Κεφάλαιο Σειρές και μετασχηματισμός Fourier

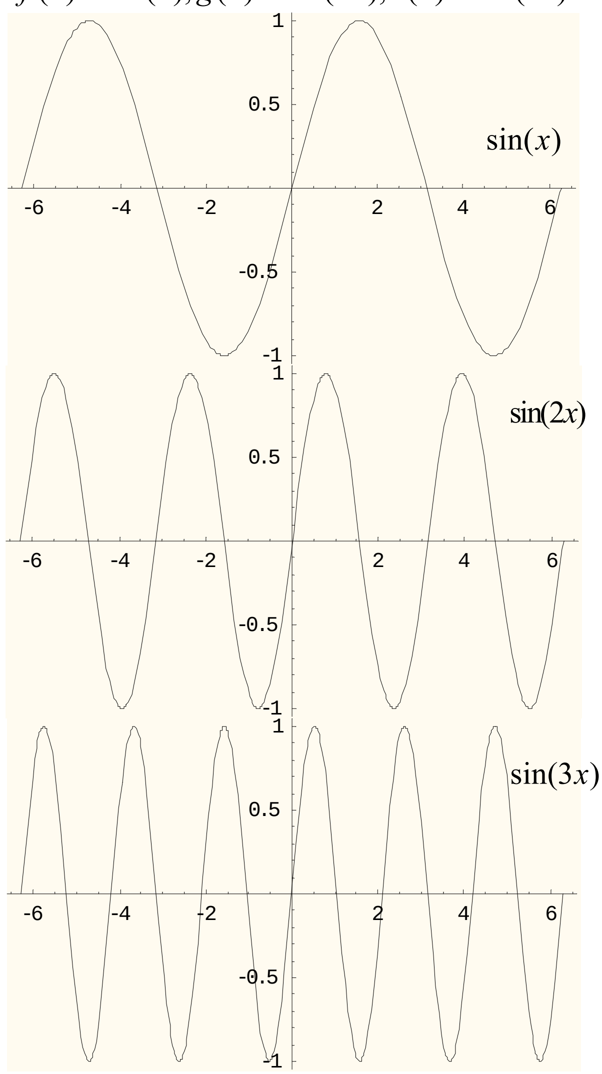
Ορισμοί

Μία συνάρτηση $f(x)$ είναι **περιοδική** με **περίοδο** T όταν ισχύει $f(x+T)=f(x)$. Η ελάχιστη δυνατή περίοδος λέγεται και θεμελιώδης περίοδος. Εμείς όταν λέμε περίοδο θα αναφερόμαστε σε αυτήν.

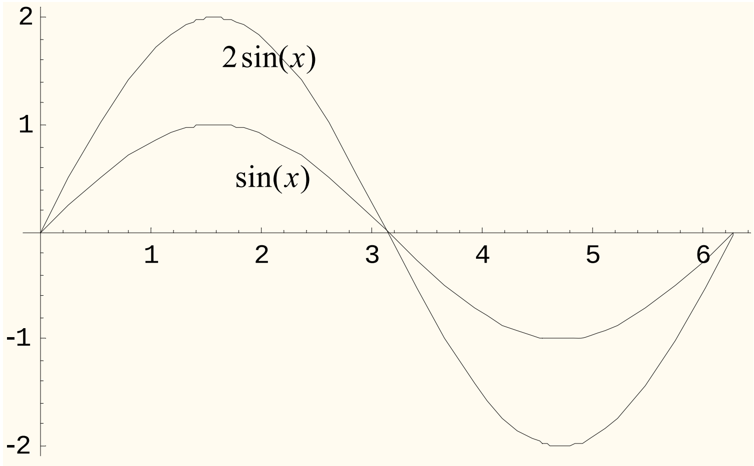
Μία συνηθισμένη περιοδική συνάρτηση είναι η $y=A\ \sin(\omega x)$ όπου το ω ονομάζεται (γωνιακή ή κυκλική) **συχνότητα** και το A είναι το **πλάτος**.

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι για την συνάρτηση $\sin(\omega x)$ όσο το ω μεγαλώνει τόσο μικραίνει η περίοδος της συνάρτησης η οποία ισούται με $T=2\pi/\omega$.

