1. Βασικές Έννοιες - Προτάσεις Θεωρίας Πιθανοτήτων

Με σκοπό την καλύτερη μελέτη τους και ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους, τα διάφορα επιστημονικά μοντέλα ή πειράματα (ή γενικότερα τα φυσικά φαινόμενα) μπορεί να θεωρηθεί ότι εντάσσονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- τα προσδιοριστικά ή **αιτιοκρατικά** (*deterministic*) μοντέλα ή πειράματα (ή φαινόμενα), στα οποία οι γνωστές μεταβλητές (π.χ. αρχικές συνθήκες) αρκούν για την ακριβή πρόβλεψη των αποτελεσμάτων τους (βέβαια αποτελέσματα), και

- τα **στοχαστικά** (*stochastic, probabilistic*) μοντέλα ή πειράματα (ή φαινόμενα), στα οποία οι γνωστές μεταβλητές δεν είναι αρκετές για την ακριβή πρόβλεψη των αποτελεσμάτων τους. Τα στοχαστικά πειράματα λέγεται ότι κατά κάποιον τρόπο επηρεάζονται από τον παράγοντα «τύχη», ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ότι περιέχει όλες τις άγνωστες μεταβλητές ή παραμέτρους. Για το λόγο αυτό τα στοχαστικά πειράματα καλούνται και *πειράματα τύχης*.

Παραδείγματα αιτιοκρατικών φαινομένων ή πειραμάτων είναι:
- ο χρόνος εκλείψεων του ήλιου,
- ο τόκος που θα λάβουμε για καταθέσεις ύψους α με προκαθορισμένο επιτόκιο β.
κ.τ.λ.

Παραδείγματα στοχαστικών φαινομένων ή πειραμάτων είναι:
- το αποτέλεσμα της ρίψης ενός κέρματος ή ενός κύβου (ζαριού),
- η τιμή ενός αγαθού σε μία ορισμένη στιγμή στο μέλλον,
- ο χρόνος ζωής ενός ανθρώπου,
- οι 6 αριθμοί της επόμενης κλήρωσης του Lotto,
- το πλήθος των πελατών ή το ύψος των εισπράξεων ενός εμπορικού καταστήματος μία συγκεκριμένη ημέρα,
- ο τόκος που θα λάβουμε για καταθέσεις ύψους α με κυμαινόμενο επιτόκιο.
κ.τ.λ.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα αποτελέσματα των στοχαστικών πειραμάτων δεν είναι δυνατό να προβλεφθούν με ακρίβεια. Εάν όμως πραγματοποιήσουμε έναν μεγάλο αριθμό από όμοια στοχαστικά πειράματα (κάτω πάντα από τις ίδιες συνθήκες) τότε, σύμφωνα με τον εμπειρικό νόμο της «στατιστικής ισορροπίας» είναι δυνατή η μέτρηση της συχνότητας εμφάνισης ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος. Για παράδειγμα, εάν επαναλάβουμε το πείραμα της ρίψης ενός (αμερόληπτου) κέρματος πάρα πολλές φορές τότε αναμένουμε ότι (περίπου) τις μισές φορές θα έρθει Κ (κεφαλή) και τις μισές Γ (γράμματα). Σε αυτή την περίπτωση συνήθως λέμε ότι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός κέρματος θα είναι Κ με «πιθανότητα» 50% και Γ με «πιθανότητα» 50%. Επομένως σε κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος προσδίδουμε μία «πιθανότητα», δηλαδή ένα «μέτρο» της συχνότητας εμφάνισής του. Η «πιθανότητα» p αυτή ενός αποτελέσματος A έχει την έννοια ότι αν πραγματοποιήσουμε το πείραμα αρκετές φορές αναμένουμε ότι περίπου στο $p100\%$ των περιπτώσεων θα πραγματοποιηθεί το A. Αυτή η απλή παρατήρηση μας οδηγεί στην αναζήτηση μιας θεωρίας λογισμού των πιθανοτήτων μέσω της οποίας, προσδίδοντας πιθανότητες στα δυνατά αποτελέσματα, να γίνει ευκολότερη η κατανόηση και η μελέτη των στοχαστικών πειραμάτων.

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να γνωρίζουμε για τη μελέτη ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του. Σχετικά εισάγουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.1. *Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης θα καλείται* ***δειγματικός χώρος*** *ή δειγματοχώρος και θα συμβολίζεται με Ω. Τα μονοσύνολα του Ω, δηλαδή τα δυνατά* *αποτελέσματα του πειράματος, θα καλούνται* ***στοιχειώδη*** *ή* ***απλά ενδεχόμενα****. Επίσης κάθε ένωση απλών ενδεχομένων θα καλείται* ***σύνθετο ενδεχόμενο****. Γενικά,* ***ενδεχόμενο*** *A θα καλείται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω* ($A \subseteq \Omega$) (*κάθε σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων*).

Ολόκληρος ο δειγματικός χώρος μπορεί να θεωρηθεί και αυτός ως ένα ενδεχόμενο αφού $\Omega\subseteq\Omega$. Το Ω θα καλείται **βέβαιο** ενδεχόμενο. Επίσης το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι και αυτό ένα ενδεχόμενο ($\varnothing\subseteq\Omega$). Το $\varnothing$ θα καλείται κενό ή **αδύνατο** ενδεχόμενο.

Παραδείγματα: α. Ας θεωρήσουμε ως πείραμα τη ρίψη ενός κέρματος. Τα δυνατά αποτελέσματα είναι τα Κ, Γ και επομένως Ω={Κ,Γ}. Τα απλά ενδεχόμενα είναι τα {Κ}, {Γ} ενώ ως ενδεχόμενα μπορούν να θεωρηθούν όλα τα υποσύνολα του Ω: $\varnothing$, {Κ}, {Γ} και {Κ,Γ}=Ω.

β. Στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός ζαριού θα έχουμε Ω={1,2,3,4,5,6}. Απλά ενδεχόμενα είναι τα ={1},{2},{3},{4},{5},{6} ενώ σύνθετα ενδεχόμενα είναι π.χ. τα {1,3,5} (μονό αποτέλεσμα), {1,2} (αποτέλεσμα μικρότερο του 3), {1,2,3,5} κ.τ.λ.

γ. Αν το πείραμα σχετίζεται με τη μέτρηση του χρόνου μέχρι την πραγματοποίηση ενός τυχαίου συμβάντος (ή π.χ. την τιμή ενός αγαθού σε μία συγκεκριμένη στιγμή στο μέλλον) τότε μπορούμε να θεωρήσουμε $\Omega = [0,\infty)$. Για παράδειγμα, τα σύνολα $[0,1)$ (χρόνος πραγματοποίησης μικρότερος της μιας μονάδας), $(1,2)\cup(3,4)$ (χρόνος μεταξύ 1 και 2 ή 3 και 4 μονάδων χρόνου) είναι ενδεχόμενα του συγκεκριμένου δειγματικού χώρου.

δ. Αν ως πείραμα θεωρήσουμε τη ρίψη δύο κερμάτων, τότε Ω={ΚΚ,ΓΚ,ΚΓ,ΓΓ}. Τα απλά ενδεχόμενα είναι τα {ΚΚ}, {ΓΚ}, {ΚΓ}, {ΓΓ} ενώ γενικότερα ως ενδεχόμενα μπορούν να θεωρηθούν όλα τα υποσύνολα του Ω, π.χ. {ΚΚ, ΓΚ} (το δεύτερο νόμισμα Κ) ή {ΓΚ, ΚΓ} (διαφορετικά αποτελέσματα στα δύο κέρματα) κ.τ.λ.

ε. Έστω ότι μελετάμε το πλήθος των ρίψεων δύο ζαριών μέχρι να εμφανιστούν ταυτόχρονα δύο 6 (ενδείξεις 6 στο ένα ζάρι και 6 στο άλλο). Εδώ Ω={1,2,3,…} ενώ για παράδειγμα το σύνολο {1,2,3} (εμφάνιση 6,6 στις τρεις πρώτες ρίψεις) είναι ένα (σύνθετο) ενδεχόμενο.

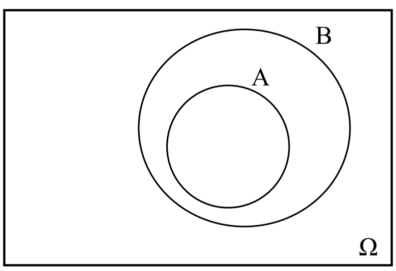
Παρατηρούμε ότι ένας δειγματικός χώρος μπορεί να είναι πεπερασμένος (παραδείγματα α,β,δ) άπειρα αριθμήσιμος (παράδειγμα ε) ή συνεχής (παράδειγμα γ).

Σχέσεις - Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων:

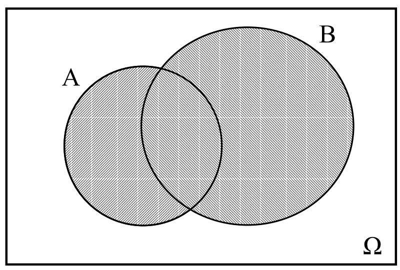
Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ($A, B \subseteq \Omega$).

1. *Διάταξη ενδεχομένων*. Το A συνεπάγεται το B όταν $A\subseteq B$ (όταν συμβαίνει το A συμβαίνει και το B)

2. *Ένωση δύο ενδεχομένων*. Η ένωση $A\cup B$ των ενδεχομένων A, B περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω που ανήκουν είτε στο A είτε στο B (το $A\cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί είτε το A είτε το B).



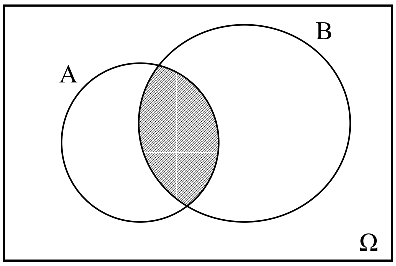
A⊆B



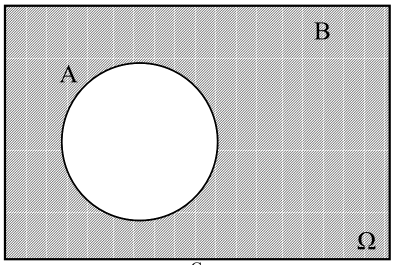
A∪B

3. *Τομή δύο ενδεχομένων*. Η τομή $A\cap B$ ή AB των ενδεχομένων A, B περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω που ανήκουν και στο A και στο B (το $A\cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί και το A και το B).

4. *Συμπλήρωμα ενδεχομένου*. Το συμπλήρωμα A^C ή A' του A ως προς Ω περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A (το A^C πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A).



