

ΛΥΣΗ α. $m_x(n) = E(X(n)) = E(An+B) = E(A)n + E(B) = 0$ αφού $E(A)=E(B)=0$

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(n,m) &= E(X(n)X^*(m)) = E((An+B)(Am+B)) = \\ &= E(A^2nm + ABn + BAm + B^2) = \\ &= E(A^2)nm + E(AB)n + E(BA)m + E(B^2) = \\ &= \sigma_A^2 nm + E(A)E(B)n + E(B)E(A)m + \sigma_B^2 = \sigma_A^2 nm + \sigma_B^2\end{aligned}$$

αφού $E(AB) = \langle$λόγω ανεξαρτησίας$\rangle = E(A)E(B) = 0\cdot 0 = 0$

β. $E(X^2(n)) = E(X(n)X^*(n)) = \dots = \sigma_A^2 n^2 + \sigma_B^2$

Ουσιαστικά πρόκειται για το προηγούμενο αποτέλεσμα για $n=m$.

ΣΤΑΣΙΜΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Γενικά, οι στατιστικές ιδιότητες μιας τυχαίας διαδικασίας διακριτού χρόνου $\{X(n)\}$, όπως για παράδειγμα η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X(n)$, καθώς και οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και αυτο-διασποράς, είναι χρονικά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις.

Τα τυχαία σήματα που συχνά συναντάμε σε εφαρμογές ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι τα ονομαζόμενα <u>στάσιμα υπό την ευρεία έννοια</u> (wide-sense stationary -WSS-) για τα οποία ορισμένες στατιστικές τους ιδιότητες είναι ανεξάρτητες του χρόνου ή της αρχής του χρόνου. Συγκεκριμένα, για μια WSS τυχαία στοχαστική διαδικασία $\{X(n)\}$, <u>η μέση τιμή $E(X(n))$ έχει σταθερή τιμή m_X για όλες τις τιμές του χρόνου n</u>, <u>και οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και αυτοδιασποράς εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά των χρόνων m και n.</u>

σταθερή! $\rightsquigarrow$ $m_X = E(X(n)) \quad \forall n$

$$\phi_{XX}(l) = \phi_{XX}(n+l,n) = E\left(X(n+l)\,X^*(n)\right) \quad \forall n,l$$

$$\gamma_{XX}(l) = \gamma_{XX}(n+l,n) = E\left([X(n+l)-m_X][X(n)-m_X]^*\right)$$
$$= \phi_{XX}(l) - |m_X|^2 \quad \forall n,l$$

Παρατηρούμε ότι για μια WSS στοχαστική διαδικασία, οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και αυτο-διασποράς είναι <u>μονοδιάστατες ακολουθίες.</u>

Για μια WSS στοχαστική διαδικασία, η μέση τετραγωνική τιμή και η διασπορά είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} E(|X(n)|^2) &= \phi_{XX}(0) \\ \sigma_X^2 = \gamma_{XX}(0) &= \phi_{XX}(0) - |m_X|^2 \end{aligned}}$$

Σημείωση: Στα WSS τυχαία σήματα οι ροπές δεύτερης τάξης <u>δεν</u> αλλάζουν με τον χρόνο.

Οι ροπές ανώτερης τάξης ή η pdf μπορεί να αλλάζουν, όμως στην πράξη στην πλειονότητα των περιπτώσεων, οι ροπές μέχρι δεύτερης τάξης είναι αρκετές.

Οι συναρτήσεις ετερο-συσχέτισης και ετερο-διασποράς δύο WSS στοχαστικών διαδικασιών $\{X(n)\}$ και $\{Y(n)\}$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\phi_{XY}(\ell) = E\left(X(n+\ell)\,Y^*(n)\right)$$

$$\gamma_{XY}(\ell) = E\left([X(n+\ell)-m_X][Y(n)-m_Y]^*\right) =$$
$$= \phi_{XX}(\ell) - m_X\, m_Y^*$$

<u>Ιδιότητες συμμετρίας</u>

$$\phi_{XX}(-\ell) = \phi_{XX}^*(\ell)$$

$$\gamma_{XX}(-\ell) = \gamma_{XX}^*(\ell)$$

$$\phi_{XY}(-\ell) = \phi_{YX}^*(\ell)$$

$$\gamma_{XY}(-\ell) = \gamma_{YX}^*(\ell)$$

<u>Άλλες ιδιότητες</u>

$$\phi_{XX}(0)\,\phi_{YY}(0) \geq |\phi_{XY}(\ell)|^2$$

$$\gamma_{XX}(0)\,\gamma_{YY}(0) \geq |\gamma_{XY}(\ell)|^2$$

$$\phi_{XX}(0) \geq |\phi_{XX}(\ell)|$$

$$\gamma_{XX}(0) \geq |\gamma_{XX}(\ell)|$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και αυτοδιασποράς μιας στάσιμης πραγματικής (real-valued) με την ευρεία έννοια (WSS) στοχαστικής διαδικασίας παρουσιάζουν <u>άρτια συμμετρία</u> και έχουν τις <u>μέγιστες τιμές τους στο $\ell = 0$.</u>

- Αποδεικνύεται(*) ότι για μια WSS στοχαστική διαδικασία με μη μηδενική μέση τιμή, δηλαδή με $m_{X(n)} \neq 0$, και με χωρίς περιοδικές συνιστώσες, ισχύει

$$\lim_{|\ell|\to\infty} \phi_{XX}(\ell) = |m_{X(n)}|^2$$

Εάν η $X(n)$ έχει κάποια <u>περιοδική</u> συνιστώσα, τότε η $\phi_{XX}(\ell)$ θα περιέχει την <u>ίδια περιοδική</u> συνιστώσα.

(*) Απόδειξη: $\phi_{XX}(\ell) = E\left(X(n+\ell)X^*(n)\right) =$ <όταν $|\ell|\to\infty$ για πολλές τυχαίες διαδικασίες, οι τυχαίες μεταβλητές γίνονται όλο και πιο ασυσχέτιστες καθώς απομακρύνονται χρονικά μεταξύ τους>

$= E\left(X(n+\ell)\right) E\left(X^*(n)\right) =$

$= m_X \cdot m_X^* = |m_X|^2$

ΣΤΑΣΙΜΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ)

ΟΡΙΣΜΟΙ

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης: $\phi_{xx}(\tau) = E\big(X(t+\tau)\,X(t)\big)$ (1)

Συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς: $\gamma_{xx}(\tau) = E\big([X(t+\tau)-m_x][X(t)-m_x]\big) =$ (2)

$= \phi_{xx}(\tau) - m_x^2$ (3)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\phi_{xx}(0) = E\big(X^2(t)\big) \geq 0$ — Η αυτοσυσχέτιση για $\tau=0$ δίνει τη δεύτερη ροπή ή την μέση ισχύ της WSS στοχαστικής διαδικασίας

$\gamma_{xx}(0) = E\big([X(t)-m_x]^2\big) = \sigma^2$

2. $\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau)$ — Η αυτοσυσχέτιση έχει άρτια συμμετρία

3. $|\phi_{xx}(\tau)| \leq \phi_{xx}(0)$ — Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει τη μέγιστη τιμή της στο $\tau=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

1. Από τις σχέσεις (1) και (2) θέτοντας $\tau=0$

2. $\phi_{xx}(-\tau) = E\big(X(t-\tau)\,X(t)\big) = \langle \text{θέτω } t-\tau=\xi \Rightarrow t=\xi+\tau \rangle =$

$= E\big(X(\xi)\,X(\xi+\tau)\big) =$

$= E\big(X(\xi+\tau)\,X(\xi)\big) = \phi_{xx}(\tau)$ βάσει του ορισμού (1)

3. Θεωρούμε την μη αρνητική ποσότητα $E\big([X(t+\tau) \pm X(t)]^2\big) \geq 0$ και έχουμε

$$\underbrace{E\big([X(t+\tau)]^2\big)}_{\phi_{xx}(0)} \pm 2\,\underbrace{E\big(X(t+\tau)\,X(t)\big)}_{\phi_{xx}(\tau)} + \underbrace{E\big([X(t)]^2\big)}_{\phi_{xx}(0)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$2\phi_{xx}(0) \pm 2\phi_{xx}(\tau) \geq 0 \Rightarrow \phi_{xx}(0) \pm \phi_{xx}(\tau) \geq 0 \Rightarrow$$

$$-\phi_{xx}(0) \leq \phi_{xx}(\tau) \leq \phi_{xx}(0) \Rightarrow |\phi_{xx}(\tau)| \leq \phi_{xx}(0)$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

Μέση τιμή $m_x(t) = E(X(t))$

Αυτοσυσχέτιση $\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\left(X(t_1)\, X^*(t_2)\right)$

Αυτοσυνδιασπορά $\gamma_{xx}(t_1, t_2) = E\left([X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]^*\right) =$

$$= \phi_{xx}(t_1, t_2) - m_x(t_1)\, m_x^*(t_2)$$

Συντελεστής Συσχέτισης $r_{xx}(t_1,t_2) = \dfrac{\gamma_{xx}(t_1,t_2)}{\sqrt{\gamma_{xx}(t_1,t_1)\,\gamma_{xx}(t_2,t_2)}} \rightsquigarrow -1 \le r_{xx}(t_1,t_2) \le 1$

ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

$m_x(n) = E(X(n))$

$\phi_{xx}(n_1, n_2) = E\left(X(n_1)\, X^*(n_2)\right)$

$\gamma_{xx}(n_1, n_2) = E\left([X(n_1) - m_x(n_1)][X(n_2) - m_x(n_2)]^*\right) =$

$$= \phi_{xx}(n_1, n_2) - m_x(n_1)\, m_x^*(n_2)$$

$r_{xx}(n_1,n_2) = \dfrac{\gamma_{xx}(n_1,n_2)}{\sqrt{\gamma_{xx}(n_1,n_1)\,\gamma_{xx}(n_2,n_2)}} \rightsquigarrow -1 \le r_{xx}(n_1,n_2) \le 1$

ΣΤΑΣΙΜΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Συνεχούς χρόνου

$m_x = E(X(t))$

$\phi_{xx}(t+\tau, t) = \phi_{xx}(\tau) = E\left(X(t+\tau)\, X^*(t)\right)$

$\gamma_{xx}(t+\tau, t) = \gamma_{xx}(\tau) = E\left([X(t+\tau) - m_x][X(t) - m_x]^*\right) =$

$$= \phi_{xx}(\tau) - |m_x|^2$$

για $\tau = 0$

$\phi_{xx}(0) = E\left(X(t)\, X^*(t)\right) = E\left(|X(t)|^2\right)$

$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}(0) = \phi_{xx}(0) - |m_x|^2$

$r_{xx}(\tau) = \dfrac{\gamma_{xx}(\tau)}{\gamma_{xx}(0)} \rightsquigarrow -1 \le r_{xx}(\tau) \le 1$

Διακριτού χρόνου

$m_x = E(X(t))$

$\phi_{xx}(n+\ell, n) = \phi_{xx}(\ell) = E\left(X(n+\ell)\, X^*(n)\right) \quad \forall n, \ell$

$\gamma_{xx}(n+\ell, n) \equiv \gamma_{xx}(\ell) = E\left([X(n+\ell) - m_x][X(n) - m_x]^*\right) =$

$$= \phi_{xx}(\ell) - |m_x|^2$$

για $\ell = 0$

$\phi_{xx}(0) = E\left(X(n)\, X^*(n)\right) = E\left(|X(n)|^2\right)$

$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}(0) = \phi_{xx}(0) - |m_x|^2$

$r_{xx}(\ell) = \dfrac{\gamma_{xx}(\ell)}{\gamma_{xx}(0)} \rightsquigarrow -1 \le r_{xx}(\ell) \le 1$

ΕΡΓΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Ένα στάσιμο τυχαίο σήμα ονομάζεται εργοδικό (ergodic) εάν όλες οι στατιστικές του ιδιότητες μπορούν να υπολογιστούν από μία και μόνη πραγματοποίησή του μεγάλου, αλλά πεπερασμένου, μήκους.