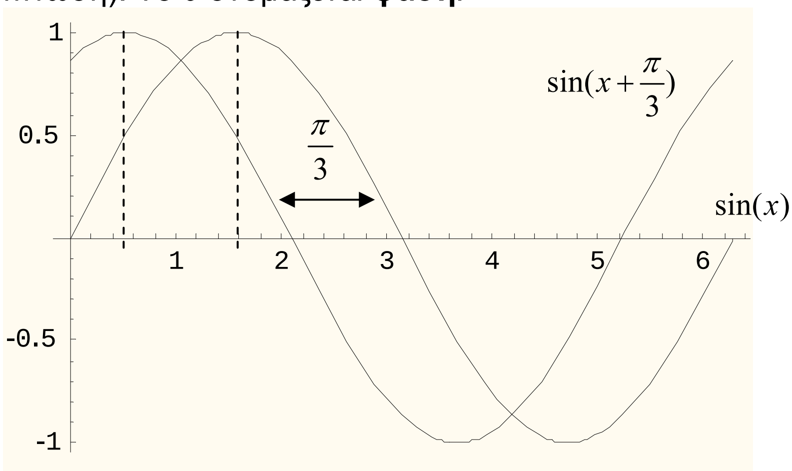
$f(x)=\sin(x), g(x)=\sin(2x), h(x)=\sin(3x)$



Επίσης για την συνάρτηση $y=A\ \sin(x)$ η οποία έχει πεδίο τιμών [*A*,-*A*] όσο το *A* (θετικό) μεγαλώνει τόσο το πλάτος της ταλάντωσης μεγαλώνει.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin(x+\theta)$ είναι η γραφική παράσταση της $\sin(x)$ μετατοπισμένη κατά –*θ* (αριστερά εάν το –*θ* είναι αρνητικό, δεξιά σε αντίθετη περίπτωση). Το *θ* ονομάζεται **φάση**.



Ανάλογη είναι και η συμπεριφορά της συνάρτησης συνημίτονο.

Ο **Jean Baptiste Fourier (1768-1830)** απόδειξε ότι κάθε περιοδική *y=f(χ)* συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως ένα άπειρο άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων της μορφής:

$$f(x) = A_0 + A_1\sin(\omega x+\phi_1) + A_2\sin(2\omega x+\phi_2) + ... + A_n\sin(n\omega x+\phi_n) + ...$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x+\phi_n)$$

και τελικά να προσεγγιστεί από ένα πεπερασμένο

$$f(x) \approx A_0 + A_1\sin(\omega x+\phi_1) + A_2\sin(2\omega x+\phi_2) + ... + A_n\sin(n\omega x+\phi_n)$$

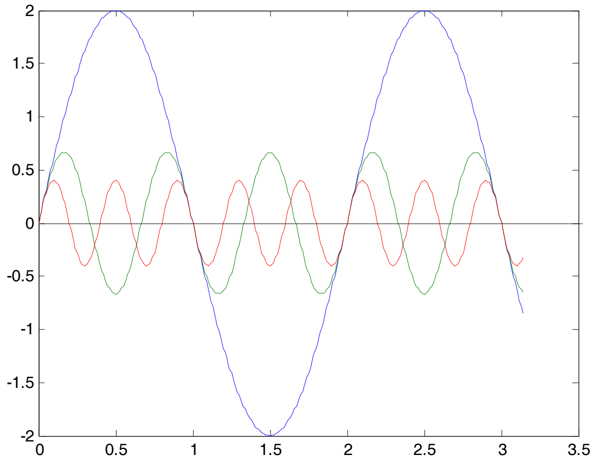
Αυτή είναι η βάση των σειρών Fourier. Ο όρος $A_1\sin(\omega x+\phi_1)$ ονομάζεται πρώτη αρμονική, ο $A_2\sin(2\omega x+\phi_2)$ δεύτερη αρμονική κ.λ.π.

Παράδειγμα:

