



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

FIR

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

skodras@upatras.gr
www.ece.upatras.gr/skodras



ΖΩΝΤΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

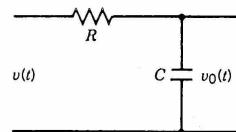
ΠΕΜΠΤΗ 25.11.2021 - ΩΡΑ 09:00-11:00

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΟ ΦΙΛΤΡΟ 1^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ

-Temperature variations
-Component aging
-Power-supply variations
-Component accuracy
have to be considered.

The resulting circuit:

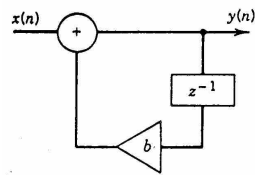
-has low noise immunity
-requires adjustments
-is difficult to modify



Analog lowpass filter

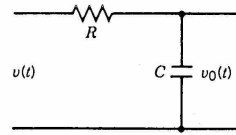
1. Continuous-time
2. Differential equation
$$v(t) = RC \frac{dv_0(t)}{dt} + v_0(t)$$
3. s-plane (Laplace transform used for analysis)

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΟ ΦΙΛΤΡΟ 1^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ



Digital lowpass filter

1. Discrete-time
2. Difference equation
$$y(n) = by(n-1) + x(n)$$
3. z-plane (Z-transform used for analysis)



Analog lowpass filter

1. Continuous-time
2. Differential equation
$$v(t) = RC \frac{dv_0(t)}{dt} + v_0(t)$$
3. s-plane (Laplace transform used for analysis)

3

Why Digital Signal Processing?

Because:

Digital computers are small and inexpensive

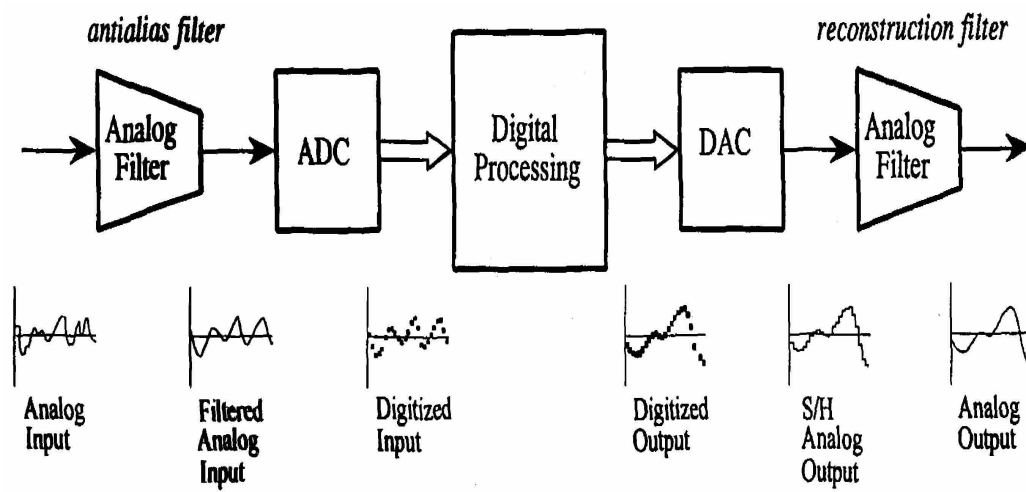
Advantages:

- Greater flexibility (adaptive filters easily implemented)
- Self-test can be built-in
- Perfect reproducibility
- Guaranteed accuracy
- High noise immunity and power supply rejection
- No drift
- Superior performance
- Linear phase
- Time-sharing possibility

Disadvantages:

- Speed
- Time delay

Digital Signal Processing System



Lecture 12, Filtering | MIT RES.6.007
Signals and Systems, Spring 2011

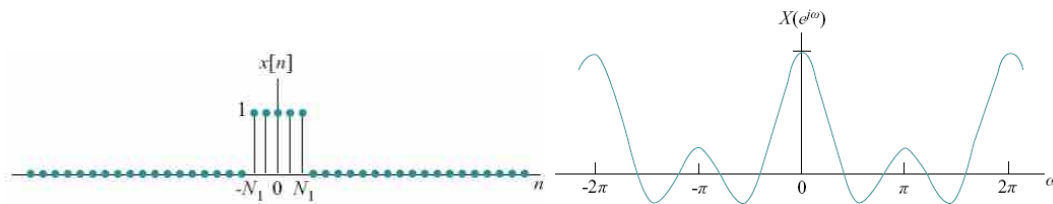


<https://youtu.be/P5Ce9tbK86M?t=2040>

Παράδειγμα $x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = 1 \cdot [\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)]$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 \cdot [\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)]e^{-j\omega n} = \\ &= 1 \cdot [e^{j\omega 2} + e^{j\omega} + e^{j\omega 0} + e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2}] = 1 \cdot [1 + (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})] = \\ &= 1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) \end{aligned}$$



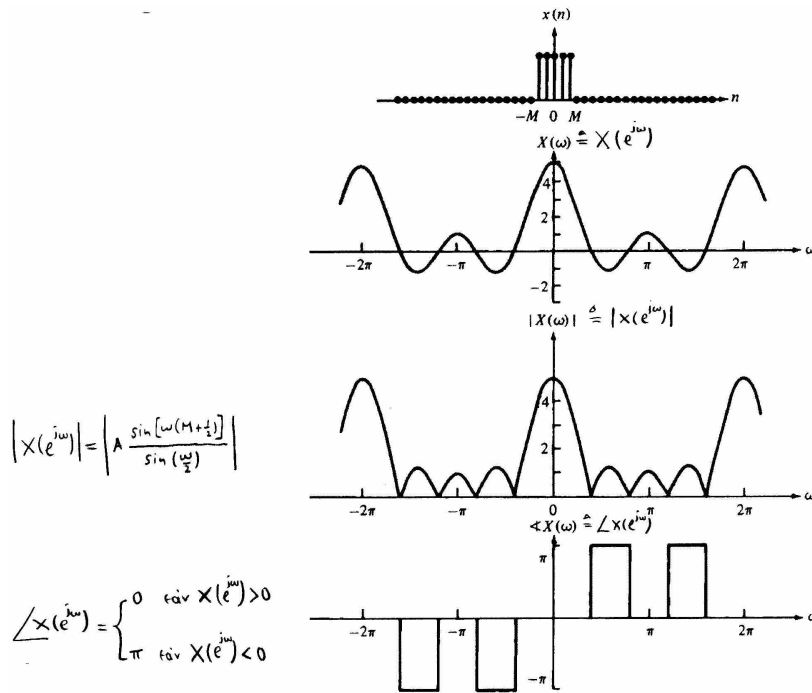
Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-2}^2 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^4 e^{-j\omega(m-2)} = e^{j\omega 2} \sum_{m=0}^4 (e^{-j\omega})^m =$$

< όπου $m = n + 2 \Rightarrow n = m - 2$ >

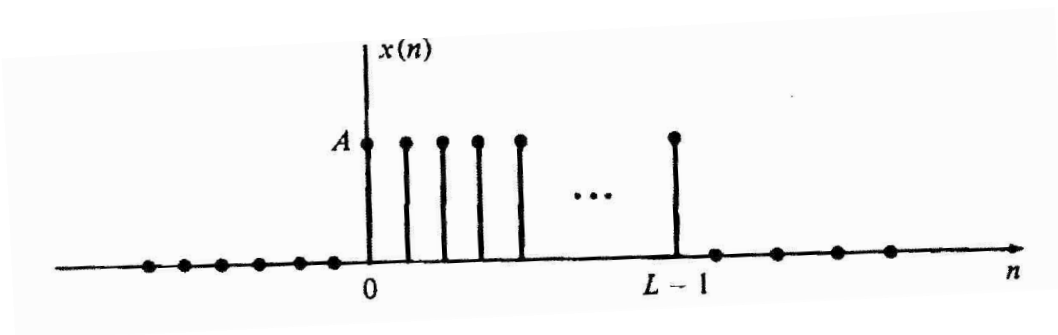
$$= e^{j\omega 2} \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{j\omega 2} \frac{e^{-j\omega 5/2} (e^{j\omega 5/2} - e^{-j\omega 5/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} =$$

$$= e^{j\omega 2} e^{j\omega/2} e^{-j\omega 5/2} \frac{2j \sin(\omega 5 / 2)}{2j \sin(\omega / 2)} = \frac{\sin(5\omega / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier και το γράφημα ενεργειακής πυκνότητας της ακολουθίας

$$x(n) = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Λύση: Κετ' αρχών παρατηρούμε ότι η ακολουθία είναι αβραϊκή με κατ' απόλυτη τιμή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = |A|L < \infty$$

Άρα ο τετραγωντικός Fourier υπάρχει. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το σήμα είναι πέραστέως ενέργειας: $E_x = |A|^2 L$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} = A \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = A e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)} \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

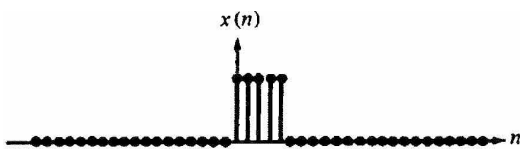
Για $\omega=0 \Rightarrow X(e^{j\omega}) = AL$ (χρησιμοποιώντας l'Hospital)

Το μέτρο ισούται με $|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} |A|L & \text{για } \omega=0 \\ |A| \left| \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right| & \text{άλλωθ} \end{cases}$

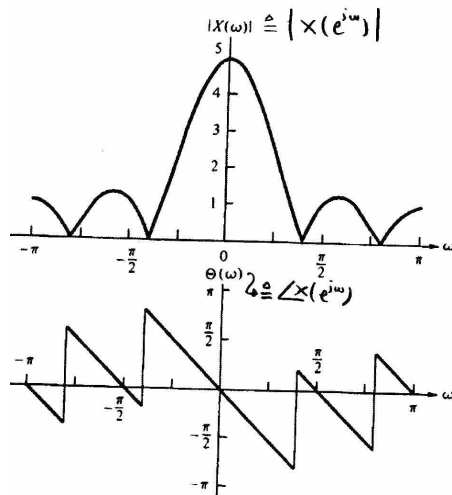
και η φάση $\angle X(e^{j\omega}) = \angle A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \angle \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

Το φάσμα ενέργειας συνιστάται από το τετράγωνο του μέτρου.

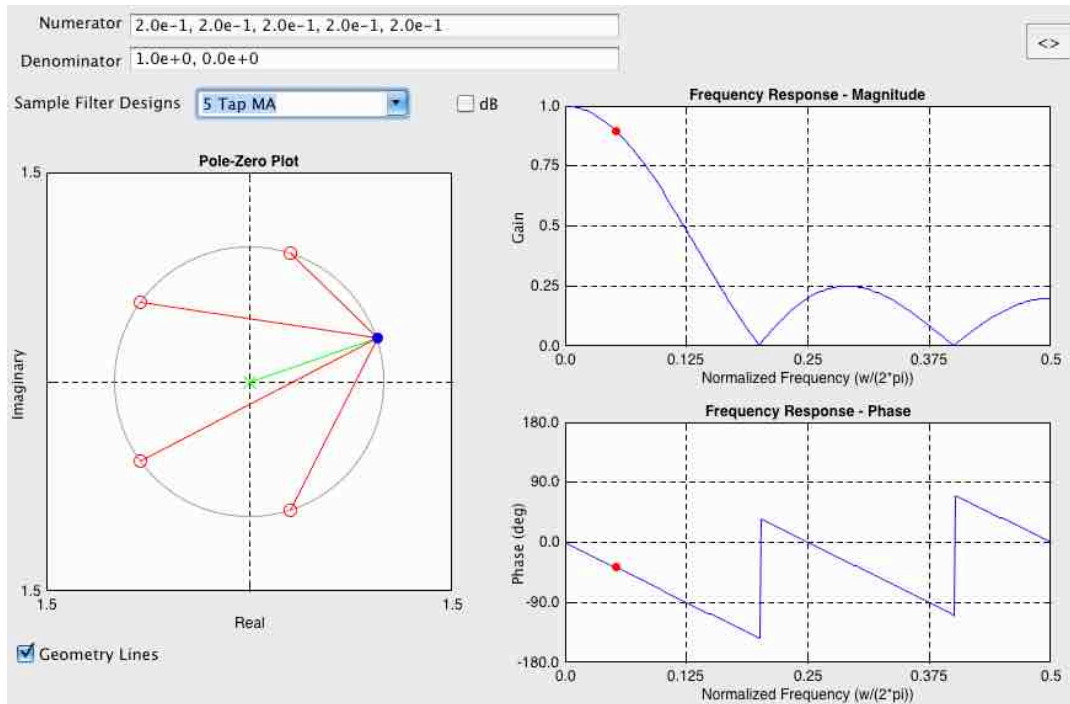
(*) Σημείωση: Η φάση ενός πραγματικού είναι μηδέν εάν αυτός είναι θετικός και π εάν αυτός είναι αρνητικός.



Το μέτρο και η φάση για $A=1$ και $L=5$



Digital Filter Examples ...



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Ή ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ



$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$h(n)$: χαρακτηρίζει το σύστημα στο πεδίο του χρόνου

$H(z)$: χαρακτηρίζει το σύστημα στο πεδίο z

$h(n)$: απόκριση μοναδιαίου δείκτητος ή μοναδιαία κρουστική απόκριση

$H(z)$: συνάρτηση ενεργότητας ή συνάρτηση φραγής

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

$H(z)$ και $h(n)$ είναι δύο ισοδύναμες περιγραφές ενός συστήματος σε δύο διαφορετικά πεδία.

ΓΕΝΙΚΑ

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την γραμμική σταθερών συντελεστών εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών και αξιοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολιγόθεσης στον χρόνο έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Συνεπώς ένα ΓΧΑ το οποίο περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών (difference equation) με σταθερούς συντελεστές, έχει μια ρητή (rational) συνάρτηση συστήματος.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Περίπτωση 1: $a_k = 0 \Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}$

Η $H(z)$ έχει M μηδενικά (zeros) και ένα πόλο (pole) πολλαπλότητας M στην αρχή των αξόνων $z=0$.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-μηδενικά (all-zero system).

Επίσης, το σύστημα αυτό έχει πεπερασμένη χρονική απόκριση γι' αυτό και ονομάζεται FIR σύστημα, (FIR: Finite Impulse Response)

Τέλος ονομάζεται και σύστημα κινούμενου μέσου όρου (MA: Moving Average).

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Περίπτωση 2: $b_k \neq 0 \rightarrow H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} \quad a_0 \equiv 1$

Η $H(z)$ έχει N πόλους και ένα μηδενικό πολλαπλότητας N στην αρχή των αξόνων $z=0$.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-πόλους (all-pole system).

Η ύπαρξη των πόλων οδηγεί με μια απόκριση των συστήματος άπειρης διάρκειας γιαυτό και ονομάζεται IIR Σύστημα (IIR: Infinite Impulse Response)

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Περίπτωση 3. $a_k \neq 0, b_k \neq 0 \rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$

Πρόκειται για τη γενική περίπτωση. Η $H(z)$ έχει N πόλους και M μηδενικά. Οι πόλοι και τα μηδενικά στο $z=0$ και $z=\infty$ δεν προσεγγίζονται.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα πόλων-μηδενικών (pole-zero system).

Λόγω της ύπαρξης των πόλων, το σύστημα αυτό είναι IIR.

Απόκριση συχνότητας συστημάτων διακριτού χρόνου

Η σχέση εισόδου-εξόδου ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h(n)$ δίνεται από την εξίσωση της συνέλιξης

$$y(n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

όπου $x(n)$, $y(n)$ οι ακολουθίες εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Αν η ακολουθία εισόδου $x(n)$ είναι εκθετικής μορφής

$$x(n) = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty$$

τότε η έξοδος $y(n)$ θα ισούται με

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n}$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$y(n) = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

όπου

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m}$$

Η ποσότητα $H(e^{j\omega})$ ονομάζεται απόκριση συχνότητας (frequency response) του LTI συστήματος και μας παρέχει μια περιγραφή αυτού στο πεδίο της συχνότητας.

Η $H(e^{j\omega})$ είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση του ω με περίοδο 2π και μπορεί να εκφραστεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega}) + jH_i(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\Theta(\omega)}$$

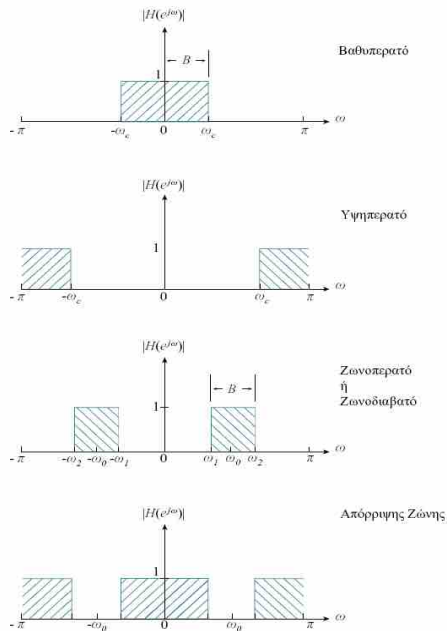
όπου $H_r(e^{j\omega})$ και $H_i(e^{j\omega})$ είναι πραγματικές συναρτήσεις ως προς ω , και αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $H(e^{j\omega})$ αντίστοιχα.

$$\Theta(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} = \angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left[\frac{H_i(e^{j\omega})}{H_r(e^{j\omega})} \right]$$

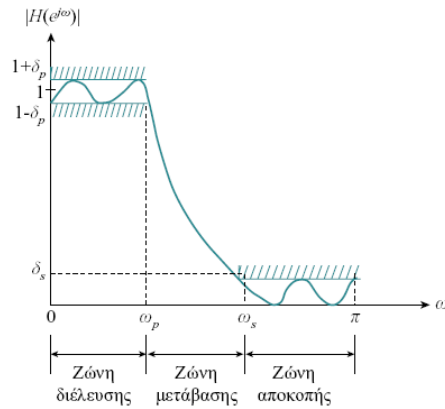
Η ποσότητα $|H(e^{j\omega})|$ ονομάζεται απόκριση μέτρου (magnitude response) και η ποσότητα $\Theta(\omega)$ απόκριση φάσης (phase response) του LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Και οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις του ω .

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

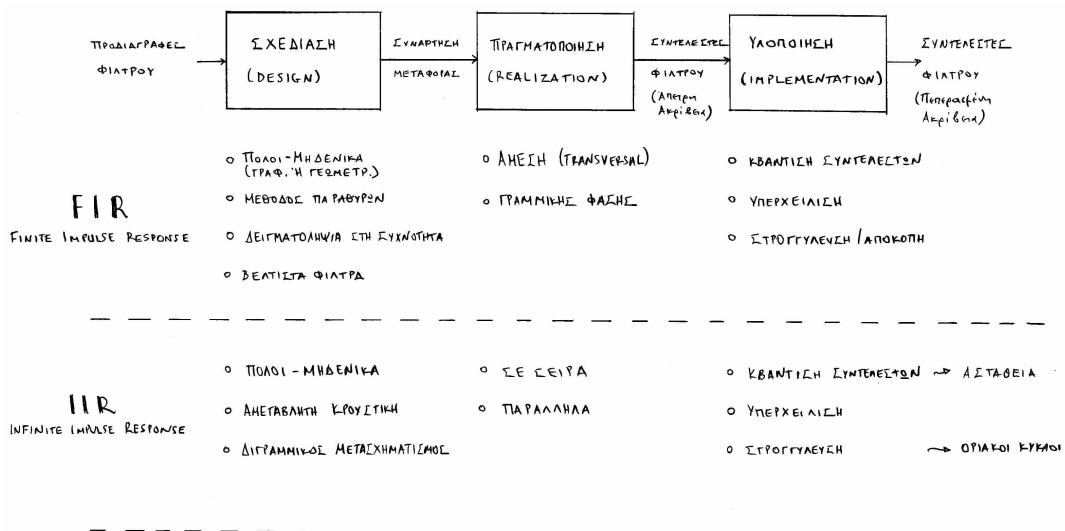
ΙΔΑΝΙΚΗ



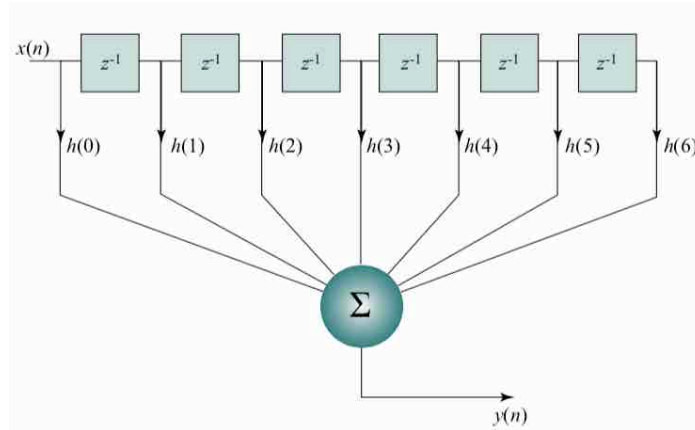
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ



ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ



FIR ΦΙΛΤΡΑ



Applications of the FIR Filters

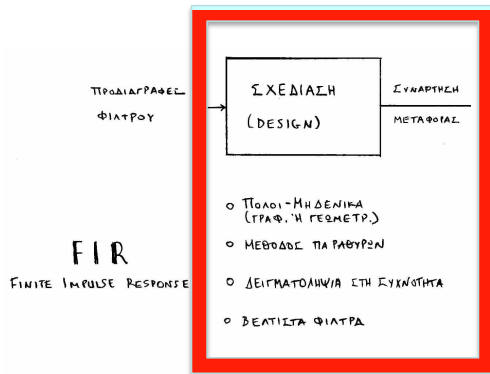
FIR filters are used almost everywhere where **phase linearity** has to be ensured.

Moreover, for **adaptive** design, FIR is the best choice.

More applications are as below:

1. Spatial Beamforming
2. Linear predictive coding
3. Linear Interpolation
4. Adaptive Filters
5. **Speech analysis**
6. Speech modelling
7. Multirate Signal Processing
8. Averaging Filter
9. ...

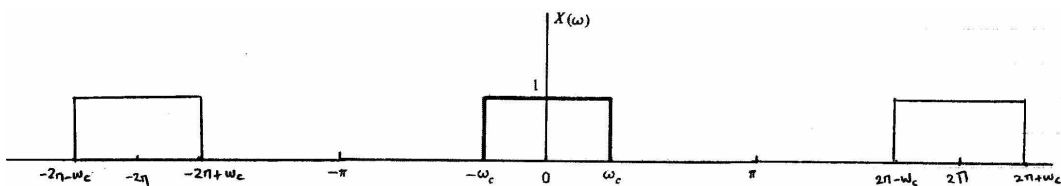
ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ



Μέθοδος των παραθύρων

Η μέθοδος των παραθύρων αποτελεί μια σχετικά απλή διαδικασία σχεδίασης FIR φίλτρων. Οι συντελεστές $h_D(n)$ του ιδανικού φίλτρου υπολογίζονται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητας $H_D(e^{j\omega})$:

ΑΣΚΗΣΗ Ποιο το γράφημα που αντιστοιχεί στο φάσμα
Το $X(e^{j\omega})$ είναι περιοδικό με περίοδο 2π .