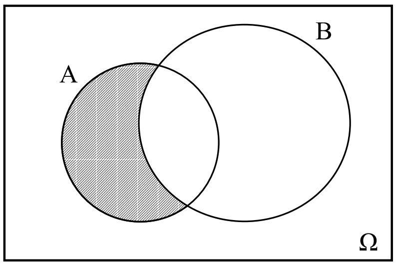
A∩B



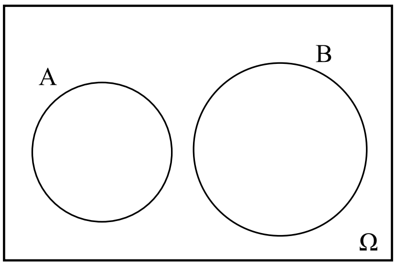
A^C

5. *Διαφορά ενδεχομένων*. Συμβολίζουμε με $A - B = A \cap B^C$ (συμβαίνει το A και όχι το B)

6. *Ξένα ή ασυμβίβαστα ενδεχόμενα*.Τα A, B θα καλούνται ξένα ή ασυμβίβαστα ενδεχόμενα αν $A \cap B = \varnothing$ (είναι δυνατό να συμβεί μόνο το A ή μόνο το B)



A\B



A∩B=∅

Σχηματικά:

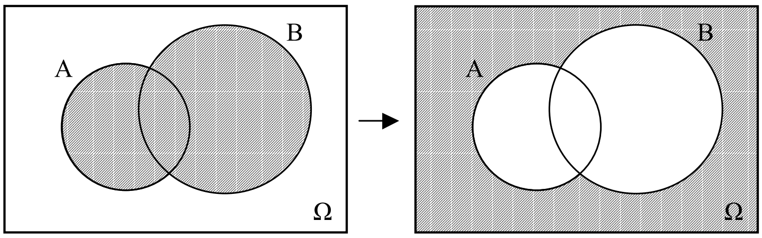
A* ή *B	***A* και *B***	**όχι *A***	***A* και όχι *B***
$A \cup B$	$A \cap B$ *ή* AB	A^C	$A - B$

Είναι φανερό ότι για τη πραγματοποίηση πράξεων μεταξύ των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου, είναι απαραίτητη η γνώση της στοιχειώδους θεωρίας συνόλων. Για το λόγο αυτό υπενθυμίζουμε μερικές γνωστές ιδιότητες των πράξεων της τομής και της ένωσης μεταξύ συνόλων. Έστω $A,B,\Gamma \subseteq \Omega$. Ισχύουν:

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	(αντιμεταθετική ιδιότητα)
$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$	$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$	(προσεταιριστική ιδιότητα)
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$	
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	(επιμεριστική ιδιότητα)
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	(τύποι De Morgan)

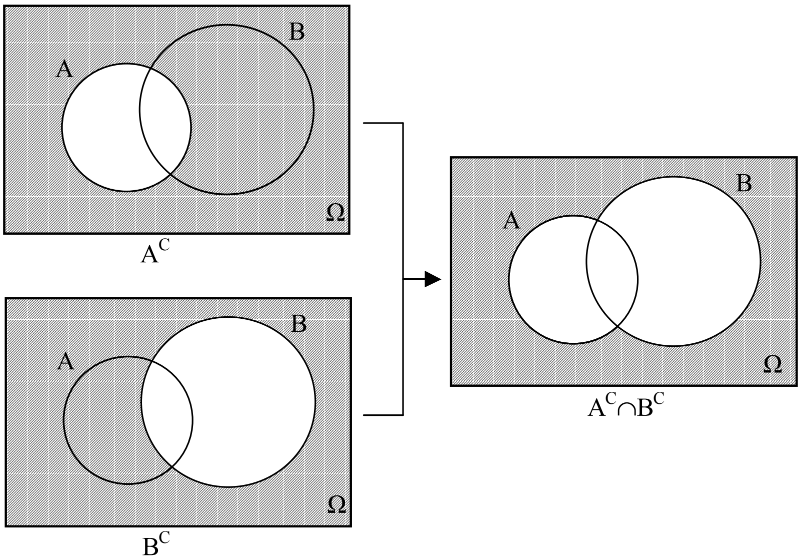
Οι παραπάνω ιδιότητες είναι εύκολο να αποδειχτούν είτε αυστηρά είτε μέσω ενός κατάλληλου διαγράμματος Venn. Π.χ. ο κανόνας De Morgan αποδεικνύεται μέσω ενός διαγράμματος Venn ως εξής:

Παρατηρούμε ότι



A∪B (A∪B)^C

ενώ επίσης



και άρα $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι τύποι De Morgan ισχύουν και για την ένωση ή την τομή περισσοτέρων συνόλων, δηλαδή,

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} A_i^C \quad \text{και} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i\in I} A_i^C$$

όπου I είναι ένα (αριθμήσιμο) σύνολο δεικτών. Επίσης στο εξής με $|A|$ θα συμβολίζουμε τον πλήθος των στοιχείων του συνόλου A.

Επανερχόμαστε τώρα στην αναζήτηση μιας θεωρίας λογισμού των πιθανοτήτων μέσω της οποίας θα είναι δυνατή η μελέτη στοχαστικών φαινομένων στον καλύτερο δυνατό βαθμό. Μετά την περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω που είναι σχετικός με το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σειρά έχει ο προσδιορισμός μιας «πιθανότητας» για κάθε ενδεχόμενο του Ω. Φυσικά, ο προσδιορισμός αυτός πρέπει να γίνει με τρόπο ώστε να αποφευχθούν ενδεχόμενες αντιφάσεις αλλά και να είναι λειτουργικός. Μία τέτοια προσπάθεια για την ανάπτυξη μιας θεωρίας πιθανοτήτων έγινε από τον Von Mises ο οποίος όρισε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ως την οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισης του A. Ειδικότερα, αν πραγματοποιήσουμε το ίδιο πείραμα n φορές και με $f_n(A)$ συμβολίσουμε τον αριθμό των εμφανίσεων του ενδεχομένου A στα n πειράματα τότε ο Von Mises όρισε ως «πιθανότητα» του A το όριο

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(A)}{n}$$

Ο παραπάνω ορισμός της πιθανότητας του A ως οριακής σχετικής συχνότητας εμφάνισης του A βασίζεται στον εμπειρικό νόμο της στατιστικής ισορροπίας (για αυτό καλείται και «*στατιστικός ορισμός της πιθανότητας*»). Για παράδειγμα, σύμφωνα με το συγκεκριμένο ορισμό, η πιθανότητα $P(\mathrm{K})=P(\{\mathrm{K}\})$ του ενδεχομένου $A=\{\mathrm{K}\}$ (εμφάνιση Κ) σε μία ρίψη ενός νομίσματος θα είναι ίση με το ποσοστό εμφάνισης του Κ σε μία ακολουθία πραγματοποιήσεων του ίδιου πειράματος (επαναλαμβανόμενες ρίψεις του νομίσματος). Ειδικότερα, αν εκτελέσουμε 1000 πειράματα και σημειώσουμε 523 φορές «Κ» τότε $P(\text{Κ}) \approx 0.523 = 52.3\%$, αν εκτελέσουμε 10000 πειράματα και σημειώσουμε 5042 φορές «Κ» τότε $P(\text{Κ}) \approx 0.5042 = 50.42\%$, κ.ο.κ. σε θεωρητικά «άπειρο» αριθμό πειραμάτων αναμένουμε $P(\text{Κ})=0.5$. Δυστυχώς όμως, γίνεται εύκολα φανερό ότι ο παραπάνω ορισμός δεν είναι σε θέση να μας βοηθήσει ικανοποιητικά για τη μελέτη των στοχαστικών πειραμάτων. Π.χ. για τη μελέτη ενός στοχαστικού πειράματος θα πρέπει πρώτα να πραγματοποιήσουμε το συγκεκριμένο πείραμα πολλές φορές, πράγμα που είναι ασύμφορο ή αδύνατο.

Ο Laplace έδωσε έναν διαφορετικό ορισμό για την πιθανότητα ενός ενδεχομένου. Συγκεκριμένα, αν $|\Omega|$ είναι το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης και $|A|$ είναι το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου $A\subseteq\Omega$ (δηλαδή το πλήθος των «ευνοϊκών» περιπτώσεων για την πραγματοποίηση του A) τότε, σύμφωνα με τον Laplace,

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α}}{\text{Συνολικό πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

Προφανώς ο παραπάνω ορισμός προϋποθέτει ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα (και μάλιστα το καθένα έχει πιθανότητα εμφάνισης $1/|\Omega|$). Ο συγκεκριμένος ορισμός καλείται και «*κλασικός ορισμός της πιθανότητας*». Για παράδειγμα, αν ως πείραμα τύχης θεωρήσουμε τη ρίψη ενός κύβου, τότε $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ και επειδή τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{1\},\{2\},\ldots,\{6\}$ είναι ισοπίθανα (θεωρούμε ότι ο κύβος είναι αμερόληπτος) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα (κατά Laplace) εμφάνισης ενός ενδεχομένου $A\subseteq\Omega$. Π.χ. αν $A=\{1,3,5\}$ (μονό αποτέλεσμα) τότε

$$P(\{1,3,5\})=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Όμοια, έστω ότι κατά την ταυτόχρονη ρίψη τριών νομισμάτων επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να εμφανιστεί ακριβώς ένα Γ. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega=\{\text{ΚΚΚ,ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΚΓΓ,ΓΚΚ,ΓΚΓ,ΓΓΚ,ΓΓΓ}\}$$

ενώ $A=\{\textit{ακριβώς ένα }\text{Γ}\}=\{\text{ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΓΚΚ}\}\subseteq\Omega$ και άρα

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{3}{8}.$$

Όπως έγινε φανερό και από τα παραπάνω παραδείγματα, ο κατά Laplace (*κλασικός*) ορισμός της πιθανότητας, είναι χρήσιμος για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης ενός ενδεχομένου σε αρκετές περιπτώσεις. Δυστυχώς όμως μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμένος και μάλιστα περιέχει ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα. Αρα θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα πιο γενικό ορισμό της «πιθανότητας» ενός ενδεχομένου ο οποίος θα πρέπει να είναι συμβατός με τις δύο παραπάνω προσεγγίσεις (*κλασικό* και *στατιστικό* ορισμό της πιθανότητας). Κινούμενος προς αυτή την κατεύθυνση, ο Ρώσος μαθηματικός Kolmogorov προχώρησε το 1933 στην αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων συνδέοντάς τη με τη θεωρία μέτρου της μαθηματικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, αντίθετα με τις δύο προγενέστερες προσπάθειες, η θεμελίωση που πρότεινε ο Kolmogorov δεν πραγματοποιείται μέσω κάποιου τύπου υπολογισμού της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A. Αντί αυτού, ο Kolmogorov περιγράφει τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μία συνολοσυνάρτηση οριζόμενη για κάθε ενδεχόμενο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως «πιθανότητα» (γενικότερα «μέτρο»). Πιο συγκεκριμένα δίνεται ο επόμενος ορισμός ο οποίος και αποτελεί τη βάση για τη θεωρία που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια (καλείται και «αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας»).

Ορισμός 1.2. (**Αξιώματα Kolmogorov**). *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και E το σύνολο των δυνατών ενδεχομένων του. Μία συνολοσυνάρτηση P από το $E \to [0,\infty)$ η οποία απεικονίζει κάθε ενδεχόμενο A στο $P(A) \in [0,\infty)$ θα καλείται «πιθανότητα» αν ισχύουν*

1) $P(\Omega) = 1$.

2) *Εάν $A_1, A_2, \ldots$ είναι μία ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω ($A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$) τότε*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Αν το σύνολο Ω είναι πεπερασμένο τότε αρκεί η (2) να ισχύει για κάθε πεπερασμένη ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω. Το πρώτο αξίωμα στην ουσία υποδηλώνει ένα διαισθητικά αυτονόητο γεγονός, ότι η πιθανότητα εμφάνισης του βέβαιου ενδεχομένου Ω είναι 1 (ή 100%). Το δεύτερο αξίωμα, το οποίο αναφέρεται και ως αξίωμα της σ-προσθετικότητας, υποδηλώνει ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από ένα σύνολο ξένων ανά δύο ενδεχομένων, είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των επιμέρους ενδεχομένων. Η τριάδα (Ω, E, P) καλείται και χώρος πιθανότητας.

Παράδειγμα 1.1. Έστω και πάλι το απλό παράδειγμα της ρίψης ενός ζαριού. Αν θεωρήσουμε ότι το κάθε ένα από τα 6 δυνατά αποτελέσματα έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης p τότε από το πρώτο αξίωμα θα ισχύει ότι $P(\Omega)=P(\{1,2,3,4,5,6\})=1$ ενώ από το δεύτερο αξίωμα,

$$P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6\}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6}\{i\}\right) = \sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 6p$$

(τα ενδεχόμενα $\{1\},\{2\},\ldots,\{6\}$ είναι προφανώς ξένα ανά δύο) και άρα $p=1/6$. Η πιθανότητα τώρα εμφάνισης μονού αποτελέσματος θα είναι

$$P(\{1,3,5\}) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 3p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Παρόμοια, είναι εύκολο να αποδειχθεί γενικότερα ότι αν ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος και αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ προκύπτει ότι

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

και επομένως ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας (κατά Laplace) αποτελεί απλή συνέπεια των αξιωμάτων Kolmogorov[1] όταν περιοριστούμε σε έναν πεπερασμένο Ω με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα. Πράγματι, αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ και $P(\{\omega_i\}) = p$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε από το 1^o αξίωμα $P(\Omega) = 1$ ενώ από το 2^o,

$$P(\Omega) = P(\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_\nu\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \ldots + P(\{\omega_\nu\}) = \nu p$$

και επομένως,

$$\nu p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Επίσης, αν $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\} \subseteq \Omega$,

$$P(A) = P(\{a_1, \ldots, a_k\}) = P(\{a_1\}) + \ldots + P(\{a_k\}) = kp = \frac{k}{|\Omega|} = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}.$$

Επομένως αποδείξαμε την επόμενη πρόταση.

