2023 - 2024

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

1η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1.1 Στάσιμη (WSS) στοχαστική διαδικασία $X(t)$ έχει μηδενική αναμενόμενη τιμή και αυτοσυνδιασπορά $\alpha e^{-b|\tau|}$, όπου α, b σταθερές και $\alpha = 2+(d_1 d_0) \bmod 7$, $b = 1+(d_1 d_0) \bmod 5$, $d_1 d_0$ τα δύο τελευταία ψηφία του ΑΜ σας.
Να υπολογίσετε (i) την διασπορά, (ii) την φασματική πυκνότητα ισχύος, (iii) την τιμή της φασματικής πυκνότητας ισχύος για $\Omega=0$ και (iv) την μέση ισχύ.

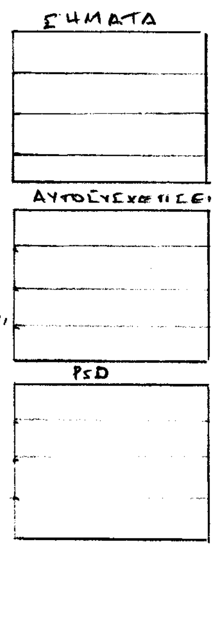
ΑΣΚΗΣΗ 1.2 Δίνεται η τυχαία (στοχαστική) διαδικασία $X(t) = \alpha + b \sin(\Omega_0 t + \Theta)$, όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή $[-\pi, \pi]$.

(i) Είναι η $X(t)$ στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS);

(ii) Ποια η αναμενόμενη τιμή της εξόδου ενός ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $e^{-\alpha t} u(t)$, όταν στην είσοδο αυτού εφαρμοστεί η $X(t)$;

Σημείωση: Οι τιμές των α, b είναι ίσες με αυτές της άσκησης 1.1.

ΑΣΚΗΣΗ 1.3 Στα έγγραφα του eClass θα βρείτε το αρχείο 'Realisations.zip' το οποίο περιέχει 4 csv αρχεία. Κάθε αρχείο αποτελεί μία πραγμάτωση καθεμιάς από 4 στάσιμες και εργοδικές τυχαίες διαδικασίες. Με χρήση Matlab / Octave / Python διαβάστε τα 4 σήματα.



(i) Σχεδιάστε τα σήματα το ένα μετά το άλλο, όπως δείχνεται στο σχήμα δεξιά. [π.χ. subplot(4,1,x);]. Σχολιάστε αν μοιάζουν (σχετίζονται) οπτικά.

(ii) Υπολογίστε την μέση τιμή κάθε σήματος.

(iii) Υπολογίστε και σχεδιάστε την αυτοσυσχέτιση κάθε σήματος. Σχολιάστε τα αποτελέσματα. Πόσο κοντά είναι σ' αυτά που "μαντέψατε" στο ερώτημα (i);
[Προσοχή: Το πλήθος των σημείων της αυτοσυσχέτισης είναι $2N-1$, όπου N το πλήθος των σημείων κάθε σήματος].

(iv) Υπολογίστε και σχεδιάστε την φασματική πυκνότητα ισχύος (PSD) κάθε σήματος. Σχολιάστε.

ΑΣΚΗΣΗ 1.4 Να δώσετε μία άσκηση της αρεσκείας σας που να αναφέρεται σε ένα ή περισσότερα από τα αντικείμενα που καλύψαμε: στασιμότητα, εργοδικότητα, φάσμα ισχύος, επεξεργασία τυχ. σημάτων. [Η άσκηση και η λύση που θα προτείνετε να είναι πλήρης και να μην έχει προκύψει από απλή παραλλαγή γνωστής άσκησης].

- Προθεσμία: ΔΕΥΤΕΡΑ 30.10.2023 @ 24:00
- Η υποβολή να γίνει στον αντίστοιχο χώρο "Εργασιών" του eClass.

22.10.2023

ΑΣΚΗΣΗ Το σήμα $X(t)$ είναι WSS και έχει μέση τιμή μηδέν και αυτοσυνδιασπορά

$$\gamma_{xx}(\tau) = \alpha e^{-b|\tau|}, \quad \text{όπου } \alpha, b \text{ σταθερές.}$$

Να υπολογιστούν (α) η διασπορά, (β) η φασματική πυκνότητα ισχύος, (γ) η τιμή της φασματικής πυκνότητας ισχύος για $\Omega=0$ και (δ) η μέση ισχύς του σήματος.