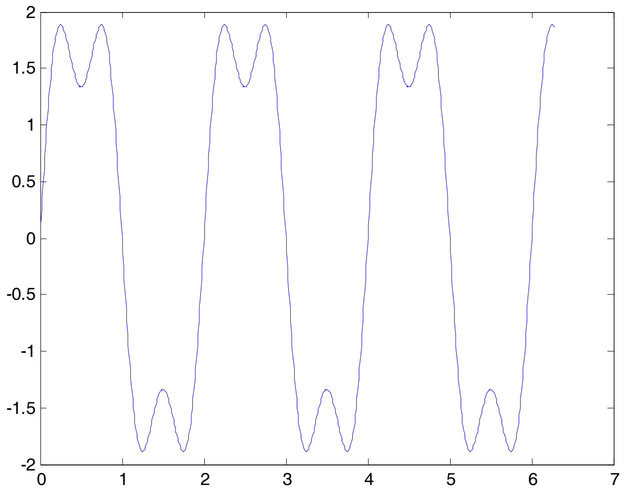
Έστω για $x \in [0,2\pi]$

$$y = 2\sin(\pi x) + \frac{2}{3}\sin(3\pi x) + \frac{2}{5}\sin(5\pi x)$$

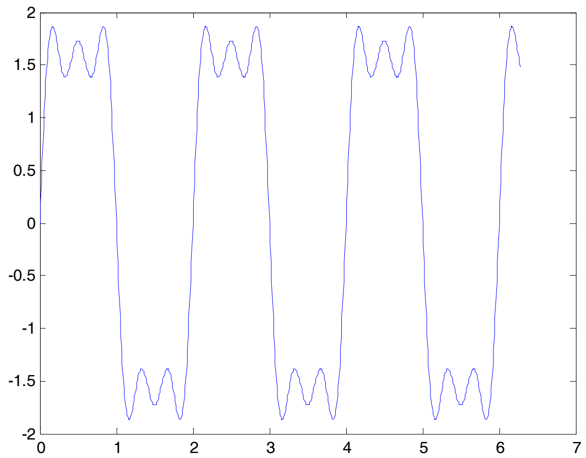
Οι τρεις αρμονικές ξεχωριστά είναι



Αν πάρω τους δύο πρώτους όρους του αθροίσματος έχω το γράφημα:



Αν πάρω και τους τρεις όρους του αθροίσματος έχω το γράφημα:

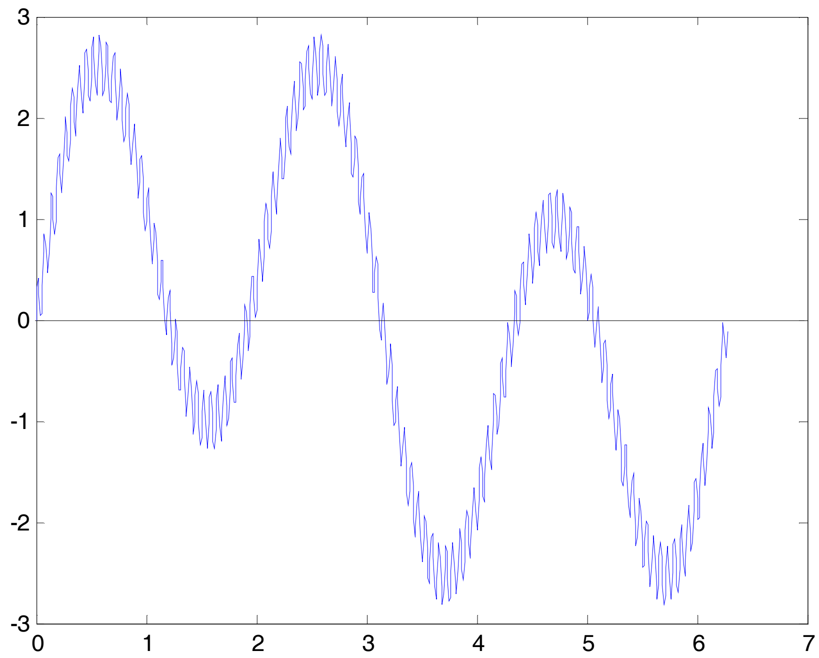


Είναι φανερό ότι προσθέτοντας και άλλους παρόμοιους όρους το γράφημα μοιάζει όλο και περισσότερο με ένα σήμα.

Επίσης όταν

$$y = \sin(x) + 2\sin(3x) + 0.3\sin(100x)$$

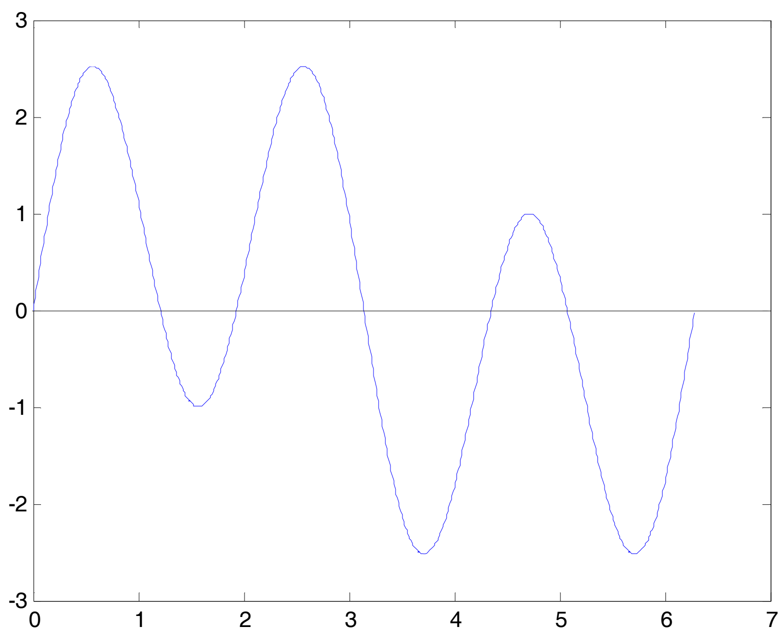
το γράφημα στο διάστημα [0,2π] είναι το ακόλουθο:



Αποκόπτοντας το τελευταίο όρο δηλαδή όταν

$$y = \sin(x) + 2\sin(3x)$$

παίρνουμε



Όπου μοιάζει η αποκοπή αυτού του όρου να λειτούργησε ως φίλτρο.

Τέτοια αναπτύγματα συναρτήσεων σε τριγωνομετρικά αθροίσματα βρίσκουν πολλές εφαρμογές. Για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το φιλτράρισμα θορύβου στην ανάλυση σημάτων. Επίσης στις τηλεπικοινωνίες βρίσκουν εφαρμογή στη μεταφορά του συνεχούς σήματος της φωνής μέσω δορυφόρου από ένα σημείο του πλανήτη σε ένα άλλο. Η μεταφορά του συνεχούς σήματος της φωνής, αφού ψηφιοποιηθεί, και η αποστολή του bit προς bit απαιτεί την επεξεργασία και μεταφορά μεγάλου όγκου δεδομένων. Εάν το σήμα αναπτυχθεί σε ένα τριγωνομετρικό άθροισμα, αρκεί να μεταφερθούν μόνο οι συντελεστές (φάσεις, συχνότητες και πλάτη) και στον προορισμό να εφαρμοστεί ο κατάλληλος τύπος ώστε να αναπαραχθεί το σήμα. Μία τέτοια διαδικασία είναι πολύ πιο οικονομική.

Από τη σχέση $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \phi_n)$ χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(n\omega x + \phi_n) = \sin(\phi_n)\cos(n\omega x) + \cos(\phi_n)\sin(n\omega x)$ έχουμε ότι $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\sin(\phi_n)\cos(n\omega x) + \cos(\phi_n)\sin(n\omega x)\right]$

Θέτοντας $a_0 = A_0$ και $a_n = A_n \sin(\phi_n), b_n = A_n \cos(\phi_n)$ και $\omega = 2\pi/T$ φθάνουμε στον τύπο

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{2\pi nx}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nx}{T})]}$$

ή $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\frac{2\pi nx}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nx}{T})]$ όπου $b_0 = 0$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos(\frac{2\pi nx}{T})dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin(\frac{2\pi nx}{T})dx$$

και οι σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές είναι

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Παρατήρηση

Ανάλογα κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως ένα άπειρο άθροισμα συνημιτονοειδών συναρτήσεων.

Από τη σχέση

$$f(x) = A_0 + A_1\cos(\omega x + \vartheta_1) + A_2\cos(2\omega x + \vartheta_2) + ... + A_n\cos(n\omega x + \vartheta_n) + ... =$$
$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega x + \vartheta_n)$$

χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(n\omega x + \vartheta_n) = \cos(\vartheta_n)\cos(n\omega x) - \sin(\vartheta_n)\sin(n\omega x)$$

Έχουμε ότι $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\cos(\vartheta_n)\cos(n\omega x) - \sin(\vartheta_n)\sin(n\omega x)\right]$

Θέτοντας $a_0 = A_0$ και $a_n = A_n\cos(\vartheta_n), b_n = -A_n\sin(\vartheta_n)$ και $\omega = 2\pi/T$

Φθάνουμε στον τύπο

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(\frac{2\pi nx}{T}) + b_n sin(\frac{2\pi nx}{T})]$$

και οι σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές είναι

$$A_n = \sqrt{a_n^{\;2} + b_n^{\;2}},\quad \vartheta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right).$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι γωνίες φάσεων μεταξύ του ημιτονοειδούς αναπτύγματος και του συνημιτονοειδούς αναπτύγματος διαφέρουν κατά $\pi/2$.

Δηλαδή $\vartheta_n + \varphi_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Σύγκλιση

Η σύγκλιση της σειράς Fourier επιτυγχάνεται στα σημεία που είναι συνεχής μία περιοδική συνάρτηση $f(x)$ εάν ισχύουν οι **συνθήκες Dirichlet** :

1. Η $f(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη σε μία περίοδο, δηλαδή ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$
2. Ο αριθμός των μεγίστων και ελαχίστων του $f(x)$ είναι πεπερασμένος στο διάστημα της περιόδου.
3. Η $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής με πεπερασμένο αριθμό ασυνέχειας στο διάστημα της περιόδου.