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$


Λύση

Από την εξίσωση σύνθεσης του DTFT, δηλ. από την εξίσωση του αντίστροφου DTFT, έχουμε:

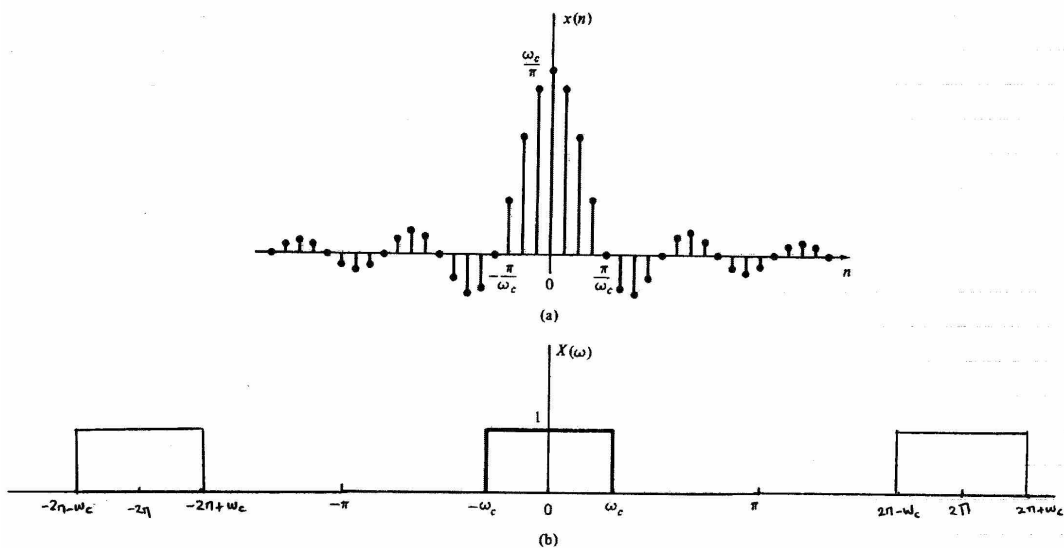
$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{1}{\pi n} \sin \omega_c n = \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

Για $n=0$ έχουμε

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}$$

Τελικά το συνάρτησης είναι: $x(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & \text{για } n=0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} & \text{για } n \neq 0 \end{cases}$

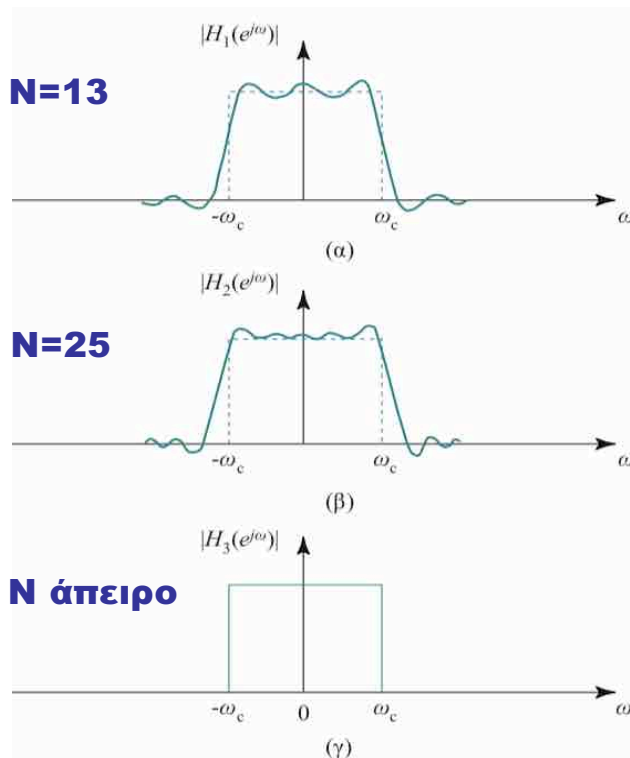
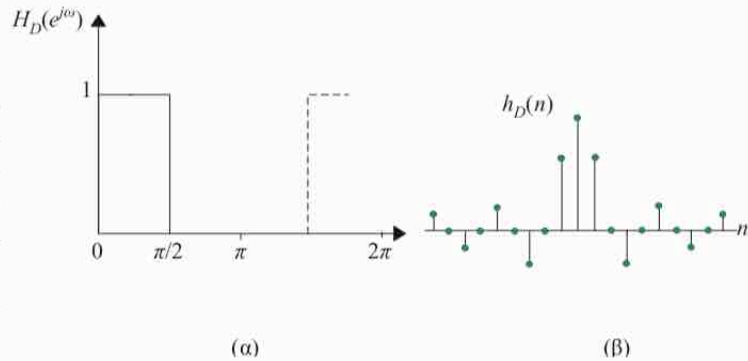
Παρατήρηση: Η ακολουθία $x(n)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια $E_x = \frac{\omega_c}{\pi}$, αλλά δεν είναι αθροιστική κατά απόλυτη τιμή.



Παράδειγμα σχεδίασης βαθυπερατού φίλτρου ημίσειας ζώνης ($\omega_c = \pi/2$)

$$\begin{aligned} h_D(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{\omega_c \sin(n\omega_c)}{\pi n\omega_c} \xrightarrow{\omega_c = \pi/2} \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)} \end{aligned}$$

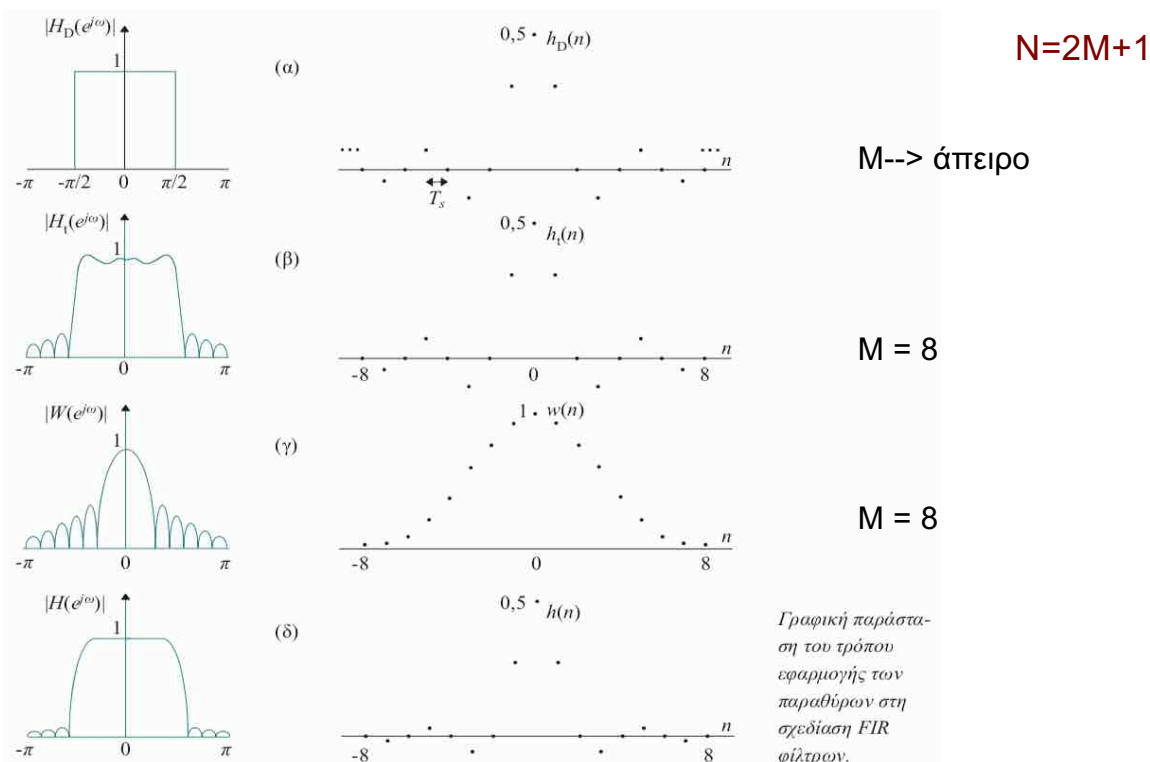
(α). Ιδανική απόκριση συχνότητας βαθυπερατού ψηφιακού φίλτρου ημίσειας ζώνης (half-band) και (β) η αντίστοιχη κρουστική απόκριση (κάθε δεύτερος συντελεστής, εκτός των κεντρικών, είναι μηδενικός).



Απόκριση συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου ημίσειας ζώνης

Απόκριση συχνότητας βαθυπερατού φίλτρου με (α) 13, (β) 25 και (γ) άπειρους όρους στην κρουστική απόκριση.

Η εμφάνιση της κυμάτωσης είναι γνωστή ως φαινόμενο *Gibbs*, και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της κοντά στις ασυνέχειες της $H(e^{j\omega})$, στην περιοχή της ζώνης μετάβασης. Η μέγιστη αυτή τιμή κυμαίνεται περίπου στο 9% του ύψους της ασυνέχειας και παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από το μήκος $2M + 1$ της κρουστικής απόκρισης. Για τη ζώνη της αποκοπής η τιμή του 9% αντιστοιχεί σε 21 περίπου dBs εξασθένιση, τιμή που δεν είναι αποδεκτή για πρακτικές εφαρμογές. Έτσι, για ικανοποιητική προσέγγιση των ιδανικών μορφών των διάφορων φίλτρων, δεν συνιστάται ο απευθείας περιορισμός του μήκους της κρουστικής απόκρισης $h(n)$.

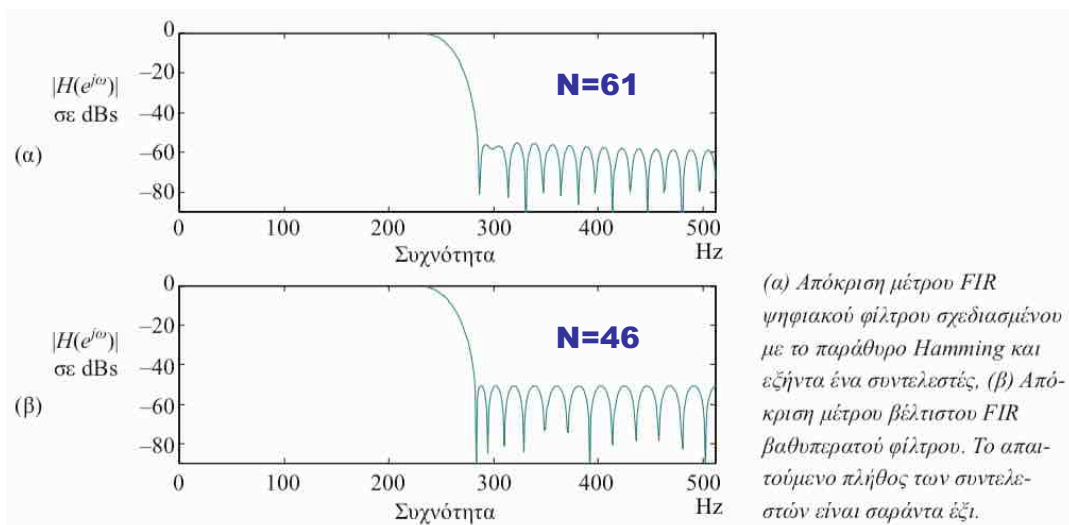


Το γενικευμένο παράθυρο Hamming:

$$w_R(n) = \begin{cases} a + (1-a) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

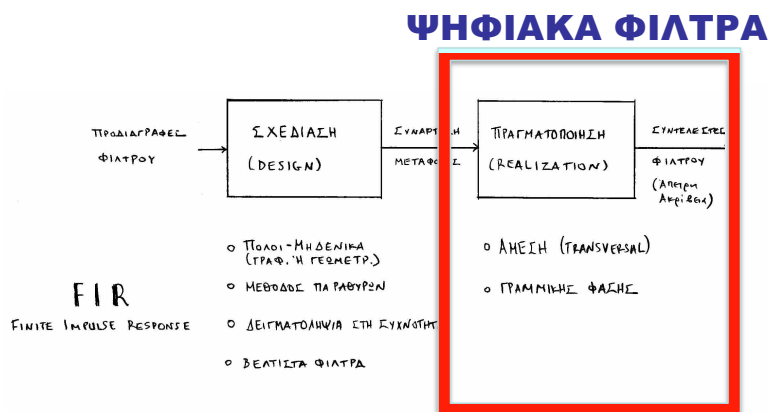
Το παράθυρο αυτό για $a = 0,54$ δίνει το γνωστό παράθυρο Hamming. Για την τιμή αυτή του a , ο κεντρικός λοβός της $W(e^{j\omega})$ περιέχει το 99,96% της συνολικής φασματικής ενέργειας, ενώ επιτυγχάνονται -52 dB εξασθένιση στη ζώνη απόρριψης των φίλτρων που σχεδιάζονται. Η μορφή του παραθύρου $w(n)$ για $N = 17$ είναι αυτή του Σχήματος γ.

Σύγκριση φίλτρων Hamming & Βέλτιστου

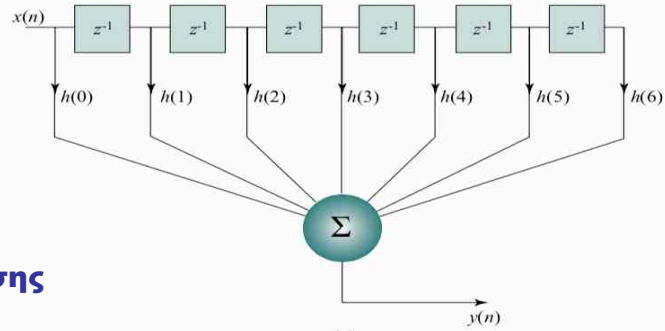


ΣΥΝΗΘΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ FIR ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΩΝ

- **Γραμμική Φάση**
 - Συμμετρική κρουστική απόκριση
 - Περιττό πλήθος συντελεστών N
 - Χρονική καθυστέρηση όλων των αρμονικών του σήματος κατά $(N-1)/2$ δείγματα
- **Ευστάθεια**
 - Μόνον μηδενικά (όχι πόλους)



Δομές Πραγματοποίησης

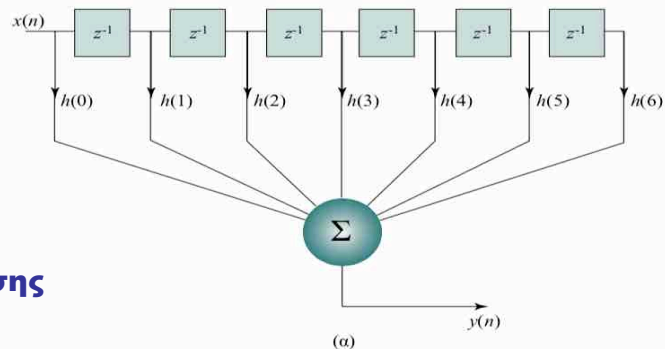


$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση αυτή η άμεση δομή απαιτεί για την πραγματοποίησή της:

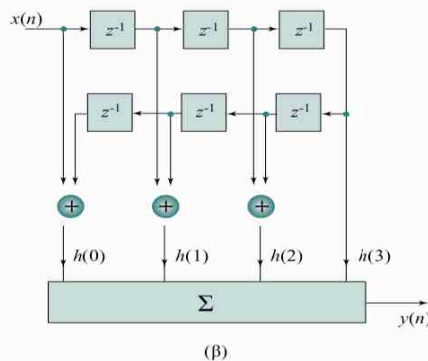
- $N-1$ θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των δειγμάτων $x(n)$.
- N θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των συντελεστών $h(m)$.
- N πολλαπλασιασμούς.
- $N-1$ προσθέσεις.

Δομές Πραγματοποίησης

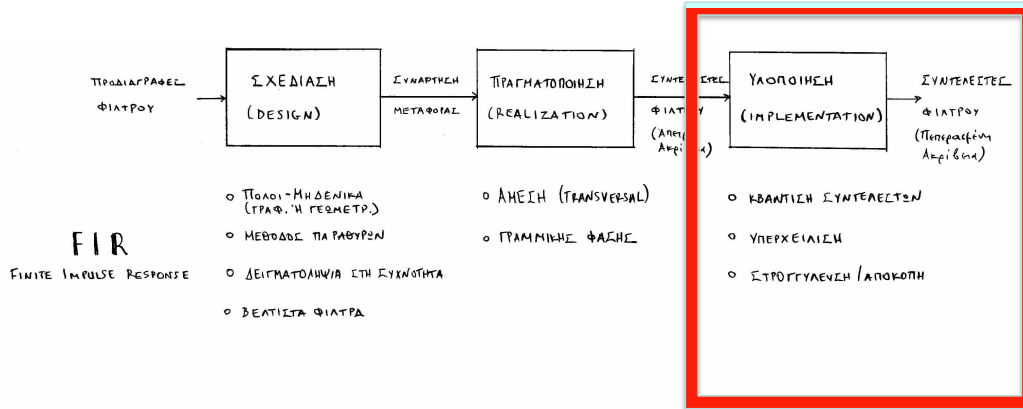


$$y(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} h(m)[x(n-m) + x(n-N+1+m)]$$

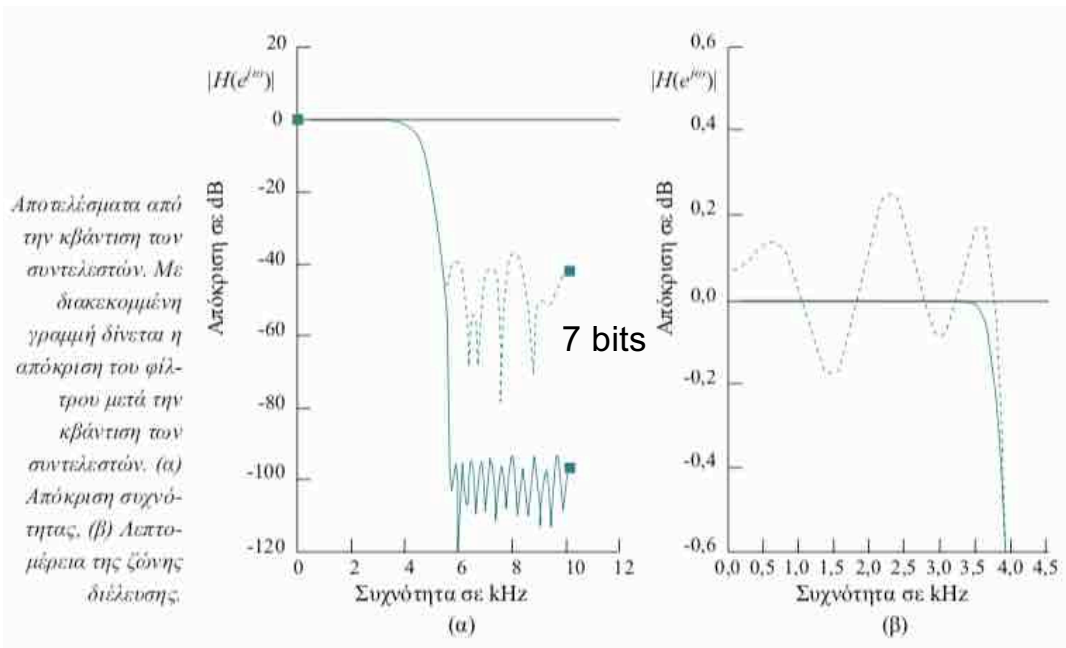
Οι δύο κυριότερες δομές πραγματοποίησης FIR φίλτρων (α). Άμεση (Transversal) και (β) γραμμικής φάσης.



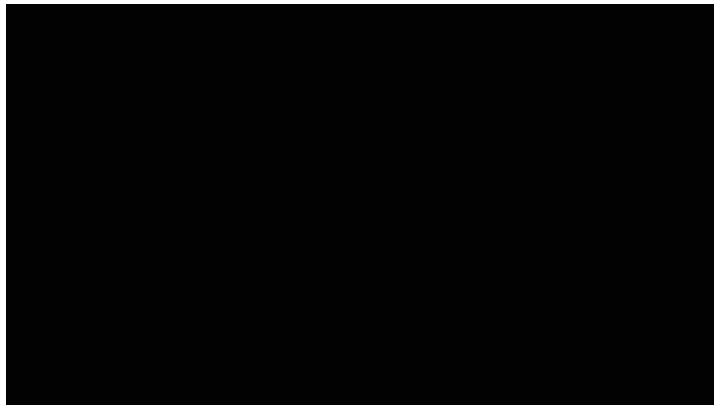
ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ



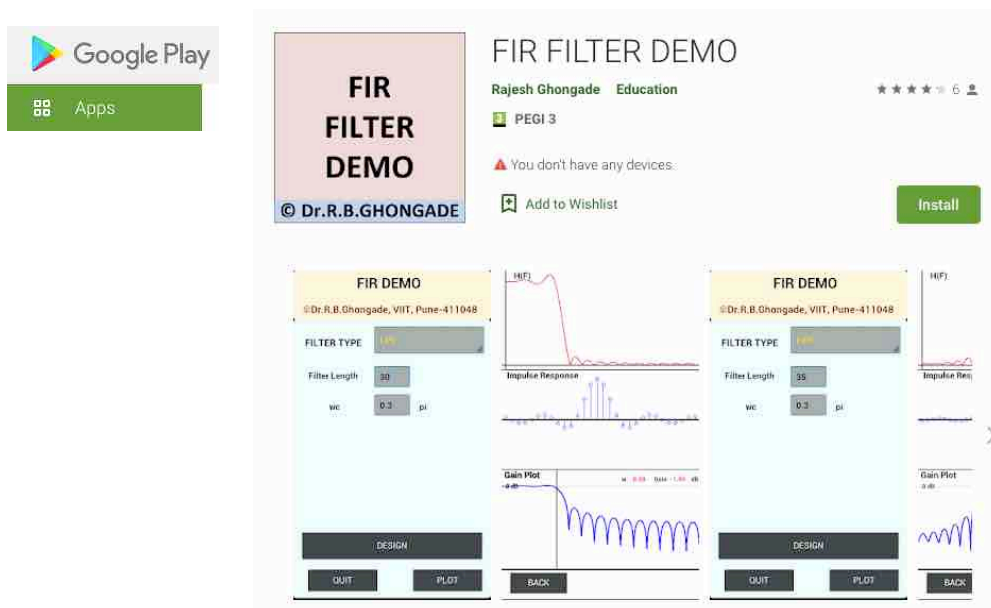
Σφάλματα Λόγω Κβάντισης Συντελεστών



Επίδειξη FIR φίλτρου για την εξάλειψη της συχνότητας των 50 Hz του δικτύου



<https://youtu.be/js5nyRB1YL0?t=120>



https://play.google.com/store/apps/details?id=fir_demo.rbg&hl=en_US

ΕΡΩΤΗΣΗ

Γιατί η συνάρτηση μεταφοράς να είναι εκφρασμένη ως $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{N-1} z^{-(N-1)}}$;
 Διότι, γιατί δε πρέπει $\alpha_0 = 1$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όχι ξεκινάμε από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \quad (1)$

(Σημείωση: Το εάν τα όρια των αθροισμάτων είναι M-1 και N-1 και όχι M και N, δεν έχει εκφίλι σημασία).

Πολλαπλασιάζουμε τον παρανομαστή της (1). Τον έχω γράψει ως $1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}$.

Το έκανα αυτό για να φέρω να υπολογίσω την εξίσωση

διαφορώς του συστήματος, ως εξής:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k} Y(z)$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} \begin{cases} Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k} Y(z) \\ y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k y(n-k) \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η λανθάνει στον παρανομαστή ff βάζουμε για να βρω εύκολα το Y(z) και εν συνεχεία το y(n).

Εάν η συνάρτηση H(z) δεν είναι εκφρασμένη έτσι, αλλά γενικά ως λόγος δύο πολυνομίων, π.χ. $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} c_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} d_k z^{-k}}$, τότε φέρω

να την φέρω στη μορφή της (1), διαίρεώντας αριθμητή και παρανομαστή ff το d₀.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} c_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} d_k z^{-k}} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{M-1} z^{-(M-1)}}{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N-1} z^{-(N-1)}} = \langle \text{διαίρω ff } d_0 \rangle =$$

$$= \frac{\frac{c_0}{d_0} + \frac{c_1}{d_0} z^{-1} + \frac{c_2}{d_0} z^{-2} + \dots + \frac{c_{M-1}}{d_0} z^{-(M-1)}}{1 + \frac{d_1}{d_0} z^{-1} + \dots + \frac{d_{N-1}}{d_0} z^{-(N-1)}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \quad \text{όπου} \quad b_k = \frac{c_k}{d_0} \quad \text{και} \quad \alpha_k = \frac{d_k}{d_0}$$



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

IIR ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ & ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

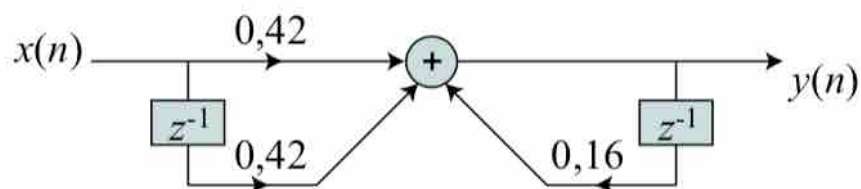
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

skodras@upatras.gr
www.ece.upatras.gr/skodras



ΖΩΝΤΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
ΠΕΜΠΤΗ 2.12.2021 - ΩΡΑ 9:00-11:00

IIR ΦΙΛΤΡΑ

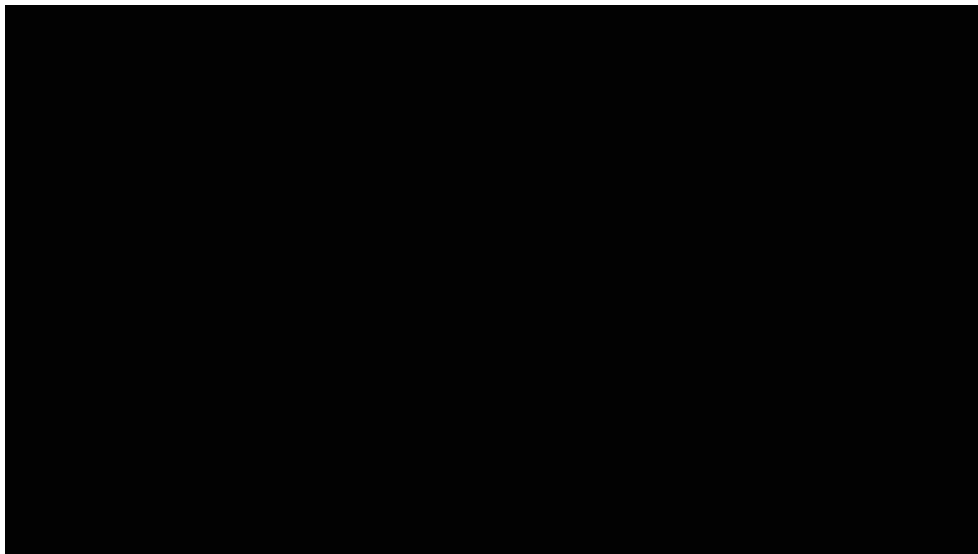


Applications of the IIR Filters

IIR filters are used wherever **phase non-linearity** is not a problem, as for example in:

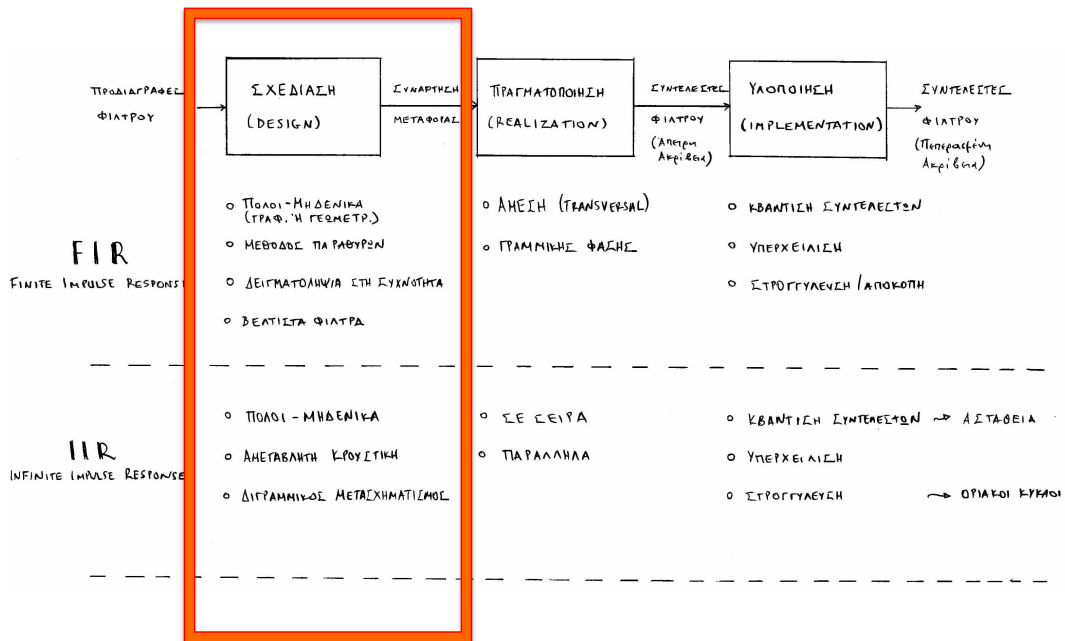
1. Audio (loudspeaker) Equalization
2. Electronic crossover for a 3-way loudspeaker
3. Sound processing
4. Biomedical sensor signal processing
5. IoT/IIoT smart sensors and high-speed telecommunication/RF applications
6. ...