ΛΥΣΗ α. Γνωρίζουμε ότι $\sigma_x^2 = \gamma_{xx}(0) = \phi_{xx}(0) - |m_x|^2$ (1)

Επομένως η διασπορά του σήματος ισούται με

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}(0) = \alpha e^{-b|0|} = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

β. Από τη σχέση $\gamma_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) - |m_x|^2$ και δεδομένου ότι $m_x = 0$ υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση του σήματος ως

$$\phi_{xx}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) = \alpha e^{-b|\tau|} \qquad (2)$$

Επομένως, η φασματική πυκνότητα ισχύος ισούται με τον μετασχηματισμό Fourier της $\phi_{xx}(\tau)$:

$$S_{xx}(\Omega) = F\{\phi_{xx}(\tau)\} =$$
$$= F\{\alpha e^{-b|\tau|}\} = \alpha \cdot F\{e^{-b|\tau|}\} = \alpha \cdot \frac{2b}{b^2+\Omega^2} \qquad (3)$$

γ. Για $\Omega=0$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$S_{xx}(0) = \frac{2\alpha b}{b^2+0^2} = \frac{2\alpha}{b} \qquad (4)$$

δ. Η μέση ισχύς του σήματος ισούται με:

$$P_x = \phi_{xx}(0) = \gamma_{xx}(0) = \sigma_x^2 = \alpha \qquad (5)$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2 Δίνεται η τυχαία (στοχαστική) διαδικασία $X(t) = \alpha + b\sin(\Omega_0 t + \Theta)$, όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή $[-\pi, \pi]$.

(i) Είναι η $X(t)$ στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS);

(ii) Ποια η αναμενόμενη τιμή της εξόδου ενός ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $e^{-\alpha t}u(t)$, όταν στην είσοδο αυτού εφαρμόζεται η $X(t)$;

Σημείωση: Οι τιμές των α, b είναι ίσες με αυτές της άσκησης 1.1.

ΛΥΣΗ (i) Για να είναι στάσιμη θα πρέπει να έχει σταθερή μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση εξαρτώμενη από την διαφορά των χρόνων $\tau = t_1 - t_2 = t+\tau, t$.

$$m_x(t) = E(X(t)) = E(\alpha + b\sin(\Omega_0 t + \Theta)) = E(\alpha) + b\,\underbrace{E(\sin(\Omega_0 t + \Theta))}_{0} =$$

$$= \alpha + b \cdot 0 = \alpha = \text{σταθ.}$$

(έχει ήδη αποδειχθεί)

$$\phi_{xx}(t+\tau, t) = E(X(t+\tau)X^*(t)) = E([\alpha + b\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta)][\alpha + b\sin(\Omega_0 t + \Theta)]) =$$

$$= E(\alpha^2 + \alpha b\sin(\Omega_0 t + \Theta) + \alpha b\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta) + b^2\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta)\sin(\Omega_0 t + \Theta)) =$$

$$= E(\alpha^2) + \alpha b\,\underbrace{E(\sin(\Omega_0 t + \Theta))}_{0} + \alpha b\,\underbrace{E(\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta))}_{0} + b^2 E(\sin(\Omega_0(t+\tau)+\Theta)\sin(\Omega_0 t + \Theta)) =$$

$$= \alpha^2 + \alpha b 0 + \alpha b 0 + \frac{b^2}{2}E(\cos(\Omega_0\tau) - \cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\Theta)) =$$

$$= \alpha^2 + 0 + 0 + \frac{b^2}{2}\underbrace{E(\cos(\Omega_0\tau))}_{\substack{\cos(\Omega_0\tau) \\ (\text{ανεξάρτητο της τ.μ. } \Theta)}} - \frac{b^2}{2}\underbrace{E(\cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\Theta))}_{0} =$$

$$= \underbrace{\alpha^2}_{\text{σταθ.}} \quad \underbrace{\frac{b^2}{2}\cos(\Omega_0\tau)}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{της διαφ. χρόνων } \tau}}$$

Άρα $\phi_{xx}(t+\tau) = \phi_{xx}(\tau)$ δηλαδή συνάρτηση μόνον της διαφοράς των χρόνων τ.