Για ένα εργοδικό σήμα οι μέσες τιμές στον χρόνο ισούνται με τις μέσες τιμές του συνόλου (ensemble)(*) οι οποίες προκύπτουν από τον τελεστή αναμενόμενης τιμής καθώς το όριο του μήκους της πραγματοποίησης τείνει στο άπειρο. Για ένα πραγματικό εργοδικό σήμα διακριτού χρόνου, ισχύει:

$$m_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} (x(n) - m_x)^2$$

$$\gamma_{xx}(l) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} (x(n+l) - m_x)(x(n) - m_x)$$

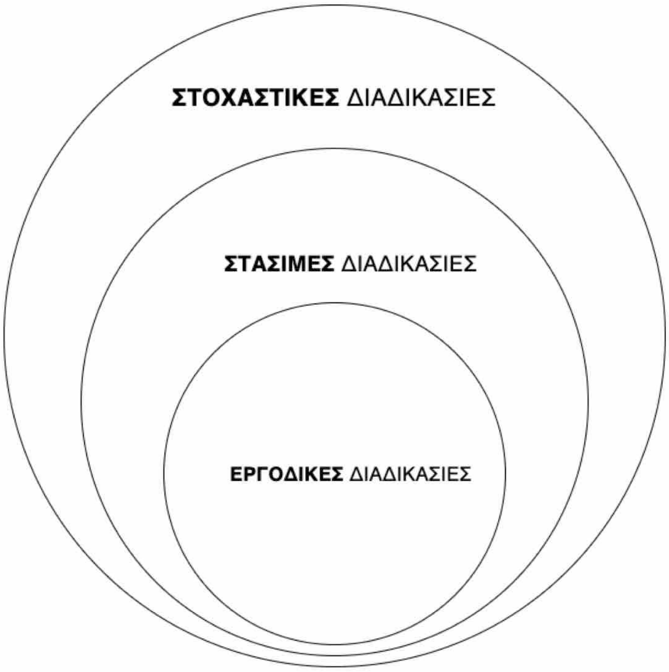
Επειδή πολλές φορές δεν είναι πρακτικό να υπολογίσουμε τα παραπάνω όρια, χρησιμοποιούμε στην πράξη κάποια πεπερασμένου μήκους αθροίσματα ώστε να έχουμε μία εκτίμηση των στατιστικών χαρακτηριστικών.

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} x(n)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} (x(n) - m_x)^2$$

$$\hat{\gamma}_{xx}(l) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} (x(n+l) - m_x)(x(n) - m_x)$$

(*) Αυτό θα μπορούσε να εκφραστεί και ως: vertical averages = horizontal averages
Στην πράξη χρησιμοποιούμε συνήθως τις μέσες τιμές στον χρόνο για τον υπολογισμό των στατιστικών χαρακτηριστικών των τυχαίων σημάτων.



- Μια διαδικασία είναι εργοδική εάν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της όλης τυχαίας διαδικασίας μπορούν να εξαχθούν από μία οποιαδήποτε πραγμάτωση (realization).

- Η εργοδικότητα προϋποθέτει στασιμότητα. Με άλλα λόγια, μια εργοδική διαδικασία είναι πάντοτε στάσιμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Μια στάσιμη διαδικασία δεν είναι κατ' ανάγκη εργοδική.

  Η στασιμότητα είναι αναγκαία συνθήκη για την εργοδικότητα, αλλά όχι ικανή.

- Στην πράξη, οι περισσότερες στάσιμες διαδικασίες είναι εργοδικές.

ΑΣΚΗΣΗ α. Δίνεται η συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία $X(t) = A\sin(\Omega_0 t + \Phi)$ όπου Φ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή από $-\pi$ έως π. Να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

β. Να υπολογιστεί η συνάρτηση ετερο-συσχέτισης της $X(t)$ με την τυχαία διαδικασία $Y(t) = B\sin(\Omega_0 t + \Phi + \theta)$, όπου Φ η τυχαία μεταβλητή του ερωτήματος α.

ΛΥΣΗ α. $\phi_{xx}(\tau) = E\left(X(t+\tau)\, X^*(t)\right) =$

$$= E\left(A\sin[\Omega_0(t+\tau)+\phi]\; A\sin(\Omega_0 t+\Phi)\right) = \left\langle \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right]\right\rangle$$

$$= A^2 \cdot \frac{1}{2}\, E\left(\cos(\Omega_0\tau) - \cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\Phi)\right) =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau) - \frac{A^2}{2}\,\underbrace{E\left(\cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\phi)\right)}_{m} \qquad (1)$$

Αλλά

$$m = E\left(\cos(\underbrace{2\Omega_0 t + \Omega_0\tau}_{\xi} + 2\Phi)\right) = E\left(\cos(\xi + 2\Phi)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\xi+2\varphi)\cdot \underbrace{p_\Phi(\varphi)}_{1/2\pi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\xi+2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\,\sin(\xi+2\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\sin(\xi+2\pi) - \sin(\xi-2\pi)\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\sin(2\pi+\xi) + \sin(2\pi-\xi)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\sin(\xi) + (-\sin(\xi))\right] = 0$$

Τελικά η (1) γίνεται:

$$\phi_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau) \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνον από τη διαφορά των χρόνων $\tau = (t+\tau) - t$ ή $\tau = t_1 - t_2$ όπου $t_1 = t+\tau$, $t_2 = t$ δύο οποιεσδήποτε τιμές χρόνου.

Επίσης, όπως αναμενόταν, η αυτοσυσχέτιση είναι άρτια συνάρτηση,

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau).$$

<u>Σημείωση</u> Είδαμε ότι η αυτοσυσχέτιση της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ εξαρτάται μόνον από τη διαφορά των χρόνων $t_1-t_2=\tau$. Αν αποδείξουμε ότι και η μέση τιμή της είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου, τότε θα πρόκειται για μια στάσιμη διαδικασία (με την ευρεία έννοια).

$$m_x = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, p_x(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} A \sin(\Omega_0 t+\varphi)\, \underbrace{p_x(\varphi)}_{1/2\pi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega_0 t+\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{-A}{2\pi} \cos(\Omega_0 t+\varphi) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-A}{2\pi} \left[\cos(\Omega_0 t+\pi) - \cos(\Omega_0 t-\pi) \right] =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left[\cos(\pi+\Omega_0 t) - \cos(\pi-\Omega_0 t) \right] =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left[-\cos(\Omega_0 t) - \left[-\cos(\Omega_0 t) \right] \right] =$$

$$= 0$$

Η μέση τιμή της τυχαίας διαδικασίας είναι μηδέν, όπως άλλωστε ήταν διαφαινόμενο, αφού πρόκειται για ημιτονικά σήματα τυχαίας φάσης.

Δεδομένου ότι η μέση τιμή είναι σταθερή (μηδέν) και η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνον από τη διαφορά των χρόνων, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι πρόκειται για μια στάσιμη τυχαία διαδικασία.

Η τυχαία αυτή διαδικασία είναι επιπλέον και εργοδική. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τις στατιστικές της ιδιότητες από μία και μόνη πραγμάτωσή της, δηλαδή από ένα δείγμα αυτής, έστω το $x(t) = A \sin(\Omega_0 t+\varphi)$, όπου φ έχει τώρα μια συγκεκριμένη σταθερή τιμή. Έτσι, ο υπολογισμός της μέσης τιμής τώρα θα γίνει στον χρόνο.

$$m_x = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\sin(\Omega_0 t+\varphi)\,dt =$$

$$= \frac{A}{T}\,\frac{1}{\Omega_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\Omega_0 t+\varphi)\,d(\Omega_0 t+\varphi) = \frac{-A}{T\Omega_0}\,\cos(\Omega_0 t+\varphi)\Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{-A}{T\Omega_0}\left[\cos\left(\Omega_0\frac{T}{2}+\varphi\right) - \cos\left(-\Omega_0\frac{T}{2}+\varphi\right)\right] = \left\langle \Omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to \frac{\Omega_0 T}{2} = \pi \right\rangle =$$

$$= \frac{-A}{T\Omega_0}\left[\cos(\pi+\varphi) - \cos(-\pi+\varphi)\right] =$$

$$= \frac{-A}{T\Omega_0}\left[-\cos(\varphi) - \left[-\cos(\varphi)\right]\right] =$$

$$= 0$$

Η αυτοσυσχέτιση υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση που χρησιμοποιείται για νομοτελειακά (deterministic) σήματα.

$$\Phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_T x(t+\tau)\,x(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\sin\left[\Omega_0(t+\tau)+\varphi\right]\,A\sin(\Omega_0 t+\varphi)\,dt =$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}\left[\cos(\Omega_0\tau) - \cos(2\Omega_0 t+\underbrace{\Omega_0\tau+2\varphi}_{\xi})\right]dt$$

$$= \frac{A^2}{2T}\cos(\Omega_0\tau)\int_{-T/2}^{T/2}dt - \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\Omega_0 t+\xi)\,dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T}\cos(\Omega_0\tau)\;t\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{A^2}{2T}\,\frac{1}{2\Omega_0}\sin(2\Omega_0 t+\xi)\Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{A^2}{2T}\cos(\Omega_0\tau)\left[\frac{T}{2}-\left(-\frac{T}{2}\right)\right] - \frac{A^2}{4\Omega_0 T}\left[\sin\left(2\Omega_0\frac{T}{2}+\xi\right) - \sin\left(-2\Omega_0\frac{T}{2}+\xi\right)\right] =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau) - \frac{A^2}{4\Omega_0 T}\underbrace{\left[\sin(2\pi+\xi) - \sin(-2\pi+\xi)\right]}_{0}$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau)$$

β. Για τον υπολογισμό της ετεροσυσχέτισης των τυχαίων διαδικασιών $X(t)$ και $Y(t)$ βασιζόμαστε και πάλι στο ότι αυτές είναι εργοδικές και συνεπώς οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν από ένα μόνον δείγμα (πραγμάτωση) καθεμιάς, όπου φ σταθερό.

$$x(t) = A\sin(\Omega_0 t + \varphi) \quad , \quad y(t) = B\sin(\Omega_0 t + \varphi + \theta)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\phi_{XY}(\tau) = \phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_T x(t+\tau)\, y(t)\, dt =$$

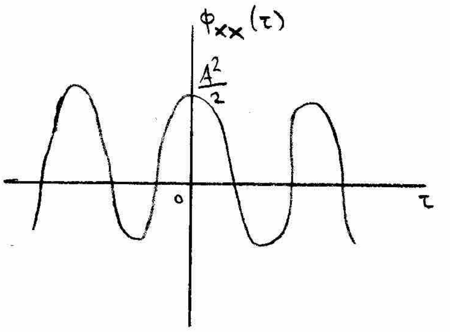
$$= \frac{1}{T}\int_T A\sin[\Omega_0(t+\tau)+\varphi]\; B\sin(\Omega_0 t+\varphi+\theta)\, dt =$$

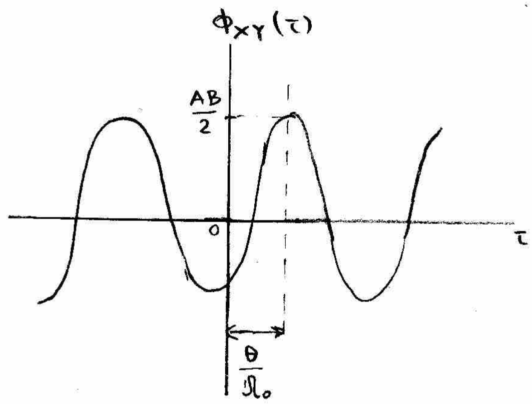
$$= \frac{AB}{T}\,\frac{1}{2}\int_T \Big[\cos(\Omega_0\tau-\theta) - \cos\big(2\Omega_0 t + \underbrace{\Omega_0\tau + 2\varphi+\theta}_{\xi}\big)\Big]\, dt =$$

$$= \frac{AB}{2T}\cos(\Omega_0\tau-\theta)\int_T dt - \underbrace{\frac{AB}{2T}\int_T \cos(2\Omega_0 t+\xi)\, dt}_{\substack{0 \\ \text{όπως αποδείχθηκε προηγουμένως}}} =$$

$$= \frac{AB}{2}\cos(\Omega_0\tau-\theta)$$

Οι κυματομορφές των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης δείχνονται στα παρακάτω σχήματα.