---

[1] όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, και ο ορισμός της πιθανότητας κατά Von Mises προκύπτει από τα αξιώματα Kolmogorov και μάλιστα από τον γνωστό ως νόμο των μεγάλων αριθμών.

Πρόταση 1.1. *Αν ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα τότε*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \text{ για κάθε ενδεχόμενο } A \subseteq \Omega.$$

Υπάρχουν φυσικά περιπτώσεις (οι οποίες αποτελούν και την πλειοψηφία των εφαρμογών) όπου τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου δεν είναι ισοπίθανα.

Άσκηση 1.1. Έστω ότι ένα ζάρι είναι φορτωμένο κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού $\{i+1\}$ είναι διπλάσια από την πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού $\{i\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Να βρείτε

i) τις πιθανότητες όλων των απλών ενδεχομένων του πειράματος.
ii) την πιθανότητα εμφάνισης άρτιου αποτελέσματος
iii) την πιθανότητα εμφάνισης περιττού αποτελέσματος
iv) την πιθανότητα εμφάνισης ενός πρώτου αριθμού (δηλαδή $\{1,2,3,5\}$).

Λύση. Ο δειγματικός χώρος είναι προφανώς ο $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Επίσης, σύμφωνα με την εκφώνηση, ισχύει ότι (για απλότητα γράφουμε $P(i)$ αντί του αυστηρότερου $P(\{i\})$)

$$P(2)=2P(1),\ P(3)=2P(2)=4P(1),\ P(4)=2P(3)=8P(1),\ P(5)=2P(4)=16P(1),\ P(6)=2P(5)=32P(1).$$

Επειδή όμως $P(\Omega)=1$, και

$$P(\Omega)=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = (1+2+4+8+16+32)P(1) = 63P(1)$$

Έπεται ότι $63P(1)=1$ και άρα $P(1)=1/63$. Επομένως,

i) Θα είναι

$$P(1)=1/63,\ P(2)=2/63,\ P(3)=4/63,\ P(4)=8/63,\ P(5)=16/63,\ P(6)=32/63.$$

ii) Ζητείται η $P(\{2,4,6\}) = P(2)+P(4)+P(6) = (2+8+32)/63 = 42/63$

iii) Ζητείται η $P(\{1,2,3\}) = P(1)+P(3)+P(5) = (1+4+16)/63 = 21/63$

iv) Ζητείται η $P(\{1,2,3,5\}) = P(1)+P(2)+P(3)+P(5) = (1+2+4+16)/63 = 23/63$.

Βασικές ιδιότητες των πιθανοτήτων.

Πρόταση 1.2. *Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε*

1) $P(A^C) = 1 - P(A)$
2) $0 \le P(A) \le 1$
3) $P(\varnothing)=0$
4) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$ (*ανισότητα Boole ή ιδιότητα υποπροσθετικότητας*)
7) $P(AB) \ge P(A) + P(B) - 1 = 1 - P(A^C) - P(B^C)$ (*ανισότητα Bonferroni*)
8) Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B) \le P(A)$. (*μονοτονία της πιθανότητας*)

Απόδειξη. 1) Ισχύει ότι $\Omega=A\cup A^C$ με $A\cap A^C=\varnothing$ (A, A^C: ξένα) και χρησιμοποιώντας τα δύο αξιώματα του Kolmogorov διαπιστώνουμε ότι $P(\Omega) = 1$ και

$$P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C).$$

Επομένως, $P(A)+P(A^C)=1 \Leftrightarrow P(A^C)=1-P(A)$.

2) Από το (1) ισχύει ότι $P(A)=1-P(A^C)$ και επειδή $P(A^C) \geq 0$, συνεπάγεται ότι $P(A) \leq 1$ (το γεγονός ότι $P(A) \geq 0$, $P(A^C) \geq 0$ προέρχεται από τον ορισμό 1.2).

3) Αν $A=\varnothing$ τότε από την (1) προκύπτει ότι $P(\Omega)=1-P(\varnothing)$ και άρα $P(\varnothing)=0$ ($\varnothing^C=\Omega$).

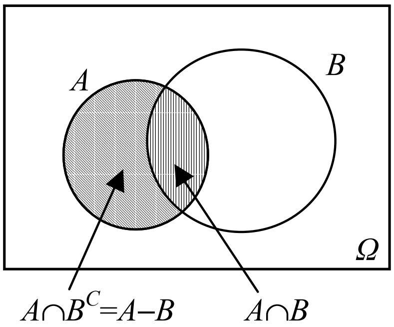
4) Ισχύει ότι

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^C) = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

όπου τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $A \cap B^C$ είναι ξένα διότι

$$(A \cap B) \cap (A \cap B^C) = A \cap (B \cap B^C) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Τα παραπάνω είναι εύκολο να δειχθούν άμεσα χρησιμοποιώντας και το διάγραμμα Venn:



Επομένως, από το 2ο αξίωμα,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) = P(A \cap B) + P(A - B)$$

απ'όπου συμπεραίνουμε την (4).

5) Ισχύει ότι

$$B \cup (A - B) = B \cup (A \cap B^C) = ((B \cup A) \cap (B \cup B^C)) = (B \cup A) \cap \Omega = A \cup B$$

όπου είναι εύκολο να δειχτεί ότι τα ενδεχόμενα B και $A-B$ είναι ξένα (βλ. και παραπάνω διάγραμμα Venn). Επομένως, από το 2ο αξίωμα,

$$P(A \cup B) = P(B \cup (A - B)) = P(B) + P(A - B)$$

και χρησιμοποιώντας το (4) προκύπτει τελικά ότι

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B).$$

Σημειώνεται ότι η συγκεκριμένη σχέση μπορεί ευκολότερα να αποδειχθεί όταν $|\Omega|<\infty$ παρατηρώντας ότι το άθροισμα $P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$ ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων του A συν το άθροισμα των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων του B. Άρα η πιθανότητα κάθε απλού ενδεχομένου που ανήκει και στο A και στο B μετράται δύο φορές στο $P(A)+P(B)$ (ενώ στο $P(A \cup B)$ μετρώνται μία φορά). Επομένως, η $P(A \cup B)$ είναι ίση με $P(A)+P(B)$ μείον την πιθανότητα $P(A \cap B)$ των σημείων που μετρήθηκαν δύο φορές. (Βλ. και διάγραμμα Venn)

6) Προκύπτει άμεσα από το (5) παρατηρώντας ότι $P(A \cap B) \geq 0$.

7) Προκύπτει άμεσα από το (5) παρατηρώντας ότι $P(A \cup B) \leq 1$.

8) Αν $B \subseteq A$ τότε από το γεγονός ότι $A \cap B = B$ και την (4) προκύπτει ότι

$$0 \leq P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$$

και άρα $P(B) \le P(A)$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι ιδιότητες (5), (6) και (7) μπορούν να γενικευτούν για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Για παράδειγμα, για τρία ενδεχόμενα αποδεικνύονται αντίστοιχα οι σχέσεις

$$P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap C),$$

$$P(A \bigcup B \bigcup C) \le P(A) + P(B) + P(C),$$

$$P(A \bigcap B \bigcap C) \ge 1 - P(A^C) - P(B^C) - P(C^C).$$

Γενικότερα, για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots$ ισχύουν οι ανισότητες

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{(Boole)}, \qquad P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ge 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c). \quad \text{(Bonferroni)}$$

(η ανισότητα Boole γίνεται ισότητα όταν τα ενδεχόμενα είναι ξένα) ενώ η πιθανότητα μιας ένωσης k ενδεχομένων είναι ίση με (***τύπος του Poincare ή κανόνας εγκλεισμού - αποκλεισμού***)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<l} P(A_i \cap A_j \cap A_l) - \ldots + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k).$$

Π.χ. για k=3 ο παραπάνω τύπος έχει τη μορφή

$$P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap C).$$

και για k=4,

$$\begin{aligned} P(A \bigcup B \bigcup C \bigcup D) = {} & P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ & - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(A \bigcap D) - P(B \bigcap C) - P(B \bigcap D) - P(C \bigcap D) \\ & + P(A \bigcap B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap D) + P(A \bigcap C \bigcap D) + P(B \bigcap C \bigcap D) \\ & - P(A \bigcap B \bigcap C \bigcap D) \end{aligned}$$

Άσκηση 1.2. Έστω ότι επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο από μία περιοχή και καταγράφουμε το εισόδημά του. Έχει βρεθεί ότι η πιθανότητα να έχει εισόδημα πάνω από 200χιλ. δρχ. είναι 80% ενώ η πιθανότητα να έχει εισόδημα μικρότερο των 300χιλ. δρχ. είναι 60%. Να βρεθεί η πιθανότητα να έχει εισόδημα μεταξύ 200 και 300 χιλ. δρχ.

Λύση. Θέτουμε Ω=[0,∞). Αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

A=(200,∞)={*εισόδημα μεγαλύτερο των* 200χιλ} και

B=[0,300)={*εισόδημα μικρότερο των* 300χιλ} τότε

γνωρίζουμε ότι $P(A)$=0.8 και $P(B)$=0.6. Ζητείται ο υπολογισμός της πιθανότητας $P(A \cap B)$. Από την Πρόταση 1.2. γνωρίζουμε ότι $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$ και επομένως,

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \bigcup B) = 0.8 + 0.6 - 1 = 0.4$$

διότι προφανώς $A \bigcup B = \Omega$.

Άσκηση 1.3. Έστω ότι για τα ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι

$$2P(A) = 3P(B) = 4P(AB) \;\text{ και }\; P(A^C B) = 0.05$$

i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$.

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$, $A^C B^C$, AB^C, $AB^C \cup A^C B$, $A \cup B^C$, $A^C \cup B$.

Λύση. i) Γνωρίζουμε ότι $P(B - A) = P(A^C B) = 0.05$ ενώ από την 1.2.(4) ισχύει ότι

$$P(B - A) = P(B) - P(AB)$$

και επομένως,

$$P(B) - P(AB) = 0.05 \Rightarrow P(B) - \tfrac{3}{4}P(B) = 0.05 \Rightarrow \tfrac{1}{4}P(B) = 0.05 \Rightarrow P(B) = 0.2\,.$$

Άρα και $P(A) = \tfrac{3}{2}P(B) = \tfrac{3}{2}0.2 = 0.3,\;\; P(AB) = \tfrac{3}{4}P(B) = \tfrac{3}{4}0.2 = 0.15$.

ii) Είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.2 - 0.15 = 0.35$$

$$P(A^C B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.35 = 0.65$$

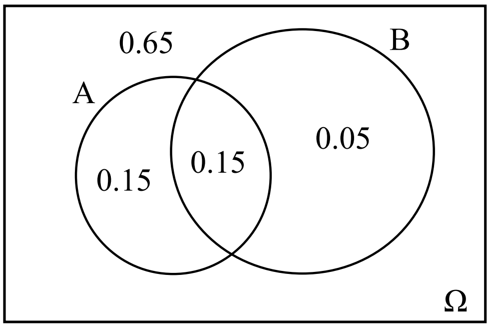
$$P(AB^C) = P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.3 - 0.15 = 0.15$$

$$\begin{aligned} P(AB^C \cup A^C B) &= P(AB^C) + P(A^C B) - P(AB^C A^C B) \\ &= P(A - B) + P(B - A) - P(\varnothing) = 0.15 + 0.05 - 0 = 0.2 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B^C) = P((A^C B)^C) = 1 - P(A^C B) = 1 - P(B - A) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$P(A^C \cup B) = P((AB^C)^C) = 1 - P(AB^C) = 1 - P(A - B) = 1 - 0.15 = 0.85\,.$$

Όλα τα παραπάνω μπορούν πολύ εύκολα και άμεσα να επαληθευτούν χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα Venn.



$P(A-B)$=0.15, $P(B-A)$=0.05,
$P(AB)$=0.15, $P((A \cup B)^C)$=0.65.