Συνεπώς η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια.

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$

(ii) $m_Y(t) = E(Y(t)) = m_X(t)\ H(0)$ όπου $H(0)$ η απόκριση συχνότητας για $\Omega = 0$

Αλλά

$$m_X(t) = E(X(t)) = E\left(\alpha + \beta \sin(\Omega t + \theta)\right) = E(\alpha) + \beta E\left(\sin(\Omega t + \theta)\right) =$$

$$= \alpha + \beta \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega t + \theta)\ p(\theta)\ d\theta = \left\langle p(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{για } -\pi \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \right\rangle$$

$$= \alpha + \beta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega t + \theta)\ d\theta =$$

$$= \alpha + \beta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega t + \theta)\ d(\Omega t + \theta) =$$

$$= \alpha + \beta \frac{1}{2\pi} \left[-\cos(\Omega t + \theta) \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \alpha - \beta \frac{1}{2\pi} \left[\cos(\Omega t + \pi) - \cos(\Omega t - \pi) \right] =$$

$$= \alpha - \beta \frac{1}{2\pi} \left[\cos(\pi + \Omega t) - \cos(\pi - \Omega t) \right] =$$

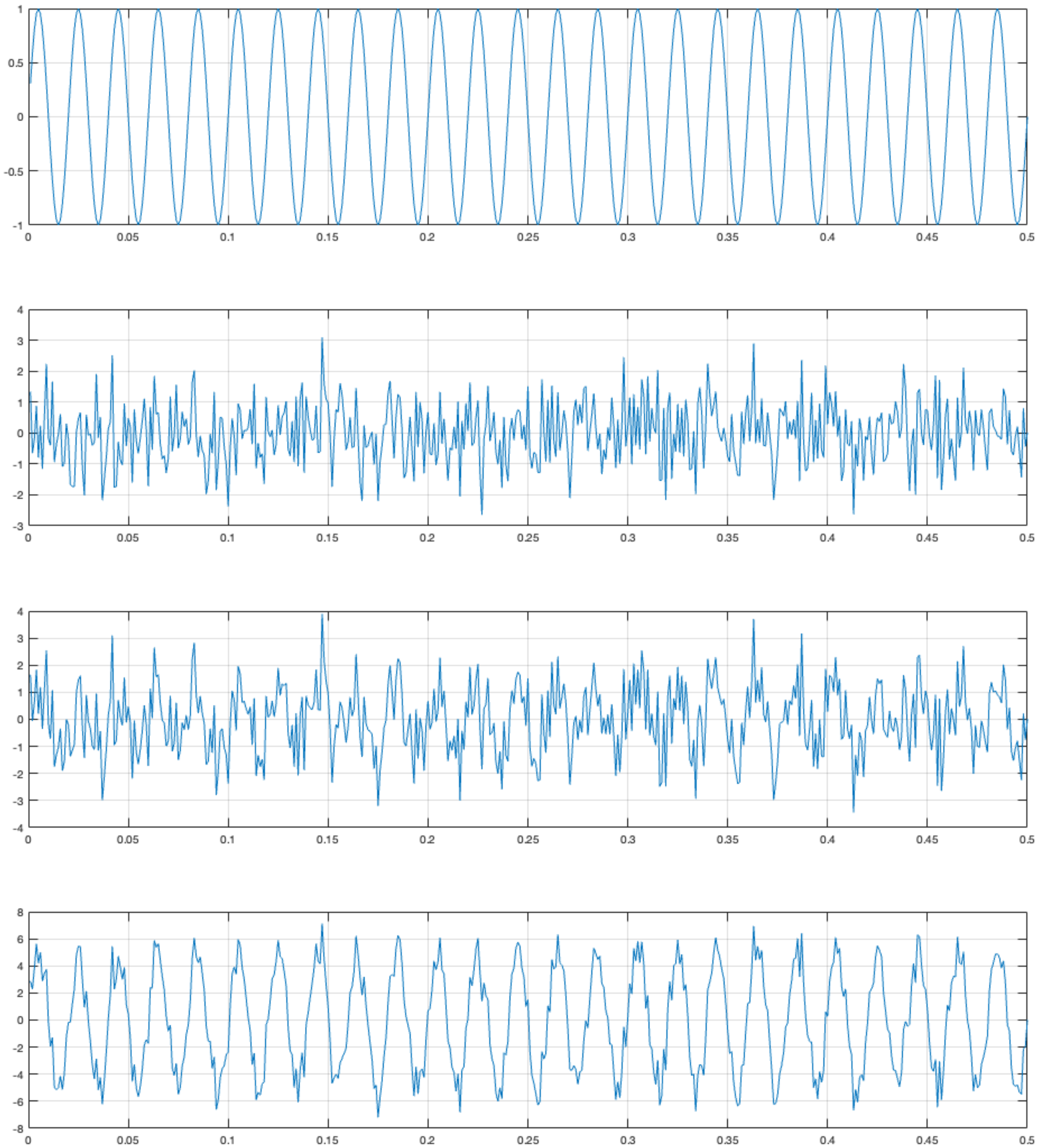
$$= \alpha - \beta \frac{1}{2\pi} \left[\cancel{\cos(\Omega t)} - \cancel{\cos(\Omega t)} \right] =$$