ΑΣΚΗΣΗ Έστω το τυχαίο σήμα

$$X(n) = A\cos(\omega n + \theta)$$

όπου ω, θ σταθερές και A τυχαία μεταβλητή. Να εξεταστεί εάν αυτό είναι στάσιμο με την ευρεία έννοια (WSS).

ΛΥΣΗ Για να διαπιστώσουμε εάν το τυχαίο αυτό σήμα είναι στάσιμο ή όχι θα πρέπει να εξετάσουμε εάν η μέση του τιμή είναι σταθερή και εάν η αυτοσυσχέτισή του είναι ανεξάρτητη του χρόνου ή της αρχής του χρόνου, αλλά εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $m - n = \ell$.

Μέση τιμή: $$m_x(n) = E(X(n)) = E(A\cos(\omega n+\theta)) = \cos(\omega n+\theta)\cdot E(A)$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή δεν είναι σταθερή, εκτός και αν $E(A) = 0$.

Αυτοσυσχέτιση: $$\begin{aligned}\phi_{xx}(m,n) &= E\left(X(m), X^*(n)\right) = \\ &= E\left(A\cos(\omega m+\theta)\cdot A\cos(\omega n+\theta)\right) = \\ &= E(A^2)\cdot\cos(\omega m+\theta)\cdot\cos(\omega n+\theta) = \\ &= E(A^2)\cdot\frac{1}{2}\left\{\cos[\omega(m-n)] + \cos[\omega(m+n)+2\theta]\right\}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η αυτοσυσχέτιση <u>δεν</u> εξαρτάται μόνον από τη διαφορά $m-n$, οπότε το τυχαίο σήμα $X(n)$ <u>δεν</u> είναι στάσιμο.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΙΣΧΥΟΣ ΣΤΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ

Μέση ισχύς νομοτελειακού (deterministic) μη περιοδικού σήματος $x(n)$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Μέση ισχύς στοχαστικού σήματος $\{X(n)\}$

$$P_x = E\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |X(n)|^2\right)$$

Στις περισσότερες των περιπτώσεων που εμφανίζονται στην πράξη, οι τελεστές της αναμενόμενης τιμής και του αθροίσματος μπορούν να εναλλαγούν, οπότε έχουμε:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} E\left(|X(n)|^2\right)$$

Για WSS τυχαία σήματα για τα οποία ισχύει ότι η μέση τετραγωνική τιμή είναι σταθερή $\forall n$, έχουμε:

$$P_x = E\left(|X(n)|^2\right)$$

Με βάση τις σχέσεις που ισχύουν για τα WSS τυχαία σήματα

$$E\left(|X(n)|^2\right) = \phi_{xx}(0)$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}(0) = \phi_{xx}(0) - |m_x|^2$$

η μέση ισχύς γίνεται:

$$P_x = \phi_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |m_x|^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά ενός WSS πραγματικού σήματος του οποίου η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι:

$$\phi_{xx}(l) = \frac{10+21l^2}{1+3l^2}$$

ΛΥΣΗ Είδαμε ότι $\lim_{|l|\to\infty} \phi_{xx}(l) = |m_{x(n)}|^2$.

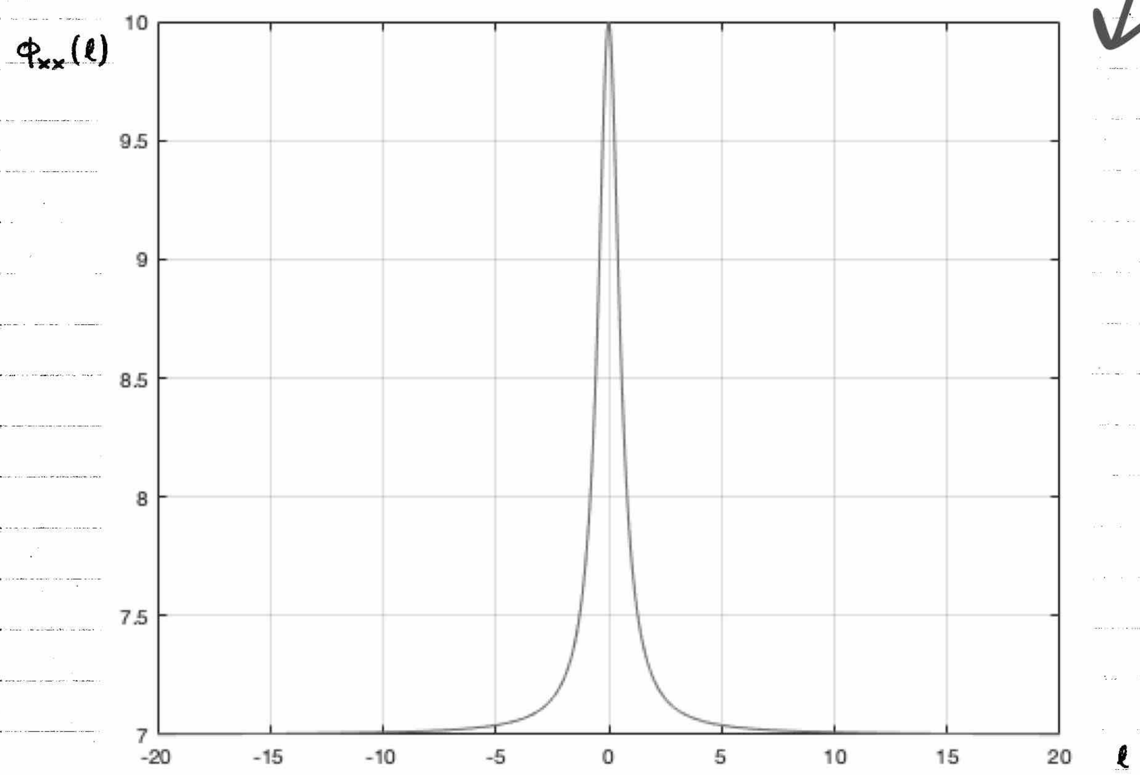
Συνεπώς $|m_{x(n)}|^2 = \lim_{|l|\to\infty} \phi_{xx}(l) = \lim_{|l|\to\infty} \dfrac{\frac{10}{l^2}+21}{\frac{1}{l^2}+3} = \dfrac{21}{3} = 7$

Άρα $m_{X(n)} = \pm\sqrt{7}$

Από τη σχέση $E(|X(n)|^2) = \phi_{xx}(0)$ βρίσκουμε ότι $E(|X(n)|^2) = 10$

Τέλος, από τη σχέση $\sigma_x^2 = \phi_{xx}(0) - |m_x|^2 = 10 - 7 = 3$

υπολογίζουμε τη διασπορά.



ΤΥΧΑΙΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Τα άπειρου μήκους τυχαία σήματα έχουν άπειρη ενέργεια και δεν μπορούν να αναπαρασταθούν στον μετασχηματισμένο χώρο όπως τα νομοτελειακά (deterministic) σήματα. Όμως, οι ακολουθίες αυτοσυσχέτισης και αυτοδιασποράς των στάσιμων τυχαίων σημάτων είναι πεπερασμένης ενέργειας και στις περισσότερες των περιπτώσεων που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον, οι μετασχηματισμοί τους υπάρχουν.

• ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (DTFT)

DTFT της αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(\ell)$ μιας WSS διαδικασίας $\{X(n)\}$

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\ell)\, e^{-j\omega\ell} \qquad |\omega|<\pi$$

Το $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ συμβολίζεται συνήθως ως $S_{xx}(\omega)$ και αναφέρεται ως φάσμα ισχύος (power spectrum) ή φάσμα πυκνότητας ισχύος (power density spectrum) ή φασματική πυκνότητα ισχύος (power spectral density).

Η σχέση αυτή είναι γνωστή και ως θεώρημα Wiener-Khintchin.

Η ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του φάσματος ισχύος $S_{xx}(\omega)$ είναι η ακολουθία αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(\ell)$ να είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή.

Αντίστροφος DTFT του φάσματος ισχύος $S_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(e^{j\omega})$

$$\phi_{xx}(\ell) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega)\, e^{j\omega\ell}\, d\omega$$

Αλλά $E(|X(n)|^2) = \phi_{xx}(0)$ $\Rightarrow$

$$E(|X(n)|^2) = \phi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega)\, d\omega$$

Η $\phi_{xx}(0)$ αντιπροσωπεύει την μέση ισχύ P_x του τυχαίου σήματος $\{X(n)\}$.

Ιδιότητες της $S_{xx}(\omega)$

α. Μονάδες: $S_{xx}(\omega) \sim$ power/rad

$S_{xx}(f) \sim$ power/Hz

Σημείωση: $S_{xx}(f) \neq S_{xx}(\omega)\Big|_{\omega=2\pi f}$ δεδομένου ότι αλλάζει και η κλιμάκωση (scaling)

β. $S_{xx}(\omega) \geq 0$ (βλ. σημείωση 2)

γ. $S_{xx}(\omega)$ πραγματικό, δεδομένου ότι $\phi_{xx}(\ell) = \phi_{xx}(-\ell)$. Πρόκειται δηλαδή για τον DTFT άρτιας ακολουθίας.

δ. Εάν $x(n)$ πραγματική, τότε $S_{xx}(\omega)$ άρτια, δηλ $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$.

Σημείωση 1

Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την ισχύ που συνεισφέρουν οι συχνότητες μεταξύ ω_1 και ω_2, τότε υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{xx}(\omega)\, d\omega$$

Απόδειξη:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} S_{xx}(\omega)\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{xx}(\omega)\, d\omega =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{xx}(\omega)\, d\omega \qquad \langle \text{λόγω άρτιας συμμετρίας} \rangle$$

Σημείωση 2

$$\left.\begin{array}{l} \text{Από την σημείωση 1 έχουμε: } P = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{xx}(\omega)\, d\omega \\ \text{γνωρίζουμε όμως ότι } \quad P = E(|X(t)|^2) \geq 0 \end{array}\right\} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{xx}(\omega)\, d\omega \geq 0 \quad \forall\, \omega_1, \omega_2$$

Η τελευταία σχέση ισχύει μόνον εφόσον $S_{xx}(\omega) \geq 0 \ \forall\, \omega$

DTFT της αυτοδιασποράς $\gamma_{xx}(l)$ ενός WSS σήματος $X(n)$

$$\Gamma_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(l)\, e^{-j\omega l} \qquad |\omega|<\pi$$

Η ικανή συνθήκη ύπαρξης του $\Gamma_{xx}(e^{j\omega})$ είναι η ακολουθία αυτοδιασποράς $\gamma_{xx}(l)$ να είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή.