Άσκηση 1.4. Ένα κουτί περιέχει μία κόκκινη (Κ) μία μπλε (Μ) και μία πράσινη (Π) σφαίρα. Θεωρήστε ένα πείραμα κατά το οποίο επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από το κουτί, και αφού την επανατοποθετήσουμε στο κουτί επιλέγουμε τυχαία άλλη μία σφαίρα. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος; Αν κάθε σφαίρα έχει την ίδια πιθανότητα εκλογής, ποια είναι η πιθανότητα εκλογής μίας τουλάχιστον κόκκινης σφαίρας στις δύο δοκιμές;

Λύση. Είναι Ω={ΚΚ,ΚΜ,ΚΠ,ΜΚ,ΜΜ,ΜΠ,ΠΚ,ΠΜ,ΠΠ}. Έστω

A={*εκλογή μίας τουλάχιστον κόκκινης σφαίρας*}={ΚΚ,ΚΜ,ΚΠ,ΜΚ,ΠΚ}

Εφόσον κάθε σφαίρα έχει την ίδια πιθανότητα εκλογής, ο Ω αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα και άρα

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}\,.$$

Άσκηση 1.5. Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση αυτή τη φορά υποθέτοντας ότι η πρώτη σφαίρα δεν επανατοποθετείται στο κουτί.

Λύση. Είναι Ω={ΚΜ,ΚΠ,ΜΚ,ΜΠ,ΠΚ,ΠΜ}. Έστω

A={*εκλογή μίας τουλάχιστον κόκκινης σφαίρας*}={ΚΜ,ΚΠ,ΜΚ,ΠΚ}

Εφόσον κάθε σφαίρα έχει την ίδια πιθανότητα εκλογής, θα ισχύει ότι

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{4}{6}.$$

Άσκηση 1.6. Έστω A, B, Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Βρείτε κατάλληλες εκφράσεις για τα περιφραστικά ενδεχόμενα:

1) πραγματοποίηση μόνο του B
2) πραγματοποιήθηκαν το A και το B αλλά όχι το Γ.
3) τουλάχιστον ένα από τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα πραγματοποιείται
4) τουλάχιστον δύο από τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται
5) και τα τρία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται
6) κανένα από τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιείται
7) το πολύ ένα πραγματοποιείται
8) το πολύ δύο πραγματοποιούνται.

Λύση. 1) $A^C B\Gamma^C$, 2) $AB\Gamma^C$, 3) $A\cup B\cup\Gamma$, 4) $AB\cup A\Gamma\cup B\Gamma$,

5) $AB\Gamma$, 6) $A^C B^C \Gamma^C=(A\cup B\cup\Gamma)^C$, 7) $A^C B^C \Gamma^C\cup AB^C\Gamma^C\cup A^C B\Gamma^C\cup A^C B^C\Gamma=(AB\cup A\Gamma\cup B\Gamma)^C$

8) $(AB\Gamma)^C=(A^C\cup B^C\cup\Gamma^C)$

Άσκηση 1.7. Αν ριφθούν ταυτόχρονα δύο (αμερόληπτα) ζάρια ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε άθροισμα i, i=1,2,…12. Ποια η πιθανότητα να έχουμε άθροισμα 4 ή 6;

Λύση. Ο δειγματικός χώρος είναι

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

ενώ αν A_i= {*άθροισμα ζαριών* = i} έχουμε ότι

$A_1=\varnothing$, $A_2=\{(1,1)\}$, $A_3=\{(1,2),(2,1)\}$, $A_4=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$,

$A_5=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, $A_6=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$,

$A_7=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, $A_8=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,

$A_9=\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$, $A_{10}=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$, $A_{11}=\{(5,6),(6,5)\}$, $A_{12}=\{(6,6)\}$.

Επομένως, από την Πρόταση 1.1. θα είναι

$$P(A_1)=0, P(A_2)=\frac{1}{36}, P(A_3)=\frac{2}{36}, P(A_4)=\frac{3}{36}, P(A_5)=\frac{4}{36}, P(A_6)=\frac{5}{36},$$

$$P(A_7)=\frac{6}{36}, P(A_8)=\frac{5}{36}, P(A_9)=\frac{4}{36}, P(A_{10})=\frac{3}{36}, P(A_{11})=\frac{2}{36}, P(A_{12})=\frac{1}{36},$$

Τέλος, $P(A_4 \cup A_6) = P(A_4) + P(A_6) - P(A_4 A_6) = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} - 0 = \frac{8}{36}$.

Άσκηση 1.8. Ένα μικρό παιδί παίζει με τρεις κύβους που έχουν τα γράμματα Η, Σ, Τ. (σε κάθε κύβο έχει σημειωθεί μόνο ένα από τα τρία γράμματα).

i) Πόσες και ποιες λέξεις (οι περισσότερες χωρίς νόημα) μπορεί να φτιάξει το παιδί, χρησιμοποιώντας τον κάθε κύβο ακριβώς μία φορά.

ii) Αν η τοποθέτηση των τριών κύβων στη σειρά γίνεται εντελώς τυχαία,

α) ποια η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να αρχίζει με Τ

β) ποια η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να έχει νόημα

Λύση i) Προφανώς, Ω={ΗΣΤ,ΗΤΣ,ΣΤΗ,ΣΗΤ,ΤΗΣ,ΤΣΗ}.

ii) α) Αν Α={η λέξη που θα σχηματιστεί να αρχίζει με Τ}={ΤΗΣ,ΤΣΗ} και επειδή όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, $P(A) = 2/6$.

β) Αν Α={η λέξη που θα σχηματιστεί να έχει νόημα}={ΤΗΣ, ΣΤΗ} και επειδή όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, $P(A) = 2/6$.

Άσκηση 1.9. Ένας παίκτης ρουλέτας χρησιμοποιεί το ακόλουθο σύστημα. Ποντάρει στο κόκκινο 1χιλ και αν κερδίσει αποχωρεί. Αν χάσει, ποντάρει ξανά στο κόκκινο αυτή τη φορά 2χιλ και ανεξάρτητα με το αποτέλεσμα αποχωρεί. Θεωρώντας ότι η πιθανότητα να έρθει κόκκινο είναι ½, να βρείτε την πιθανότητα να αποχωρήσει ο παίκτης κερδισμένος. Γιατί δεν χρησιμοποιεί το σύστημα αυτό ο καθένας για να κερδίζει;

Λύση. (βλ. Κεφ 3)

Παρατηρούμε ότι η λύση αρκετών από τις παραπάνω ασκήσεις βασίζεται στην «αρχή έλλειψης επαρκούς λόγου» (σύμφωνα με την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα εφόσον δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιος επαρκής λόγος για το αντίθετο) και στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας (δηλ. στην Πρόταση 1.1). Η πρόταση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη λύση συνθετότερων προβλημάτων (που όμως πάντα πρέπει να βασίζονται σε ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα) αρκεί να είμαστε κάθε φορά σε θέση να υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω καθώς και το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου A του οποίου την πιθανότητα αναζητούμε. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το εξής πείραμα. Από n αριθμημένους κύβους (με αριθμούς από το 1 έως το n) εκλέγουμε τυχαία k. Ποια είναι η πιθανότητα ανάμεσα στους k αυτούς κύβους να υπάρχουν ακριβώς x με ένδειξη μικρότερη του r; Αν οι αριθμοί n, k, r είναι συγκεκριμένοι και σχετικά μικροί μπορούμε να γράψουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα (απλά ενδεχόμενα) και να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 1.1. Στη γενική όμως περίπτωση γίνεται αντιληπτό ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό. Για να αντιμετωπίσουμε τέτοιου είδους προβλήματα που σχετίζονται με το πλήθος των στοιχείων διαφόρων συνόλων είναι αναγκαία η στοιχειώδης γνώση μεθόδων απαριθμήσεως. Στη συνέχεια λοιπόν θα αναφέρουμε ορισμένες έννοιες της συνδυαστικής που θα μας φανούν χρήσιμες.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Έστω A_1, A_2 δύο σύνολα με $|A_1|, |A_2| < \infty$. Αν $A_1 \times A_2$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των δύο συνόλων ($A_1 \times A_2 = \{(\alpha,\beta), \alpha \in A_1, \beta \in A_2\}$) τότε επαληθεύεται εύκολα ότι

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|.$$

Για παράδειγμα αν $A_1=\{1,2,3\}$ και $A_2=\{0,1,5,7\}$ τότε

$$\begin{aligned} A_1\times A_2=\{&(1,0),(1,1),(1,5),(1,7),\\ &(2,0),(2,1),(2,5),(2,7),\\ &(3,0),(3,1),(3,5),(3,7)\} \end{aligned}$$

και $|A_1\times A_2|=3\cdot 4=12$. Η σχέση αυτή είναι προφανές ότι γενικεύεται (επαγωγικά) για περισσότερα από δύο σύνολα. Δηλαδή, αν A_1, A_2, …,A_ν είναι ν σύνολα με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, τότε

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_k|.$$

($A_1\times A_2\times\ldots\times A_\nu=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu),\ \alpha_1\in A_1,\ \alpha_2\in A_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu\in A_\nu\}$). Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου $A_1\times A_2\times\ldots\times A_\nu$ μπορεί να ληφθεί εκλέγοντας αρχικά ένα στοιχείο α_1 από το A_1, ένα στοιχείο α_2 από το A_2, κ.ο.κ. … εκλέγοντας ένα στοιχείο α_ν από το A_ν (καταλήγοντας στο $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$). Το στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί κατά $|A_1|$ τρόπους, το α_2 κατά $|A_2|$ τρόπους κ.ο.κ. … το α_ν κατά $|A_\nu|$ τρόπους και επομένως το $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$ μπορεί να επιλεγεί κατά $|A_1||A_2|\ldots|A_\nu|$ τρόπους.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η συγκεκριμένη αρχή μπορεί γενικότερα να διατυπωθεί ως εξής. Αν ένα στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί κατά k_1 τρόπους, και για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους ένα στοιχείο α_2 μπορεί να επιλεγεί κατά k_2 τρόπους, κ.ο.κ. …, για καθένα από αυτούς τους τρόπους ένα στοιχείο α_ν μπορεί να επιλεγεί κατά k_ν τρόπους, τότε η ν-άδα $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ μπορεί να επιλεγεί κατά $k_1k_2\ldots k_\nu$ τρόπους. Στη γενική περίπτωση ενδέχεται το σύνολο των δυνατών εκλογών του α_i να μην είναι δυνατό να προσδιοριστεί από την αρχή αλλά μόνο μετά την εκλογή των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}$. Αυτό δεν επηρεάζει την παραπάνω αρχή διότι δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε το σύνολο των δυνατών εκλογών του α_i αλλά το πλήθος των δυνατών εκλογών του α_i. Η παραπάνω αρχή καλείται και **πολλαπλασιαστική αρχή**.

Παράδειγμα 1.2. Έστω ότι κατά μήκος μιας σιδηροδρομικής γραμμής υπάρχουν ν σταθμοί. Πόσα διαφορετικά είδη εισιτηρίων θα πρέπει να προβλεφθούν για να είναι δυνατή η κράτηση θέσης από οποιοδήποτε σταθμό προς οποιοδήποτε σταθμό;

Έστω $\{1,2,\ldots,\nu\}$ το σύνολο των ν σταθμών. Για να βρούμε πόσα διαφορετικά είδη εισιτηρίων πρέπει να εκδοθούν πρέπει να βρούμε το πλήθος των δυνατών επιλογών σταθμού αναχώρησης και σταθμού προορισμού. Αρχικά επιλέγουμε σταθμό αναχώρησης. Θα είναι ένας από το $\{1,2,\ldots,\nu\}$. Στη συνέχεια όμως, προκειμένου να επιλέξουμε σταθμό προορισμού παρατηρούμε ότι δεν έχει νόημα να επιλέξουμε τον ίδιο σταθμό. Αν π.χ. επιλέξουμε ως σταθμό αναχώρησης τον 1, τότε ως σταθμός προορισμού μπορεί να επιλεγεί ένας από τους $\{2,3,\ldots,\nu\}$, ενώ αν επιλέξουμε ως σταθμό αναχώρησης τον 2, τότε ως σταθμός προορισμού μπορεί να επιλεγεί ένας από τους $\{1,3,\ldots,\nu\}$ κ.ο.κ. Άρα ο σταθμός αναχώρησης μπορεί να επιλεγεί κατά ν τρόπους αλλά για κάθε τέτοια επιλογή ο σταθμός προορισμού μπορεί να επιλεγεί κατά $\nu-1$ τρόπους. Παρατηρούμε ότι το σύνολο των δυνατών εκλογών του σταθμού προορισμού δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί από την αρχή αλλά μόνο μετά την εκλογή του σταθμού αναχώρησης. Αυτό όμως, όπως έχει και παραπάνω παρατηρηθεί, δεν αποτελεί πρόβλημα. Συνεπώς, το πλήθος των δυνατών επιλογών σταθμού αναχώρησης και σταθμού προορισμού (που είναι ίσο με το πλήθος των διαφορετικών ειδών εισιτηρίων που πρέπει να εκδώσουμε) είναι $\nu(\nu-1)$.