Real-time IIR filter demo



<https://www.youtube.com/watch?v=kJxIk09Ao0k>

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ



ANALYSIS OF LTI SYSTEMS IN THE z-DOMAIN

CAUSALITY: A causal LTI system is one whose unit sample response $h(n)$ satisfies the condition

$$h(n) = 0 \quad \text{for } n < 0$$

It was also shown that the ROC of the z-transform of a causal seq. is the exterior of a circle. Thus, an LTI system is causal iff the ROC of the system function is the exterior of a circle of radius $r < \infty$, including the point $z = \infty$.

Important consequence: Since $z = \infty$ is included in the ROC, the degree of the numerator of $H(z)$ should not be greater than the degree of the denominator.

STABILITY: A necessary and sufficient condition for an LTI system to be BIBO stable is

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

This condition implies that $H(z)$ must contain the unit circle within its ROC.

Hence, a causal LTI system is BIBO stable iff all the poles of $H(z)$ are inside the unit circle.

ΣΧΕΔΙΑΣΗ IIR ΦΙΛΤΡΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ Ή ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

(ΠΟΛΟΙ ΚΑΙ ΜΗΔΕΝΙΚΑ)

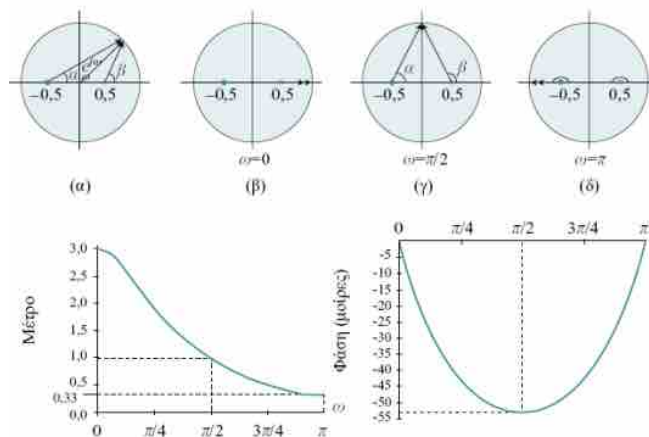
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ

Geometrical (Graphical) Computation of the Frequency Response

Παράδειγμα 3.9

$$H(z) = (z + 0,5)/(z - 0,5) \text{ με } |z| > 0,5$$

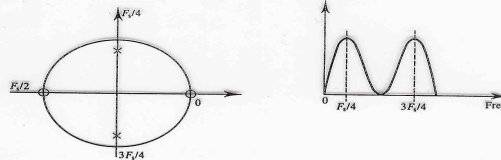
$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,5 + e^{j\omega}}{-0,5 + e^{j\omega}} = \frac{C e^{j\alpha}}{D e^{j\beta}} = V e^{j\theta}$$



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ

Pole-zero placement method

- When a zero is placed at a given point on the z-plane, the freq. response will be zero at the corresponding point. A pole on the other hand produces a peak at the corresponding freq. point.

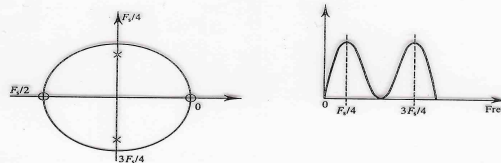


- Poles that are close to the unit circle give rise to large peaks, whereas zeros close to or on the unit circle produce troughs or minima.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ

Pole-zero placement method

- When a zero is placed at a given point on the z-plane, the freq. response will be zero at the corresponding point. A pole on the other hand produces a peak at the corresponding freq. point.



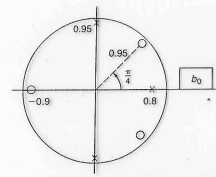
- Poles that are close to the unit circle give rise to large peaks, whereas zeros close to or on the unit circle produce troughs or minima.

- Notice that for coefficients of the filter to be real, the poles and zeros must either be real (that is lie on the positive or negative real axes) or occur in complex conjugate pairs.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ

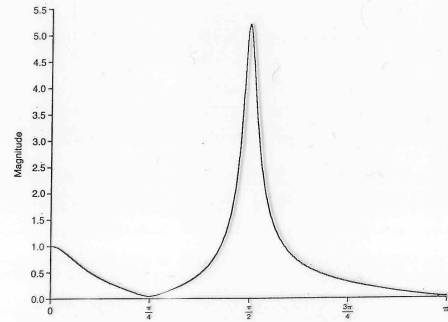
Effects of Poles and Zeros on the Frequency Response

- A filter pole close to the unit circle produces a large gain at nearby frequencies.
- A filter zero close to the unit circle produces a small gain at nearby frequencies.
- The gain scale of the filter may be controlled by the factor b_0 .
- "How about the phase?"
Except in the simplest cases, it is difficult to learn much about phase from these diagrams.



$$H(z) = b_0 \frac{(z + 0.9)(z - 0.95e^{j\pi/4})(z - 0.95e^{-j\pi/4})}{(z - 0.8)(z - 0.8e^{j\pi/4})(z - 0.8e^{-j\pi/4})}$$

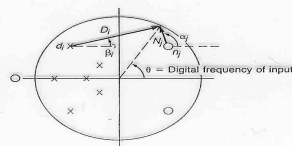
(a) Pole-zero description



(b) Frequency response magnitude, M

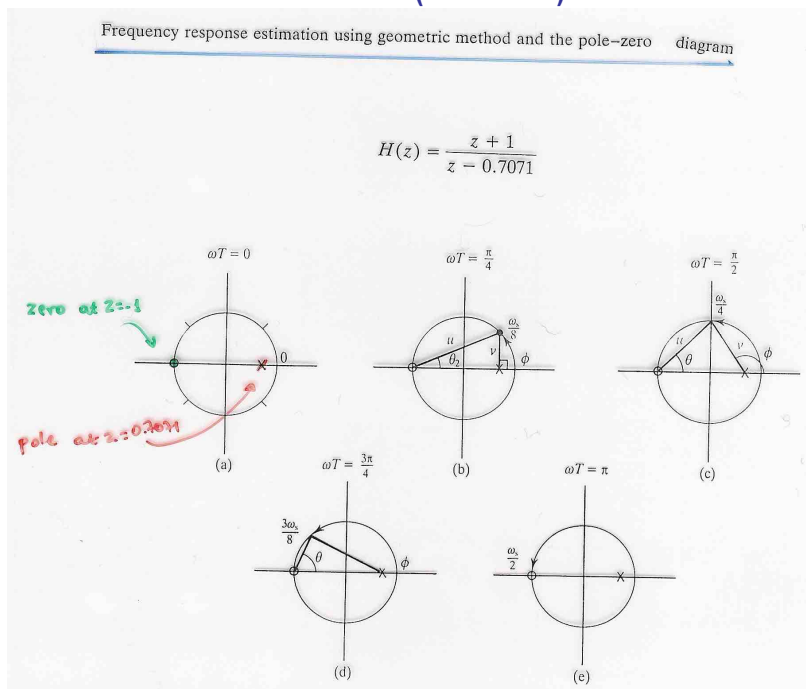
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ

GRAPHICAL DESIGN OF FILTERS

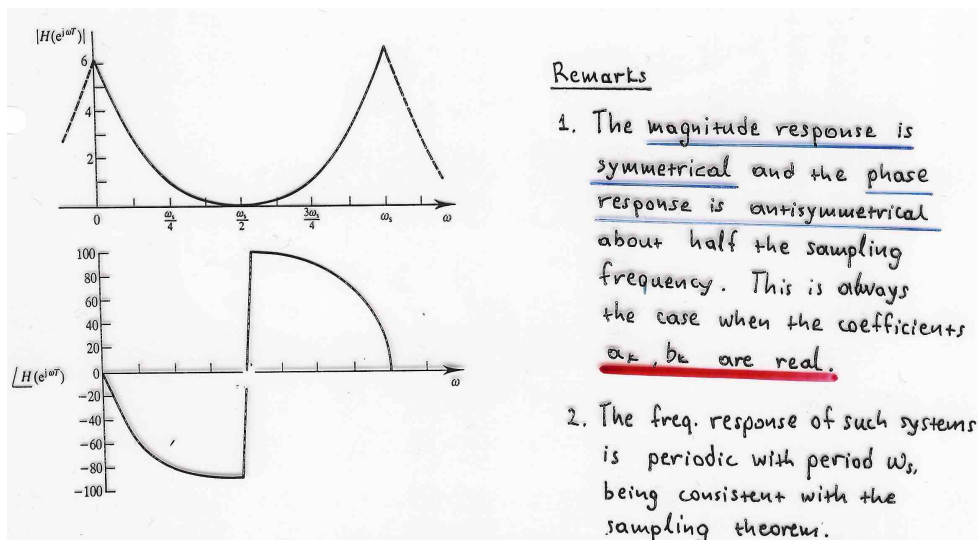


- For any causal (recursive or nonrecursive) stable filter with real coefficients, all of the poles of the generalized frequency response function $H(z)$ must lie inside the unit circle.
- The zeros may be located anywhere.
- Both poles and zeros may be real or complex, but complex poles or zeros must occur in conjugate pairs.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ

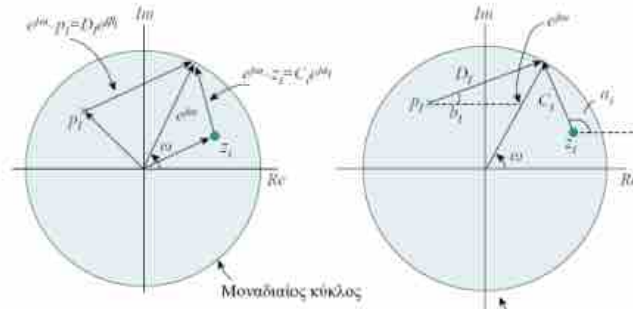


ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ Pole-Zero Placement

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \iff H(z) = \frac{b_0 z^{-N-M} (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)}$$

$$H(e^{j\omega}) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{(e^{j\omega}-z_1)(e^{j\omega}-z_2)\dots(e^{j\omega}-z_M)}{(e^{j\omega}-p_1)(e^{j\omega}-p_2)\dots(e^{j\omega}-p_N)}$$

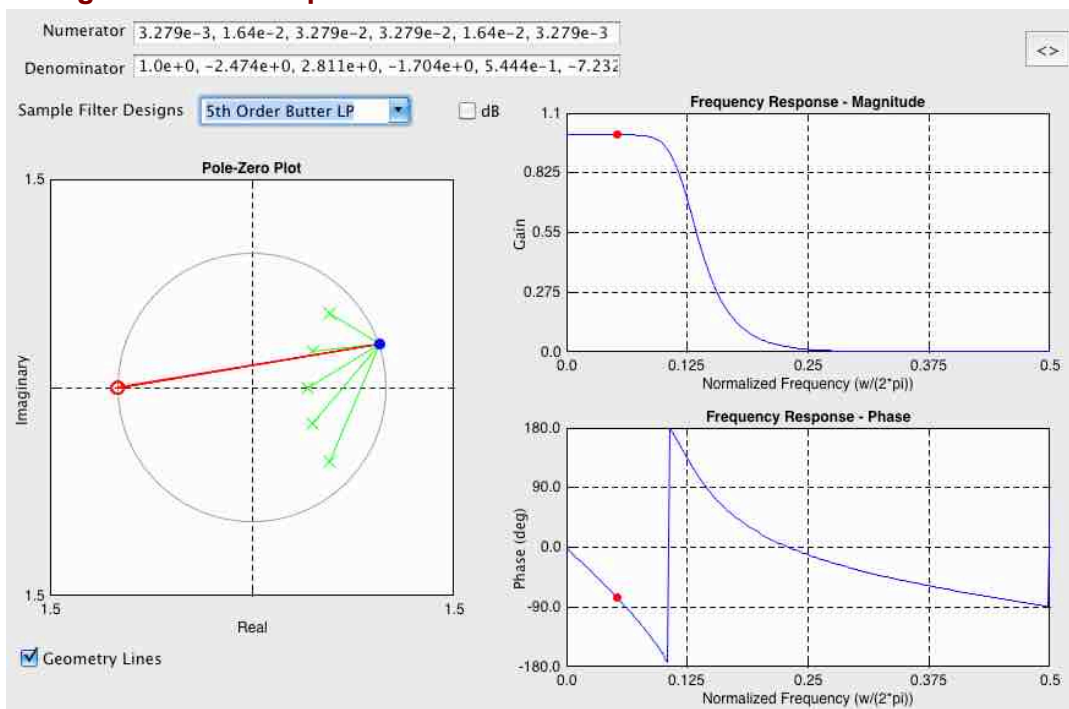
$$H(e^{j\omega}) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{(C_1 e^{j\alpha_1})(C_2 e^{j\alpha_2})\dots(C_M e^{j\alpha_M})}{(D_1 e^{j\beta_1})(D_2 e^{j\beta_2})\dots(D_N e^{j\beta_N})} \equiv V e^{j\theta}$$



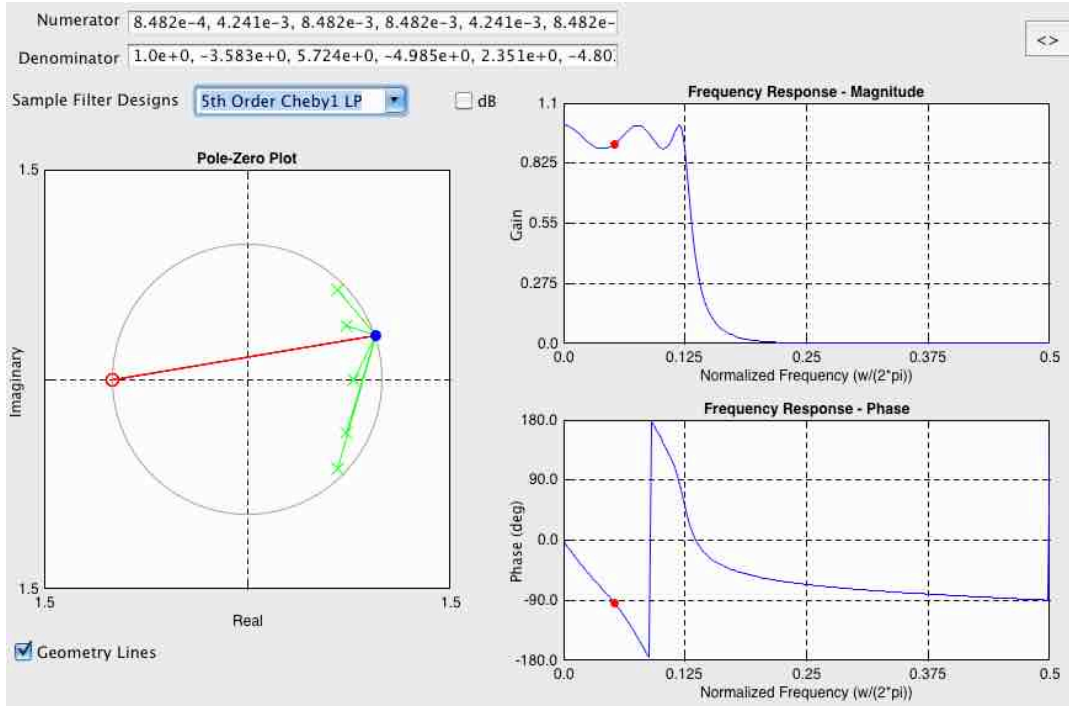
$$V = |b_0| \frac{C_1 C_2 \dots C_M}{D_1 D_2 \dots D_N}$$

$$\theta = \angle b_0 + (N-M)\omega + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_M) - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N)$$

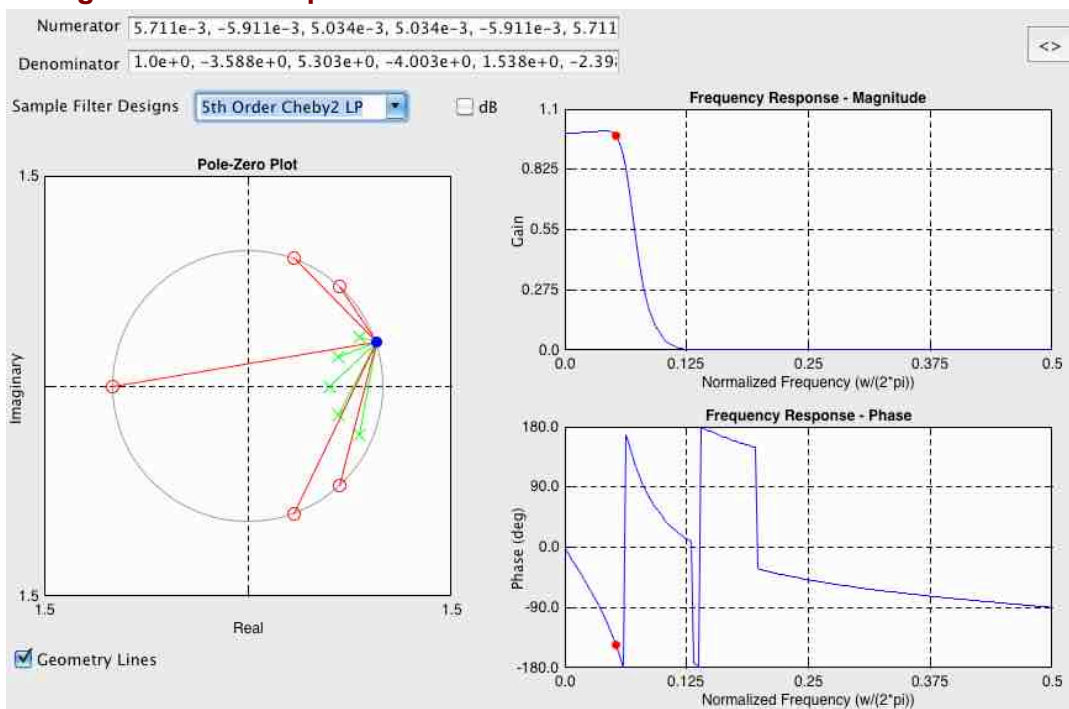
Digital Filter Examples ...



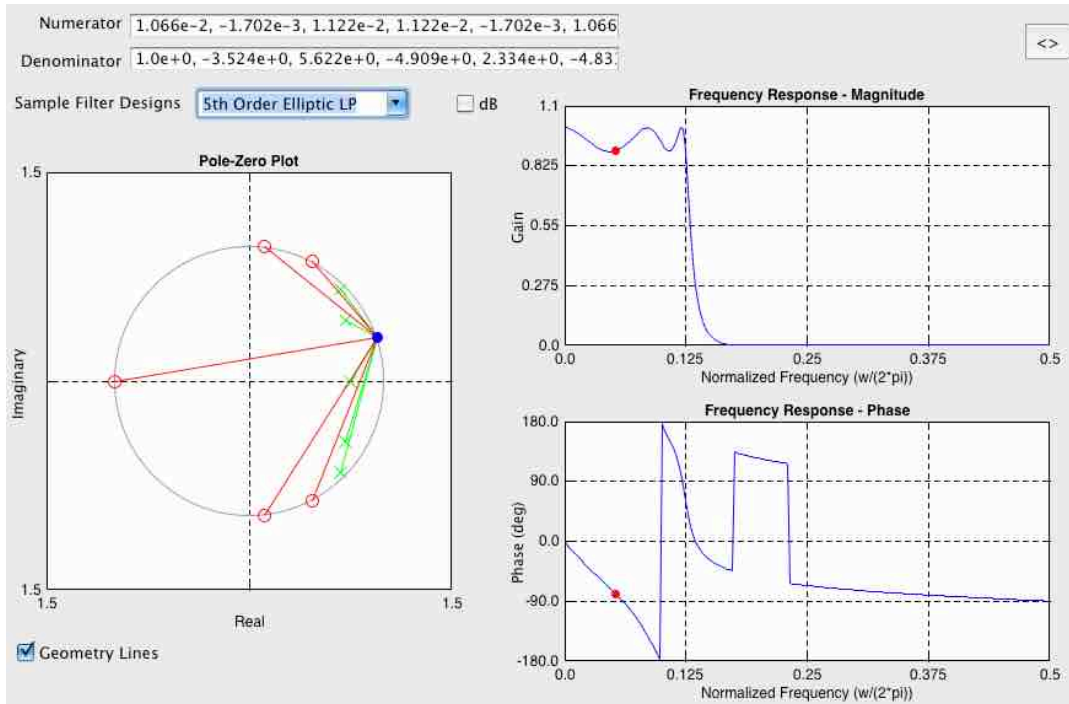
Digital Filter Examples ...



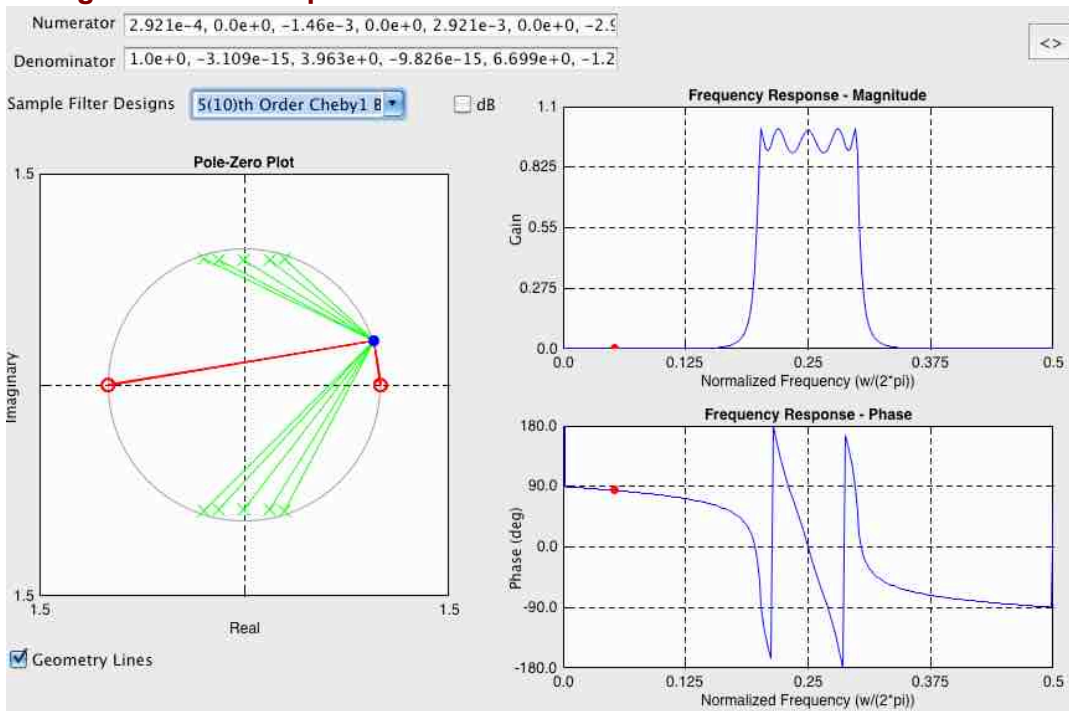
Digital Filter Examples ...