Αντίστροφος DTFT του $\Gamma_{xx}(e^{j\omega})$

$$\gamma_{xx}(l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{xx}(e^{j\omega})\, e^{j\omega l}\, d\omega$$

Αλλά $\sigma_x^2 = \gamma_{xx}(0) = \phi_{xx}(0) - |m_x|^2$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{xx}(e^{j\omega})\, d\omega$$

ή

$$\sigma_x^2 = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega)\, d\omega}_{\phi_{xx}(0)} - |m_x|^2$$

$$\gamma_{xx}(l) = \phi_{xx}(l) - |m_x|^2 \quad \xrightarrow{F} \quad \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(\omega) - 2\pi |m_x|^2 \delta(\omega) \qquad |\omega|<\pi$$

$$\gamma_{xy}(l) = \phi_{xy}(l) - m_x m_y^* \quad \xrightarrow{F} \quad \Gamma_{xy}(e^{j\omega}) = S_{xy}(\omega) - 2\pi\, m_x m_y^* \delta(\omega) \qquad |\omega|<\pi$$

όπου

$S_{xy}(\omega) = \Phi_{xy}(e^{j\omega})$ το φάσμα ετερο-ισχύος (cross-power spectrum) ή φασματική πυκνότητα ετεροϊσχύος (cross-power spectral density)

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(l)\, e^{-j\omega l} \qquad |\omega|<\pi$$

DTFT ετερο-διασποράς $\Gamma_{xy}(e^{j\omega})$

$$\Gamma_{xy}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(l)\, e^{-j\omega l} \qquad |\omega|<\pi$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Για την περίπτωση των στάσιμων (WSS) τυχαίων διαδικασιών συνεχούς χρόνου, οι αντίστοιχες σχέσεις της φασματικής πυκνότητας ισχύος (PSD) γίνονται όπως παρακάτω:

$$S_{xx}(\Omega) = F\{\phi_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)\, e^{-j\Omega\tau}\, d\tau$$

$$\phi_{xx}(\tau) = F^{-1}\{S_{xx}(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\Omega)\, e^{j\Omega\tau}\, d\Omega$$

$$\Gamma_{xx}(\Omega) = F\{\gamma_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau)\, e^{-j\Omega\tau}\, d\tau$$

$$\gamma_{xx}(\tau) = F^{-1}\{\Gamma_{xx}(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(\Omega)\, e^{j\Omega\tau}\, d\Omega$$

ΛΕΥΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ(*) (White Random Process)

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(n)\}$ για την οποία οποιεσδήποτε δύο τυχαίες μεταβλητές $X(m)$, $X(n)$ για $m \neq n$, είναι ανεξάρτητες και ασυσχέτιστες, $E(X(m)X(n)) = E(X(m))\,E(X(n))$,

ονομάζεται λευκή τυχαία διαδικασία ή IID τυχαία διαδικασία.
Μια IID τυχαία διαδικασία είναι WSS.

IID: independent and identically distributed

Αυτοσυσχέτιση WSS λευκής τυχαίας διαδικασίας

$$\phi_{xx}(\ell) = \sigma_x^2\,\delta(\ell) + m_x^2$$

F

Φάσμα ισχύος WSS λευκής τυχαίας διαδικασίας

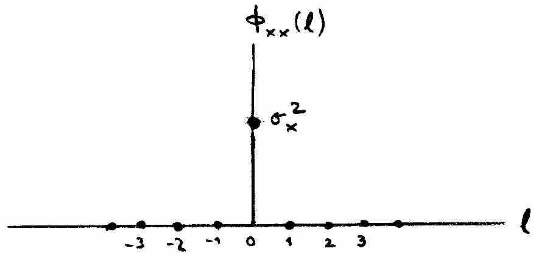
$$S_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 + 2\pi\, m_x^2\,\delta(\omega) \qquad |\omega| < \pi$$

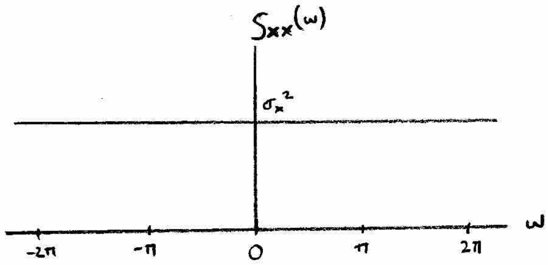
Για μια λευκή στοχαστική διαδικασία με μηδενική μέση τιμή ($m_x = 0$) η αυτοσυσχέτιση είναι μια κρουστική ακολουθία ύψους σ_x^2, και το φάσμα ισχύος είναι σταθερό και ίσο προς σ_x^2 για όλες τιμές του ω.

$$\phi_{xx}(\ell) = \sigma_x^2\,\delta(\ell)$$

$$S_{xx}(\omega) = \sigma_x^2$$

Η στοχαστική αυτή διαδικασία ονομάζεται λευκός θόρυβος (white noise), διότι η φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{xx}(\omega)$ είναι η ίδια για όλο το φάσμα συχνοτήτων (βλ. σχήμα), κατ' αναλογία με το λευκό φως το οποίο καλύπτει όλα τα φυσικά χρώματα.
Οι στοχαστικές διαδικασίες που δεν καλύπτουν όλο το φάσμα συχνοτήτων αναφέρονται ως έγχρωμος θόρυβος (colored or pink noise).



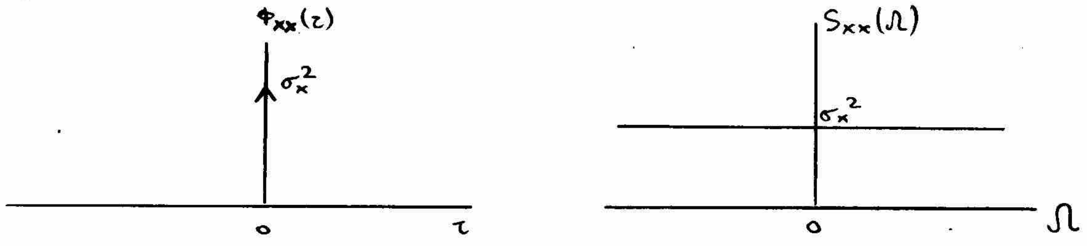


Ο λευκός θόρυβος ο οποίος είναι Gaussian ονομάζεται λευκός γκαουσιανός θόρυβος (white Gaussian noise - WGN).

(*) Λευκή διαδικασία είναι αυτή της οποίας όλες οι συνιστώσες συχνότητας έχουν την ίδια ισχύ, δηλ. η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι σταθερή για ΟΛΕΣ τις συχνότητες. Ο θερμικός θόρυβος μοντελοποιείται ως λευκή διαδικ.

Στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου η αυτοσυσχέτιση και η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού θορύβου είναι αντίστοιχα:

$$\phi_{xx}(\tau) = \sigma_x^2\,\delta(\tau) \quad \xleftrightarrow{F} \quad S_{xx}(\Omega) = \sigma_x^2 \qquad (1)$$



(α) (β)

Σχ. 1

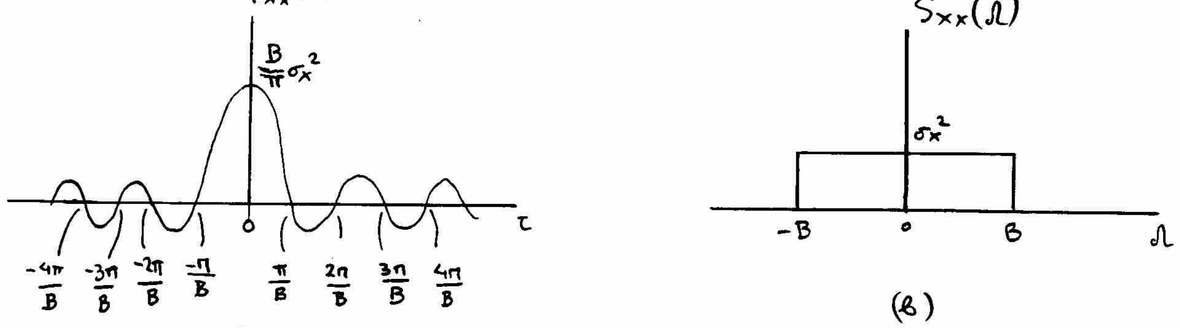
Στην πράξη όμως ο λευκός θόρυβος δεν μπορεί να υπάρξει γιατί αυτό θα σήμαινε πως έχουμε άπειρη ισχύ, αφού $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\Omega)\, d\Omega \rightarrow \infty$

Έτσι στην πράξη ο λευκός θόρυβος ορίζεται για ένα καθορισμένο εύρος συχνοτήτων:

$$S_{xx}(\Omega) = \begin{cases} \sigma_x^2 & \text{για } -B \le \Omega \le B \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad (2)$$

Η πλειοψηφεία των φυσικών συστημάτων που μελετούμε έχει περιορισμένο εύρος συχνοτήτων, οπότε το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε αυτή την περιοχή. Συνεπώς ο θόρυβος μπορεί να θεωρηθεί λευκός για τη συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων, ώστε να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στην ανάλυση του συστήματος.

Με βάση τη σχέση (2) η φασματική πυκνότητα ισχύος έχει τη μορφή του Σχ. 2β, οπότε η αυτοσυσχέτιση του εν λόγω θορύβου, η οποία προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της φασματ. πυκν. ισχύος $S_{xx}(\Omega)$, είναι της μορφής $sinc(\tau)$, όπως φαίνεται στο Σχ. 2α.



(α) (β)

Σχ. 2

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του Σχ. 2α έχει προκύψει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του περιορισμένου εύρους λευκού θορύβου ως εξής:

$$\Phi_{xx}(\tau) = F^{-1}\{S_{xx}(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\sigma_x^2 \int_{-B}^{B} e^{j\Omega\tau}\, d\Omega =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{2\pi}\frac{1}{j\tau}\left(e^{jB\tau} - e^{-jB\tau}\right) =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{2\pi}\frac{1}{j\tau}\, 2j\sin(B\tau) =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\pi}\frac{\sin(B\tau)}{\tau} \qquad (3)$$

Για $\tau=0$ και μετά από την εφαρμογή του κανόνα L'Hospital βρίσκουμε $\Phi_{xx}(0)=\frac{B}{\pi}\sigma_x^2$ που αντιστοιχεί στη μέση ισχύ του σήματος. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (3) μηδενίζεται για $\tau=\frac{\pi}{B}l$, όπου $l \in Z-\{0\}$. Δεδομένου ότι η μέση τιμή $m_x=E\{X(t)\}$ του λευκού θορύβου είναι μηδέν ($m_x=0$), και ότι

$$\Phi_{xx}(\tau) = E\left(X(t+\tau)\, X^*(t)\right) = 0 \quad \text{για } \tau=\frac{\pi}{B}l \text{ για όλα τα } l \text{ εκτός μηδέν}$$

τα δείγματα του περιορισμένου εύρους λευκού θορύβου είναι ασυσχέτιστα μόνον για τις συγκεκριμένες τιμές του τ.