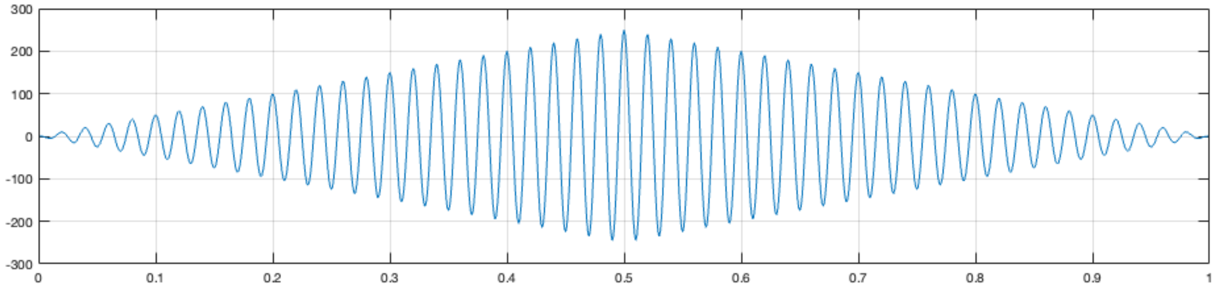
$$= \alpha$$

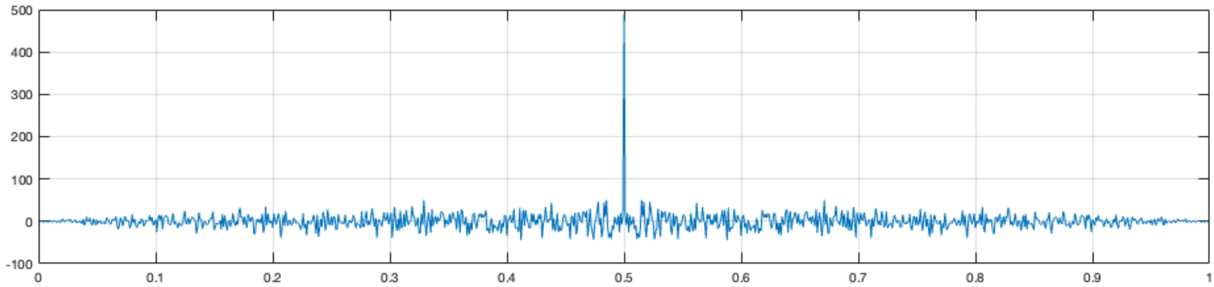
Επίσης $h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{F} H(\Omega) = \dfrac{1}{\alpha + j\Omega}$ οπότε $H(0) = \dfrac{1}{\alpha + j0} = \dfrac{1}{\alpha}$