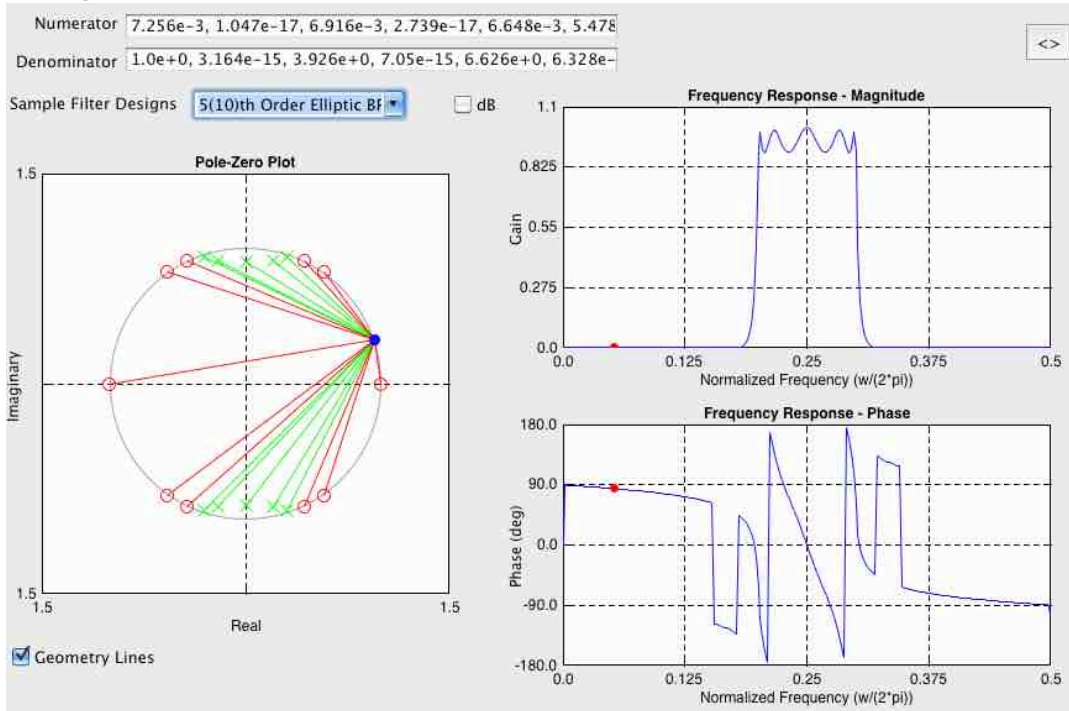
Digital Filter Examples ...



Digital Filter Examples ...



Digital Filter Examples ...

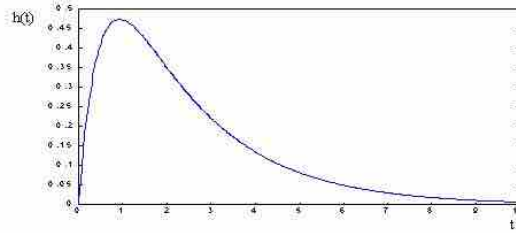


ΣΧΕΔΙΑΣΗ IIR ΦΙΛΤΡΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

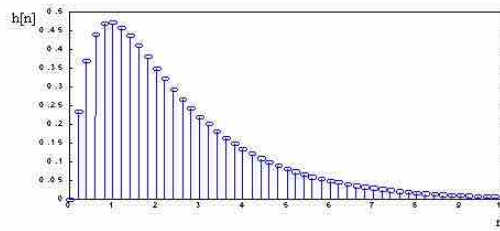
ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ (Impulse Invariance Method)

$$h(n) \equiv h(nT) = h(t) \Big|_{t=nT} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



(a) Analog Impulse Response

$$H(z) = Z\{h(nT)\}$$

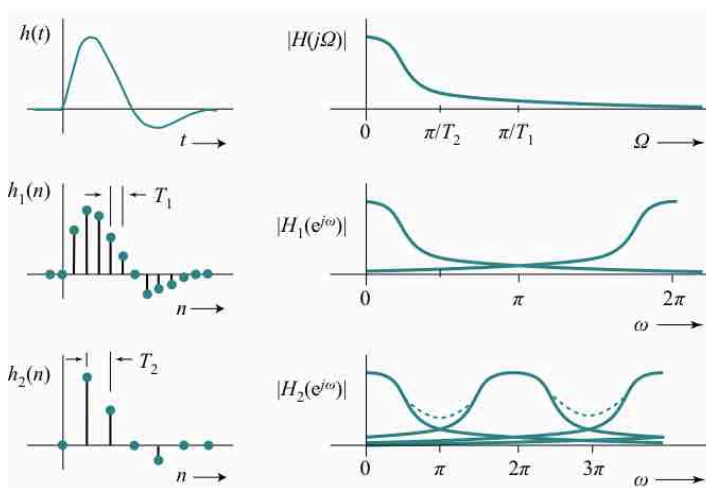


(b) Digital Impulse Response

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ (Impulse Invariance Method)

$$h(n) \equiv h(nT) = h(t) \Big|_{t=nT} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$H(z) = Z\{h(nT)\}$$



Κατάλληλη για τη σχεδίαση βαθυπερατών και ζωνοδιαβατών ψηφιακών φίλτρων.

Ακατάλληλη για τη σχεδίαση υπηπερατών φίλτρων, λόγω του aliasing που παρουσιάζεται στο φάσμα εξαιτίας της δειγματοληψίας.

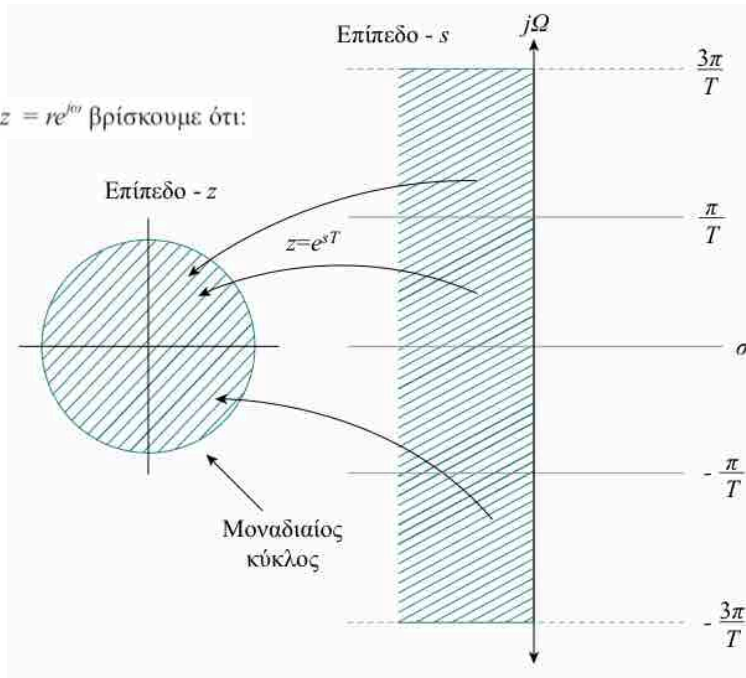
ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

$$z = e^{sT}$$

Για $s = \sigma + j\Omega$ και $z = re^{j\omega}$ βρίσκουμε ότι:

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\omega = \Omega T$$



ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού ΠΡ φίλτρου το οποίο προκύπτει με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης.

α. Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του αναλογικού φίλτρου από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $H(s)$, δηλαδή:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

β. Λαμβάνουμε δείγματα από την $h(t)$ αντικαθιστώντας το t με το nT . Τα δείγματα που προκύπτουν αντιστοιχούν στα στοιχεία της ακολουθίας $h(n)$, σύμφωνα με τη σχέση (5.22):

$$h(n) = h(t) \Big|_{t=nT} = e^{-nT} - e^{-2nT}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

γ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από τον μετασχηματισμό- z της $h(nT)$, όπως υπαγορεύεται από τη σχέση (5.23):

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2T}z^{-1}} = \frac{(e^{-T} - e^{-2T})z^{-1}}{(1 - e^{-T}z^{-1})(1 - e^{-2T}z^{-1})}, \quad |z| > e^{-T}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ: ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Ας προσπαθήσουμε τώρα να γενικεύσουμε τη διαδικασία σχεδίασης και ταυτόχρονα να αποδείξουμε ότι η $H(z)$ μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από την $H(s)$, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε την $h(t)$ και την $h(nT)$. Ας θεωρήσουμε ένα αναλογικό φίλτρο το οποίο έχει N διαφορετικούς πόλους. Η συνάρτηση μεταφοράς του μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων με τη μορφή:

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{s - p_{\xi}} \quad (5.26)$$

όπου p_{ξ} οι πόλοι του αναλογικού φίλτρου και C_{ξ} οι συντελεστές του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα.

Η αντίστοιχη κρουστική απόκριση θα είναι:

$$h(t) = \sum_{\xi=1}^N C_{\xi} e^{p_{\xi} t} \quad (5.27)$$

Αν από αυτή την κρουστική απόκριση λάβουμε δείγματα ανά T δευτερόλεπτα ($t = nT$), τότε θα πάρουμε την δειγματοληπτημένη απόκριση:

$$h(nT) = \sum_{\xi=1}^N C_{\xi} e^{p_{\xi} nT} \quad (5.28)$$

Τέλος, ο μετασχηματισμός- z της σχέσης (5.28) θα μας δώσει την επιθυμητή συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου:

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}} \quad (5.29)$$

Παρατηρώντας τη διαδικασία που περιγράφεται από τις σχέσεις (5.26) έως (5.29), διαπιστώνουμε ότι τα δύο ενδιάμεσα στάδια υπολογισμού της $h(t)$ και της $h(nT)$ θα μπορούσαν να παραλειφθούν και να υπολογίσουμε απευθείας την $H(z)$ (σχέση 5.29) από την $H(s)$ (σχέση 5.26) αντικαθιστώντας το $s - p_{\xi}$ με το $1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}$, δηλαδή:

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{s - p_{\xi}} \longrightarrow H(z) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}} \quad (5.30)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ: ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{s - p_{\xi}} \longrightarrow H(z) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{1 - e^{p_{\xi}T} z^{-1}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από το αναλογικό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = (s + 0,1)/[(s + 0,1)^2 + 9]$ να προσδιοριστεί αντίστοιχο ΠΙΡ ψηφιακό φίλτρο με χρήση της μεθόδου της αμετάβλητης κρουστικής.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το αναλογικό φίλτρο έχει ένα μηδενικό στο σημείο $s = -0,1$ και ένα ζεύγος συζυγών πόλων $p_z = -0,1 \pm j3$. Εκφράζουμε την $H(s)$ ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s) = \frac{0,5}{s + 0,1 - j3} + \frac{0,5}{s + 0,1 + j3}$$

και υπολογίζουμε την $H(z)$ με βάση τη σχέση (5.30):

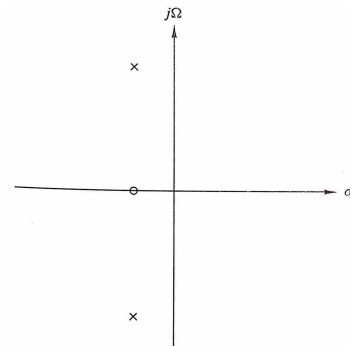
$$H(z) = \frac{0,5}{1 - e^{(-0,1+j3)T} z^{-1}} + \frac{0,5}{1 - e^{(-0,1-j3)T} z^{-1}} = \frac{1 - (e^{-0,1T} \cos 3T)z^{-1}}{1 - (2e^{-0,1T} \cos 3T)z^{-1} + e^{-0,2T} z^{-2}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

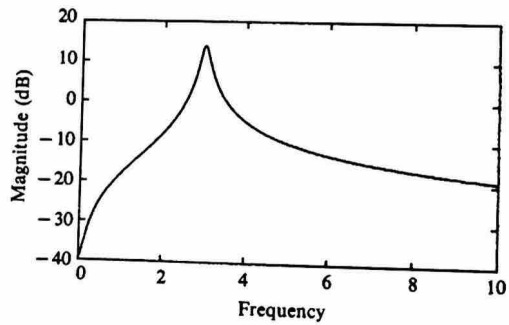
Μηδενικό και πόλοι αναλογικού φίλτρου

$$H(s) = (s + 0,1) / [(s + 0,1)^2 + 9]$$

$$H(s) = \frac{0,5}{s + 0,1 - j3} + \frac{0,5}{s + 0,1 + j3}$$



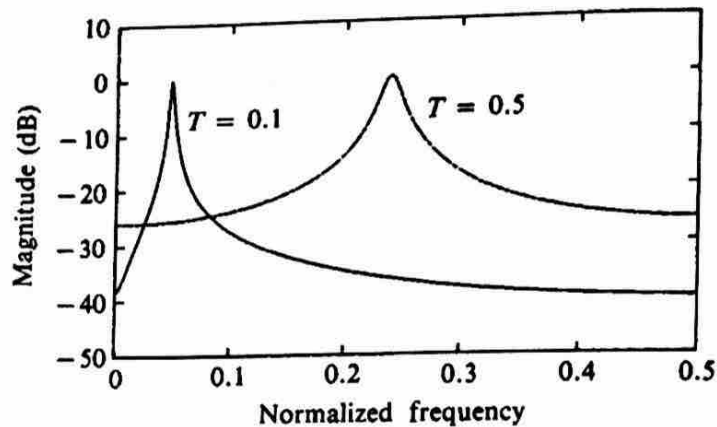
Απόκριση συχνότητας αναλογικού φίλτρου



ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

$$H(z) = \frac{1 - (e^{-0,1T} \cos 3T)z^{-1}}{1 - (2e^{-0,1T} \cos 3T)z^{-1} + e^{-0,2T}z^{-2}}$$

Απόκριση συχνότητας ψηφιακού φίλτρου για διαφορετικές συχνότητες δειγματοληψίας



ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ

Με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ψηφιακού IIR φίλτρου που αντιστοιχεί στο αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο $H(s) = 1/(s + 1)(s^2 + s + 1)$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $H(s)$ έχει τρεις διαφορετικούς πόλους $p_1 = -1$, $p_2 = -0,5 + j0,87$, $p_3 = -0,5 - j0,87$. Εκφράζουμε την $H(s)$ ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+0,5-j0,87} + \frac{C_3}{s+0,5+j0,87} \text{ και βρίσκουμε ότι:}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 0,6e^{-j2,6}, C_3 = 0,6e^{j2,6}$$

Υπολογίζουμε την $H(z)$ με βάση τη σχέση (5.30), αντικαθιστώντας το $s - p_i$ με το $1 - e^{p_i T} z^{-1}$, δηλαδή:

$$H(z) = \frac{C_1}{1 - e^{-T} z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - e^{(-0,5+j0,87)T} z^{-1}} + \frac{C_3}{1 - e^{(-0,5-j0,87)T} z^{-1}}$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στη συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου:

$$H(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z}{z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}$$

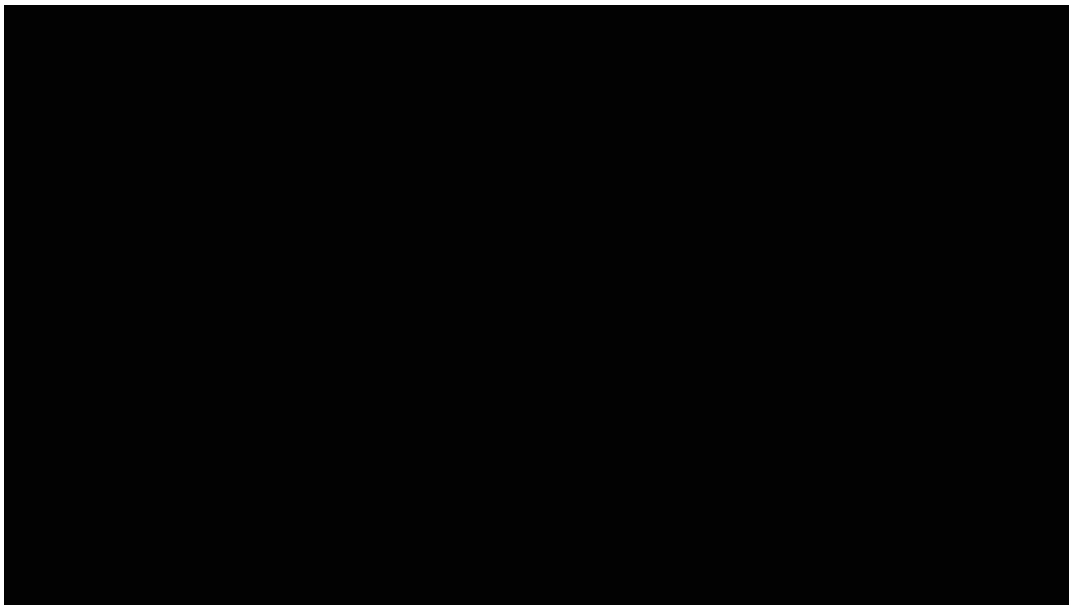
$$\text{όπου } a_0 = -2e^{-0,5T} \cos(0,87T) + e^{-T} + 1,15e^{-0,5T} \cos(5\pi/6 + 0,87T)$$

$$a_1 = e^{-T} + 1,15e^{-1,5T} \cos(5\pi/6 + 0,87T)$$

$$b_1 = -e^{-T} - 2e^{-0,5T} \cos(0,87T)$$

$$b_2 = e^{-T} + 2e^{-1,5T} \cos(0,87T)$$

$$b_3 = -e^{-2T}$$



<https://youtu.be/7MfwR9Q68aM>



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

IIR ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

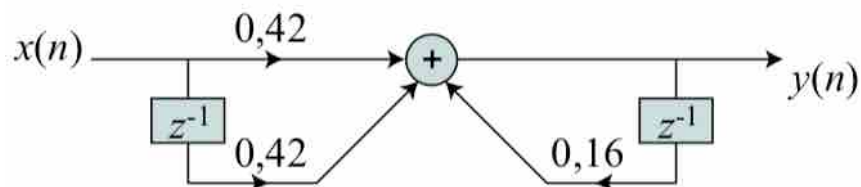
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

skodras@upatras.gr
www.ece.upatras.gr/skodras

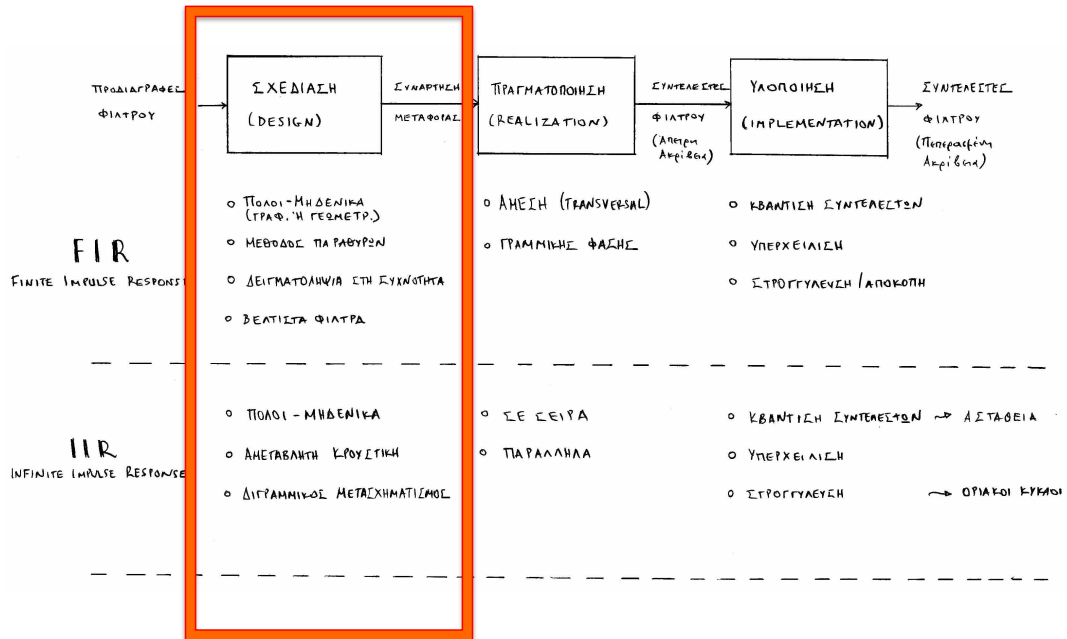


ΖΩΝΤΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 3.12.2021 - ΩΡΑ 11:00-13:00

IIR ΦΙΛΤΡΑ



ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ



ΣΧΕΔΙΑΣΗ IIR ΦΙΛΤΡΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (BILINEAR TRANSFORMATION)

Τα IIR ψηφιακά φίλτρα συνήθως σχεδιάζονται με βάση τα αντίστοιχα πρωτότυπα αναλογικά (συνεχούς χρόνου) φίλτρα.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (Bilinear Transformation Method)

$$H(z) = H(s) \left| s = \frac{z-1}{z+1} \right.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Η σχέση $s = (z-1)/(z+1)$ μπορεί να γραφεί και ως $sz + s - z + 1 = 0$. Παρατηρούμε ότι η τελευταία σχέση είναι γραμμική ως προς s και γραμμική ως προς z ή διγραμμική ως προς s και z .

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (Bilinear Transformation Method)

$$H(z) = H(s) \left| \begin{array}{l} s = \frac{z-1}{z+1} \end{array} \right.$$

Για να διερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά του διγραμμικού μετασχηματισμού, ας θεωρήσουμε ότι $z = re^{j\omega}$ και $s = \sigma + j\Omega$. Τότε, η σχέση μπορεί να εκφραστεί ως:

$$s = \frac{re^{j\omega} - 1}{re^{j\omega} + 1} = \frac{r^2 - 1}{\underbrace{1 + r^2 + 2r \cos \omega}_{\sigma}} + j \frac{2r \sin \omega}{\underbrace{1 + r^2 + 2r \cos \omega}_{\Omega}}$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι, εάν $r < 1$, τότε $\sigma < 0$ και εάν $r > 1$, τότε $\sigma > 0$. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο z .