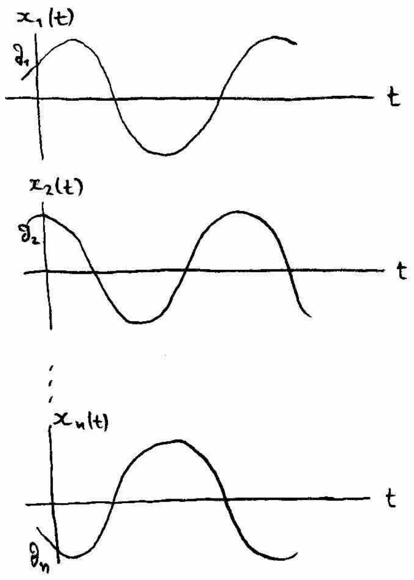
Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση του θεωρητικού λευκού θορύβου, του οποίου το εύρος συχνοτήτων είναι απεριόριστο, τα δείγματα είναι ασυσχέτιστα για όλες τις τιμές του τ. (Βλ. Σχ. 1α). Αυτό γίνεται φανερό από το Σχ. 2β καθώς $B\to\infty$, οπότε η μορφή τείνει σε αυτή του Σχ. 1β. Αντίστοιχα, για $B\to\infty$ η μορφή του Σχ. 2α τείνει στην κρουστική του Σχ. 1α.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Σε μια λευκή τυχαία διαδικασία όλα τα δείγματα (πραγματώσεις) είναι ασυσχέτιστα. Μια τέτοια διαδικασία δεν είναι φυσικά πραγματοποιήσιμη, αφού έχει άπειρη ισχύ. Παίζει, όμως, έναν ρόλο στις τυχαίες διαδικασίες αντίστοιχο με εκείνον της σημειακής μάζας στη φυσική και της συνάρτησης δέλτα στα συστήματα. Ο θερμικός θόρυβος μοντελοποιείται ως λευκός Gaussian θόρυβος, αφού έχει επίπεδη φασματική πυκνότητα (PSD) σε ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων (GHz).

ΑΣΚΗΣΗ Για την στοχαστική διαδικασία $X(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \Theta)$, όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0,2\pi)$, να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης καθώς και η φασματική πυκνότητα ισχύος.

ΛΥΣΗ Γραφικά, η τυχαία διαδικασία θα είναι όπως στο σχήμα, όπου δείχνονται ορισμένα στιγμιότυπα / δείγματα / πραγματοποιήσεις (realizations) για διαφορετικές τιμές της τυχαίας μεταβλητής Θ $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$.



$$\phi_{xx}(t+\tau, t) = E\left(X(t+\tau)\, X^*(t)\right) = E\left(A\cos[2\pi F_0(t+\tau)+\Theta] \cdot A\cos(2\pi F_0 t + \Theta)\right) =$$

$$= A^2 \cdot \frac{1}{2} E\left(\cos(2\pi F_0 \tau) + \cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0 \tau + 2\Theta)\right) =$$

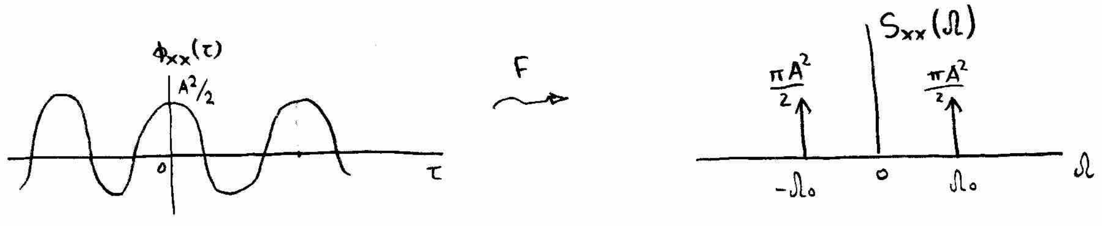
$$= \frac{A^2}{2}\left[\underbrace{E\left(\cos(2\pi F_0 \tau)\right)}_{\cos(2\pi F_0 \tau)} + \underbrace{E\left(\cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0 \tau + 2\Theta)\right)}_{0}\right] =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi F_0 \tau) =$$

$$= \phi_{xx}(\tau)$$

$S_{xx}(\Omega) = F\left\{\phi_{xx}(\tau)\right\}$ όπου $F\{\cdot\}$ ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

Άρα $S_{xx}(\Omega) = F\left\{\frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0 \tau)\right\} = \frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right]$



Σημείωση 1. Στην περίπτωση που θέλουμε να εκφράσουμε την φασματική πυκνότητα ισχύος συναρτήσει της συχνότητας F και όχι της κυκλικής συχνότητας, μετατρέπουμε την $S_{xx}(\Omega)$ βασιζόμενοι στις σχέσεις:

$\Omega = 2\pi F$ και $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$.

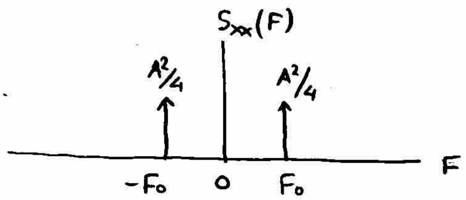
Έτσι έχουμε:

$$S_{xx}(F) = \frac{A^2\pi}{2}\left[\delta\left(2\pi F - 2\pi F_0\right) + \delta\left(2\pi F + 2\pi F_0\right)\right] =$$

$$= \frac{A^2\pi}{2}\left[\delta(2\pi(F-F_0)) + \delta(2\pi(F+F_0))\right] =$$

$$= \frac{A^2\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left[\delta(F-F_0) + \delta(F+F_0)\right] =$$

$$= \frac{A^2}{4}\left[\delta(F-F_0) + \delta(F+F_0)\right]$$



2. $E\left(\cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0\tau + 2\theta)\right) = 0$ όπου θ τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή $[0, 2\pi)$. $P_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$

Απόδειξη

Ισχύει $E(g(\theta)) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\theta(\alpha)\, P_\theta(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos(\underbrace{4\pi F_0 t + 2\pi F_0\tau}_{\xi} + 2\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\, d\theta =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\xi + 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(\xi + 2\theta)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\sin(\xi + 2\pi) - \sin(\xi)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\sin(\xi) - \sin(\xi)\right] =$$

$$= 0$$

ΑΣΚΗΣΗ Δίνονται οι WSS τυχαίες διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$, οι οποίες είναι από κοινού WSS. Να υπολογιστεί η φασματική πυκνότητα ισχύος του αθροίσματός τους.

ΛΥΣΗ Έστω $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Η τυχαία διαδικασία $Z(t)$ είναι επίσης WSS και η αυτοσυσχέτισή της υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\phi_{ZZ}(t+\tau, t) = E\left(Z(t+\tau)\, Z^*(t)\right) =$$

$$= E\left([X(t+\tau) + Y(t+\tau)][X(t) + Y(t)]^*\right) =$$

$$= E\left(X(t+\tau)X^*(t) + X(t+\tau)Y^*(t) + Y(t+\tau)X^*(t) + Y(t+\tau)Y^*(t)\right) =$$

$$= \underbrace{E\left(X(t+\tau)X^*(t)\right)}_{\phi_{XX}(\tau)} + \underbrace{E\left(X(t+\tau)Y^*(t)\right)}_{\phi_{XY}(\tau)} + \underbrace{E\left(Y(t+\tau)X^*(t)\right)}_{\phi_{YX}(\tau)} + \underbrace{E\left(Y(t+\tau)Y^*(t)\right)}_{\phi_{YY}(\tau)}$$

Άρα

$$\phi_{ZZ}(\tau) = \phi_{XX}(\tau) + \phi_{XY}(\tau) + \phi_{YX}(\tau) + \phi_{YY}(\tau) = \left\langle \text{δεδομένου ότι } \phi_{YX}(\tau) = \phi_{XY}(-\tau) \right\rangle$$

$$\phi_{ZZ}(\tau) = \phi_{XX}(\tau) + \phi_{XY}(\tau) + \phi_{XY}(-\tau) + \phi_{YY}(\tau) \qquad (1)$$

F

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών

$$S_{ZZ}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) + S_{XY}(\Omega) + S_{XY}^*(\Omega) + S_{YY}(\Omega) =$$

$$= S_{XX}(\Omega) + 2\,\mathrm{Re}\left\{S_{XY}(\Omega)\right\} + S_{YY}(\Omega) \qquad (2)$$

(PSD)

Παρατηρούμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των PSD καθεμιάς των διαδικασιών συν έναν επιπλέον όρο που εξαρτάται από την ετεροσυσχέτισή τους. Εάν οι διαδικασίες $X(t)$, $Y(t)$ είναι ασυσχέτιστες, τότε

$$\phi_{XY}(\tau) = E\left(X(t+\tau)Y^*(t)\right) = E\left(X(t+\tau)\right) E\left(Y^*(t)\right) = m_X\, m_Y^*$$

Τέλος, αν τουλάχιστον μία από τις διαδικασίες είναι μηδενικής μέσης τιμής, τότε $\phi_{XY}(\tau) = 0$, οπότε

$$S_{ZZ}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) + S_{YY}(\Omega) \qquad (3)$$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω η τυχαία διαδικασία $Y(t) = X(t) + W(t)$, όπου $X(t) = A\sin(\Omega_0 t + \theta)$ με A, Ω_0 σταθερά, θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφη στην περιοχή $[-\pi, \pi]$ και $W(t)$ λευκός θόρυβος με αμφίπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος ίση με $N_0/2$. Τα θ και $W(t)$ είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους. Να υπολογιστεί η φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{YY}(\Omega)$ της $Y(t)$.

ΛΥΣΗ Έχουμε δει σε προηγούμενη άσκηση ότι:

$$\phi_{YY}(\tau) = \phi_{XX}(\tau) + \phi_{WW}(\tau) + \phi_{XW}(\tau) + \phi_{XW}(-\tau) \qquad (1)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier και των δύο μελών της (1) μας δίνει

$$S_{YY}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) + S_{WW}(\Omega) + S_{XW}(\Omega) + S^{*}_{XW}(\Omega) \Rightarrow$$

$$S_{YY}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) + S_{WW}(\Omega) + 2\,\mathrm{Re}\{S_{XW}(\Omega)\} \qquad (2)$$

Έχουμε υπολογίσει σε προηγούμενη άσκηση την αυτοσυσχέτιση της τυχαίας διαδικασίας $X(t) = A\sin(\Omega_0 t + \theta)$

$$\phi_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0 \tau) \xleftrightarrow{F} S_{XX}(\Omega) = \frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right] \qquad (3)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_{WW}(\tau)$ του λευκού θορύβου $W(t)$ ισούται με $\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$, αφού έχουμε ως δεδομένο ότι η αμφίπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος ισούται με $N_0/2$. Άρα

$$\phi_{WW}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \xleftrightarrow{F} S_{WW}(\Omega) = \frac{N_0}{2} \qquad (4)$$

Τέλος, η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{XW}(\tau)$ ισούται με:

$$\phi_{XW}(\tau) = E\left(X(t+\tau)\,W^{*}(\tau)\right) = \left\langle X(t), W(t) \text{ ασυσχέτιστες} \right\rangle =$$

$$= E\left(X(t+\tau)\right)\,E\left(W^{*}(\tau)\right) = m_X \cdot m_W^{*} = m_X \cdot 0 = 0 \qquad (5)$$

Υπενθυμίζεται ότι η μέση τιμή του λευκού θορύβου είναι μηδέν!