Άσκηση 1.10. Ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής περιέχει ν ερωτήσεις με $k_1,\ldots,k_\nu$ δυνατές απαντήσεις αντίστοιχα. Ο διαγωνιζόμενος σημειώνει μία ακριβώς απάντηση για κάθε ερώτηση. Ποιο το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να απαντηθεί το διαγώνισμα. Ποια η πιθανότητα κάποιος διαγωνιζόμενος που απαντά εντελώς τυχαία να πάρει άριστα;

Λύση. Η πρώτη ερώτηση μπορεί να απαντηθεί κατά k_1 τρόπους. Για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους η δεύτερη ερώτηση μπορεί να απαντηθεί κατά k_2 τρόπους, κ.ο.κ. … για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους η ν-οστή ερώτηση μπορεί να απαντηθεί κατά k_ν τρόπους. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, οι ν ερωτήσεις μπορούν να απαντηθούν κατά $k_1k_2\ldots k_\nu$ τρόπους.

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από όλους τους δυνατούς τρόπους απαντήσεως, δηλαδή περιέχει $k_1k_2\ldots k_\nu$ στοιχεία. Εφόσον ο διαγωνιζόμενος απαντά εντελώς τυχαία, ο κάθε ένας από αυτούς του τρόπους απάντησης έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Πρόκειται λοιπόν για ένα πείραμα με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα. Αν A = {*σωστή απάντηση και στα ν ερωτήματα*} τότε προφανώς $|A| = 1$ αφού μόνο μία ν-άδα απαντήσεων είναι σωστή. Επομένως,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{k_1k_2...k_\nu}.$$

Άσκηση 1.11. Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας αυτοκινήτων μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας τρία γράμματα (από τα Α,Β,Ε,Ζ,Η,Ι,Κ,Μ,Ν,Ο,Ρ,Τ,Υ) και 4 αριθμούς (από τους 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Αν έως σήμερα έχουν διατεθεί όλοι οι δυνατοί αριθμοί κυκλοφορίας με πρώτο γράμμα Α,Β ή Ε, ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο αυτοκίνητο να έχει αριθμό κυκλοφορίας που α) αποτελείται από τρία φωνήεντα και 4 ζυγούς αριθμούς, β) από 4 ίδιους αριθμούς.

Λύση. Το πρώτο γράμμα μπορεί να επιλεγεί κατά 13 τρόπους. Για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους το δεύτερο γράμμα μπορεί και αυτό να επιλεγεί κατά 13 τρόπους και όμοια και για το τρίτο γράμμα. Για κάθε έναν από τους τρόπους επιλογής των τριών γραμμάτων, ο πρώτος από τους τέσσερις αριθμούς μπορεί να επιλεγεί κατά 10 τρόπους, κ.ο.κ. … ο τέταρτος κατά 10 τρόπους. Συνεπώς μπορούν να κατασκευαστούν $13^3 \cdot 10^4 = 21.970.000$ διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας.

α) Εδώ ο δειγματικός χώρος αποτελείται από όλους τους διαφορετικούς αριθμούς κυκλοφορίας που έχουν διατεθεί, συνεπώς (χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική αρχή)

$$|\Omega| = 3 \cdot 13^2 \cdot 10^4 = 5.070.000$$

(το πρώτο γράμμα επιλέγεται από το {Α,Β,Ε} άρα επιλέγεται κατά τρεις τρόπους, κ.ο.κ.). Αν A = {*αριθμός κυκλοφορίας που αποτελείται από* 3 *φωνήεντα και* 4 *ζυγούς αριθμούς*} τότε, από την πολλαπλασιαστική αρχή, $|A| = 2 \cdot 6^2 \cdot 5^4 = 45.000$ (το πρώτο γράμμα επιλέγεται από το {Α,Ε}, το δεύτερο από το {Α,Ε,Η,Ι,Ο,Υ } κ.ο.κ.). Επειδή τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα («τυχαία» εκλογή αριθμού κυκλοφορίας) θα ισχύει ότι

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{45.000}{5.070.000} \approx 0.0088 \approx 0.88\%$$

β) Χρησιμοποιούμε τον ίδιο δειγματικό χώρο. Αν Α={*αριθμός κυκλοφορίας που αποτελείται από* 4 *ίδιους αριθμούς*} τότε, όμοια με παραπάνω, τα τρία γράμματα μπορούν να επιλεγούν κατά $3 \cdot 13^2$ τρόπους ενώ για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 10 τετράδες με 4 ίδιους αριθμούς (0000,1111,…,9999). Επομένως,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 13^2 \cdot 10}{3 \cdot 13^2 \cdot 10^4} = \frac{1}{10^3} = 0.001 = 0.1\%.$$

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ - ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Ορισμός 1.3. *Έστω* $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_\nu\}$ *ένα σύνολο με* ν *στοιχεία. Μια διατεταγμένη* k*-άδα* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *η οποία αποτελείται από* k $(\leq \nu)$ *διαφορετικά στοιχεία του* B $(a_i \in B$, $i = 1,2,\ldots,k$ *με* $a_i \neq a_j$ *για* $i \neq j)$

*θα καλείται **διάταξη των ν στοιχείων ανά k**. Επίσης, μία διάταξη των ν στοιχείων ανά ν θα καλείται **μετάθεση** ν στοιχείων.*

Παράδειγμα 1.3. Οι δυνατές διατάξεις των 3 γραμμάτων {α,β,γ} ανά δύο είναι οι εξής

(α,β), (α,γ), (β,α), (β,γ), (γ,α), (γ,β)

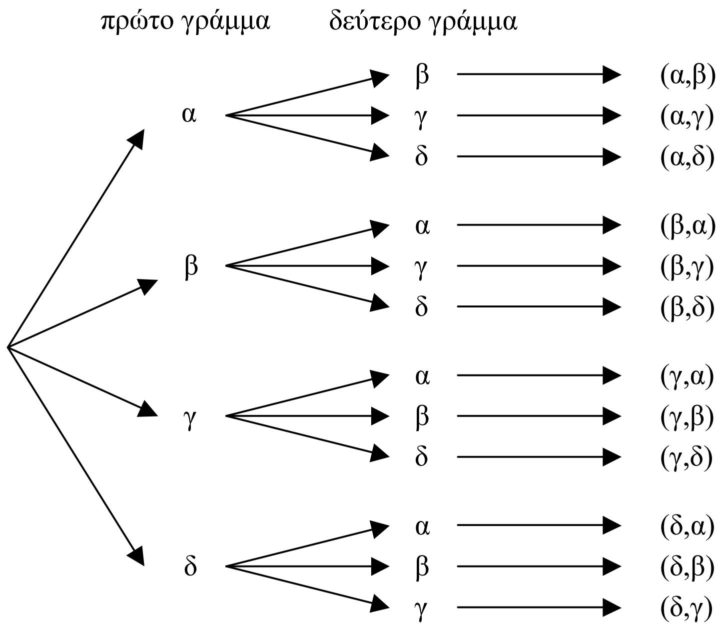
ενώ οι δυνατές μεταθέσεις των 3 γραμμάτων {α,β,γ} (διατάξεις των τριών γραμμάτων ανά 3) είναι

(α,β,γ), (α,γ,β), (β,α,γ), (β,γ,α), (γ,α,β), (γ,β,α).

Παράδειγμα 1.4. Οι δυνατές διατάξεις των 4 γραμμάτων {α,β,γ,δ} ανά δύο είναι οι εξής:

(α,β), (α,γ), (α,δ), (β,α), (β,γ), (β,δ), (γ,α), (γ,β), (γ,δ), (δ,α), (δ,β), (δ,γ)

Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων των 4 γραμμάτων ανά δύο είναι 12. Στο συμπέρασμα αυτό μπορούμε να φτάσουμε και ως εξής. Κάθε διατεταγμένη δυάδα μπορεί να κατασκευαστεί επιλέγοντας το πρώτο γράμμα κατά 4 τρόπους (4 γράμματα). Για κάθε επιλογή του πρώτου γράμματος, το δεύτερο γράμμα μπορεί να επιλεγεί κατά 3 τρόπους. Άρα συνολικά έχουμε $3 \cdot 4 = 12$ διαφορετικούς τρόπους επιλογής διατεταγμένων δυάδων. Το γεγονός αυτό μπορεί να γίνει φανερό και από το ακόλουθο διάγραμμα:



Παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα 1.2. στην ουσία αναζητούσαμε το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων των *ν* στοιχείων (σταθμών) ανά δύο. Σε εκείνη την περίπτωση, χρησιμοποιώντας το ίδιο σκεπτικό, είχαμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι το πλήθος των διαφορετικών εισιτηρίων (διαφορετικών διατάξεων των ν ανά 2) είναι $\nu(\nu-1)$.

Παράδειγμα 1.5. Οι διατάξεις των τεσσάρων αριθμών {1,2,3,4} ανά 3 θα είναι οι εξής

(1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,3,4), (1,4,2), (1,4,3),

(2,1,3), (2,1,4), (2,3,1), (2,3,4), (2,4,1), (2,4,3),

(3,1,2), (3,1,4), (3,2,1), (3,2,4), (3,4,1), (3,4,2),

(4,1,2), (4,1,3), (4,2,1), (4,2,3), (4,3,1), (4,3,2).

Είναι 24 διαφορετικές διατάξεις των 4 ανά 3. Στο συμπέρασμα αυτό μπορούμε και πάλι να φτάσουμε παρατηρώντας ότι κάθε διατεταγμένη τριάδα μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής. Ο πρώτος αριθμός μπορεί να επιλεγεί κατά 4 τρόπους (4 αριθμοί 1,2,3,4). Για κάθε επιλογή του πρώτου αριθμού, ο δεύτερος αριθμός μπορεί να επιλεγεί κατά 3 τρόπους (θα πρέπει ο δεύτερος αριθμός να είναι διαφορετικός του πρώτου). Και τέλος, ο τρίτος αριθμός μπορεί να επιλεγεί κατά 2 τρόπους (πρέπει να είναι διαφορετικός από τους δύο πρώτους). Άρα συνολικά έχουμε 3·4·2=24 διαφορετικούς τρόπους επιλογής διατεταγμένων δυάδων.

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σκεπτικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί γενικότερα για τον υπολογισμό του πλήθους των διαφορετικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά k. Συγκεκριμένα έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.3. *Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k είναι ίσο με*

$$\nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-k+1)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο που υπολογίσαμε το πλήθος των διατάξεων των τεσσάρων ανά 2 και ανά 3 στοιχείων στα παραδείγματα 1.4. και 1.5. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι κάθε διάταξη $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ των ν στοιχείων $\{b_1,b_2,\ldots,b_\nu\}$ ανά k μπορεί να επιλέγει ως εξής. Το πρώτο στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί κατά ν τρόπους (ένα από τα $\{b_1,b_2,\ldots,b_\nu\}$). Για κάθε επιλογή του α_1, το α_2 μπορεί να επιλεγεί κατά $\nu-1$ τρόπους (ένα από τα $\{b_1,b_2,\ldots,b_\nu\}-\{\alpha_1\}$), κ.ο.κ. το α_k μπορεί να επιλεγεί κατά $\nu-k+1$ τρόπους (ένα από τα $\{b_1,b_2,\ldots,b_\nu\}-\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1}\}$). Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι η επιλογή μίας διάταξης των ν στοιχείων ανά k μπορεί να γίνει με $\nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-k+1)$ διαφορετικούς τρόπους.

Από την παραπάνω πρόταση μπορούμε άμεσα να βρούμε και το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων ν στοιχείων.