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (Bilinear Transformation Method)

$$H(z) = H(s) \left| \begin{array}{l} s = \frac{z-1}{z+1} \end{array} \right.$$

$$s = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{1+s}{1-s} \Rightarrow \langle \text{για } s = \sigma + j\Omega \rangle$$

$$z = \frac{1 + \sigma + j\Omega}{1 - \sigma - j\Omega} \Rightarrow$$

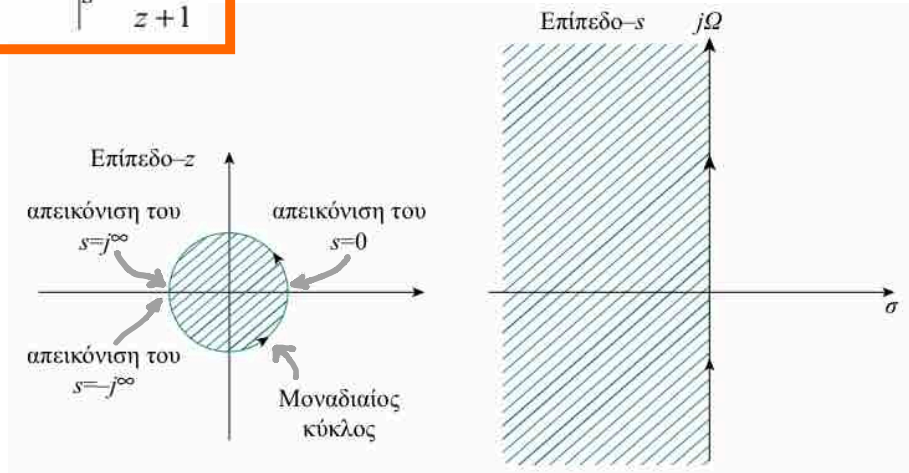
$$|z|^2 = \frac{(1+\sigma)^2 + \Omega^2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2}$$

- α. Για $\sigma = 0 \Rightarrow s = j\Omega \Rightarrow |z| = 1 \rightarrow$ Άρα ο άξονας των φανταστικών απεικονίζεται στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου
- β. Για $\sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1 \rightarrow$ Άρα το αριστερό ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου
- γ. Για $\sigma > 0 \Rightarrow |z| > 1 \rightarrow$ Άρα το δεξιό ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (Bilinear Transformation Method)

Απεικόνιση του επιπέδου-s στο
επίπεδο-z μέσω του
διγραμμικού μετασχηματισμού

$$H(z) = H(s) \left| s = \frac{z-1}{z+1} \right.$$



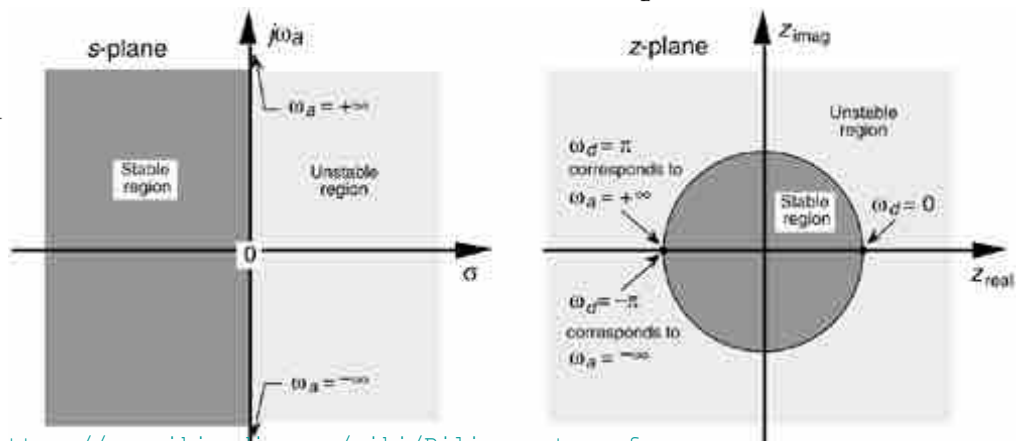
ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (Bilinear or Tustin or Trapezoidal Transformation)

$$s = \frac{1}{T} \ln(z)$$

$$= \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^7 + \dots \right]$$

$$\approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$= \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_transform

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

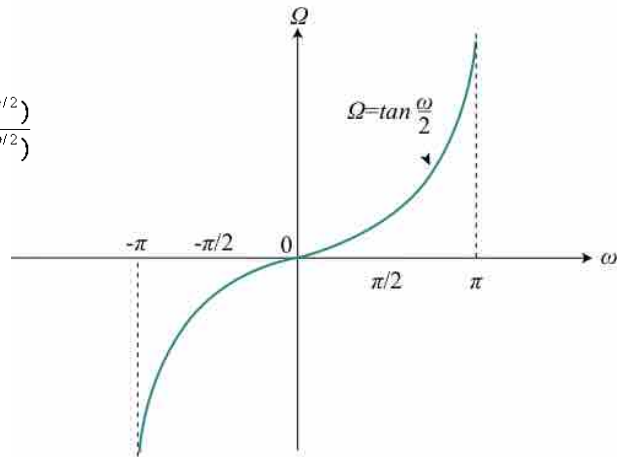
Μη γραμμική σχέση μεταξύ αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων λόγω του διγραμμικού μετασχηματισμού

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

Για $\sigma=0$ έχουμε:

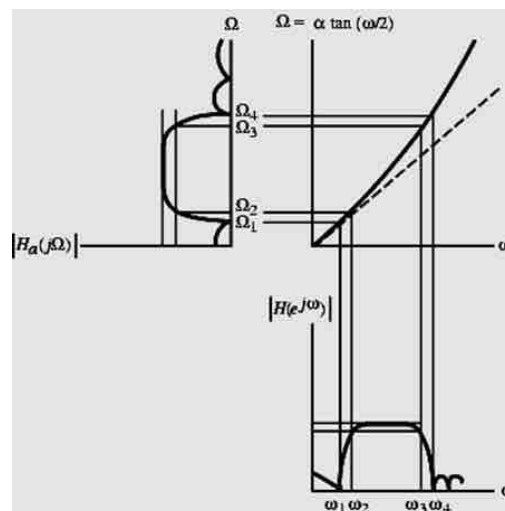
$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2})} \\ &= \frac{j2\sin(\omega/2)}{2\cos(\omega/2)} = j \tan(\omega/2) \end{aligned}$$

$$\Omega = \tan \frac{\omega}{2}$$



ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Μη γραμμική σχέση μεταξύ αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων λόγω του διγραμμικού μετασχηματισμού

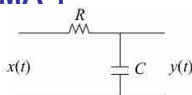


ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ: ΣΧΟΛΙΑ

1. Σε ορισμένα βιβλία ο διγραμμικός μετασχηματισμός ορίζεται ως $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, όπου T η περίοδος δειγματοληψίας. Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής $\frac{2}{T}$ δεν είναι απαραίτητος, αφού απαλείφεται κατά τη διαδικασία αντιστάθμισης της στρέβλωσης, όπως θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.
2. Για τα βαθυπερατά και υψηπερατά φίλτρα, η τάξη της $H(z)$ που προκύπτει, είναι ίδια με την τάξη της $H(s)$. Για παράδειγμα, από ένα δεύτερης τάξης βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο θα πάρουμε ένα δεύτερης τάξης βαθυπερατό ψηφιακό φίλτρο. Όμως, για τα ζωνοδιαβατά φίλτρα και τα φίλτρα απόρριψης ζώνης αυτό δεν ισχύει. Στην περίπτωση αυτή, η τάξη της $H(z)$ είναι διπλάσια της τάξης της $H(s)$.
3. Ευσταθή αναλογικά φίλτρα οδηγούν σε ευσταθή ψηφιακά φίλτρα.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1



Το πιο απλό αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο αποτελείται από έναν αντιστάτη και έναν πυκνωτή. Πρόκειται για το γνωστό «RC κύκλωμα», η έξοδος του οποίου λαμβάνεται από τα άκρα του πυκνωτή. Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού, να σχεδιαστεί το αντίστοιχο ψηφιακό φίλτρο, του οποίου η συχνότητα αποκοπής να είναι 30 Hz, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 150 Hz.

Επιθυμητή συχνότητα αποκοπής ψηφιακού φίλτρου

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi 30 \frac{1}{150} = \frac{2}{5}\pi = 0,4\pi$$

Συχνότητα αποκοπής αναλογικού φίλτρου (αντιστάθμιση στρέβλωσης – prewarping)

$$\Omega'_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{0,4\pi}{2}\right) = 0,73$$

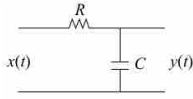
Πρωτότυπο Αναλογικό φίλτρο

$$H_p(s) = 1/(s + 1)$$

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{1}{\Omega'_c} s} = \frac{1}{\frac{s}{0,73} + 1} = \frac{0,73}{s + 0,73}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1



Το πιο απλό αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο αποτελείται από έναν αντιστάτη και έναν πυκνωτή. Πρόκειται για το γνωστό «RC κύκλωμα», η έξοδος του οποίου λαμβάνεται από τα άκρα του πυκνωτή. Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού, να σχεδιαστεί το αντίστοιχο ψηφιακό φίλτρο, του οποίου η συχνότητα αποκοπής να είναι 30 Hz, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 150 Hz.

Επιθυμητή συχνότητα αποκοπής ψηφιακού φίλτρου

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi 30 \frac{1}{150} = \frac{2}{5}\pi = 0,4\pi$$

Συχνότητα αποκοπής αναλογικού φίλτρου (αντιστάθμιση στρέβλωσης – prewarping)

$$\Omega'_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{0,4\pi}{2}\right) = 0,73$$

Πρωτότυπο Αναλογικό φίλτρο

$$H_p(s) = 1/(s + 1)$$

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Bigg|_{s = \frac{1}{\Omega'_c} s} = \frac{1}{\frac{s}{0,73} + 1} = \frac{0,73}{s + 0,73} \quad H(z) = H_{LP}(s) \Bigg|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,73}{\frac{z-1}{z+1} + 0,73} = \frac{0,42(1+z^{-1})}{1-0,16z^{-1}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

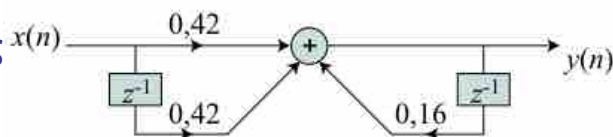
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

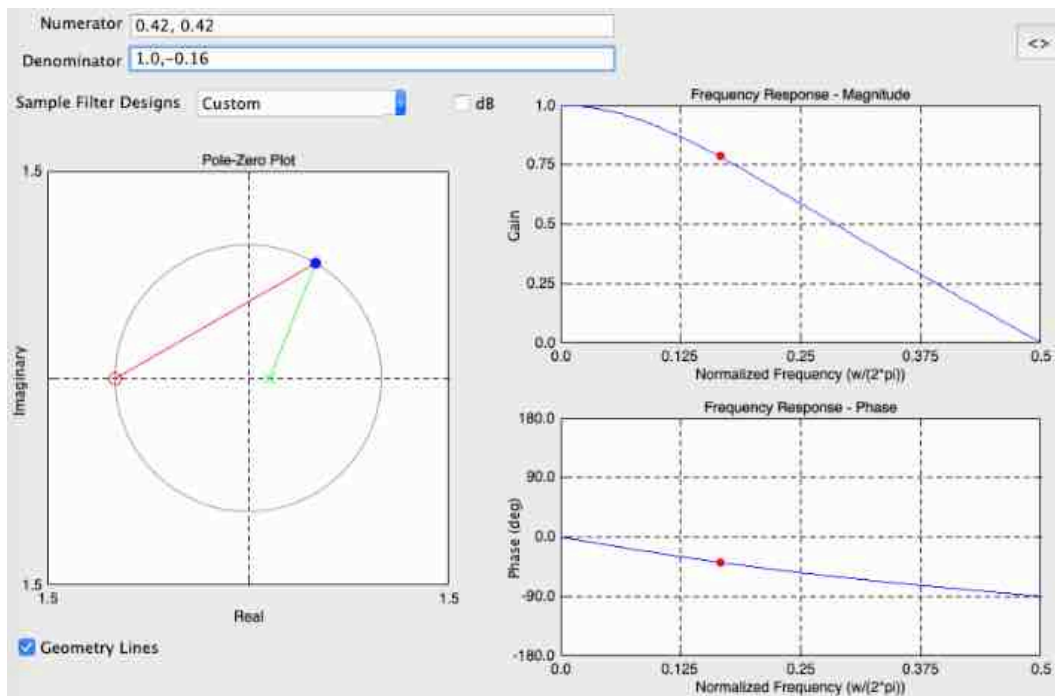
Συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = H_{LP}(s) \Bigg|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,73}{\frac{z-1}{z+1} + 0,73} = \frac{0,42(1+z^{-1})}{1-0,16z^{-1}}$

Εξίσωση Διαφορών

$$y(n] = 0,42[x(n) + x(n-1)] + 0,16y(n-1)$$

Δομή Πραγματοποίησης





ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ

Δίνεται $F_c = 30 \text{ Hz}$ και $F_s = 150 \text{ Hz}$

Βήμα 1 → Υπολογισμός επιθυμητής ψηφιακής κυκλικής συχνότητας ω_c

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \cdot \frac{1}{F_s} = 2\pi \frac{F_c}{F_s} = 2\pi \frac{30}{150} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Βήμα 2 → Αντιστάθμιση της παραμόρφωσης που θα προέβη λόγω διακριτού πεπερασμένου

$$\Omega_c' = \tan \frac{\omega_c}{2} = \tan \frac{2\pi}{10} = \tan \frac{\pi}{5} = 0.7265 \approx 0.73$$

Βήμα 3 → Αναλογικός πεπεσ. συχνότητας από βιβλιογραφία σε βιβλιογραφία

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_c'}{\Omega_c} s} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s = \frac{s}{0.73}} = \frac{1}{\frac{s}{0.73} + 1} = \frac{0.73}{s + 0.73}$$

Βήμα 4 → Διγραμμικός μετασχηματισμός

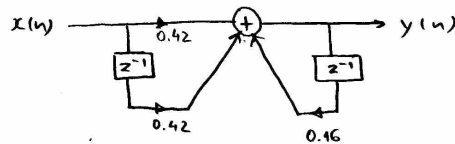
$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.73}{\frac{z-1}{z+1} + 0.73} = \frac{0.73(z+1)}{z-1 + 0.73(z+1)} = \frac{0.73(z+1)}{1.73z - 0.27} =$$

$$= \frac{0.42(z+1)}{z - 0.16} = \frac{0.42(1+z^{-1})}{1 - 0.16z^{-1}}$$

Από την $H(z) = Y(z)/X(z)$ και τον αντίστροφο μετασχηματισμό z προκύπτει η εξίσωση διαφορών του φίλτρου

$$y(n) = 0.42x(n) + 0.42x(n-1) + 0.16y(n-1)$$

και από αυτήν η δομή πραγματοποίησης



Σημείωση Κανονικά οι σχέσεις του διγραμμικού μετασχηματισμού είναι οι εξής:

$$j\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}, \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{όπου } T = 1/F_s \text{ η περίοδος δειγματοληψίας}$$

Όπως προκύπτει να δούμε παρακάτω, ο παράγοντας $2/T$ αναγράφεται και αυτές είναι ο λόγος που δεν τον αφηρημάδα στα προηγούμενα.

Βήμα 1 → Υπολογισμός ψηφιακής κυκλικής συχνότητας ω_c

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi 30 \frac{1}{150} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Βήμα 2 → Αντιστάθμιση παραμόρφωσης

$$\Omega_c' = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_c}{2} = 2 \cdot F_s \tan \frac{\omega_c}{2} = 2 \cdot 150 \tan \frac{2\pi}{10} = 217.95 \text{ rad/sec}$$

Βήμα 3 → Αναλογικός φέρων. συχνότητας LP → LP

$$H_{LP}(s) = H_P(s) \Big|_{s = \frac{\omega_c}{\omega_c'} s = \frac{1}{217.95} s} = \frac{1}{\frac{s}{217.95} + 1} = \frac{217.95}{s + 217.95}$$

Βήμα 4 → Διγερτικός μετασχηματισμός

$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T} \frac{z+1}{z+1} = 300 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{217.95}{300 \frac{z-1}{z+1} + 217.95} = \langle \text{διαγωγιμότητα παραρ. 4.30} \rangle =$$

$$= \frac{0.73}{\frac{z-1}{z+1} + 0.73} = \dots = \frac{0.42(z+1)}{z-0.16} = \frac{0.42(1+z^{-1})}{1-0.16z^{-1}}$$

Παρατηρείται ότι, όπως ήταν διαφορετικό, η συνάρτηση φέρων είναι η ίδια.

ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιάσετε ψηφιακό υπερπλάτος φίλτρο 1ης τάξης Butterworth με συχνότητα κλιμακώσεως 30 Hz για διαγαγωγισμιά συχνότητας 150Hz. Η σχεδίαση να βασιστεί στον διγερτικό μετασχηματισμό.

ΛΥΣΗ $F_c = 30 \text{ Hz}$, $F_s = 150 \text{ Hz}$

Βήμα 1 → Υπολογισμός επιθυμητής ψηφιακής συχνότητας ω_c

$$\omega_c = \omega_c' T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi \frac{F_c}{F_s} = 2\pi \frac{30}{150} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Βήμα 2 → Αντιστάθμιση της παραμόρφωσης που δε προέβει από τον διγερτικό μετασχηματισμό

$$\omega_c' = \tan \frac{\omega_c}{2} = \tan \frac{2\pi}{10} = \tan \frac{\pi}{5} = 0.7265 \approx 0.73$$

Βήμα 3 → Αναλογικός φέρων/φίλτρο συχνότητας από λαβή πλάτος σε υπερπλάτος

$$H_{HP}(s) = H_P(s) \Big|_{s = \frac{\omega_c \omega_c'}{s} = \frac{1 \cdot 0.73}{s} = \frac{0.73}{s}} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s = \frac{0.73}{s}} = \frac{1}{\frac{0.73}{s} + 1} = \frac{s}{s+0.73}$$

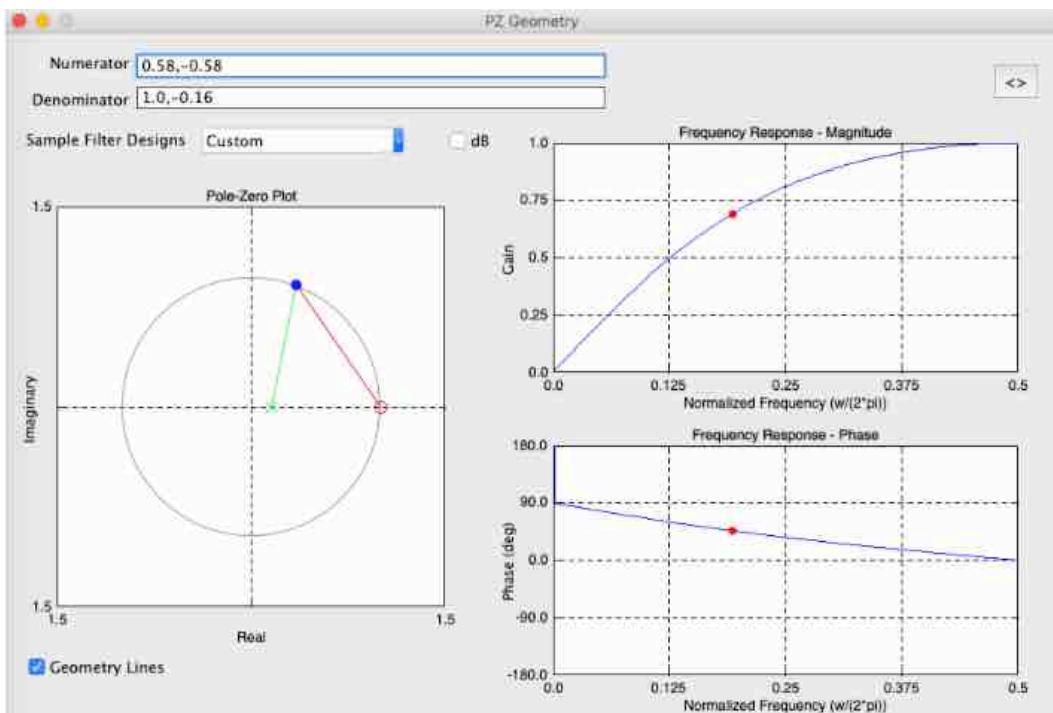
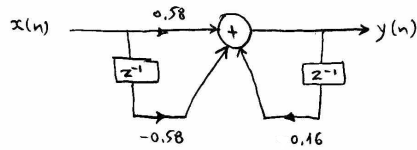
Διάκ 4 → Διαφομενός φετακφίος

$$H(z) = H_{HP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{s}{s+0.73} \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + 0.73} = \frac{z-1}{1.73z - 0.27} = \frac{0.58(1-z^{-1})}{1-0.16z^{-1}}$$

Η εξίσωση διαφορών προκύπτει από τον αντίστοιχο φετακφίος z της $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$y(n] = 0.58 x[n] - 0.58 x[n-1] + 0.16 y[n-1]$$

και η δομή πραγματοποιήσης είναι:



ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ

1. Από τις αναλογικές προδιαγραφές Ω του φίλτρου υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ψηφιακές (κυκλικές) συχνότητες ω .
2. Υπολογίζουμε τις αναλογικές συχνότητες Ω' ως **αντιστάθμιση της παραμόρφωσης** που θα υπεισέλθει λόγω του διγραμμικού μετασχηματισμού.
3. **Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο** ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο στο επιθυμητό αναλογικό βαθυπερατό ή το υψιπερατό ή το ζωνοδιαβατό ή απόρριψης ζώνης φίλτρο το οποίο έχει χαρακτηριστικές συχνότητες Ω' .
4. Εφαρμόζουμε τον **διγραμμικό μετασχηματισμό** στη συνάρτηση μεταφοράς του αναλογικού φίλτρου που μόλις υπολογίσαμε.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού να σχεδιαστεί βαθυπερατό ΠΡ ψηφιακό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 150 Hz για ρυθμό δειγματοληψίας 1,5 kHz. Η σχεδίαση να βασιστεί στο πρωτότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο δεύτερης τάξης τύπου Butterworth.

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο. Στην προκειμέ-

νη περίπτωση είναι το δεύτερης τάξης Butterworth φίλτρο $H_p(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό με συχνότητα αποκοπής $\Omega'_c = \tan(\omega_c/2) = \tan(\Omega_c T/2) = \tan(2\pi 150(1/1500)/2) = \tan(0,1\pi) = 0,32$ εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό συχνότητας της σχέσης (5.15):

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_c}{\Omega'_c} s = \frac{1}{0,32} s = \frac{s}{0,32}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{0,32}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{0,32}\right) + 1} = \frac{1}{9,47s^2 + 4,35s + 1}$$

3. Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στην τελευταία σχέση:

$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{9,47\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 4,35\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} = \frac{0,07(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,14z^{-1} + 0,41z^{-2}}$$

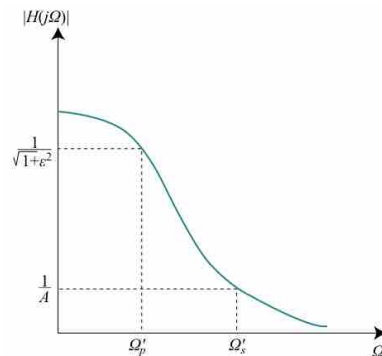
$$y(n) = 0,07[x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)] + 1,14y(n-1) - 0,41y(n-2)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να σχεδιάσετε βαθυπερατό ΠΡ ψηφιακό φίλτρο το οποίο να εξασθενίζει μονοτονικά τις συχνότητες. Η ζώνη διέλευσης του φίλτρου να εκτείνεται μέχρι τα 125 Hz, ενώ η εξασθένιση στη ζώνη αυτή να μην υπερβαίνει τα 0,5 dB. Η μέγιστη εξασθένιση στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 15 dB, ενώ η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 275 Hz. Το όλο σύστημα λειτουργεί με συχνότητα δειγματοληψίας 1 kHz. Η σχεδίαση να γίνει με βάση τον διγραμμικό μετασχηματισμό.

Καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για βαθυπερατό φίλτρο τύπου Butterworth (αφού πρέπει να παρουσιάζει μονοτονική εξασθένιση για όλες τις συχνότητες). Δεν γνωρίζουμε όμως την τάξη του φίλτρου. Αυτή την προσδιορίσουμε από τις τιμές των συχνοτήτων και εξασθενίσεων που μας δίνονται.



ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣ

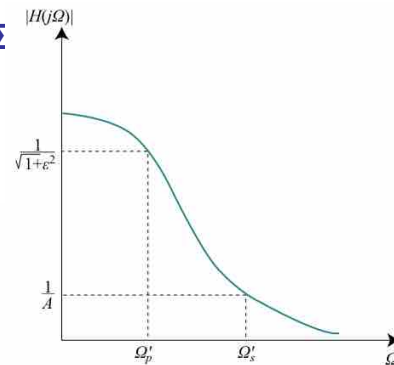
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1+\varepsilon^2} \right) = -0.5 \text{ dB} \Rightarrow \varepsilon^2 = 0,122$$

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = -15 \text{ dB} \Rightarrow A^2 = 31,623$$

$$\Omega'_p = \tan \left(\frac{\omega_p}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_p T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 125(1/1000)}{2} \right) = \tan(0,125)\pi = 0,41$$

$$\Omega'_s = \tan \left(\frac{\omega_s}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_s T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 275(1/1000)}{2} \right) = \tan(0,275)\pi = 1,17$$



ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = -0.5 \text{ dB} \Rightarrow \varepsilon^2 = 0,122$$

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = -15 \text{ dB} \Rightarrow A^2 = 31,623$$

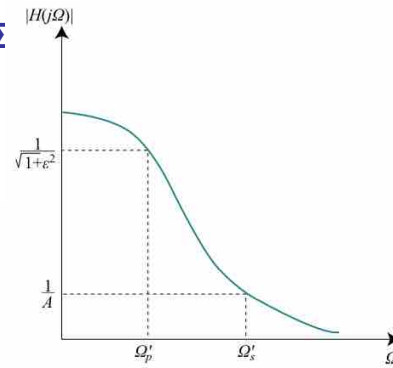
$$\Omega'_p = \tan \left(\frac{\omega_p}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_p T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 125(1/1000)}{2} \right) = \tan(0,125)\pi = 0,41$$

$$\Omega'_s = \tan \left(\frac{\omega_s}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_s T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 275(1/1000)}{2} \right) = \tan(0,275)\pi = 1,17$$

Η τάξη του φίλτρου μπορεί τώρα να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της σχέσης (5.6):

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log_{10} \left[(A^2 - 1) / \varepsilon^2 \right]}{\log_{10} (\Omega'_s / \Omega'_p)} = \frac{\log_{10}(251)}{2 \log_{10}(2.85)} = \frac{2,40}{0,91} = 2,63$$

Άρα το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο πρέπει να είναι τρίτης τάξης ($N = 3$).



ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Από το σημείο αυτό πλέον, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα τρία στάδια σχεδίασης ενός ψηφιακού IIR φίλτρου, όπως τα γνωρίσαμε προηγουμένως:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο.