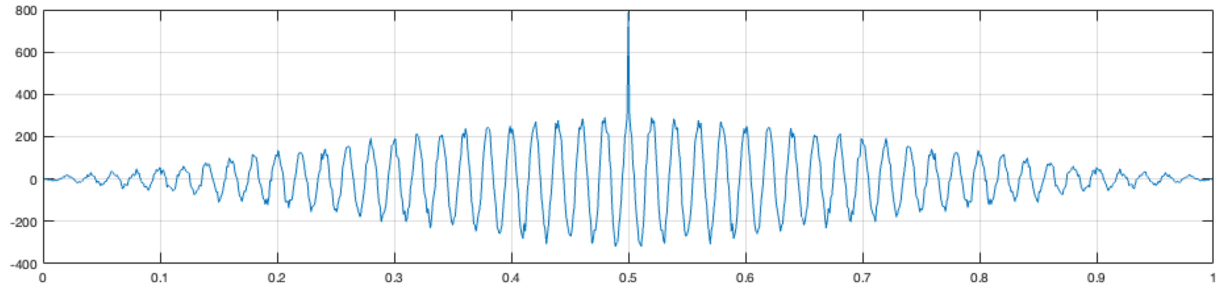
Τελικά $m_Y(t) = m_X(t)\ H(0) = \alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} = 1$