Τέλος, στα σημεία ασυνέχειας η σειρά Fourier συγκλίνει στο ημιάθροισμα των πλευρικών ορίων $\dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Εάν μας ζητείται στην εκφώνηση να αναπτύξουμε σε σειρά Fourier τη συνάρτηση και όχι απλά να βρούμε τη σειρά Fourier της συνάρτησης θα πρέπει να βρούμε στα σημεία ασυνέχειας το που συγκλίνει η σειρά.
Αναπτύσσοντας τη σειρά Fourier σε όλα τα σημεία που είναι η σειρά συνεχής και βρίσκοντας που συγκλίνει στα σημεία ασυνέχειας, μπορούμε να πούμε ότι η σειρά Fourier παριστάνει τη συνάρτηση στο διάστημα της περιοδικότητας της. Εξαιτίας της περιοδικότητας της συνάρτησης η σειρά την παριστάνει σε όλο το $\mathbb{R}$.

Χρήσιμοι τύποι στον υπολογισμό των σειρών Fourier

Οι άρτιοι είναι $n=2k$ όταν $\kappa=1,2,3,\ldots.$ οι περιττοί $n=2k+1$ όταν $k=0,1,2,3,\ldots$ ή $n=2k-1$ όταν $\kappa=1,2,3,4,5,\ldots..$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & n=2k \\ -1 & n=2k+1 \end{cases}$$

Χρήσιμοι τύποι: $cos(n\pi)=(-1)^n$, $sin(n\pi)=0$

Αν $n=2k, k\in\mathbb{Z}$ τότε $sin(n\frac{\pi}{2})=sin(k\pi)=0$.

Αν $n=2k+1, k\in\mathbb{Z}$ τότε $sin(n\frac{\pi}{2})=sin(k\pi+\frac{\pi}{2})=(-1)^k=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ οπότε

$$sin(n\frac{\pi}{2})=\begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Επίσης

$$cos(n\frac{\pi}{2})=\begin{cases} 0 & \mathbf{n=4k+1} \\ -1 & \mathbf{n=4k}+2 \\ 0 & \mathbf{n=4k}+3 \\ 1 & \mathbf{n=4k}+4 \end{cases}$$

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι

$$\sin(-a) = -\sin(a) \text{ και } \cos(-a) = \cos(a).$$

Επίσης ισχύουν:

$$\left(\frac{\sin(ax)}{a}\right)' = \cos(ax),\ \left(-\frac{\cos(ax)}{a}\right)' = sin(ax) \text{ και } \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' = e^{ax}.$$

Ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης είναι

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Με χρήση των παραπάνω τύπων μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα:

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + c$$

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + c$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int x'\sin(ax)\,dx = \frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int \sin(ax)\,dx =$$

$$= \frac{x\sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} + c$$

$$\int x\sin(ax)\,dx = -\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{1}{a}\int x'\cos(ax)\,dx =$$

$$= -\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{1}{a}\int \cos(ax)\,dx = -\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} + c$$

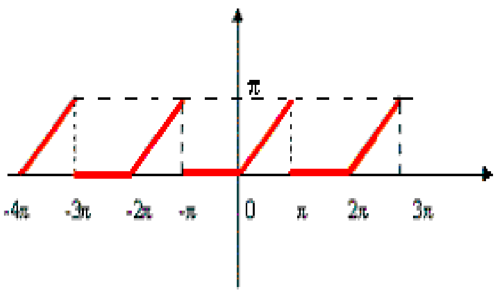
$$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int xe^{ax}dx = \int x\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \int x'\frac{e^{ax}}{a}dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\frac{1}{a}dx =$$

$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a^2}\int (e^{ax})'\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + c$$

Παράδειγμα

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier στο διάστημα [-π, π] την περιοδική συνάρτηση με γραφική παράσταση:



Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι η υπό μελέτη συνάρτηση στο διάστημα [-π,0] είναι σταθερά ίση με **μηδέν**, ενώ στο [0,π] ο τύπος της είναι **f(x)=x**, ώστε η γραφική της παράσταση να είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο (0,0) και τέλος το (π,π). Άρα ο γενικός τύπος της θα είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους $T=2\pi$ και $x_0=-\pi$ έχουμε το ανάπτυγμα Fourier της f(x) ως εξής:

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + \beta_n\sin(nx))$, όπου:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\cos(nx)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{0}^{\pi} x\cdot\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} x'\cdot\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{\sin(n\pi)}{n} - 0 - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{0}{n} - \frac{1}{n}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω αν λάβουμε υπόψη μας ότι

$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ n=2k \\ -1, & \alpha\nu\ n=2k+1 \end{cases}$, ως εξής: $a_n = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ n=2k \\ \dfrac{-2}{\pi(2k-1)^2}, & \alpha\nu\ n=2k\text{-}1 \end{cases}$, $k=1,2,3,\ldots$.