Είδαμε ότι το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο θα πρέπει να είναι τύπου Butterworth τρίτης τάξης. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού είναι (βλ. ενότητα 5.1)

$$H_p(s) = 1/(s^3 + 2s^2 + 2s + 1).$$

2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης ίση με $\Omega'_p = 0,41$.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Θυμηθείτε ...

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ

Εάν έχουμε ένα βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, και θέλουμε να το μετατρέψουμε σ' ένα άλλο βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα Ω'_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s \quad (\text{βαθυπερατό σε βαθυπερατό}) \quad (5.14)$$

Με άλλα λόγια, εάν $H_p(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, τότε η συνάρτηση μεταφοράς $H_{LP}(s)$ του νέου βαθυπερατού φίλτρου θα είναι:

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s} \quad (5.15)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Από το σημείο αυτό πλέον, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα τρία στάδια σχεδίασης ενός ψηφιακού IIR φίλτρου, όπως τα γνωρίσαμε προηγουμένως:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο.

Είδαμε ότι το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο θα πρέπει να είναι τύπου Butterworth τρίτης τάξης. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού είναι (βλ. ενότητα 5.1)

$$H_p(s) = 1/(s^3 + 2s^2 + 2s + 1).$$

2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης ίση με $\Omega'_p = 0,41$. Για να εκφράσουμε όμως το μετασχηματισμό από βαθυπερατό σε βαθυπερατό της σχέσης (5.15), πρέπει να γνωρίζουμε τη συχνότητα Ω_p του πρωτότυπου φίλτρου, δηλαδή του φίλτρου που έχει $\Omega_c = 1$. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει με βάση τη σχέση (5.5α) και το γεγονός ότι $N = 3$.

$$\frac{1}{1 + (\Omega_p / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{1 + (\Omega_p / 1)^6} = \frac{1}{1 + 0,122} \Rightarrow \Omega_p = 0,702$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

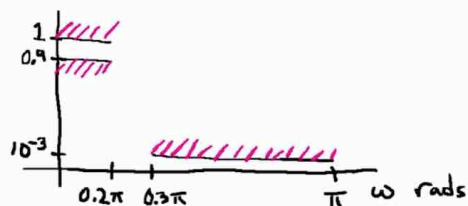
$$\begin{aligned}
 H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s = \frac{0,702}{0,41} s = 1,712s} &= \\
 = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \Big|_{s = 1,712s} &= \frac{1}{(1,712s)^3 + 2(1,712s)^2 + 2(1,712s) + 1} = \\
 = \frac{1}{5,02s^3 + 5,86s^2 + 3,42s + 1}
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στην τελευταία σχέση:

$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{5,02 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + 5,86 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 + 3,42 \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + 1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

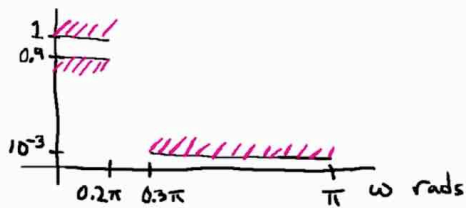
Example 1- Low pass



Compare Butterworth, Chebyshev 1+2, and elliptic designs

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

Example 1- Low pass



Compare Butterworth,
Chebyshev 1+2, and
elliptic designs

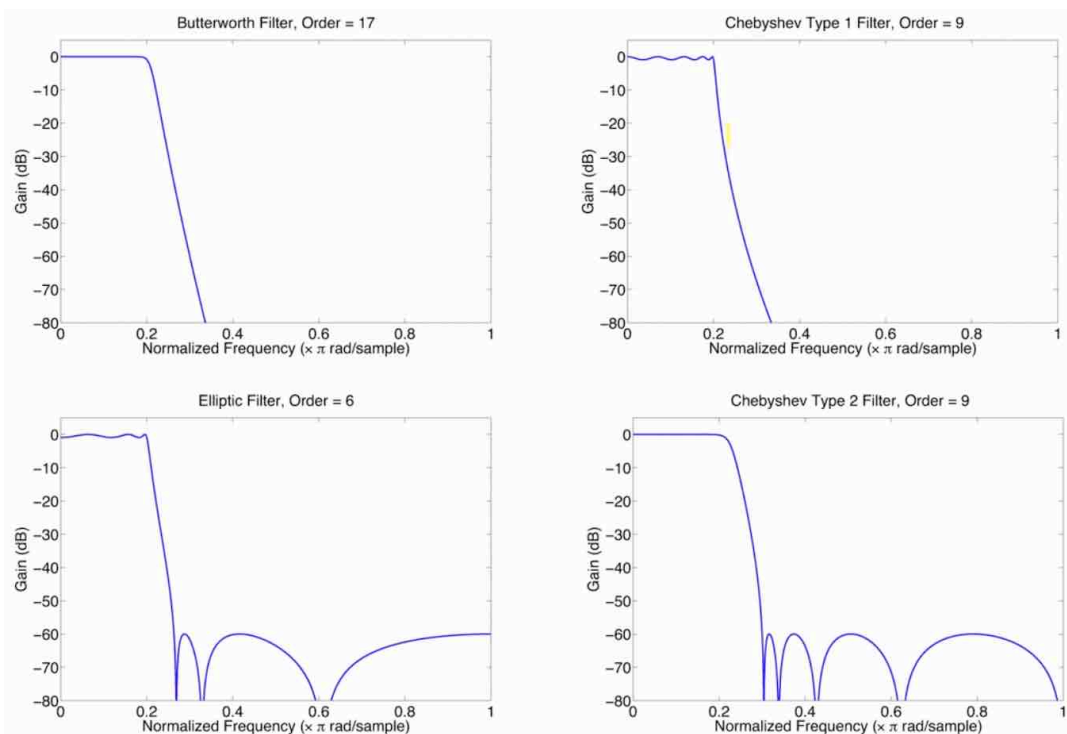
MATLAB: normalized frequency ω/π [0 1]
ripple in dB

```
passband = 0.2*pi/pi;
stopband = 0.3*pi/pi;
passrip = -20*log10(0.9);
stopatten = -20*log10(0.001);
```

```
[Nc1, Wnc1] = cheb1ord(passband, stopband, passrip, stopatten);
[Bc1, Ac1] = cheby1(Nc1, passrip, Wnc1);
```

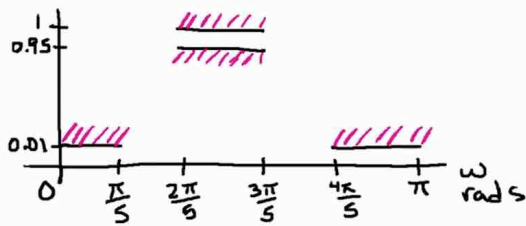
filter order
filter coefficients

Source: Barry Van Veen, "Examples of IIR Filter Design",
<https://www.youtube.com/watch?v=mSM1fCMZrZ8>



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

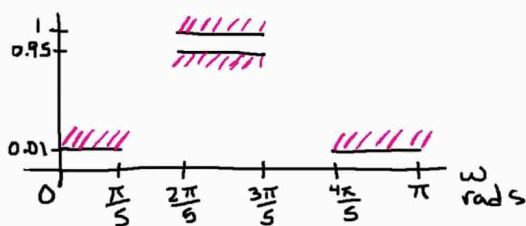
Example 2: Bandpass



Compare Butterworth
and elliptic designs

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

Example 2: Bandpass



Compare Butterworth
and elliptic designs

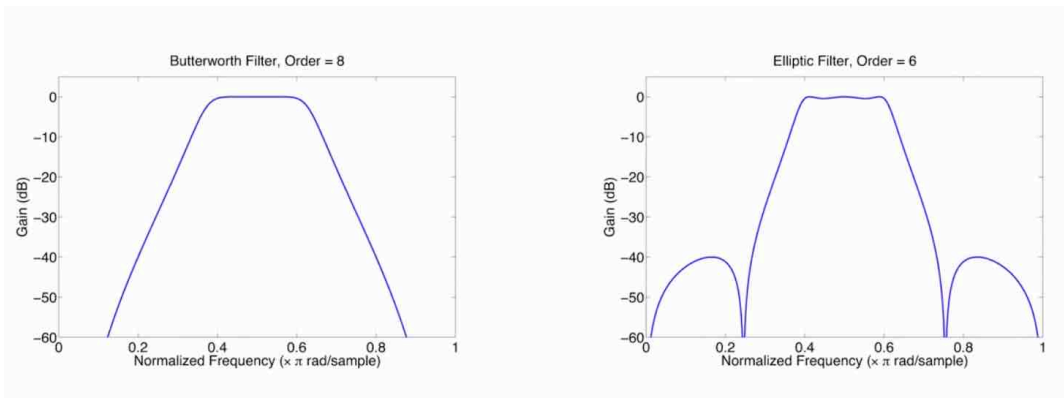
```
passband = [ 0.4*pi 0.6*pi]/pi;  
stopband = [ 0.2*pi 0.8*pi]/pi;  
passrip = -20*log10(0.95);  
stopatten = -20*log10(0.01);
```

```
[Ne,Wne] = ellipord(passband,stopband,passrip,stopatten);  
[Be,Ae] = ellip(Ne,passrip,stopatten,Wne);
```

normalize frequency
pass/stopband ripple in dB

filter order
filter coefficients

Source: Barry Van Veen, "Examples of IIR Filter Design",
<https://www.youtube.com/watch?v=mSM1fCMzrZ8>



Source: Barry Van Veen, "Examples of IIR Filter Design",
<https://www.youtube.com/watch?v=mSM1fCMZrZ8>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

Always verify that your design satisfies the specifications!

Very tight specs can result in meaningless designs

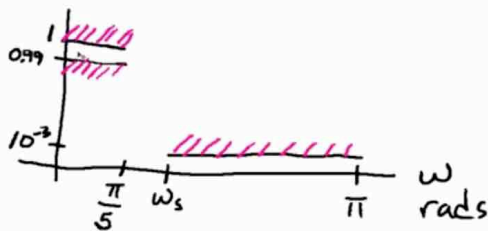
Source: Barry Van Veen, "Examples of Bad IIR Filter Designs",
<https://www.youtube.com/watch?v=oyBrrYl4YVk>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

Always verify that your design satisfies the specifications!

Very tight specs can result in meaningless designs

Example: Low pass Butterworth



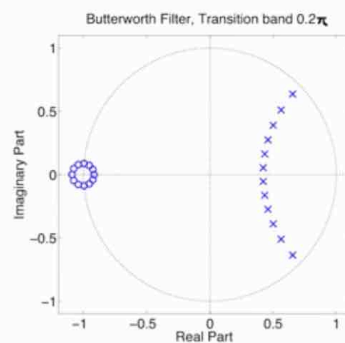
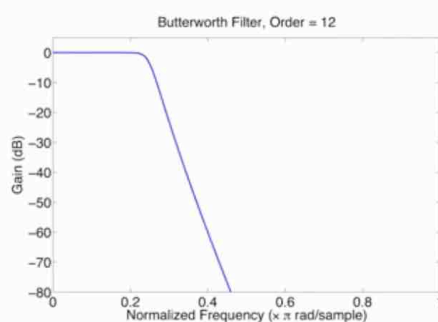
Case 1: $\omega_s = 0.4\pi$ rads

Case 2: $\omega_s = 0.24\pi$ rads

Source: Barry Van Veen, "Examples of Bad IIR Filter Designs",
<https://www.youtube.com/watch?v=oyBrrYl4YVk>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

Case 1: Transition band 0.2π rads



Coefficients, transition band 0.2π

$B = 1.0e-03 *$

0.0010 0.0120 0.0660 0.2200 0.4950 0.7921 0.9241 0.7921 0.4950 0.2200 0.0660 0.0120 0.0010

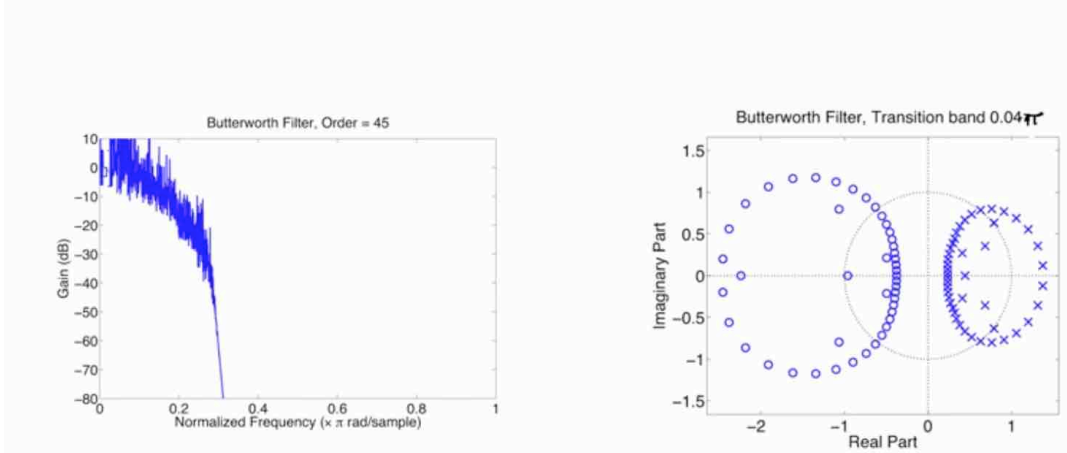
$A =$

1.0000 -6.0629 17.7293 -32.6911 42.0486 -39.5581 27.8126 -14.6843 5.7654 -1.6386 0.3195 -0.0383 0.0021

Source: Barry Van Veen, "Examples of Bad IIR Filter Designs",
<https://www.youtube.com/watch?v=oyBrrYl4YVk>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

Case 2: Transition Band 0.04π rads



Source: Barry Van Veen, "Examples of Bad IIR Filter Designs",
<https://www.youtube.com/watch?v=oyBrrYl4YVk>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

Coefficients, transition band 0.04π

$B = 1.0e-07 *$

```
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0001 -0.0003
-0.0010 -0.0025 -0.0057 -0.0117 -0.0219 -0.0374 -0.0581 -0.0826 -0.1074 -0.1279 -0.1395 -0.1395
-0.1279 -0.1074 -0.0826 -0.0581 -0.0374 -0.0219 -0.0117 -0.0057 -0.0025 -0.0010 -0.0003 -0.0001
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
```

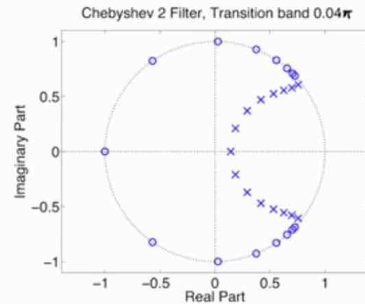
$A = 1.0e+08 *$

```
0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0002 -0.0009 0.0036 -0.0121 0.0352 -0.0889 0.1981 -0.3923
0.6953 -1.1100 1.6037 -2.1052 2.5192 -2.7555 2.7609 -2.5383 2.1441 -1.6655 1.1904 -0.7831
0.4740 -0.2640 0.1351 -0.0635 0.0274 -0.0108 0.0039 -0.0013 0.0004 -0.0001 0.0000 -0.0000
0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
```

Source: Barry Van Veen, "Examples of Bad IIR Filter Designs",
<https://www.youtube.com/watch?v=oyBrrYl4YVk>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΥΧΗΜΕΝΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

Chebyshev 2 design: Transition band 0.04π rads



Chebyshev 2 Coefficients

B =

0.0029 -0.0114 0.0285 -0.0461 0.0577 -0.0528 0.0377 -0.0122 -0.0122 0.0377 -0.0528 0.0577
-0.0461 0.0285 -0.0114 0.0029

A =

1.0000 -7.1645 25.3133 -57.6380 93.8983 -115.3399 109.9630 -82.6252 49.2266 -23.2124 8.5801 -2.438
0.5151 -0.0763 0.0071 -0.0003

Source: Barry Van Veen, "Examples of Bad IIR Filter Designs",
<https://www.youtube.com/watch?v=oyBrrYl4YVk>

Filter Designs

Desired frequency response - $H_d(e^{j\omega})$

FIR

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}$$

- Optimization based design
- Arbitrary magnitude/phase response
- Can obtain linear phase
- Can require large M

IIR

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{jk\omega}}, a_0=1$$

- Transform analog filter designs
- Frequency selective gain
- Nonlinear phase, no control
- Fewer coefficients than FIR

Source: Barry Van Veen, "Overview of FIR and IIR Filters",
<https://www.youtube.com/watch?v=9yNQBWKRSs4>



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

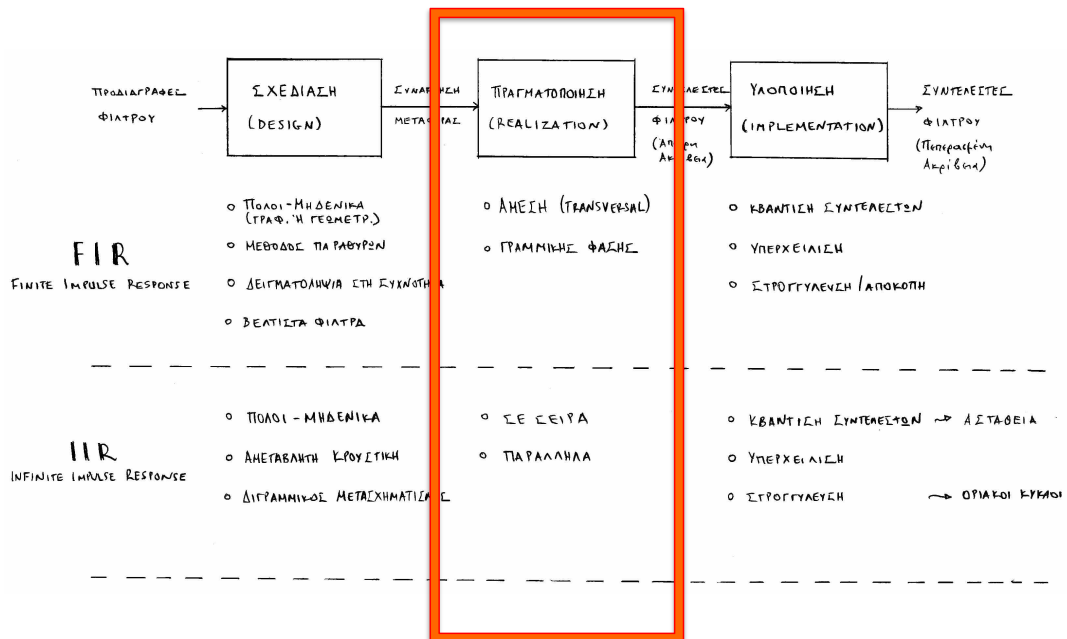
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

skodras@upatras.gr
www.ece.upatras.gr/skodras



ΖΩΝΤΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
ΠΕΜΠΤΗ 9.12.2021 - ΩΡΑ 09:00-11:00

ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ





Συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$Y(z) \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z)$$

Εξίσωση διαφορών:

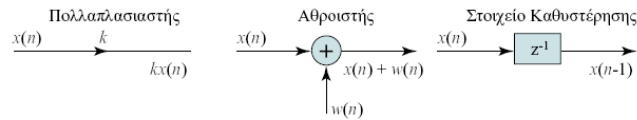
$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

ΔΟΜΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ

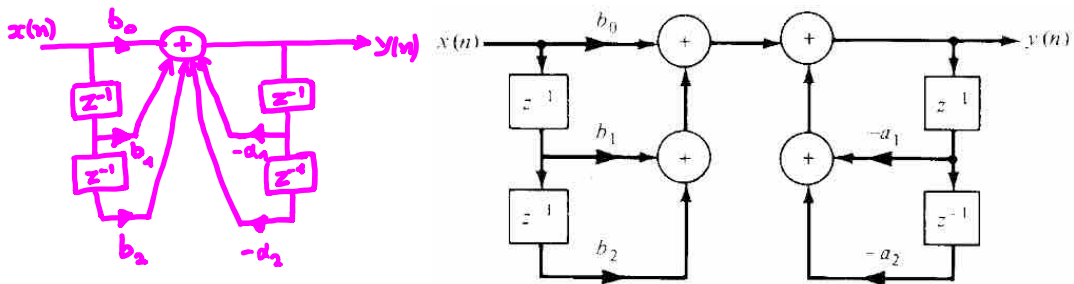
Δομές Συστημάτων 2ης Τάξης

$$y(n] = b_0x[n) + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] - a_1y[n - 1] - a_2y[n - 2]$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$



Άμεση μορφή τύπου-I



Άμεση μορφή τύπου-II ή Κανονική

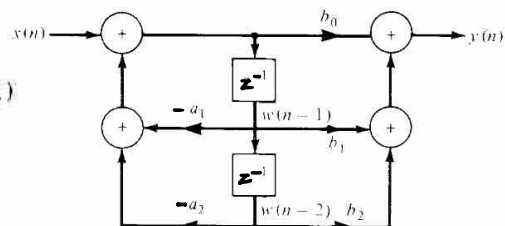
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}) \cdot \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}) \cdot \underbrace{\frac{X(z)}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}}_{W(z)} \Rightarrow$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}) \cdot W(z)$$

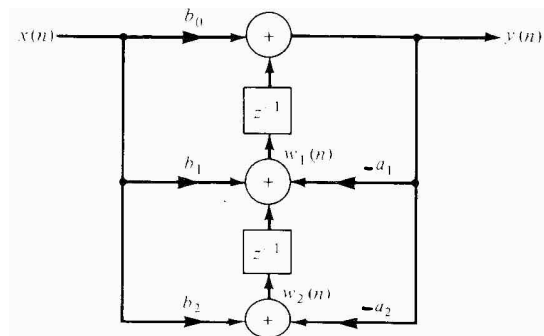
$$w(n) = -a_1w[n - 1] - a_2w[n - 2] + x[n]$$

$$y(n) = b_0w[n] + b_1w[n - 1] + b_2w[n - 2]$$



Ανάστροφη άμεση μορφή τύπου-II

$$\begin{aligned}
 y(n] &= b_0x(n) + w_1(n - 1) \\
 w_1(n) &= b_1x(n) - a_1y(n) \\
 &\quad + w_2(n - 1) \\
 w_2(n) &= b_2x(n) - a_2y(n)
 \end{aligned}$$



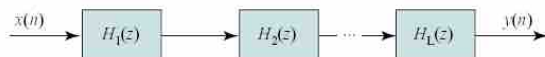
	Structure	Implementation Equations	System Function
Direct Form I		$ \begin{aligned} y(n) &= b_0x(n) + b_1x(n - 1) \\ &\quad + b_2x(n - 2) \\ &\quad - a_1y(n - 1) - a_2y(n - 2) \end{aligned} $	$ H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} $
Regular Direct Form II		$ \begin{aligned} w(n) &= -a_1w(n - 1) - a_2w(n - 2) \\ &\quad + x(n) \\ y(n) &= b_0w(n) + b_1w(n - 1) \\ &\quad + b_2w(n - 2) \end{aligned} $	$ H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} $
Transposed Direct Form II		$ \begin{aligned} y(n) &= b_0x(n) + w_1(n - 1) \\ w_1(n) &= b_1x(n) - a_1y(n) \\ &\quad + w_2(n - 1) \\ w_2(n) &= b_2x(n) - a_2y(n) \end{aligned} $	$ H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} $

ΔΟΜΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΝΣΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Higher order realization structures

Realization Structures

Cascade



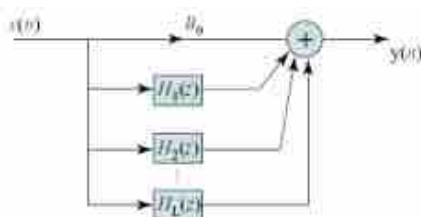
$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_L(z) = \prod_{i=1}^L H_i(z)$$

$$L = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1}} \quad 1^{ns} \tau \dot{\alpha} \dot{\gamma} \dot{\eta} \dot{\nu} s$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad 2^{ns} \tau \dot{\alpha} \dot{\gamma} \dot{\eta} \dot{\nu} s$$

Parallel



$$H(z) = b_0 + \sum_{i=1}^L H_i(z)$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i}}{1 + a_{1i}z^{-1}} \quad 1^{ns} \tau \dot{\alpha} \dot{\gamma} \dot{\eta} \dot{\nu} s$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad 2^{ns} \tau \dot{\alpha} \dot{\gamma} \dot{\eta} \dot{\nu} s$$

Δομές Πραγματοποίησης Σε Σειρά (Cascade)



$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_L(z) = \prod_{i=1}^L H_i(z)$$

Τρία είναι τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν κατά την πραγματοποίηση σε σειρά:

- 1) με ποιο τρόπο θα πρέπει να συνδυαστούν οι αριθμητές με τους παρονομαστές, μετά την παραγοντοποίηση της $H(z)$
- 2) με ποια σειρά θα πρέπει οι επιμέρους δομές να συνδεθούν, και
- 3) η ανάγκη κλιμάκωσης, δηλαδή μείωσης του πλάτους του σήματος σε ενδιάμεσα σημεία της δομής, ώστε αυτό να μην είναι ούτε πολύ μεγάλο, ούτε πολύ μικρό.