Πόρισμα 1.1. *Το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι ίσο με*

$$\nu(\nu-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Απόδειξη. Είναι άμεση από την Πρόταση 1.3 θέτοντας $k=\nu$.

Στο εξής, το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων θα συμβολίζεται και με $\nu!$ (*ν παραγοντικό*), δηλαδή,

$$\nu! = \nu(\nu-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1,$$

ενώ το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k θα συμβολίζεται με $(\nu)_k$, δηλαδή,

$$(\nu)_k = \nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-k+1) = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}.$$

Επίσης ορίζουμε $0!=1$ και $(\nu)_0=1$.

Άσκηση 1.12. Μία Τράπεζα διαθέτει 6 ταμίες και 3 διαφορετικά ταμεία α,β και γ. Με πόσους τρόπους μπορεί να τοποθετηθούν οι 6 ταμίες στα ταμεία α,β,γ;

Λύση. Έστω Β={1,2,3,4,5,6} οι έξι ταμίες. Κάθε τοποθέτηση μπορεί να παρασταθεί με μία τριάδα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ στοιχείων του Β. Συγκεκριμένα α_1 είναι ο ταμίας που τοποθετήθηκε στο ταμείο α, α_2 είναι ο ταμίας που τοποθετήθηκε στο ταμείο β και α_3 είναι ο ταμίας που τοποθετήθηκε στο ταμείο γ. Π.χ. η τριάδα (2, 6, 3) σημαίνει ότι στο ταμείο α τοποθετήθηκε ο ταμίας 2, στο ταμείο β τοποθετήθηκε ο ταμίας 6 και στο ταμείο γ τοποθετήθηκε ο ταμίας 3. Η διάταξη των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ μας ενδιαφέρει διότι π.χ. η τοποθέτηση (2,6,3) είναι προφανώς διαφορετική από την (6,2,3). Επίσης, τα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ πρέπει να είναι διαφορετικά διότι δεν είναι δυνατό ο ίδιος ταμίας να τοποθετηθεί σε δύο διαφορετικά ταμεία. Συνεπώς η τριάδα $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ αποτελεί μία διάταξη των 6 στοιχείων (του Β) ανά 3. Άρα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν οι 6 ταμίες στα ταμεία α,β,γ είναι ίσος με το πλήθος των διατάξεων των 6 ανά 3, δηλαδή θα έχουμε

$$(6)_3 = 6(6-1)...(6-3+1) = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$$

διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης.

Άσκηση 1.13. Το Διοικητικό συμβούλιο ενός συλλόγου αποτελείται από 10 μέλη. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καλυφθούν οι θέσεις Προέδρου, Γραμματέα και Ταμία;

Λύση. Έστω Β={1,2,...,10} τα δέκα μέλη. Κάθε τοποθέτηση μπορεί και πάλι να παρασταθεί με μία τριάδα $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ όπου $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in B$ είναι ο Πρόεδρος, ο Γραμματέας και ο Ταμίας αντίστοιχα. Π.χ. η τριάδα (3, 8, 2) σημαίνει ότι Πρόεδρος τοποθετήθηκε το μέλος 3, Γραμματέας τοποθετήθηκε το μέλος 8 και Ταμίας τοποθετήθηκε το μέλος 2. Και σε αυτή την περίπτωση μας ενδιαφέρει η διάταξη των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ π.χ. η τοποθέτηση (3, 8, 2) είναι προφανώς διαφορετική από την (3, 2, 8). Επίσης, τα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ πρέπει να είναι διαφορετικά διότι δεν είναι δυνατό το ίδιο μέλος να κατέχει δύο θέσεις. Συνεπώς η τριάδα $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ αποτελεί μία διάταξη των 10 στοιχείων (του Β) ανά 3. Άρα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούν να καλυφθούν οι θέσεις Προέδρου, Γραμματέα και Ταμία είναι ίσος με το πλήθος των διατάξεων των 10 ανά 3, δηλαδή θα έχουμε

$$(10)_3 = 10(10-1)...(10-3+1) = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$$

διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης.

Άσκηση 1.14. Ένα φυλλάδιο αποτελείται από 5 σελίδες αριθμημένες από το 1 έως το 5. Αν γυρίσουμε ανάποδα και ανακατέψουμε αρκετή ώρα τις σελίδες αυτές, ποια η πιθανότητα να βρεθούν και πάλι με τη σωστή σειρά;

Λύση. Έστω ότι το τυχαίο πείραμα εδώ είναι το ανακάτεμα των σελίδων και Ω το σύνολο των δυνατών τρόπων που μπορούν να τοποθετηθούν οι 5 αυτές σελίδες μετά το ανακάτεμα. Έστω Β={1,2,3,4,5} οι πέντε σελίδες. Κάθε τοποθέτηση (μετά το ανακάτεμα) μπορεί να παρασταθεί με μία πεντάδα $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ όπου $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\alpha_4,\alpha_5\in B$ είναι η σελίδα που βρίσκεται στην $1^η,2^η, ..,5^η$ θέση αντίστοιχα. Π.χ. η πεντάδα (2,3,1,5,4) υποδηλώνει ότι μετά το ανακάτεμα στην πρώτη θέση βρέθηκε η δεύτερη σελίδα, στη δεύτερη θέση η τρίτη σελίδα κ.ο.κ. Η διάταξη των $\alpha_1,...,\alpha_5$ μας ενδιαφέρει ενώ τα $\alpha_1,...,\alpha_5$ πρέπει να είναι διαφορετικά. Συνεπώς η πεντάδα $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ αποτελεί μία διάταξη των 5 στοιχείων (του Β) ανά 5, δηλαδή μία μετάθεση των στοιχείων του Β. Άρα το σύνολο των δυνατών τρόπων Ω που μπορούν να τοποθετηθούν οι 5 αυτές σελίδες μετά το ανακάτεμα θα έχει πλήθος στοιχείων ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων των 5 στοιχείων, δηλαδή |Ω|=5!=120. Εφ’όσον το ανακάτεμα γίνεται για «αρκετή ώρα», μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το κάθε στοιχείο του Ω (στοιχειώδες ενδεχόμενο) έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Συνεπώς, αν Α={*σωστή σειρά σελίδων*}={(1,2,3,4,5)}, από την Πρόταση 1.1. προκύπτει ότι

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{120}.$$

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ορισμός 1.4. *Έστω $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_\nu\}$ ένα σύνολο με ν στοιχεία. Μια διατεταγμένη k-άδα $(a_1,a_2,\ldots, a_k)$ η οποία αποτελείται από k στοιχεία του B ($a_i\in B$, $i=1,2,\ldots,k$) θα καλείται* ***διάταξη των ν στοιχείων ανά k με επανάληψη***.

Η μόνη διαφορά εδώ από τον ορισμό 1.3. (διατάξεις των *ν* στοιχείων ανά *k*) είναι ότι σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο στοιχείο του *B* περισσότερες από μία φορές στην *k*-άδα $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$. Για αυτό το λόγο καλούνται και διατάξεις με επανάληψη.

Παράδειγμα 1.6. Οι δυνατές διατάξεις των 4 γραμμάτων {α,β,γ,δ} ανά δύο με επανάληψη είναι οι εξής:

(α,α), (α,β), (α,γ), (α,δ), (β,α), (β,β), (β,γ), (β,δ), (γ,α), (γ,β), (γ,γ), (γ,δ), (δ,α), (δ,β), (δ,γ), (δ,δ)

Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων των 4 γραμμάτων ανά δύο είναι 16. Στο συμπέρασμα αυτό μπορούμε να φτάσουμε και ως εξής. Κάθε διατεταγμένη δυάδα μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής. Το πρώτο γράμμα μπορεί να επιλεγεί κατά 4 τρόπους (4 γράμματα), ενώ για κάθε επιλογή του πρώτου γράμματος, το δεύτερο γράμμα μπορεί και πάλι να επιλεγεί κατά 4 τρόπους αφού μπορούμε να πάρουμε το ίδιο γράμμα περισσότερες από μία φορές. Άρα συνολικά έχουμε 4·4=16 διαφορετικούς τρόπους επιλογής διατεταγμένων δυάδων. Ανάλογα με την Πρόταση 1.3. έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.4. *Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k με επανάληψη είναι ίσο με* v^k.

Απόδειξη. Κάθε διάταξη $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ των v στοιχείων $\{b_1,b_2,\ldots,b_v\}$ ανά k με επανάληψη μπορεί να επιλέγει ως εξής: το πρώτο στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί κατά ν τρόπους (ένα από τα $\{b_1,b_2,\ldots,b_v\}$). Για κάθε επιλογή του α_1, το α_2 μπορεί να επιλεγεί και πάλι κατά v τρόπους (ένα από τα $\{b_1,b_2,\ldots,b_v\}$, δεν μας ενδιαφέρει το α_1), κ.ο.κ. το α_k μπορεί να επιλεγεί κατά v τρόπους (ένα από τα $\{b_1,b_2,\ldots,b_v\}$). Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι η επιλογή μίας διάταξης των v στοιχείων ανά k με επανάληψη μπορεί να γίνει με v^k διαφορετικούς τρόπους.

Άσκηση 1.15. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα ρίψης 10 διαφορετικών ζαριών;

Λύση. Έστω B={1,2,3,4,5,6} το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων της ρίψης ενός ζαριού. Κάθε αποτέλεσμα ρίψης 10 ζαριών μπορεί να παρασταθεί με μία δεκάδα $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{10})$, $\alpha_i\in B$ όπου α_1 είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης, κ.ο.κ. Η διάταξη των $\alpha_1,\ldots,\alpha_{10}$ μας ενδιαφέρει διότι π.χ. το αποτέλεσμα (1,3,3,...,2) είναι προφανώς διαφορετικό από το (3,1,3,...,2). (στην πρώτη περίπτωση είχαμε 1 στην πρώτη ρίψη και 3 στη δεύτερη, ενώ αντίθετα στη δεύτερη περίπτωση έχουμε 3 στη δεύτερη ρίψη και 1 στη δεύτερη). Επίσης, στη συγκεκριμένη περίπτωση τα $\alpha_1,\ldots,\alpha_{10}$ δεν είναι ανάγκη να είναι διαφορετικά διότι προφανώς είναι δυνατό να φέρουμε το ίδιο αποτέλεσμα σε διαφορετικές ρίψεις. Συνεπώς η 10-άδα $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{10})$ αποτελεί μία διάταξη των 6 στοιχείων (του B) ανά 10 με επανάληψη. Άρα τα δυνατά αποτελέσματα ρίψης 10 ζαριών είναι ίσα με το πλήθος των διατάξεων των 6 ανά 10 με επανάληψη, δηλαδή θα έχουμε 6^{10} δυνατά αποτελέσματα.