Ανάλογα υπολογίζουμε ότι:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\sin(nx)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{0}^{\pi} x\cdot\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)'dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} x'\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{n} + 0 + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\pi\cdot\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\pi\cdot\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\cdot 0\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ανάπτυγμα Fourier της f(x) είναι:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right).$$

Όπου

n	1	2	3	4	5	6
a_n	$-\frac{2}{\pi}$	0	$-\frac{2}{9\pi}$	0	$-\frac{2}{25\pi}$	0
b_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$

Για το σημείο $-\pi$ ισχύει ότι $f(-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi-) + f(-\pi+)\right) = \frac{1}{2}\left(\pi + 0\right) = \frac{\pi}{2}$ οπότε

η σειρά που υπολογίσαμε παριστάνει την $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x = -\pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ στο διάστημα περιοδικότητας της. Οπότε λόγω της περιοδικότητας η σειρά παριστάνει την $\tilde{f}$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Αναπτύξτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}1 \quad , & -\pi \le x \le 0 \\ x \quad , & 0 < x \le \pi\end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right)$$

Στην περίπτωση μας $T=2\pi$ και $x_0=-\pi$ και επομένως

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} xdx=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left|\sin(nx)\right|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} xd(\sin(nx))=\frac{1}{n\pi}\left([x\sin(nx)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left([\pi\sin(n\pi)-0\sin(n0)]-\int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)'dx\right)=\frac{1}{n^2\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[\cos(n\pi)-1]=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$$

Δηλαδή

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi n^2}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

Επίσης

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} x\left(\cos(nx)\right)'dx=$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x\left(\cos(nx)\right)' dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{0}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\left(x\right)'\cos(nx)dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{0}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin(nx)\right]_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[1-\cos(-n\pi)\right] - \frac{1}{n\pi}\left[\pi\cos(n\pi)-0\right] + 0$$

$$= \frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ και οι πρώτοι έξι συντελεστές a_n, b_n δίνονται στον παρακάτω πίνακα

n	1	2	3	4	5	6
a_n	$-\frac{2}{\pi}$	0	$-\frac{2}{9\pi}$	0	$-\frac{2}{25\pi}$	0
b_n	$\frac{\pi-2}{\pi}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi-2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\pi-2}{5\pi}$	$-\frac{1}{6}$

Παράδειγμα

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x, & -\pi \le x < 0\\ \beta x, & 0 \le x < \pi\end{cases} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Υπολογίζουμε αναλυτικά τους συντελεστές του αναπτύγματος Fourier για $T=2\pi$ και $x_0=0$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cdot\cos(nx) + \beta_n\cdot\sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} axdx + \int_{0}^{\pi}\beta xdx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(a\int_{-\pi}^{0} xdx + \beta\int_{0}^{\pi} xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(a\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \beta\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-a\frac{\pi^2}{2} + \beta\frac{\pi^2}{2}\right) = \pi\cdot\frac{(\beta-a)}{4}$$

Στα παρακάτω χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\cdot\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi}\beta x\cdot\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(a\int_{-\pi}^{0} x\cdot\frac{(\sin(nx))'}{n}dx + \beta\int_{0}^{\pi} x\cdot\frac{(\sin(nx))'}{n}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[x\cdot\sin(nx)\right]_{x=-\pi}^{x=0} - a\int_{-\pi}^{0}(x)'\cdot\sin(nx)dx + \beta\left[x\cdot\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \beta\int_{0}^{\pi}(x)'\cdot\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[x\cdot 0 - x\cdot 0\right] - a\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx + \beta\left[x\cdot 0 - x\cdot 0\right] - \beta\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-a\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=0} - \beta\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(-a(-\cos(0)+\cos(-n\pi)) - \beta(-\cos(n\pi)+\cos(0))\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(-a(-1+(-1)^n) - \beta(-(-1)^n+1)\right) = \frac{a-\beta+(-1)^n(\beta-a)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\cdot\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi}\beta x\cdot\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(a\int_{-\pi}^{0} x\cdot\frac{(-\cos(nx))'}{n}dx + \beta\int_{0}^{\pi} x\cdot\frac{(-\cos(nx))'}{n}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[-x\cdot\cos(nx)\right]_{x=-\pi}^{x=0} + a\int_{-\pi}^{0}(x)'\cdot\cos(nx)dx + \beta\left[-x\cdot\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} + \beta\int_{0}^{\pi}(x)'\cdot\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[-0\cdot\cos(0) - \pi\cdot\cos(-n\pi)\right] + a\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx + \beta\left[-\pi\cdot\cos(n\pi) + 0\cdot\cos(0)\right] + \beta\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[-\pi\cdot(-1)^n\right] + a\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=0} + \beta\left[-\pi\cdot(-1)^n\right] + \beta\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-a\pi\cdot(-1)^n + a\left[0-0\right] - \beta\pi\cdot(-1)^n + \beta\left[0-0\right]\right) \quad = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(a+\beta\right)$$