Cascade Form IIR Digital Filter Structures (*)

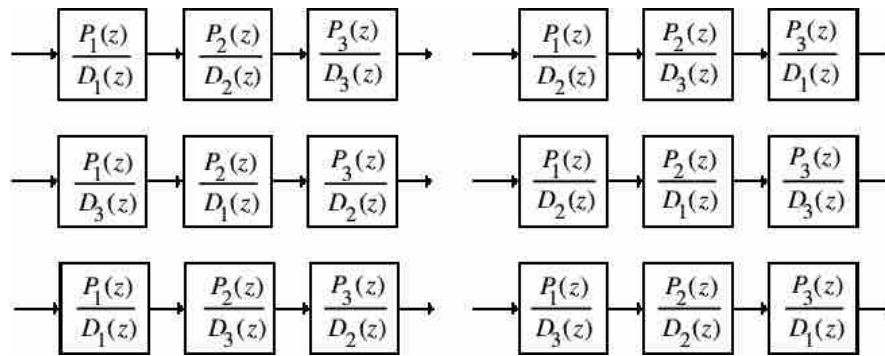
- By expressing the numerator and the denominator polynomials of the transfer function as a product of polynomials of lower degree, **a digital filter can be realized as a cascade of low-order filter sections**
- Consider, for example, $H(z) = P(z)/D(z)$ expressed as

$$H(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \frac{P_1(z)P_2(z)P_3(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)}$$

(*) Source: Book of Sanjit K. Mitra *Digital Signal Processing – A Computer-Based Approach*, McGraw Hill, 2nd Ed., 2001 / Presentation of Sanjit K. Mitra available on the web.

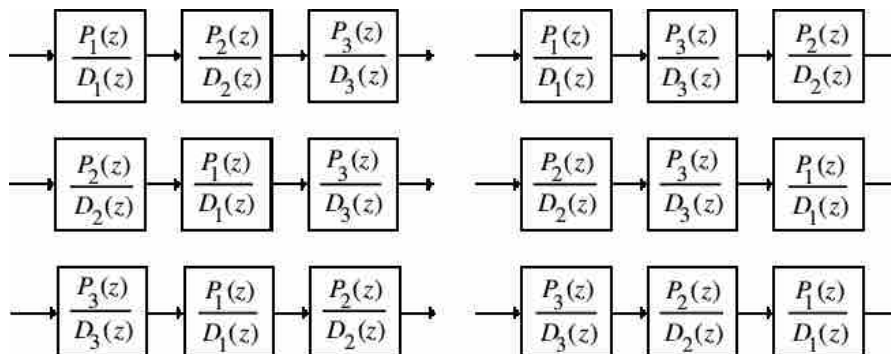
Cascade Form IIR Digital Filter Structures

- Examples of cascade realizations obtained by different **pole-zero pairings** are shown below



Cascade Form IIR Digital Filter Structures

- Examples of cascade realizations obtained by different **ordering of sections** are shown below



Cascade Form IIR Digital Filter Structures

- There are altogether a total of 36 different cascade realizations* of

$$H(z) = \frac{P_1(z)P_2(z)P_3(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)}$$

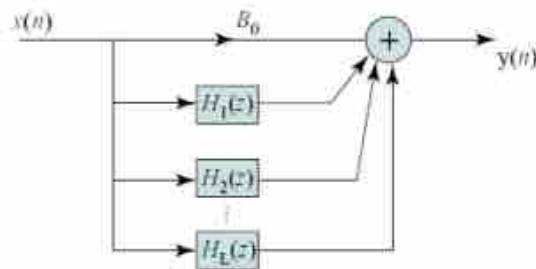
based on pole-zero-pairings and ordering

- Due to **finite wordlength** effects, each such cascade realization behaves differently from others

* In general, for **k** second-order sections there exist **(k!)^2** different realizations

Δομές Πραγματοποίησης Παράλληλα (Parallel)

$$H(z) = B_0 + \sum_{i=1}^L H_i(z)$$



όπου L το ακέραιο μέρος του $(N + 1)/2$, $B_0 = b_M/a_N$ και

$$H_i(z) = \frac{b_{0i}}{1 + a_{1i}z^{-1}} \quad \text{πρώτης τάξης}$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad \text{δεύτερης τάξης}$$

Στην παράλληλη πραγματοποίηση δεν παίζει ρόλο η σειρά διασύνδεσης των επιμέρους δομών. Επιπλέον, η κλιμάκωση είναι πιο εύκολη υπόθεση, αφού μπορεί να γίνει για κάθε μία δομή ανεξάρτητα. Τα μηδενικά όμως των επιμέρους δομών είναι περισσότερο ευαίσθητα στα σφάλματα κβάντισης των συντελεστών.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ – ΣΕ ΣΕΙΡΑ – ΑΠΕΥΘΕΙΑΣ πραγματοποίηση συστήματος

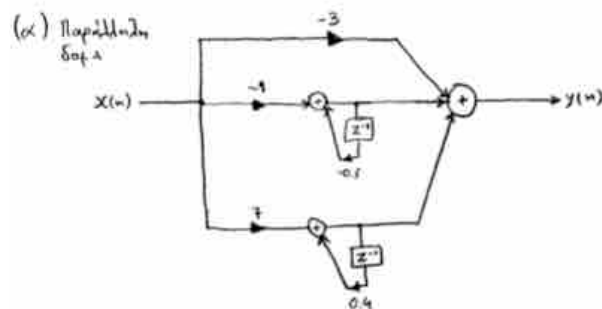
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ για την παράλληλη δομή πραγματοποίησης (realization structure) ενός συστήματος ψηφιακού ελέγχου δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = -3 - \frac{1}{1+0.5z^{-1}} + \frac{7}{1-0.4z^{-1}}$$

- Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της δομής.
- Να δώσετε τη δομή πραγματοποίησης σε **σειρά** (cascade) και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα.
- Να δώσετε τη δομή **άμεσης** πραγματοποίησης (**direct 1**) και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα

$$H(z) = -3 - \frac{1}{1+0.5z^{-1}} + \frac{7}{1-0.4z^{-1}}$$



(6) Δοτε ως συμζ

$$H(z) = \frac{-3(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1}) - (1-0.4z^{-1}) + 7(1+0.5z^{-1})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} =$$

$$= \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} = \frac{3(1+1.2z^{-1}+0.2z^{-2})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} = \frac{3(1+z^{-1})(1+0.2z^{-1})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} = 3H_1(z)H_2(z)$$

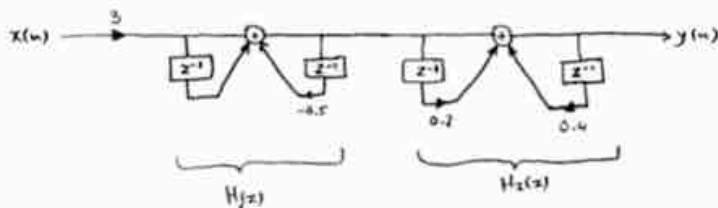
όπου $H_1(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$, $H_2(z) = \frac{1+0.2z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$

(6) Δοτε ως συμζ

$$H(z) = \frac{-3(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1}) - (1-0.4z^{-1}) + 7(1+0.5z^{-1})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} =$$

$$= \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} = \frac{3(1+1.2z^{-1}+0.2z^{-2})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} = \frac{3(1+z^{-1})(1+0.2z^{-1})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} = 3H_1(z)H_2(z)$$

όπου $H_1(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$, $H_2(z) = \frac{1+0.2z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$



(δ) Αφού δόφι

$$H(z) = \frac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} = \frac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow Y(z) + 0.1z^{-1}Y(z) - 0.2z^{-2}Y(z) = 3X(z) + 3.6z^{-1}X(z) + 0.6z^{-2}X(z)$$

⇒ (Αφαιρώντας τον αντίστοιχο φάκτορα z^{-2} και τον δύο μερών)

$$\Rightarrow y(n] = 3x(n] + 3.6x(n-1] + 0.6x(n-2] - 0.1y(n-1] + 0.2y(n-2]$$

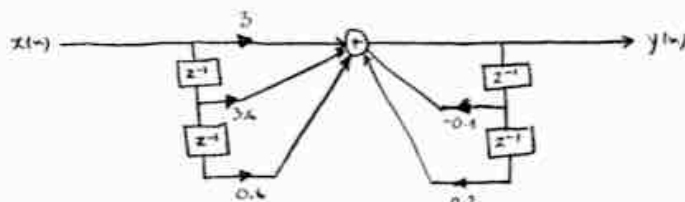
(δ) Αφού δόφι

$$H(z) = \frac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})} = \frac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow Y(z) + 0.1z^{-1}Y(z) - 0.2z^{-2}Y(z) = 3X(z) + 3.6z^{-1}X(z) + 0.6z^{-2}X(z)$$

⇒ (Αφαιρώντας τον αντίστοιχο φάκτορα z^{-2} και τον δύο μερών)

$$\Rightarrow y(n] = 3x(n] + 3.6x(n-1] + 0.6x(n-2] - 0.1y(n-1] + 0.2y(n-2]$$





ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

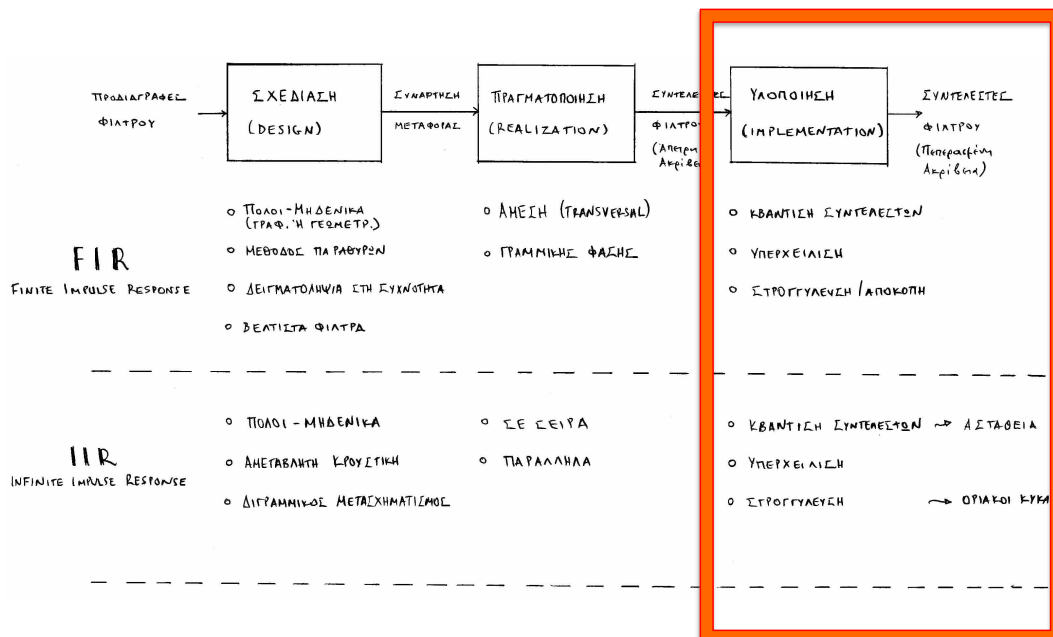
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

skodras@upatras.gr
www.ece.upatras.gr/skodras



ΖΩΝΤΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 10.12.2021 - ΩΡΑ 11:00-13:00

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ



Παράδειγμα

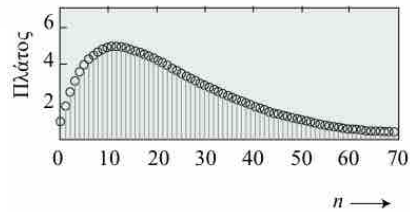
Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού ΠΡ φίλτρου δεύτερης τάξης είναι:

$$H(z) = 1/(1 - 1,845z^{-1} + 0,850586z^{-2})$$

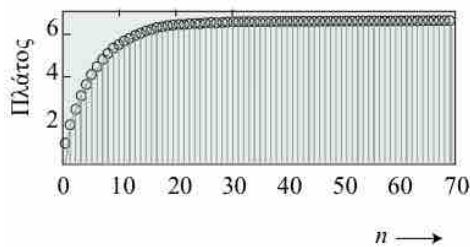
Να εξεταστεί η ευστάθεια του φίλτρου. Να επαναληφθεί η διαδικασία στην περίπτωση που οι συντελεστές αναπαριστούνται με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

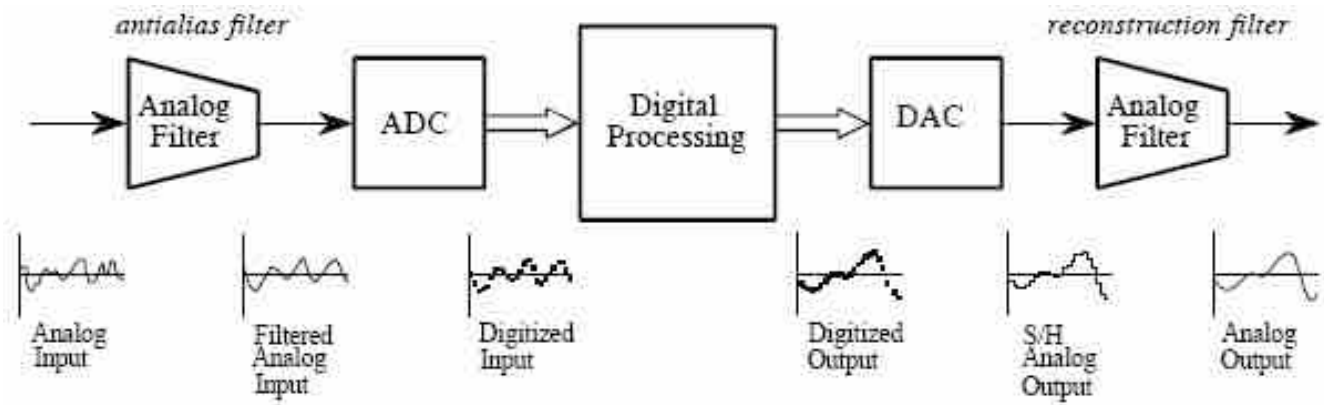
Η παραγοντοποίηση του παρανομαστή οδηγεί στην ισοδύναμη μορφή για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = 1/(1 - 0,902z^{-1})(1 - 0,943z^{-1})$. Το σύστημα έχει δύο πραγματικούς πόλους στα σημεία $z = 0,902$ και $z = 0,943$. Αφού το μέτρο κάθε πόλου είναι μικρότερο της μονάδας, δηλαδή οι πόλοι βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο- z , το σύστημα είναι ευσταθές. Παρατηρήστε ότι η κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος είναι φθίνουσα (Σχήμα α), όπως ακριβώς απαιτείται για ένα ευσταθές σύστημα.



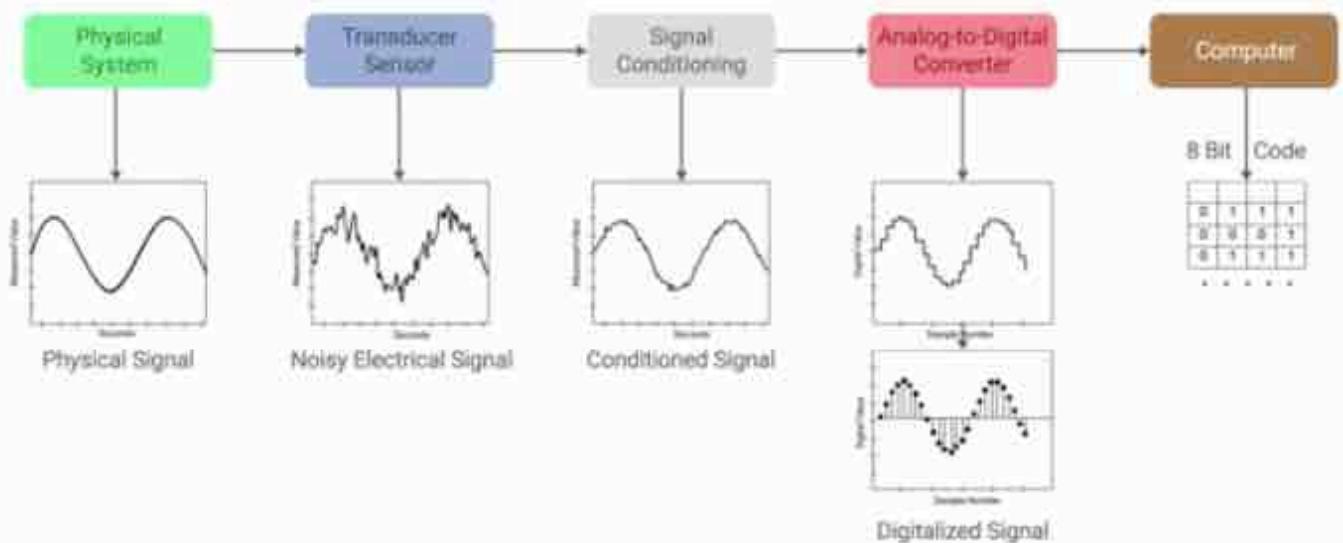
Ας στρογγυλεύσουμε τώρα τους συντελεστές της $H(z)$ στα δύο δεκαδικά ψηφία. Αυτή γίνεται $H(z) = 1/(1 - 1,85z^{-1} + 0,85z^{-2})$ ή μετά την παραγοντοποίηση $H(z) = 1/(1 - z^{-1})(1 - 0,85z^{-1})$. Παρατηρούμε ότι η νέα συνάρτηση έχει πόλους στα σημεία $z = 1$ και $z = 0,85$. Ο ένας πόλος βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο με συνέπεια το σύστημα να μην είναι πλέον ευσταθές! Πράγματι, σχεδιάζοντας και πάλι την κρουστική απόκριση $h(n)$ του νέου συστήματος (Σχήμα β), παρατηρούμε ότι αυτή πολύ σύντομα αυξάνεται μέχρι να φτάσει σε μια σταθερή τιμή, στην οποία και παραμένει. Κατά συνέπεια, η κρουστική απόκριση δεν είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή και το σύστημα δεν είναι ευσταθές.



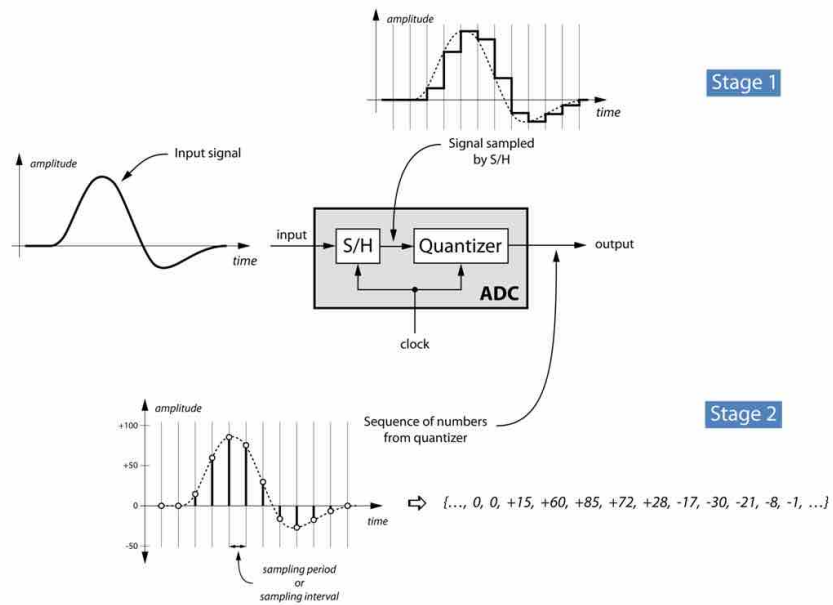
ΠΛΗΡΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΨΕΣ



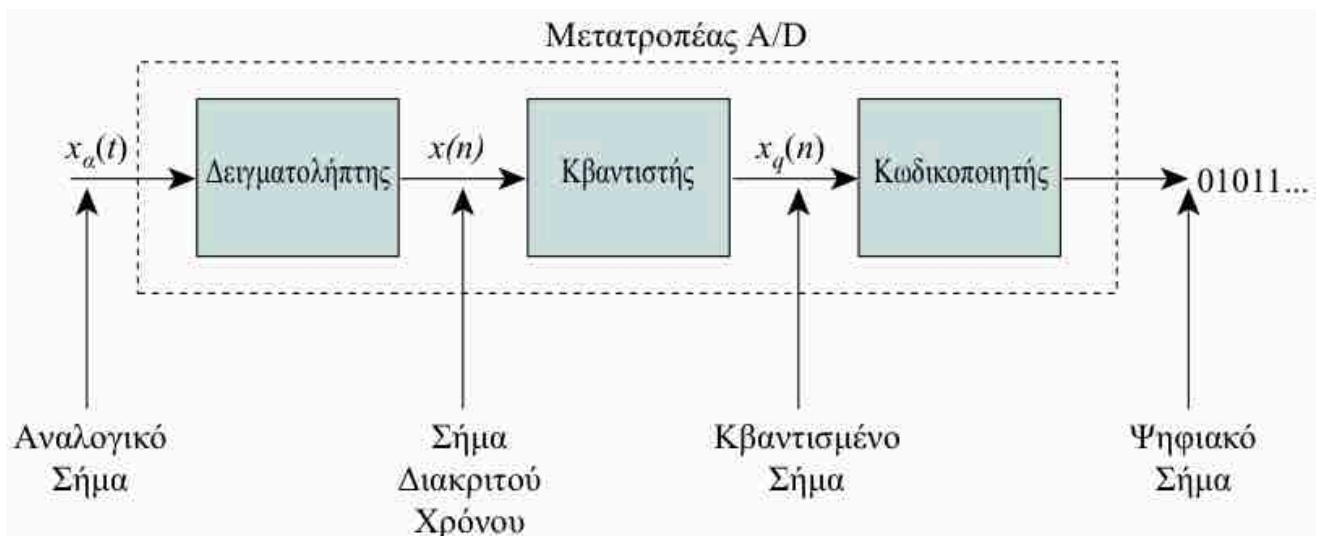
Digital Data Acquisition System



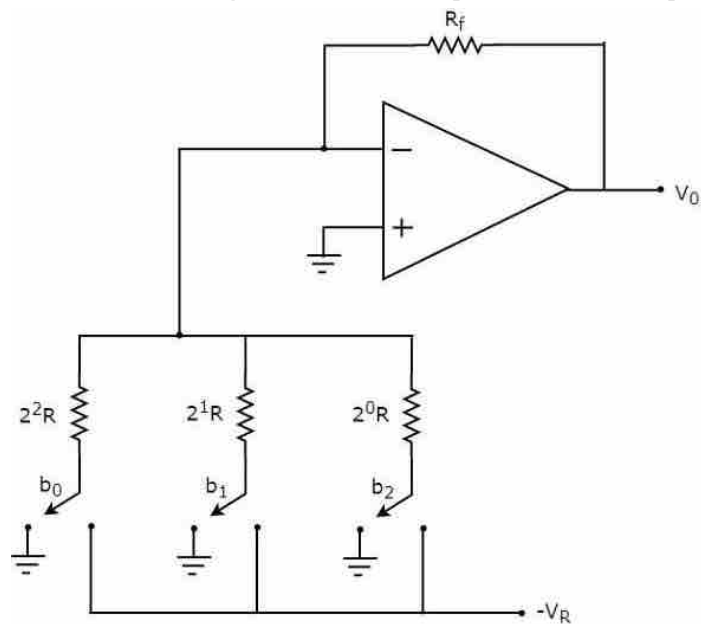
◆ Analog to Digital Conversion Stages



Quantization & Coding



◆ Digital to Analog Converter (DAC or D/A)



https://www.tutorialspoint.com/linear_integrated_circuits_applications/linear_integrated_circuits_applications_digital_to_analog_converters.htm

◆ Digital to Analog Converter (DAC or D/A)

The nodal equation at the inverting input terminal's node is:

$$\frac{0 + V_R b_2}{2^0 R} + \frac{0 + V_R b_1}{2^1 R} + \frac{0 + V_R b_0}{2^2 R} + \frac{0 - V_0}{R_f} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{R_f} = \frac{V_R b_2}{2^0 R} + \frac{V_R b_1}{2^1 R} + \frac{V_R b_0}{2^2 R}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{V_R R_f}{R} \left\{ \frac{b_2}{2^0} + \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_0}{2^2} \right\}$$

https://www.tutorialspoint.com/linear_integrated_circuits_applications/linear_integrated_circuits_applications_digital_to_analog_converters.htm

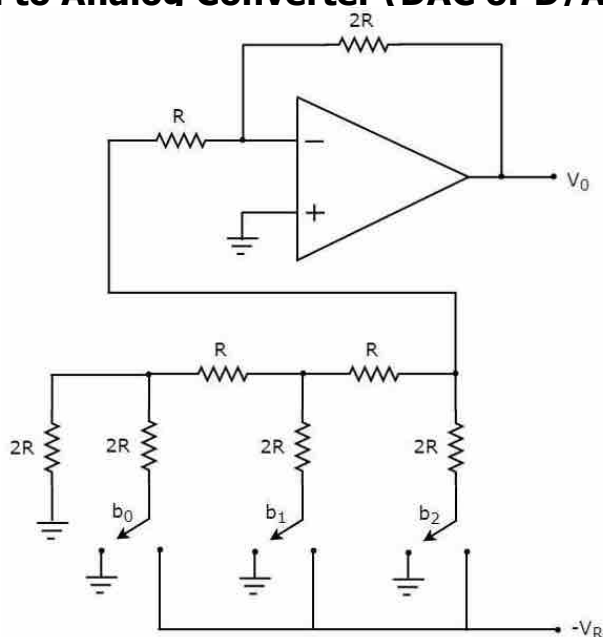
◆ Digital to Analog Converter (DAC or D/A)

Substituting, $R = 2R_f$ in above equation.