Άσκηση 1.16. Τέσσερις φίλοι συμφωνούν να συναντηθούν στο ξενοδοχείο «Ακρόπολις» των Αθηνών. Συμβαίνει όμως να υπάρχουν 4 ξενοδοχεία με το ίδιο όνομα. Αν κάθε ένας από τους 4 φίλους διαλέξει στην τύχη να πάει σε ένα από αυτά, ποια είναι η πιθανότητα να μην συναντηθούν ούτε δύο;

Λύση. Έστω B={1,2,3,4} τα 4 ξενοδοχεία. Το τυχαίο «πείραμα» εδώ συνίσταται από την «τυχαία» επιλογή του ξενοδοχείου μετάβασης για κάθε ένα από τους 4 φίλους. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων θα αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες 4-άδες $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ ξενοδοχείων ($\alpha_i\in$B). Π.χ. το στοιχείο (2,3,2,1) αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο ο πρώτος φίλος να πήγε στο 2^o ξενοδοχείο, ο δεύτερος στο 3^o, ο τρίτος στο 2^o, και ο τέταρτος στο 1^o. Ο δειγματικός χώρος Ω επομένως θα αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 4 στοιχείων {1,2,3,4} ανά 4 με επανάληψη (το ίδιο ξενοδοχείο μπορεί να επιλεγεί από περισσότερους του ενός φίλους). Το ενδεχόμενο, έστω A, να μην συναντηθούν ούτε δύο, είναι ίσο με το ενδεχόμενο και οι τέσσερις να επιλέξουν διαφορετικά ξενοδοχεία. Επομένως το ενδεχόμενο A θα αποτελείται από όλα τα στοιχεία $(\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ του Ω που δεν έχουν δύο ίδιες συντεταγμένες ($\alpha_i\neq \alpha_j$ για κάθε $i\neq j$). Με άλλα λόγια το A θα αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 4 στοιχείων {1,2,3,4} ανά 4 (χωρίς επανάληψη), δηλαδή από όλες τις μεταθέσεις των 4 στοιχείων {1,2,3,4}. Επειδή ο κάθε φίλος επιλέγει τυχαία που θα πάει θεωρούμε ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα και επομένως,

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{4!}{4^4}=\frac{24}{256}=0.09375$$

Άσκηση 1.17. Ποια είναι η πιθανότητα ώστε ανάμεσα σε ν το πλήθος τυχαία επιλεγμένους ανθρώπους, τουλάχιστον 2 να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα του έτους; (ν=10, 20, 23, 30, 50)

Λύση. Έστω B={1,2,…,365} οι 365 ημέρες του έτους. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)\colon \alpha_i\in \mathrm{B},\ i=1,2,\ldots,\nu\}.$$

Συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$ αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο πρώτος από τους ν ανθρώπους έχει γενέθλια την α_1 ημέρα του χρόνου, ο δεύτερος από τους ν ανθρώπους έχει γενέθλια την α_2 ημέρα του χρόνου, κ.ο.κ. Συνεπώς, η διάταξη των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ μας ενδιαφέρει ενώ τα α_i δεν είναι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους. Άρα, το Ω αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 365 στοιχείων του B ανά ν με επανάληψη και επομένως $|\Omega|=365^\nu$. Εναλλακτικά μπορούμε να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα και ως εξής. Η επιλογή της ημέρας γενεθλίων του πρώτου ανθρώπου μπορεί να γίνει κατά 365 τρόπους, και για κάθε τέτοια επιλογή, η ημέρα γενεθλίων του δεύτερου ανθρώπου μπορεί να επιλεγεί κατά 365 τρόπους κ.ο.κ. το συμπέρασμα έπεται από την πολλαπλασιαστική αρχή. Θέτουμε A={2 *τουλάχιστον άνθρωποι από τους ν έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα*}. Επειδή είναι δύσκολο να βρούμε το πλήθος των στοιχείων του A θα επιχειρήσουμε εναλλακτικά να βρούμε το πλήθος των στοιχείων του A^C. Θα είναι

A^C={*και οι ν άνθρωποι έχουν γενέθλια διαφορετικές ημέρες*}.

Συνεπώς το $A^C\in\Omega$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του Ω της μορφής

$$A^C = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)\colon \alpha_i\in B,\ i=1,2,\ldots,\nu,\ a_i\neq a_j \text{ για κάθε } i\neq j\}$$

Δηλαδή, το A^C αποτελείται από όλα τα στοιχεία $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$ του Ω τα οποία έχουν διαφορετικές συντεταγμένες. Συνεπώς το A^C αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 365 στοιχείων του B ανά ν (χωρίς επανάληψη) και άρα $|A^C|=(365)_\nu$. Επειδή κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω είναι ισοπίθανο (κάθε «τυχαία» επιλεγμένος άνθρώπος μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει την ίδια πιθανότητα γέννησης σε οποιαδήποτε από τις 365 ημέρες του χρόνου), από την Πρόταση 1.1. προκύπτει ότι

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{|A^C|}{|\Omega|}=1-\frac{(365)_\nu}{365^\nu}=1-\frac{365!}{365^\nu(365-\nu)!}=1-\frac{(365)(365-1)...(365-\nu+1)}{365^\nu}$$

$$=1-\left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{365-1}{365}\right)..\left(\frac{365-\nu+1}{365}\right)=1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)..\left(1-\frac{\nu-1}{365}\right).$$

Για ν=10 θα έχουμε ότι $P(A)=0.1169$, για ν=20, $P(A)=0.4114$, για ν=23, $P(A)=0.5073$, για ν=30, $P(A)=0.7063$, και για ν=50, $P(A)=0.9703$.

Άσκηση 1.18. Έστω ότι διαθέτουμε ν διαφορετικά κλειδιά μόνο ένα από τα οποία ανοίγει μία συγκεκριμένη πόρτα. Δοκιμάζοντας ένα-ένα και με τυχαία σειρά κάθε ένα από τα κλειδιά, ποια είναι η πιθανότητα να ανοίξουμε την πόρτα αυτή στην i-δοκιμή, $i=1,2,\ldots,\nu$.

Λύση. Έστω $B=\{1,2,\ldots,\nu\}$. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το

$$\Omega = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)\colon \alpha_k\in B,\ k=1,2,\ldots,\nu,\ a_k\neq a_j \text{ για κάθε } k\neq j\}$$

Δηλαδή είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ν-άδων που αποτελούνται από ν διαφορετικά στοιχεία του B. Συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$ αντιστοιχεί στην περίπτωση που το πρώτο κλειδί που δοκιμάζουμε είναι το α_1, το δεύτερο κλειδί που δοκιμάζουμε είναι το α_2, κ.ο.κ. Συνεπώς το Ω είναι το σύνολο όλων των μεταθέσεων του συνόλου {1,2,…,ν} και άρα $|\Omega|=\nu!$. Έστω τώρα ότι το κλειδί που ανοίγει την πόρτα είναι το 1 και έστω A_i={άνοιγμα της πόρτας στην i-δοκιμή}. Η πόρτα ανοίγει στην i-δοκιμή αν έχουμε σαν αποτέλεσμα του πειράματος το

$$A_i = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_\nu)\colon \alpha_k\in \{2,3,\ldots,\nu\},\ k=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,\nu,\ a_k\neq a_j \text{ για κάθε } k\neq j\}$$

Το πλήθος των στοιχείων του A_i είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων των $\nu-1$ στοιχείων {2,3,…,ν}. Άρα τελικά από την Πρόταση 1.1. (έχουμε ισοπίθανα στοιχειώδη αποτελέσματα) θα είναι

$$P(A_i)=\frac{|A_i|}{|\Omega|}=\frac{(\nu-1)!}{\nu!}=\frac{1}{\nu} \text{ για κάθε } i = 1,2,\ldots,\nu.$$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Ορισμός 1.5. *Έστω* $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_\nu\}$ *ένα σύνολο με ν στοιχεία. Μια k-άδα* $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ *η οποία αποτελείται από k διαφορετικά στοιχεία του B* ($a_i\in B$, $i=1,2,\ldots,k$ *με* $a_i\neq a_j$, $i\neq j$) *θα καλείται* ***συνδυασμός των ν στοιχείων ανά k***.

Η μόνη διαφορά εδώ από τον ορισμό 1.3. (διατάξεις των ν στοιχείων ανά k) είναι ότι σε αυτή την περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των στοιχείων $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. Για παράδειγμα τα στοιχεία (1,2,3) και (1,3,2) αποτελούν δύο διαφορετικές διατάξεις αλλά τα στοιχεία {1,2,3} και {1,3,2} αποτελούν τον ίδιο συνδυασμό.

Παράδειγμα 1.7. Οι δυνατοί συνδυασμοί των 4 γραμμάτων {α,β,γ,δ} ανά δύο είναι

$$\{\alpha,\beta\},\ \{\alpha,\gamma\},\ \{\alpha,\delta\},\ \{\beta,\gamma\},\ \{\beta,\delta\},\ \{\gamma,\delta\}.$$

Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών των 4 γραμμάτων ανά δύο είναι 6. Στο συμπέρασμα αυτό μπορούμε να φτάσουμε και ως εξής. Το πλήθος των διατάξεων των 4 ανά 2 είναι $(4)_2=12$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε συνδυασμό αντιστοιχούν δύο διατάξεις (ανάλογα με το ποιο γράμμα θα πάρουμε πρώτο και ποιο δεύτερο). Π.χ. για το συνδυασμό {α,β} αντιστοιχούν οι διατάξεις (α,β) και (β,α). Επομένως το πλήθος των διατάξεων είναι διπλάσιο από το πλήθος των συνδυασμών σε αυτή την περίπτωση. Συνεπώς το πλήθος των συνδυασμών θα είναι $(4)_2/2 = 12/2 = 6$. Γενικεύοντας τον παραπάνω συλλογισμό οδηγούμαστε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.5. *Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k είναι ίσο με*

$$\frac{(\nu)_k}{k!}=\frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο που υπολογίσαμε το πλήθος των διατάξεων των τεσσάρων ανά 2 στοιχείων στο παράδειγμα 1.7. Παρατηρούμε ότι στη γενική περίπτωση, σε κάθε συνδυασμό $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ αντιστοιχούν $k!$ διατάξεις, όσες δηλαδή είναι οι δυνατές μεταθέσεις των k στοιχείων $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. Επομένως, το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k είναι ίσο με $k!$ φορές το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k και το ζητούμενο έπεται άμεσα.

Στο εξής, το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k θα συμβολίζεται και με

$$\binom{\nu}{k}=\frac{(\nu)_k}{k!}=\frac{\nu!}{k!(\nu-k)!},\quad 0\le k\le \nu.$$

Επίσης ορίζουμε $\binom{\nu}{k}=0$ αν $k>\nu$. Παρατηρούμε ότι

$$\binom{\nu}{0}=1,\ \binom{\nu}{1}=\nu,\ \binom{\nu}{\nu}=1$$

Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\binom{\nu}{k}=\binom{\nu}{\nu-k}.$$

Πράγματι, η παραπάνω σχέση μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αλγεβρικά,

$$\binom{\nu}{\nu-k}=\frac{\nu!}{(\nu-k)!(\nu-(\nu-k))!}=\frac{\nu!}{(\nu-k)!k!}=\binom{\nu}{k}$$

αλλά και συνδυαστικά παρατηρώντας ότι κάθε συνδυασμός $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$ των ν στοιχείων ανά k αντιστοιχεί σε ακριβώς έναν συνδυασμό (τον $B-\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$) των ν στοιχείων ανά $\nu-k$.

Άσκηση 1.19. Πόσες χειραψίες θα πραγματοποιηθούν κατά τη συνάντηση 5 πολιτικών;

Λύση. Αν Β={1,2,3,4,5} είναι το σύνολο των πολιτικών, τότε μία χειραψία μπορεί να παρασταθεί από μία (μη διατεταγμένη) δυάδα α_1,α_2 διαφορετικών στοιχείων του Β. Συγκεκριμένα, το στοιχείο $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ αντιστοιχεί στη χειραψία μεταξύ του πολιτικού α_1 και του πολιτικού α_2 (δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη διότι η χειραψία $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ και η $\{\alpha_2,\alpha_1\}$ είναι η ίδια, αυτή μεταξύ των πολιτικών α_1 και α_2. Επίσης προφανώς τα α_1,α_2 θα πρέπει να είναι διαφορετικά). Επομένως το σύνολο των δυνατών χειραψιών είναι το

$$\Omega=\{\{\alpha_1,\alpha_2\}: \alpha_1,\alpha_2\in B, \alpha_1\neq\alpha_2\}$$

Δηλαδή το Ω είναι το σύνολο όλων των συνδυασμών των 5 στοιχείων ανά δύο και άρα θα πραγματοποιηθούν

$$|\Omega|=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$$

διαφορετικές χειραψίες.

Άσκηση 1.20. Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας ως κορυφές ν δεδομένα σημεία πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου; (ν=6)

Λύση. Το κάθε τρίγωνο ορίζεται μονοσήμαντα από τις τρεις κορυφές του. Επομένως αν $B=\{1,2,\ldots,\nu\}$ είναι το σύνολο των ν σημείων τότε κάθε τρίγωνο μπορεί να παρασταθεί από τρία σημεία $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in B$. Συγκεκριμένα, το στοιχείο $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ αντιστοιχεί στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη ενώ προφανώς τα σημεία $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ θα πρέπει να είναι διαφορετικά). Συνεπώς, το σύνολο των δυνατών τριγώνων θα είναι το

$$\Omega = \{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}:\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in B,\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 \neq \alpha_3, \alpha_2 \neq \alpha_3\}$$

Δηλαδή το Ω είναι το σύνολο όλων των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά 3 και άρα μπορούν να κατασκευαστούν

$$|\Omega|=\binom{\nu}{3}=\frac{\nu!}{3!(\nu-3)!}=\frac{6!}{3!3!}=20$$

διαφορετικά τρίγωνα.