Έτσι, το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $f(x)$ είναι:

$$f(x) = \pi\cdot\frac{(\beta-a)}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a-\beta+(-1)^n(\beta-a)}{\pi n^2}\cdot\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(a+\beta\right)\cdot\sin(nx)\right].$$

Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x)=x^2$, $0\le x<2\pi$. Ποιες είναι οι τιμές για $x=0$ και για $x=2\pi$ της σειράς Fourier;

Λύση

Έχουμε $T=2\pi$ και $x_0=0$. Η σειρά Fourier δίνεται από την παράσταση $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$ όπου οι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f\left(x\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)dx = \text{(κάνοντας δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση)}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin\left(nx\right)}{n}+\frac{2x\cos\left(nx\right)}{n^2}-\frac{2}{n^2}\frac{\sin\left(nx\right)}{n}\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$\frac{4\pi\ \sin\left(2\pi n\right)}{n}+\frac{4\cos\left(2\pi n\right)}{n^2}-\frac{2}{n^2}\frac{\sin\left(2\pi n\right)}{\pi n}=\frac{4}{n^2}$$

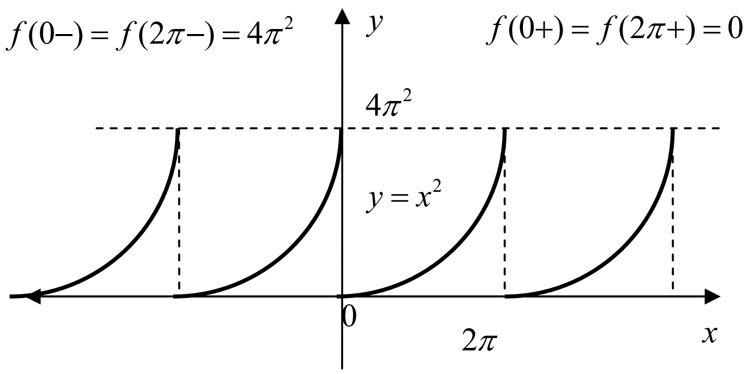
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx dx = \text{(κάνοντας δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση)}$$

$$=\left[\frac{-x^2\cos\left(nx\right)}{n}+\frac{2x\sin\left(nx\right)}{n^2}+\frac{2\cos\left(nx\right)}{n^3}\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$=\frac{-(2\pi)^2\cos\left(2\pi n\right)}{n}+\frac{4\pi\sin\left(2\pi n\right)}{n^2}+\frac{2\cos\left(2\pi n\right)}{n^3}-\frac{2\cos\left(0\right)}{n^3}=\frac{-4\pi}{n}$$

Άρα η σειρά Fourier της f έχει ως εξής:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) = \frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

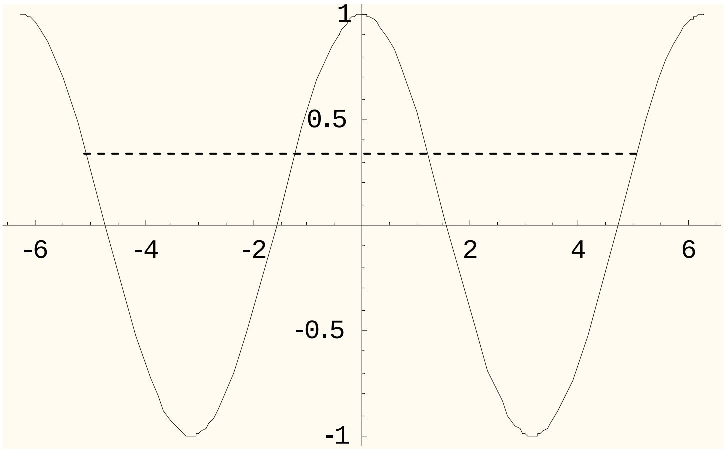


Η σειρά Fourier της f για $x=0$ και $x=2\pi$ συγκλίνει στην τιμή $\left(f(0+)+f(0-)\right)/2 = \left(f(2\pi+)+f(2\pi-)\right)/2 = 2\pi^2$