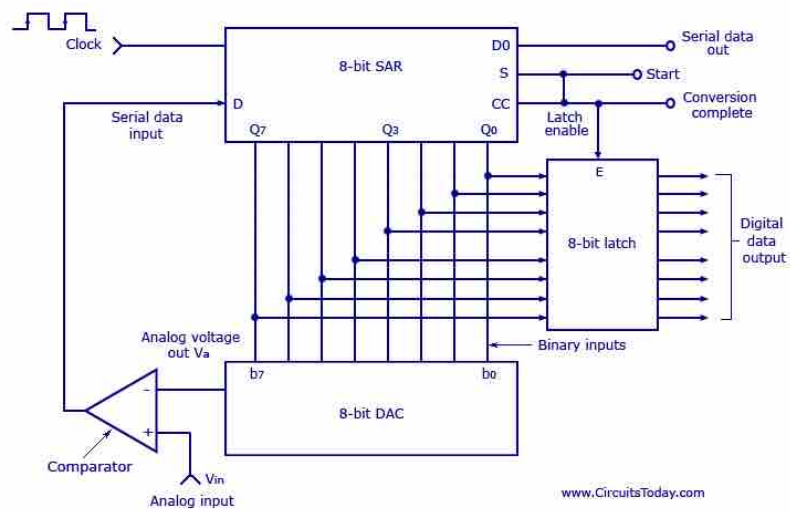
$$\Rightarrow V_0 = \frac{V_R R_f}{2R_f} \left\{ \frac{b_2}{2^0} + \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_0}{2^2} \right\}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{V_R}{2} \left\{ \frac{b_2}{2^0} + \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_0}{2^2} \right\}$$

◆ Digital to Analog Converter (DAC or D/A)

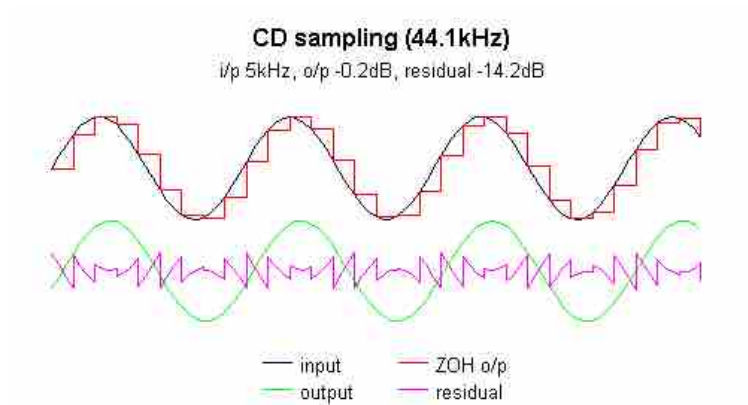


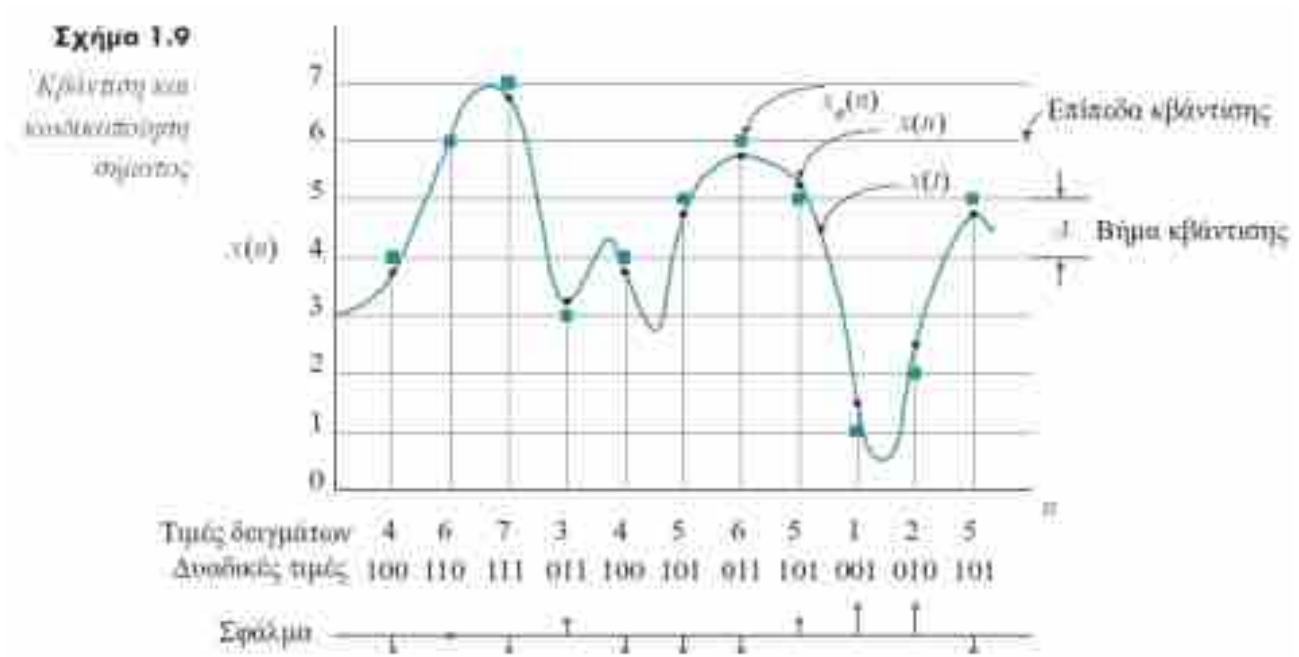
◆ Analog to Digital Converter (ADC or A/D)



Successive Approximation Type Analog to Digital Converter

Quantization





Quantization & Coding

Quantization introduces an error which cannot be removed !

The level of the error is a function of the number of bits ADC, being approx. equal to $\frac{1}{2}$ of an LSB.

Example: A 12-bit ADC with an input voltage range of $\pm 10V$ will have a LSB of $20/2^{12}V$, of 4.9mV and a quantization error of 2.45mV

For an ADC with b bits the number of quantization levels is 2^b , and the interval between the levels, that is the quantization step size q is

$$q = \frac{V_{fs}}{2^b - 1} \approx \frac{V_{fs}}{2^b}$$

where V_{fs} is the full-scale range of the ADC with bipolar signal inputs.

Quantization & Coding

Maximum quantization error for rounding is $\pm q/2$

For a sine wave input of amplitude A , the quantization step size becomes

$$q = \frac{2A}{2^b}$$

The quantization error for each sample e is assumed to be **random** and **uniformly** distributed in the interval $\pm q/2$ with **zero mean**. Thus, the quantization noise power of variance is given by

$$\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$$

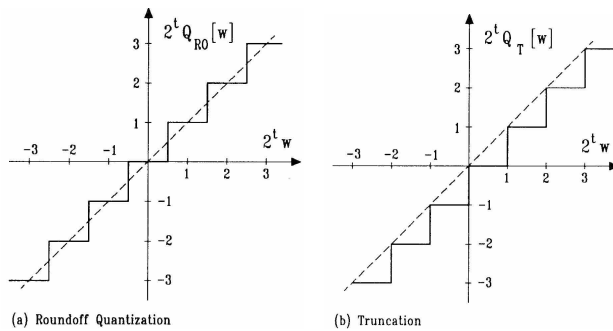
Quantization & Coding

For a sine wave input, the average signal power is $A^2/2$. The signal-to-quantization noise power ratio (SQNR), in decibels, is

$$\begin{aligned} SQNR &= 10 \log_{10} \left(\frac{\text{signal power}}{\text{noise power}} \right) = \\ &= 10 \log_{10} \left(\frac{A^2/2}{q^2/12} \right) = \\ &= 6.02b + 1.76 \quad \text{dB} \end{aligned}$$

that is, **SQNR increases by 6dB for each additional bit** in the wordlength.

QUANTIZATION ERRORS



- The noise due to quantization can be modeled as a uniformly distributed random process.

- q is the quantization level, i.e. the range of the ADC divided by 2^n , and n is the number of bits.

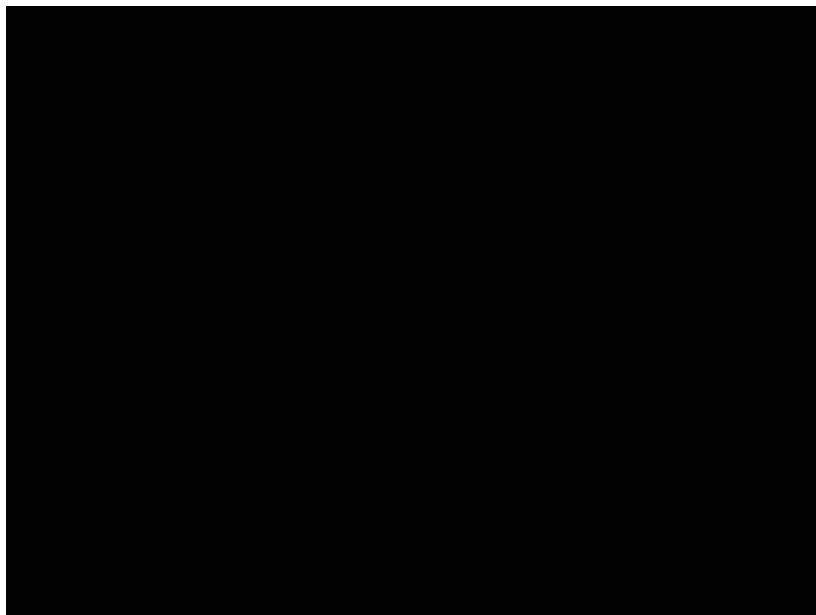
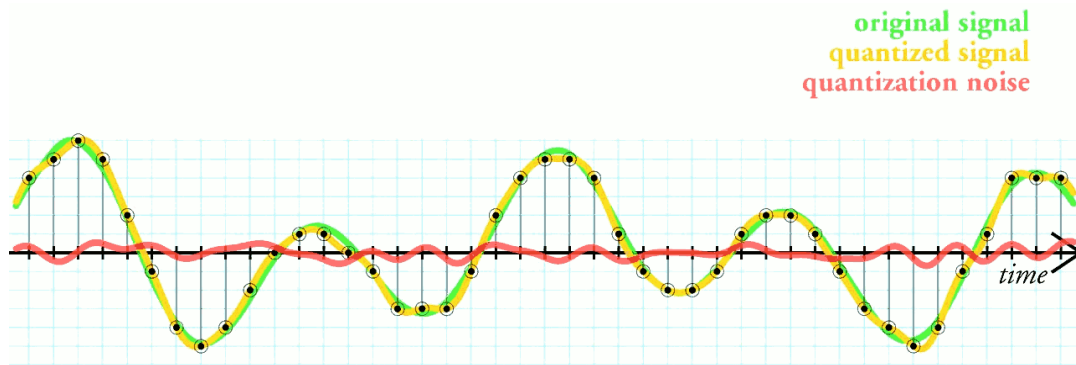
$$\text{Rounding: } \bar{e} = 0 \quad \sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$$

$$\text{Truncation: } \bar{e} = \frac{q}{2} \quad \sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$$

ΕΠΙΛΟΓΗ ADC & DAC

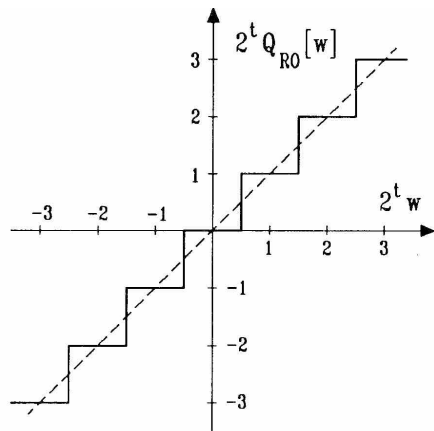
- Χρόνοι μετατροπής αμελητέοι σε σχέση με την περίοδο δειγματοληψίας.
- Το μήκος λέξης καθορίζει το σφάλμα κβάντισης (quantization – resolution).
8-bit συνεπάγεται σφάλμα 0.4% = $1/256$
10-bit συνεπάγεται σφάλμα 0.1%
16-bit συνεπάγεται σφάλμα 0.0015%
- Η ακρίβεια (resolution) του DAC είναι \geq της ακρίβειας του ADC.
- Η ακρίβεια του σήματος αναφοράς πρέπει να είναι ίση με αυτή του ADC και του DAC. Εάν η ακρίβεια του σήματος αναφοράς είναι υψηλότερη αυτής του ADC, το σφάλμα δεν θα γίνεται ποτέ μηδέν και θα εμφανίζονται limit cycles.

Quantization & Coding

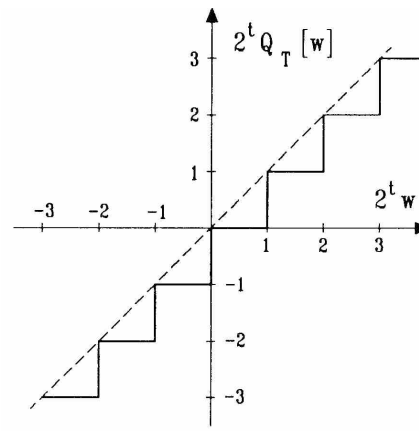


Dennis Freeman, MIT 6.003 Signals and Systems, Fall 2011
Lecture 22. Sampling and Quantization, <https://youtu.be/bJvv5SckGeA?t=759>

QUANTIZATION: Roundoff and Truncation **without** Saturation Arithmetic

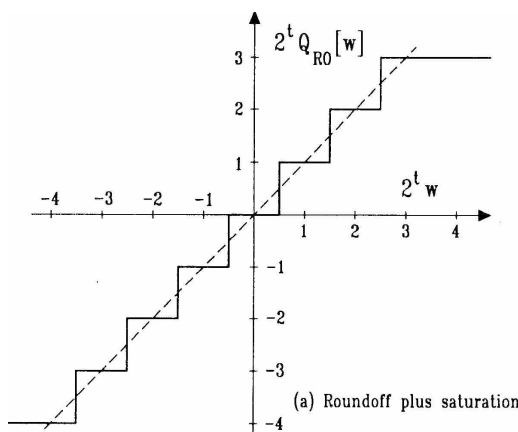


(a) Roundoff Quantization

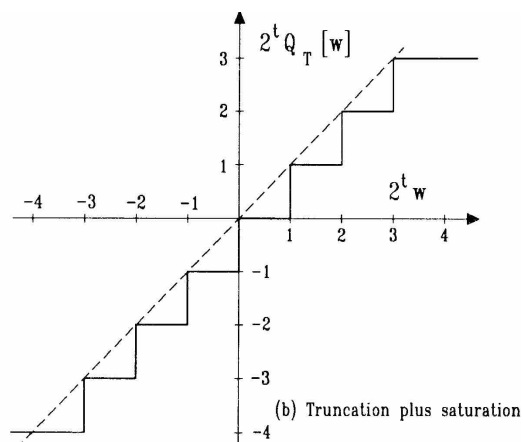


(b) Truncation

QUANTIZATION: Roundoff and Truncation **with** Saturation Arithmetic

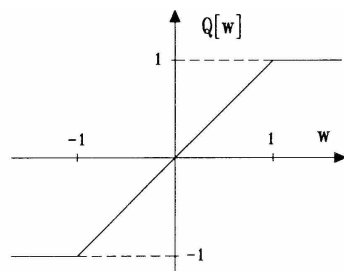


(a) Roundoff plus saturation

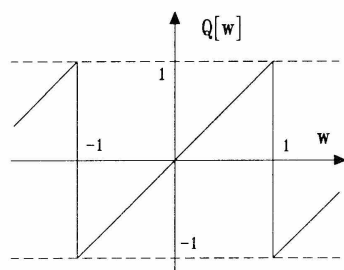


(b) Truncation plus saturation

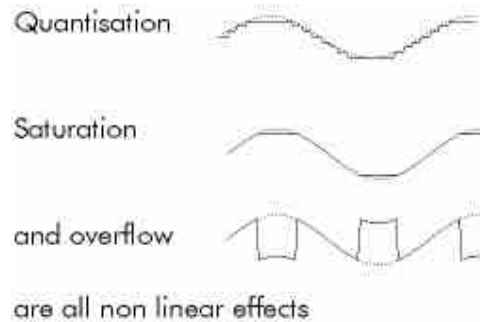
OVERFLOW



(a) Saturation arithmetic



(b) Overflow undetected



QUANTIZATION ERRORS

The **nonlinear quantization** operation will sometimes generate (nontrivial) periodic solutions known as **overflow oscillations** and **limit cycles**.

- **Overflow oscillations** occur when the **saturation** arithmetic characteristic of the quantizer is invoked; otherwise any nontrivial periodic solution is referred to as **limit cycle**.
- **Overflow oscillations** influence the **MSB**, whereas **limit cycles** generally affect only **LSB** of the states. Thus if overflow occurs, it can cause much more severe **signal distortion**.

Floating point arithmetic usually has sufficient dynamic range to prevent the occurrence of overflow oscillations. In fact, the **prevention of overflow** is the main reason for using floating point arithmetic and not for improving small scale accuracy!

However, **limit cycles** can also exist in floating point implementations and their amplitude can be large.

FINITE WORDLENGTH EFFECTS

Difference Equations

- Consider the ideal 1st order difference equation: $y(n) = a x(n) + b y(n-1)$

In general, coefficients a , b cannot be represented exactly with finite precision arithmetic.

Even if a , b could be exactly represented, the state $y(n-1)$ can NEVER be exactly represented for all discrete time instants n (unless $b=0$).

To demonstrate this, suppose that a , b , $x(n)$ and the initial state $y(0)$ are all 8-bit fractions. Then, $y(1)$ will in general have a 16-bit fractional part, $y(2)$ will have a 24-bit fractional part, etc. Hence, given any available wordlength, there will be a value of n for which $y(n)$ cannot be exactly represented.

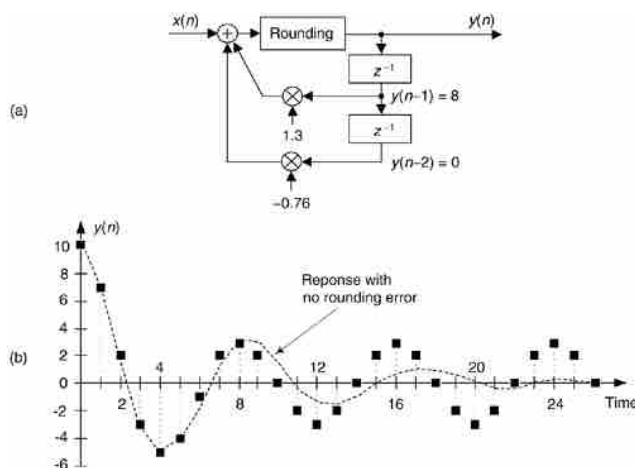
FINITE WORDLENGTH EFFECTS

Rounding or Roundoff can cause the filter output to oscillate forever, even when the filter input sequence is all zeros. This is the so-called **limit cycles** phenomenon.

Example: $y(n] = x(n) + 1.3y(n-1) - 0.76y(n-2)$.

Let's assume this filter rounds the adder's output to the nearest integer value. If the situation ever arises where $y(-2)=0$, $y(-1)=8$, and $x(0)$ and all successive $x(n)$ inputs are zero, the filter output goes into endless oscillation.

If this filter were to be used in an audio application, when the input signal went silent the listener could end up hearing an audio tone instead of silence.



ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΟΡΙΣΜΩΝ ΚΥΚΛΩΝ (LIMIT CYCLES)

Παράδειγμα: Έστω το 1° τζίν, φίλτρο $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+0.9z^{-1}}$

Για κρουστική είσοδο 10 m χρονική στιγμή $n=1$
και αρχική συνθήκη $y(0)=0$, έχουμε:

$$y(n) = -0.9y(n-1) + x(n)$$

Η φόρμη κατάστασης για τζίνος δείξω άπειρης ακρίβειας είναι:

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(1-z)}{z+0.9} = 0$$

Στον επόμενο πίνακα δίνεται η είσοδος μαζί από στραγγιλέμα ή αποκωδ. για διαφορετικές χρονικές στιγμές n :

n	$x(n)$	$y(n)$	στραγγ. $y(n)$	$y(n)$	αποκωδ. $y(n)$
0	0	0	0	0	0
1	10	10	10	10	10
2	0	-9	-9	-9	-9
3	0	8.1	8	8.1	8
4	0	-7.2	-7	-7.2	-8
5	0	6.3	6	7.2	7
6	0	-5.4	-5	-5.3	-7
7	0	4.5	5	6.3	6
8	0	-4.5	-5	-5.4	-6
			⋮	5.4	5

Παρατηρείς ότι η στρογγυλευμένη τιμή ταλαντώνεται
 γύρω στον αριανό εικόνο ± 5 .

Η τιμή υπό κροκοπή
 συγκρίνει στο σωστό
 αποτέλεσμα που είναι
 μηδέν.

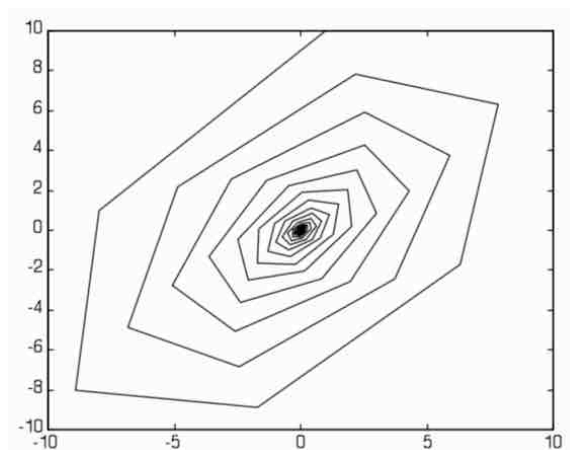
-4.5	-5
4.5	4
-3.6	-4
3.6	3
-2.7	-3
2.7	2
-1.8	-2
1.8	1
-0.9	-1
0.9	0
0	0
0	0
⋮	⋮

FINITE WORDLENGTH EFFECTS

- Consider infinite precision computations for

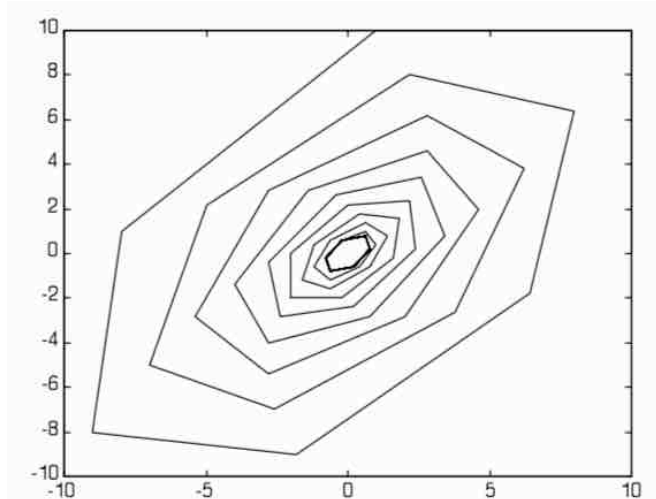
$$y_k = x_k + y_{k-1} - 0.9y_{k-2} \quad x_0 = 10$$

$$x_k = 0; k \neq 0$$



FINITE WORDLENGTH EFFECTS

- Now the same operation with **integer precision**



FINITE WORDLENGTH EFFECTS

- Notice that with **infinite precision** the response converges to the origin.
- With **finite precision** the response does not converge to the origin but assumes cyclically a set of values – the **Limit Cycle**.
- **Limit Cycles** are due to feedback, thus they appear in IIR filters and not in FIR filters without feedback.

FINITE WORDLENGTH ERRORS

ADC and Multiplication Errors

- **Parallel** realization has a **lower multiplication noise amplification** than **direct** realization.

Coefficient Errors

- **Parallel** and **cascade** realizations are **less sensitive** than **direct** realization.
- As a general rule, it is best **NOT** to use the direct realization for finite wordlength.

FINITE WORDLENGTH ERRORS

Other Issues

- Wordlength and sampling rate are interdependent and the selection of a max sampling interval and a min wordlength is an iterative process.
- Cost is directly related to the wordlength and sampling rate.

ΠΗΓΕΣ

- [MIT OpenCourseWare](#), Lecture 12, Filtering Instructor: Alan V. Oppenheim View the complete course: <http://ocw.mit.edu/RES-6.007S11>
- Sanjit K. Mitra, Digital Signal Processing – A Computer-Based Approach, McGraw Hill, 2001
- ...