Άσκηση 1.21. Από 5 διοικητικούς υπαλλήλους και 6 οικονομολόγους σχηματίζουμε μία επιτροπή 3 διοικητικών και 2 οικονομολόγων. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν (α) δεν επιβληθούν περιορισμοί, (β) δύο συγκεκριμένοι διοικητικοί πρέπει να είναι στην επιτροπή. (c) ένας συγκεκριμένος οικονομολόγος δεν μπορεί να είναι στην επιτροπή.

Λύση. α) Έστω $B_1=\{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_5\}$ και $B_2=\{O_1,O_2,\ldots,O_6\}$ τα σύνολα των διοικητικών υπαλλήλων και των οικονομολόγων αντίστοιχα. Η επιτροπή απαρτίζεται από 3 διοικητικούς και δύο οικονομολόγους. Μία επιλογή 3 διοικητικών μπορεί να παρασταθεί ως μία (μη διατεταγμένη) τριάδα $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ διαφορετικών στοιχείων του B_1. Επομένως οι 3 διοικητικοί της επιτροπής μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{5}{3}$ διαφορετικούς τρόπους. Για κάθε μία από αυτές τις επιλογές, με το ίδιο σκεπτικό, οι 2 οικονομολόγοι της επιτροπής μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{6}{2}$ διαφορετικούς τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι η επιτροπή μπορεί να επιλεγεί κατά

$$\binom{5}{3}\binom{6}{2}=\frac{5!}{3!2!}\frac{6!}{2!4!}=150$$

διαφορετικούς τρόπους.

β) Εφόσον δύο συγκεκριμένοι διοικητικοί πρέπει να είναι στην επιτροπή, απομένει να επιλέξουμε τον τρίτο διοικητικό που θα συμμετέχει στην επιτροπή. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει κατά 5-2 τρόπους (ήδη 2 διοικητικοί από τους 5 συμμετέχουν στην επιτροπή). Για κάθε μία από αυτές τις επιλογές, οι 2 οικονομολόγοι της επιτροπής μπορούν (βλ. (α)) να επιλεγούν κατά $\binom{6}{2}$ διαφορετικούς τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι η επιτροπή μπορεί στην περίπτωση αυτή να επιλεγεί κατά

$$(5-2)\binom{6}{2} = 3\frac{6!}{2!4!} = 45$$

διαφορετικούς τρόπους.

γ) Οι 3 διοικητικοί της επιτροπής μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{5}{3}$ διαφορετικούς τρόπους (δεν υπάρχει περιορισμός για τους διοικητικούς υπαλλήλους). Για κάθε μία από αυτές τις επιλογές, οι 2 οικονομολόγοι της επιτροπής μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{5}{2}$ διαφορετικούς τρόπους (ένας από τους 6 οικονομολόγους δεν μπορεί να συμμετέχει στην επιτροπή). Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι η επιτροπή μπορεί να επιλεγεί κατά

$$\binom{5}{3}\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!}\frac{5!}{2!3!} = 100$$

διαφορετικούς τρόπους.

Άσκηση 1.22. Σε μία κλήρωση Lotto τοποθετούνται στην κληρωτίδα 49 σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το 49 και εκλέγονται στην τύχη 6 αριθμοί που κερδίζουν. Πόσες είναι οι διαφορετικές εξάδες που είναι δυνατό να κληρωθούν. i) Ποια είναι η πιθανότητα να κληρωθεί μία συγκεκριμένη εξάδα που έχουμε προσημειώσει; ii) Ποια είναι η πιθανότητα να περιέχονται α) και οι 6 αριθμοί β) 5 αριθμοί γ) 4 αριθμοί που κερδίζουν ανάμεσα σε 20 αριθμούς που έχουμε προσημειώσει;

Λύση. Το σύνολο Ω των δυνατών αποτελεσμάτων περιέχει όλες τις 6-άδες $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_6\}$ που αποτελούνται από 6 διαφορετικά στοιχεία του $B=\{1,2,\ldots,49\}$ (δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη, ενώ κάθε εξάδα πρέπει να έχει διαφορετικά στοιχεία). Συνεπώς το Ω αποτελείται από όλους τους συνδυασμούς των 49 ανά 6 και άρα

$$|\Omega| = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6!} = 13.983.816$$

i) Κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο (κάθε δυνατή εξάδα) έχει την ίδια πιθανότητα να κληρωθεί. Συνεπώς αν έχουμε προσημειώσει μία συγκεκριμένη εξάδα $A_0=\{\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6\}\}$, τότε από την Πρόταση 1.1 θα έχουμε ότι

$$P(A_0) = \frac{|A_0|}{|\Omega|} = \frac{1}{13983816} = 7.1511\times 10^{-8}.$$

ii)α Έστω A_6 το ενδεχόμενο ανάμεσα σε 20 αριθμούς που έχουμε προσημειώσει να περιέχονται και οι έξι που κερδίζουν. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι έχουμε προσημειώσει τους αριθμούς 1,2,…,20. Το σύνολο A_6 αποτελείται από όλες τις εξάδες του Ω με αριθμούς από το {1,2,...,20} διότι αν κληρωθεί κάποια από αυτές τις εξάδες θα έχουμε προβλέψει και τους έξι αριθμούς. Συνεπώς το A_6 αποτελείται από τους συνδυασμούς των 20 στοιχείων ανά 6 και άρα

$$P(A_6) = \frac{|A_6|}{|\Omega|} = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{20!6!43!}{6!14!49!} = \frac{20!43!}{14!49!} = 0.00277178 \approx 0.2\%$$

ii)β Έστω A_5 το ενδεχόμενο ανάμεσα σε 20 αριθμούς που έχουμε προσημειώσει να περιέχονται οι πέντε από τους 6 που κερδίζουν. Έστω ότι έχουμε προσημειώσει τους αριθμούς 1,2,…,20. Το σύνολο A_5 αποτελείται από όλες τις εξάδες του Ω με πέντε αριθμούς από το {1,2,...,20} και έναν αριθμό από το {21,22,…,49}. Το πλήθος των πεντάδων από το {1,2,...,20} είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των 20 ανά 5. Επομένως οι πέντε πρώτοι αριθμοί μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{20}{5}$ τρόπους. Επίσης, για κάθε μία από αυτές τις πεντάδες, ο αριθμός που υπολείπεται (για τη συμπλήρωση της εξάδας) μπορεί να επιλεγεί κατά 49-21+1 τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή μπορούμε να πούμε ότι το A_5 θα αποτελείται από $29\binom{20}{5}$ τρόπους. Συνεπώς,

$$P(A_5)=\frac{|A_5|}{|\Omega|}=\frac{29\binom{20}{5}}{\binom{49}{6}}=29\frac{20!6!43!}{5!15!49!}=29\cdot 6\frac{20!43!}{15!49!}=0.0321526\approx 3.2\%$$

ii)γ Έστω A_4 το ενδεχόμενο ανάμεσα σε 20 αριθμούς που έχουμε προσημειώσει να περιέχονται οι 4 από τους 6 που κερδίζουν. Έστω ότι έχουμε προσημειώσει τους αριθμούς 1,2,…,20. Το σύνολο A_4 αποτελείται από όλες τις εξάδες του Ω με 4 αριθμούς από το {1,2,...,20} και 2 αριθμούς από το {21,22,…,49}. Το πλήθος των τετράδων από το {1,2,...,20} είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των 20 ανά 4. Επομένως οι τέσσερεις πρώτοι αριθμοί μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{20}{4}$ τρόπους. Επίσης, για κάθε μία από αυτές τις τετράδες, οι δύο αριθμοί που υπολείπονται (για τη συμπλήρωση της εξάδας) μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{49-21+1}{2}$ τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή μπορούμε να πούμε ότι το A_4 θα αποτελείται από $\binom{49-21+1}{2}\binom{20}{4}$ στοιχεία. Συνεπώς,

$$P(A_4)=\frac{|A_4|}{|\Omega|}=\frac{\binom{49-20}{2}\binom{20}{4}}{\binom{49}{6}}=0.140668\approx 14\%.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Ορισμός 1.6. *Έστω $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_v\}$ ένα σύνολο με v στοιχεία. Μια k-άδα $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ η οποία αποτελείται από k στοιχεία του B ($a_i\in B$, $i=1,2,\ldots,k$) θα καλείται **συνδυασμός των v στοιχείων ανά k με επανάληψη***

Η διαφορά εδώ από τον ορισμό 1.5. (συνδυασμοί των v στοιχείων ανά k) είναι ότι σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο στοιχείο του B περισσότερες από μία φορές στην κ-άδα $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. Για αυτό το λόγο καλούνται και συνδυασμοί με επανάληψη.

Παράδειγμα 1.8. Οι δυνατοί συνδυασμοί των 4 γραμμάτων {α,β,γ,δ} ανά δύο με επανάληψη είναι οι εξής:

{α,α}, {α,β}, {α,γ}, {α,δ}, {β,β}, {β,γ}, {β,δ}, {γ,γ}, {γ,δ}, {δ,δ}

Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων των 4 γραμμάτων ανά δύο είναι 10. Ανάλογα με την Πρόταση 1.4. αποδεικνύεται και η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.6. *Το πλήθος των συνδυασμών των v στοιχείων ανά k με επανάληψη είναι ίσο με*

$$\binom{v+k-1}{k}.$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε τον επόμενο πίνακα

	οι k - άδες αποτελούνται από:	πλήθος :
Διατάξεις των ν ανά k	διατεταγμένα, διαφορετικά στοιχεία	$(\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$
Διατάξεις των ν ανά k *με επανάληψη*	διατεταγμένα, όχι απαραίτητα διαφορετικά στοιχεία	ν^k
Συνδυασμοί των ν ανά k	μη διατεταγμένα, διαφορετικά στοιχεία	$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$
Συνδυασμοί των ν ανά k *με επανάληψη*	μη διατεταγμένα, όχι απαραίτητα διαφορετικά στοιχεία	$\binom{\nu+k-1}{k}$

Προσεγγιστικός υπολογισμός του $n!$ μέσω του τύπου του Stirling.

Παρατηρούμε ότι, για αρκετά μεγάλες τιμές του n, ο υπολογισμός του $n!$ είναι αρκετά δύσκολος. Για το λόγο αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε το $n!$ χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο προσεγγιστικό τύπο που είναι γνωστός ως τύπος του *Stirling*:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Αυστηρότερα, αποδεικνύεται ότι

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \to_{n\to\infty} 1.$$

Για παράδειγμα έχουμε τον επόμενο πίνακα.

n	$n!$	$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$	$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$
2	2	1.919	1.0422
4	24	23.506	1.0210
6	720	710.078	1.0139
8	40320	39902.395	1.0104
10	3628800	3598695.618	1.0083
12	479001600	475687486.472	1.0069
14	87178291200	86661001740.598	1.0059
16	20922789888000	20814114415223.1	1.0052
18	6402373705728000	6372804626194316	1.0046
20	2432902008176640000	2422786846761135600	1.0041

Άσκηση 1.23 Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλεγούν 30 άνθρωποι από 100;

Λύση. Κάθε επιλογή μπορεί να παρασταθεί σαν μία 30-άδα $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{30}\}$ με $\alpha_i \in \{1,2,...,100\}$. Δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη και επιπλέον τα $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{30}$ πρέπει να είναι ανά δύο διαφορετικά (ο ίδιος άνθρωπος δεν μπορεί να επιλεγεί δύο φορές). Συνεπώς ζητείται το πλήθος των συνδυασμών των 100 ανά 30 (χωρίς επανάληψη),

$$\binom{100}{30} = \frac{100!}{30!70!}$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί είναι αρκετά μεγάλοι και συνεπώς δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός του παραπάνω πλήθους. Εναλλακτικά, θα χρησιμοποιήσουμε τον προσεγγιστικό τύπο του Stirling:

$$\binom{100}{30} = \frac{100!}{30!70!} \approx \frac{100^{100} e^{-100}\sqrt{2\pi 100}}{30^{30} e^{-30}\sqrt{2\pi 30} \cdot 70^{70} e^{-70}\sqrt{2\pi 70}} = \left(\frac{10}{3}\right)^{30} \left(\frac{10}{7}\right)^{70} \frac{1}{\sqrt{42\pi}} \approx 2.94 \times 10^{25}.$$