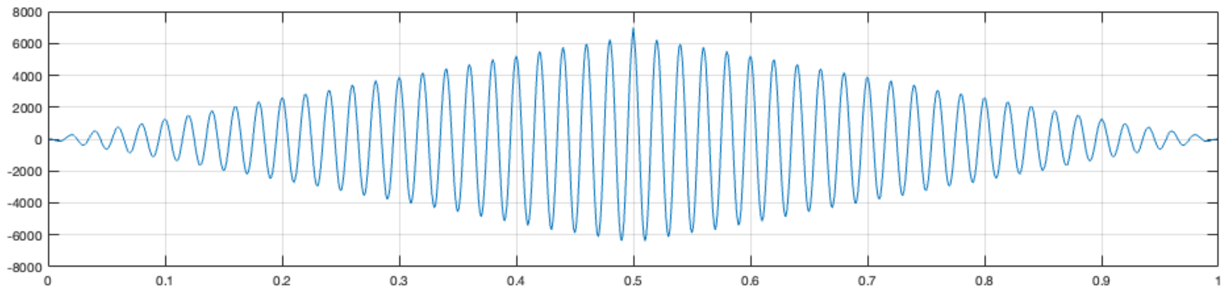
ΑΣΚΗΣΗ 1.3

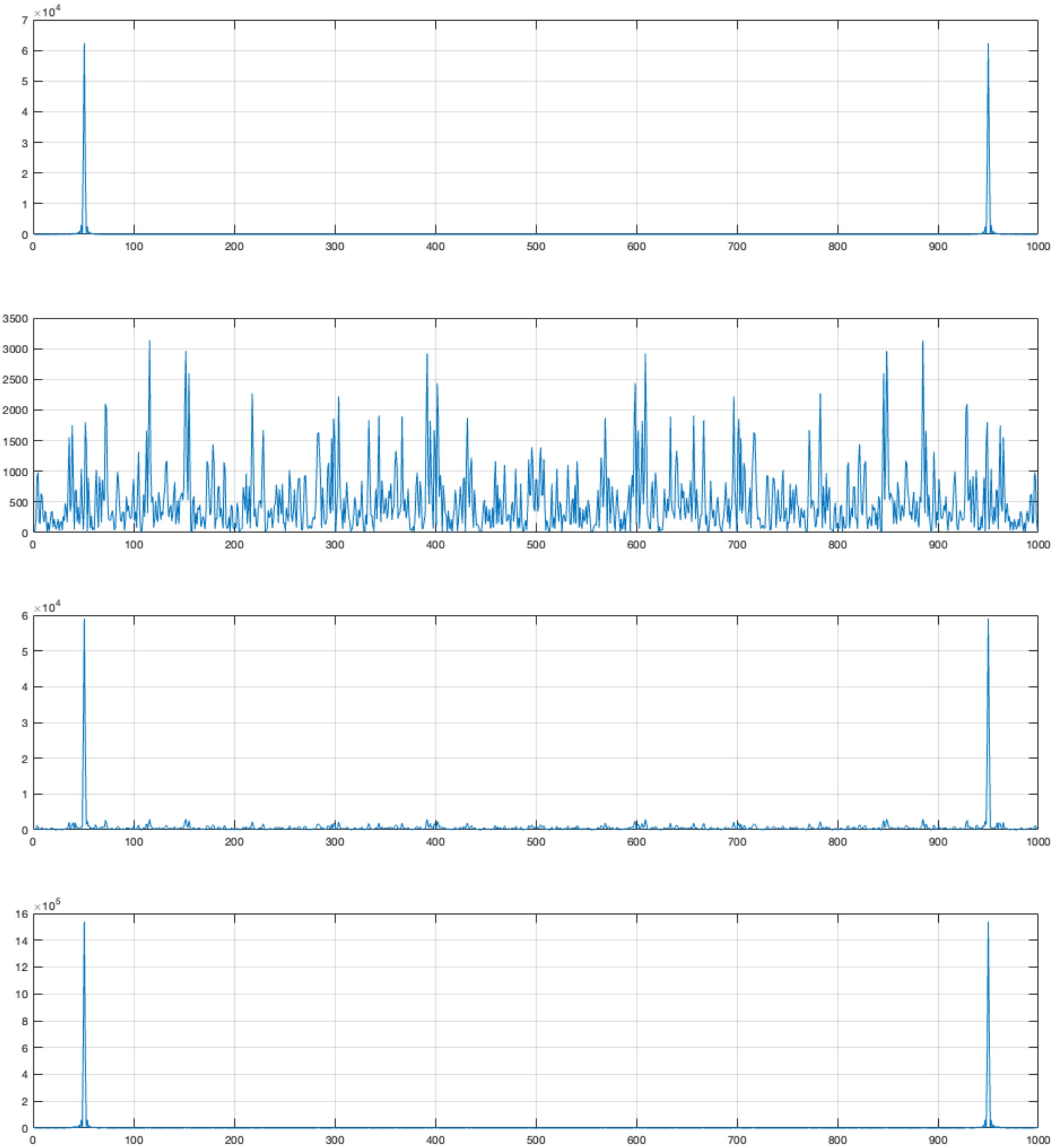

1
0.5
0
-0.5
-1
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5


300
200
100
0
-100
-200
-300
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


500
400
300
200
100
0
-100
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


800
600
400
200
0
-200
-400
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


8000
6000
4000
2000
0
-2000
-4000
-6000
-8000
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


×10^4
0 1 2 3 4 5 6 7
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
0 500 1000 1500 2000 2500 3000 3500
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
×10^4
0 1 2 3 4 5 6
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
×10^5
0 2 4 6 8 10 12 14 16
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

```
close all
clear all

% Read data (realisations) from the csv files

x  = csvread( 'realisation1.csv' )
w  = csvread( 'realisation2.csv' )
y1 = csvread( 'realisation3.csv' )
y5 = csvread( 'realisation4.csv' )

t=1:1:length(x);

% Plot the signals (realisations)
figure;
subplot(4,1,1); plot(t, x); grid on;
subplot(4,1,2); plot(t, w); grid on;
subplot(4,1,3); plot(t, y1); grid on;
subplot(4,1,4); plot(t, y5); grid on;

% Calculate and display the mean value of each signal
mx = mean(x)
mw = mean(w)
my1 = mean(y1)
my5 = mean(y5)


% Calculate the autocorrelation functions of each signal (process)
rx = xcorr(x);
rw = xcorr(w);
ry1 = xcorr(y1);
ry5 = xcorr(y5);


% Time is doubled due to autocorrelation
tt=1:1:2*length(x)-1;;

% Plot the autocorrelation functions of each signal (realisation)
figure;
subplot(4,1,1); plot(tt, rx); grid on;
subplot(4,1,2); plot(tt, rw); grid on;
subplot(4,1,3); plot(tt, ry1); grid on;
subplot(4,1,4); plot(tt, ry5); grid on;

%%% Calculation of the PSD of each signal by computing the FFT of
the corresponding autocorrelations

Sx = fft(rx);
Sw = fft(rw);
Sy1 = fft(ry1);
Sy5 = fft(ry5);

% Plot the PSD
figure;
subplot(4,1,1); plot(tt, abs(Sx)); grid on;
subplot(4,1,2); plot(tt, abs(Sw)); grid on;
subplot(4,1,3); plot(tt, abs(Sy1)); grid on;
subplot(4,1,4); plot(tt, abs(Sy5)); grid on;
```