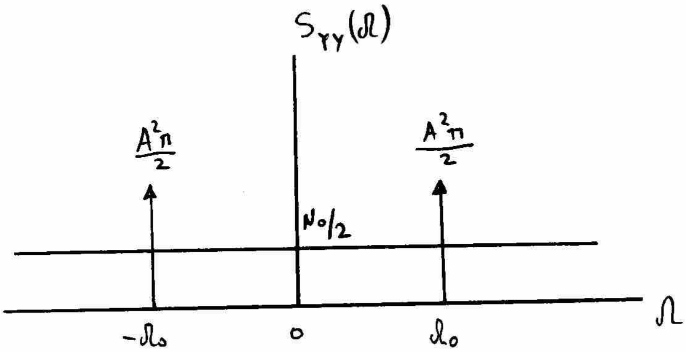
Με βάση της (3), (4), (5) κ (2) γίνεται:

$$S_{YY}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) + S_{WW}(\Omega) =$$

$$= \frac{A^2}{2}\pi \left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right] + \frac{N_0}{2} \qquad (6)$$

Σημείωση: Η σχέση (6) εκφράζει την φασματική πυκνότητα ισχύος σε συνάρτηση με την κυκλική συχνότητα Ω. Δεδομένου ότι $\Omega = 2\pi F$, η σχέση αυτή συναρτήσει της συχνότητας F γράφεται ως:

$$S_{YY}(F) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(F-F_0) + \delta(F+F_0)\right] + \frac{N_0}{2} \qquad (7)$$



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της φασματικής πυκνότητας ισχύος παρατηρούμε ότι οι δύο κρουστικές που αντιπροσωπεύουν το τυχαίο ημιτονικό σήμα (διαδικασία) πρέπει να έχουν εμβαδό μεγαλύτερο του επιπέδου θορύβου $N_0/2$ ώστε να ξεχωρίζουν. Μόνον τότε μπορούμε να εξαγάγουμε το ημιτονικό σήμα από το ενθόρυβο σήμα.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

$$X(t) \longrightarrow \overset{\Gamma X A}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow Y(t) = h(t) * X(t)$$

Για ΓΧΑ συστήματα έχουμε $Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau$

- Μέση τιμή: $m_Y(t) = E\big(Y(t)\big) = E\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau\right) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, E\big(X(t-\tau)\big)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, m_X(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= h(t) * m_X(t) \qquad (1)$$

Εάν η είσοδος $X(t)$ είναι WSS, τότε η μέση τιμή είναι σταθερή, $m_X(t) = m_X$

$$m_Y(t) = E\big(Y(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, m_X\, d\tau = m_X \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau}_{H(0)} = m_X\, H(0) \qquad (2)$$

όπου $H(0)$ η απόκριση συχνότητας του συστήματος για συχνότητα $\Omega = 0$, δηλαδή η DC συνιστώσα.

Στην περίπτωση αυτή η μέση τιμή της εξόδου είναι επίσης σταθερή, $m_Y(t) = m_Y =$ σταθ.

- Αυτοσυσχέτιση εξόδου:

$$\phi_{YY}(t+\tau,t) = E\left(Y(t+\tau)\,Y^*(t)\right) =$$
$$= E\left(\left(h(t+\tau) * X(t+\tau)\right)\,Y^*(t)\right) =$$
$$= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,X(t+\tau-\xi)\,d\xi\;Y^*(t)\right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,\underbrace{E\left(X(t+\tau-\xi)\,Y^*(t)\right)}\,d\xi =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,\phi_{XY}(t+\tau-\xi,\,t)\,d\xi$$

Εάν η είσοδος $X(t)$ είναι WSS, τότε η ετεροσυσχέτιση εξαρτάται από τη διαφορά των χρόνων $t+\tau-\xi$ και t, οπότε $\phi_{XY}(t+\tau-\xi,t) = \phi_{XY}(\tau-\xi)$.
Συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\phi_{YY}(t+\tau,t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,\phi_{XY}(\tau-\xi)\,d\xi =$$
$$= h(\tau) * \phi_{XY}(\tau)$$

Τελικά

$$\phi_{YY}(\tau) = h(\tau) * \phi_{XY}(\tau) \qquad (3)$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$S_{YY}(\Omega) = H(\Omega)\,S_{XY}(\Omega) \qquad (4)$$

- Ετεροσυσχέτιση εξόδου - εισόδου:

$$\begin{aligned}
\phi_{YX}(t+\tau,t) &= E\big(Y(t+\tau)\,X^*(t)\big) = \\
&= E\Big(\big(h(t+\tau) * X(t+\tau)\big)\,X^*(t)\Big) = \\
&= E\Big(\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,X(t+\tau-\xi)\,d\xi \;\; X^*(t)\Big) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, \underbrace{E\big(X(t+\tau-\xi)\,X^*(t)\big)}_{\phi_{XX}(t+\tau-\xi,\,t)}\, d\xi =
\end{aligned}$$

Για είσοδο WSS ισχύει ότι

$$\phi_{XX}(t+\tau-\xi,t) = \phi_{XX}(\tau-\xi)$$

οπότε η σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}
\phi_{YX}(t+\tau,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,\phi_{XX}(\tau-\xi)\,d\xi = \\
&= h(\tau) * \phi_{XX}(\tau)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\phi_{YX}(\tau) = h(\tau) * \phi_{XX}(\tau) \qquad (5)$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$S_{YX}(\Omega) = H(\Omega)\,S_{XX}(\Omega) \qquad (6)$$

<u>Σημείωση</u>: Παρατηρούμε ότι εάν η είσοδος $X(t)$ σε ένα ΓΧΑ είναι WSS, τότε και η έξοδος $Y(t)$ είναι WSS. Επιπλέον, η είσοδος $X(t)$ και η έξοδος $Y(t)$ είναι "από κοινού WSS".

<u>Ορισμός</u> Δύο τυχαίες διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$ ονομάζονται "από κοινού WSS" ή αλλά "από κοινού στάσιμες" (jointly stationary), εάν καθεμία είναι WSS και η ετεροσυσχέτιση $\phi_{XY}(t_1,t_2)$ εξαρτάται μόνον από το $\tau = t_1 - t_2$.

• Ετεροσυσχέτιση εισόδου - εξόδου:

Γνωρίζουμε ότι $\phi_{XY}(\tau) = \phi_{YX}(-\tau)$ (7)

καθώς και ότι $\phi_{XX}(\tau) = \phi_{XX}(-\tau)$ (8)

Με βάση τη σχέση (5) η (7) γίνεται:

$$\phi_{XY}(\tau) = h(-\tau) * \phi_{XX}(-\tau) \Rightarrow$$

$$\phi_{XY}(\tau) = h(-\tau) * \phi_{XX}(\tau) \qquad (9)$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$S_{XY}(\Omega) = H^*(\Omega)\, S_{XX}(\Omega) \qquad (10)$$

• Αυτοσυσχέτιση εξόδου συναρτήσει της αυτοσυσχέτισης εισόδου:

$(3) \rightsquigarrow$ $\phi_{YY}(\tau) = h(\tau) * \phi_{XY}(\tau) \Rightarrow$ (λόγω της (9))

$$\phi_{YY}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * \phi_{XX}(\tau) \qquad (11)$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$S_{YY}(\Omega) = \underbrace{H(\Omega)\, H^*(\Omega)}_{|H(\Omega)|^2} S_{XX}(\Omega) \qquad (12)$$

ή

$$S_{YY}(\Omega) = |H(\Omega)|^2\, S_{XX}(\Omega) \qquad (13)$$

Από τη σχέση (13) γίνεται φανερό ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου ισούται με το γινόμενο της φασματικής πυκνότητας ισχύος της εισόδου επί το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

Ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης της εξόδου $\phi_{YY}(\tau)$ είναι ευκολότερο να γίνει μέσω της φασματικής πυκνότητας ισχύος της εξόδου $S_{YY}(\Omega)$ και του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

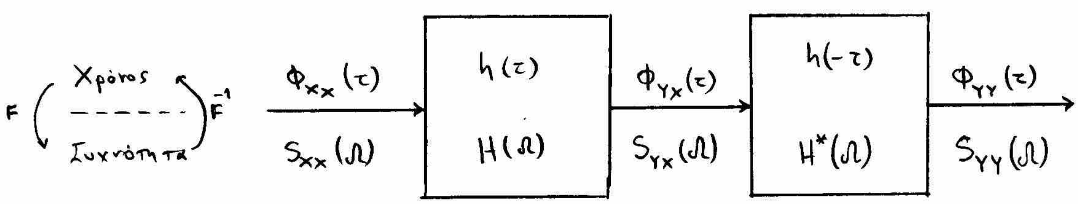
$$\phi_{YY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\Omega)\, e^{j\Omega\tau}\, d\Omega = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\Omega)|^2\, S_{XX}(\Omega)\, e^{j\Omega\tau}\, d\Omega \tag{15}$$

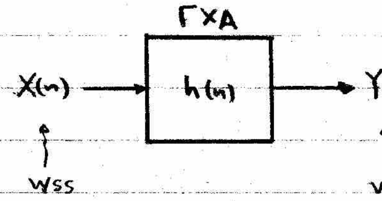
Η μέση ισχύς P_Y της εξόδου $Y(t)$ προκύπτει ως

$$E\left(Y^2(t)\right) = \phi_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\Omega)|^2\, S_{XX}(\Omega)\, d\Omega \tag{16}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Οι σχέσεις (3) έως (13) προκύπτουν εύκολα ως διαδοχική σύνδεση δύο συστημάτων με κρουστικές αποκρίσεις $h(\tau)$ και $h(-\tau)$.



ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ



$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, X(n-k)$$

m_x σταθ. $\quad$ m_y σταθ.

$\phi_{xx}(l)$ $\quad$ $\phi_{YY}(l)$ $\qquad l = (n+l) - n$

Η έξοδος y(n) ενός ΓΧΑ συστήματος, του οποίου η είσοδος X(n) είναι μια WSS στοχαστική διαδικασία, είναι επίσης μια WSS στοχαστική διαδικασία.

- **Μέση τιμή:** Αφού X(n) είναι WSS, δηλαδή m_x σταθερή ανεξάρτητη του χρόνου n, η Y(n) είναι επίσης WSS, δηλαδή m_y σταθερή ανεξάρτητη του χρόνου n.

$$m_Y = E(Y(n)) = E\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) X(n-k)\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, \underbrace{E(X(n-k))}_{m_x} \qquad (*)$$

$$= m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) =$$

$$= m_x H(e^{j0}) \qquad (**) \qquad \Big| \quad m_y = m_x H(1)$$

- **Διασπορά:** $\quad \sigma_Y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2$

- **Φάσμα ισχύος:** $\quad S_{YY}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{XX}(\omega) \qquad \Big| \quad S_{YY}(z) = H(z) H(z^{-1}) S_{XX}(z)$

- **Φάσμα ετερο-ισχύος:** (cross-power spectrum) $\quad \underbrace{\Phi_{YX}(e^{j\omega})}_{S_{YX}(\omega)} = H(e^{j\omega})\, \underbrace{\Phi_{XX}(e^{j\omega})}_{S_{XX}(\omega)} \qquad \Big| \quad \Phi_{YX}(z) = H(z)\, \Phi_{XX}(z)$

frequency-domain $\qquad$ z-domain

Σημειώσεις: (*) Η συνέλιξη είναι καλά ορισμένη για τις περιπτώσεις που η είσοδος X(n) είναι φραγμένη (bounded) και το σύστημα είναι BIBO (Bounded-Input, Bounded-Output).

(**) Η μέση τιμή της εξόδου είναι σταθερή και ισούται με τη μέση τιμή της εισόδου πολλαπλασιασμένη με τον DC συντελεστή, δηλαδή το κέρδος μηδενικής συχνότητας, του συστήματος.

ΑΣΚΗΣΗ Έστω ότι η τυχαία WSS ακολουθία $X(n)$ εφαρμόζεται σε ΓΧΑ σύστημα κρουστικής απόκρισης $h(n)$, παράγοντας την έξοδο $Y(n)$. Να αποδειχθεί ότι:

α. $\phi_{YX}(\ell) = h(\ell) * \phi_{XX}(\ell)$

β. $\phi_{YY}(\ell) = h(\ell) * \phi_{XY}(\ell)$

γ. $S_{YX}(\omega) = H(e^{j\omega})\, S_{XX}(\omega)$

δ. $S_{YY}(\omega) = H(e^{j\omega})\, S_{XY}(\omega)$

ΛΥΣΗ

α. $$\phi_{YX}(\ell) = \phi_{YX}(n+\ell, n) = E\left(Y(n+\ell)\, \overset{\text{συζυγές}}{X^*(n)}\right) =$$

$$= E\left(\left(h(n+\ell) \overset{\text{συνέλιξη}}{*} X(n+\ell)\right) X^*(n)\right) =$$

$$= E\left(\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, X(n+\ell-m)\right] X^*(n)\right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, \underbrace{E\left(X(n+\ell-m)\, X^*(n)\right)}_{\phi_{XX}(n+\ell-m,\, n) = \phi_{XX}(\ell-m)} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, \phi_{XX}(\ell-m) =$$

$$= h(\ell) * \phi_{XX}(\ell)$$

β. $$\phi_{YY}(\ell) = \phi_{YY}(n+\ell, n) = E\left(Y(n+\ell)\, Y^*(n)\right) =$$

$$= E\left(\left(h(n+\ell) * X(n+\ell)\right) Y^*(n)\right) =$$

$$= E\left(\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, X(n+\ell-m)\right] Y^*(n)\right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, \underbrace{E\left(X(n+\ell-m)\, Y^*(n)\right)}_{\phi_{XY}(n+\ell-m,\, n) = \phi_{XY}(\ell-m)} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, \phi_{XY}(\ell-m) =$$

$$= h(\ell) * \phi_{XY}(\ell)$$

γ. Προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου των δύο μελών της σχέσης α.

δ. Προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου των δύο μελών της σχέσης β.

ΑΣΚΗΣΗ Να αποδείξετε ότι $S_{yy}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{xx}(\omega)$, όπου $X(n)$ τυχαία WSS ακολουθία που εφαρμόζεται σε ΓΧΑ κρουστικής απόκρισης $h(n)$ και $Y(n)$ η έξοδος του συστήματος.

ΛΥΣΗ Σε προηγούμενη άσκηση αποδείξαμε ότι

$$\phi_{yy}(\ell) = h(\ell) * \phi_{xy}(\ell) \quad (1)$$

και

$$\phi_{yx}(\ell) = h(\ell) * \phi_{xx}(\ell) \quad (2)$$

Αλλά $\phi_{xy}(\ell) = \phi_{yx}(-\ell)$ (3)

οπότε η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} \phi_{yy}(\ell) &= h(\ell) * \phi_{yx}(-\ell) = \langle \text{λόγω της (2)} \rangle = \\ &= h(\ell) * [h(-\ell) * \phi_{xx}(-\ell)] = \\ &= h(\ell) * h(-\ell) * \phi_{xx}(-\ell) \quad (4) \end{aligned}$$

Τέλος αν θυμηθούμε ότι η αυτοσυσχέτιση είναι άρτια,

$$\phi_{xx}(-\ell) = \phi_{xx}(\ell) \quad (5)$$

οπότε η (4) γίνεται:

$$\phi_{yy}(\ell) = h(\ell) * h(-\ell) * \phi_{xx}(\ell) \quad (6)$$

Λαμβάνοντας τον DTFT και των δύο μελών της (6) έχουμε:

$$S_{yy}(\omega) = H(e^{j\omega})\, H(e^{-j\omega})\, S_{xx}(\omega) \Rightarrow$$

$$S_{yy}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{xx}(\omega)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1. Η σχέση (3) μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \phi_{yx}(-\ell) &= \phi_{yx}(n-\ell, n) = E\big(Y(n-\ell)\, X(n)\big) = \langle \text{θέτω } n-\ell = m \Rightarrow n = m+\ell \rangle \\ &= E\big(Y(m)\, X(m+\ell)\big) = \\ &= E\big(X(m+\ell)\, Y(m)\big) = \\ &= \phi_{xy}(\ell) \end{aligned}$$

όπου χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεώρησα ότι τα $X(n), Y(n)$ είναι πραγματικά.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2. Ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης $\phi_{YY}(\ell)$ είναι ευκολότερος μέσω της φασματικής πυκνότητας ισχύος $S_{YY}(\omega)$ και του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier αυτής:

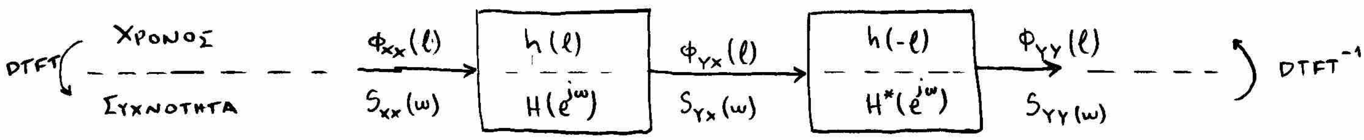
$$\phi_{YY}(\ell) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{YY}(\omega)\, e^{j\omega\ell}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2\, S_{XX}(\omega)\, e^{j\omega\ell}\, d\omega$$

Η μέση ισχύς του τυχαίου σήματος εξόδου $Y(n)$ ισούται με:

$$P_Y = E\left(Y^2_{(n)}\right) = \phi_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2\, S_{XX}(\omega)\, d\omega$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 3. Όλες οι σχέσεις των συσχετίσεων και των μετασχηματισμών τους (φασματικών συχνοτήτων ισχύος) μπορούν εύκολα να προκύψουν ως διαδοχική σύνδεση δύο συστημάτων με κρουστικές αποκρίσεις $h(\ell)$ και $h(-\ell)$ αντίστοιχα.



ΑΣΚΗΣΗ Ν.δ.ο. $\sigma_Y^2=\sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|^2$, όπου $X(n)$ λευκή στοχαστική διαδικασία πραγματικών τιμών, η οποία εφαρμόζεται σε ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$ και $Y(n)$ η έξοδος του συστήματος.

ΛΥΣΗ Γνωρίζουμε ότι

$$\sigma_Y^2=\gamma_{YY}(0)=\phi_{YY}(0)-m_Y^2 \qquad (1)$$

Αλλά

$$P_Y=E\left(Y^2(n)\right)=\phi_{YY}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{YY}(\omega)\,d\omega \qquad (2)$$

μέση ισχύς

και

$$S_{YY}(\omega)=|H(e^{j\omega})|^2\,S_{xx}(\omega) \qquad (3)$$

Το φάσμα ισχύος $S_{xx}(\omega)$ μιας WSS λευκής τυχαίας διαδικασίας είναι

$$S_{xx}(\omega)=\sigma_x^2+2\pi m_x^2\,\delta(\omega) \qquad (4)$$

οπότε η (2), λόγω των (3), (4) γίνεται

$$P_Y=\phi_{YY}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2\left[\sigma_x^2+2\pi m_x^2\,\delta(\omega)\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2\sigma_x^2\,d\omega+\frac{1}{2\pi}2\pi\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2 m_x^2\,\delta(\omega)\,d\omega=$$

$$=\underbrace{\sigma_x^2\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2\,d\omega}_{A}+\underbrace{m_x^2\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2\,\delta(\omega)\,d\omega}_{B}$$

Η σχέση Α λόγω του θεωρήματος του Parseval γράφεται ως

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2\,d\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|^2 \qquad (5)$$

Η σχέση Β λόγω της ιδιότητας της $\delta(\omega)$ γράφεται ως

$$B=\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2\,\delta(\omega)\,d\omega=|H(e^{j0})|^2=\left[H(e^{j0})\right]^2 \qquad (6)$$

Άρα, λόγω των (5), (6)

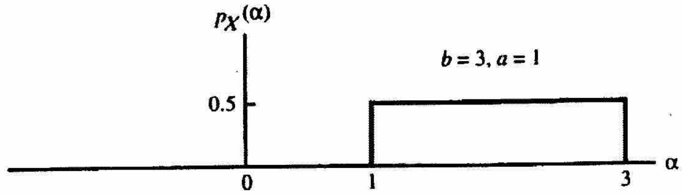
$$P_Y=\sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|^2+\left[\underbrace{m_x\,H(e^{j0})}_{m_Y}\right]^2=\sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|^2+m_Y^2 \qquad (7)$$

Τελικά η (1) γίνεται

$$\sigma_Y^2=\sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $\{X(n)\}$ ομοιόμορφα κατανεμημένο τυχαίο σήμα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_{X(n)}(\alpha)$ αυτή του σχήματος. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά του σήματος εξόδου, όταν η είσοδος αυτή εφαρμοστεί σε ένα αιτιατό φίλτρο 3-σημείων κινούμενου μέσου όρου (moving average) με κρουστική απόκριση

$$\{h(n)\}=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$$



ΛΥΣΗ Για το σήμα εισόδου έχουμε υπολογίσει σε προηγούμενη άσκηση ότι

$$m_x=2,\quad \sigma_x^2=\frac{1}{3}\quad \forall n$$

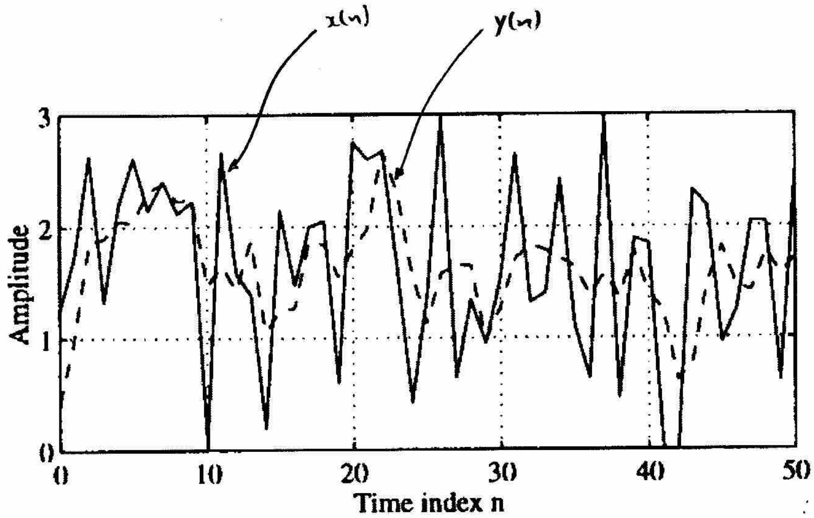
Η μέση τιμή του σήματος εξόδου είναι:

$$m_y=m_x\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)=m_x\big(h(0)+h(1)+h(2)\big)=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=2$$

Η διασπορά του σήματος εξόδου είναι:

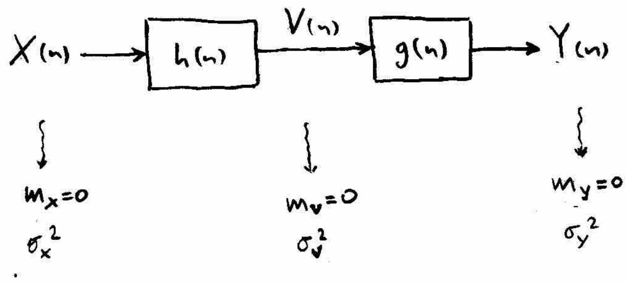
$$\sigma_y^2=\sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|^2=\sigma_x^2\left(h^2(0)+h^2(1)+h^2(2)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}$$

Τα σήματα εισόδου και εξόδου δείχνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ Ένα σήμα λευκού θορύβου $\{X(n)\}$, μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς σ_x^2, εφαρμόζεται σε ΓΧΑ σύστημα κρουστικής απόκρισης $h(n)=(0.6)^n u(n)$, παράγοντας την έξοδο $\{V(n)\}$. Στη συνέχεια, το σήμα $\{V(n)\}$ εφαρμόζεται σε ένα δεύτερο ΓΧΑ σύστημα κρουστικής απόκρισης $g(n)=(0.8)^n u(n)$, παράγοντας την έξοδο $\{Y(n)\}$. Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές m_V m_Y και οι διασπορές σ_V^2, σ_Y^2 των σημάτων $\{V(n)\}$ και $\{Y(n)\}$.

ΛΥΣΗ



Για το πρώτο σύστημα με $h(n)=(0.6)^n u(n)$ έχουμε:

$$m_V = m_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = m_x H(e^{j0}) = 0 \quad \text{αφού} \quad m_x = 0$$

$$\sigma_V^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = \langle \text{λόγω θεωρήματος Parseval} \rangle =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})\cdot H(e^{-j\omega})\, d\omega =$$

$$= \langle \text{αλλά } H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{h(n)\} = \text{DTFT}\{(0.6)^n u(n)\} = \frac{1}{1-0.6e^{-j\omega}} \rangle =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-0.6e^{-j\omega}}\cdot\frac{1}{1-0.6e^{j\omega}}\, d\omega =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1.36-1.2\cos\omega}\, d\omega = \langle \text{από τυπολόγιο } \int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{\alpha+b\cos\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-b^2}} \rangle =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{(1.36)^2-(-1.2)^2}} = \sigma_x^2 \frac{1}{0.64} = \frac{\sigma_x^2}{(0.8)^2} = \underline{1.5625\ \sigma_x^2}$$

Σημείωση: Ο υπολογισμός του σ_v^2 θα μπορούσε να γίνει και απευθείας ως εξής:

$$\sigma_v^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (0.6)^{2n} = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty}[(0.6)^2]^n = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(0.36)^n = \frac{\sigma_x^2}{1-0.36} = \frac{\sigma_x^2}{0.64} = 1.5625\ \sigma_x^2$$

Για το δεύτερο σύστημα με $g(n)=(0.8)^n u(n)$ έχουμε:

$$m_y = m_v \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = m_v G(e^{j0}) = 0 \quad \text{αφού } m_v = 0$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_v^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)|^2 = \langle \text{λόγω θ. Parseval} \rangle$$

$$= \sigma_v^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sigma_v^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega})\, G(e^{-j\omega})\, d\omega =$$

$$= \left\langle \text{αλλά } G(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{g(n)\} = \frac{1}{1-0.8\,e^{-j\omega}} \right\rangle =$$

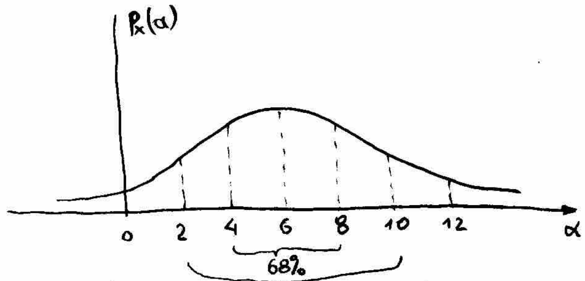
$$= \sigma_v^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-0.8\,e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-0.8\,e^{j\omega}}\, d\omega =$$

$$= \sigma_v^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{1.64 - 1.6\cos\omega} = \sigma_v^2 \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{(1.64)^2 - (-1.6)^2}} = \frac{\sigma_v^2}{0.36} = \frac{\sigma_v^2}{(0.6)^2}$$

Τελικά

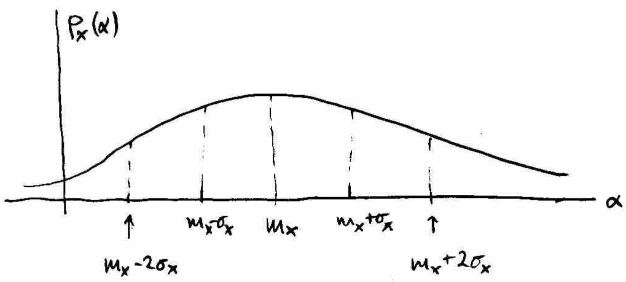
$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_v^2}{(0.6)^2} = \frac{\frac{\sigma_x^2}{(0.8)^2}}{(0.6)^2} = \frac{\sigma_x^2}{(0.48)^2} = \frac{\sigma_x^2}{0.2304} = 4.34\,\sigma_x^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η κρουστική απόκριση $h(n)$ ισούται με $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$. Στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται τυχαία WSS διαδικασία $\{X(n)\}$ με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτή του σχήματος.



Να υπολογιστεί ο λόγος P_Y / P_X, όπου P_X, P_Y η μέση ισχύς της εισόδου και της εξόδου αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ Από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας καταλαβαίνουμε ότι η μέση τιμή m_x του τυχαίου σήματος εισόδου είναι $m_x=6$ και η τυπική απόκλιση $\sigma_x=2$, δηλαδή η διασπορά $\sigma_x^2=4$.



Συνεπώς, η μέση ισχύς του σήματος εισόδου ισούται με

$$P_x = \sigma_x^2 + |m_x|^2 = 4 + 6^2 = 40$$

Η έξοδος $\{Y(n)\}$ είναι επίσης ένα WSS τυχαίο σήμα διακριτού χρόνου με μέση τιμή m_Y και διασπορά σ_Y^2 όπου

$$m_Y = m_X \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = m_X \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = m_X \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = m_X \frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2m_x = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \right|^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} =$$

$$= \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sigma_x^2 \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\sigma_x^2 = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

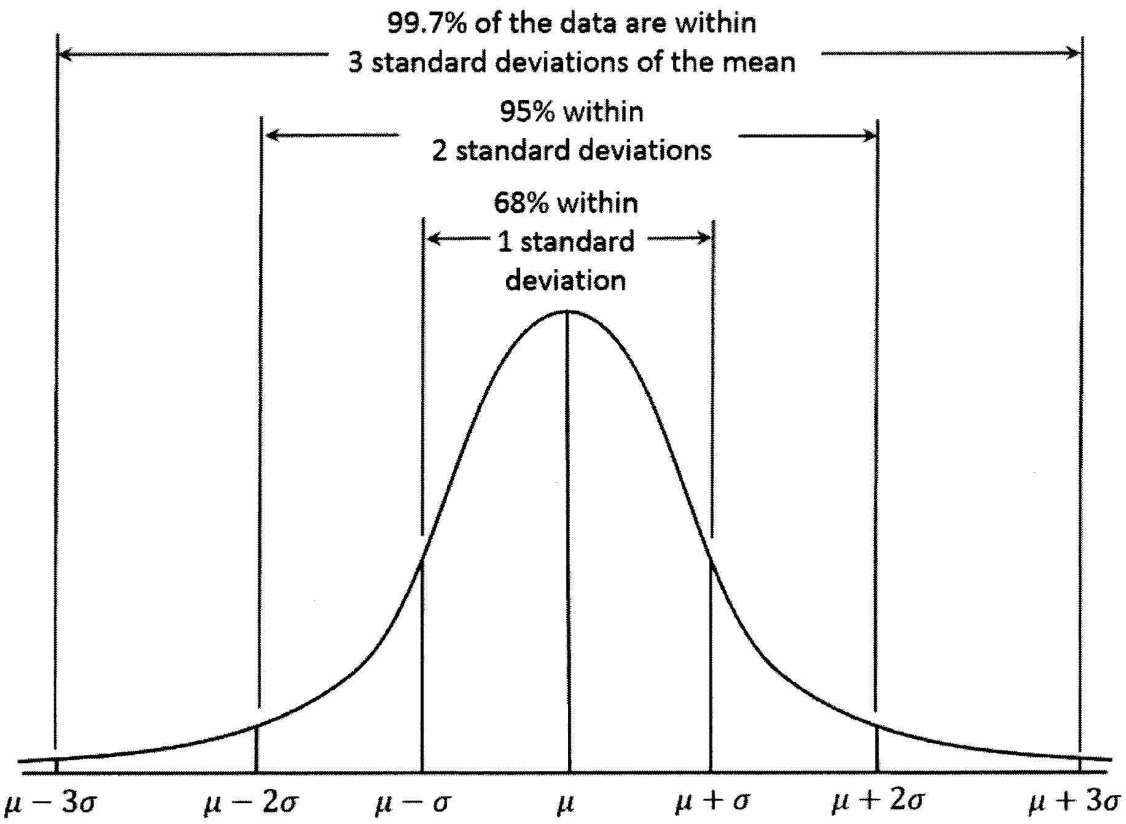
Συνεπώς, η μέση ισχύς της εξόδου θα είναι

$$P_y = \sigma_y^2 + |m_y|^2 = \frac{16}{3} + 12^2 = \frac{16}{3} + 144 = \frac{448}{3}$$

Τελικά, ο λόγος της μέσης ισχύος της εξόδου P_y προς τη μέση ισχύ της εισόδου ισούται με

$$\gamma = \frac{P_y}{P_x} = \frac{\frac{448}{3}}{40} = \frac{448}{120} = 3{,}73$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u> Η μορφή της κανονικής (normal / Gaussian) συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας είναι αυτή του σχήματος, όπου μ η μέση τιμή και σ η τυπική απόκλιση.



Πηγή: wikipedia

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΣΤΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, Proakis/Salehi, Εκδόσεις Φούντας, 2016. ΚΩΔΙΚΟΣ ΕΥΔΟΞΟΥ 50657744, ISBN 978960330763-1

Schaum’s Outline of Signals and Systems 3ed., Hwei P. Hsu, McGraw-Hill, 2014

Probability for Electrical and Computer Engineers, C. W. Therrien and M. Tummala, CRC Press, 2004

https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/2189/3/Book.pdf
https://repository.kallipos.gr/handle/11419/2195
https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/2195/3/Chapter2.pdf

https://helit.org/ece-notes/stochastic.pdf

ΑΛΛΕΣ ΠΗΓΕΣ

Barry Van Veen: "Introduction to Random Signal Representation"
https://www.youtube.com/watch?v=EAxNuTgkUoo

Adam Panagos: "Random Processes - 04 - Mean and Autocorrelation Function Example"
https://www.youtube.com/watch?v=DblXnXxUQc0&ab_channel=AdamPanagos

Iain Collings: "What is a Random Process?"
https://www.youtube.com/watch?v=W28-96AhF2s&ab_channel=IainExplainsSignals%2CSystems%2CandDigitalComms

Iain Collings: "Autocorrelation and Power Spectral Density (PSD) Examples in Digital Communications"
https://www.youtube.com/watch?v=XWytSLZZP1A&ab_channel=IainExplainsSignals%2CSystems%2CandDigitalComms