Αναπτύγματα Fourier σε άρτιες συναρτήσεις και σε περιττές συναρτήσεις

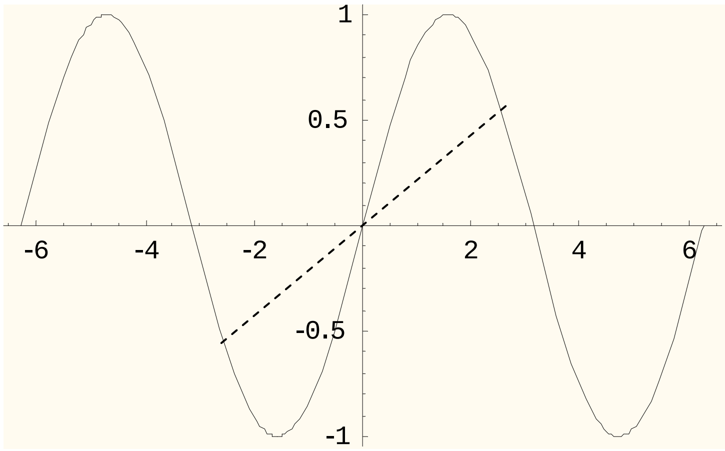
Μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *[-α,α]* είναι **άρτια** εφόσον ισχύει η σχέση *f(-x)=f(x)*. Οι άρτιες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα *yy'*.

Παράδειγμα η $y=cos(x)$



Μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $[-\alpha,\alpha]$ είναι **περιττή** εφόσον ισχύει η σχέση $f(-x)=-f(x)$. Οι περιττές συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα η $y=sin(x)$



Το **άθροισμα δύο άρτιων συναρτήσεων είναι πάντα άρτια** συνάρτηση, το **άθροισμα δύο περιττών συναρτήσεων είναι πάντα περιττή**. Το **άθροισμα άρτιας και περιττής συνάρτησης δεν μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε** ως άρτια ή περιττή.

Επίσης **το γινόμενο δύο άρτιων συναρτήσεων είναι πάντα άρτια** συνάρτηση, **το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων είναι πάντα άρτια**. Το γινόμενο **άρτιας και περιττής συνάρτησης είναι πάντα περιττή** συνάρτηση.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-a,a](a>0)$ και $x\in[-a,a]$ αν **η f είναι άρτια** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ και αν **η f είναι περιττή** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Σύμφωνα με το παραπάνω όταν το διάστημα $[x0,x0+T]$ **είναι της συμμετρικής μορφής** $[-T/2,T/2]$ τότε:

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια το $b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)sin(\frac{2\pi nx}{T})dx = 0$ αφού είναι ολοκλήρωμα άρτιας επί περιττής δηλαδή περιττής **σε συμμετρικής μορφής διάστημα.**

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή τόσο $a_0 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx = 0$ αφού είναι ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης όσο και $a_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)cos(\frac{2\pi nx}{T})dx = 0$ αφού είναι ολοκλήρωμα περιττής επί άρτιας δηλαδή περιττής **σε συμμετρικής μορφής διάστημα**.

Παράδειγμα

Να βρείτε τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases},$$

και στη συνέχεια να επαναπροσδιοριστεί στα σημεία $-\pi, 0$ ώστε η σειρά Fourier να παριστάνει την f σε όλο το $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι περιττή, άρα $a_n = 0$ και

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} 1\cdot sin(nx)dx + \int_{-\pi}^{0}\left(-1\right)\cdot sin(nx)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} 1\cdot sin(nx)dx + \int_{-\pi}^{0} -sin(-nx)d(-x)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} 1\cdot sin(nx)dx + \int_{0}^{-\pi} sin(-nx)d(-x)\right]$$

$$\overset{u=-x}{=} \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} 1\cdot sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} sin(nu)du\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[1-cos(n\pi)\right]=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\frac{4}{n\pi}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\\ 0, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

Οπότε

n	1	2	3	4	5	6	7
b_n	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	$\frac{4}{7\pi}$

Συνεπώς η σειρά είναι η

$$\frac{4}{\pi}\left[sin\,x+\frac{sin(3x)}{3}+\frac{sin(5x)}{5}+\frac{sin(7x)}{7}+...\right]$$

Για το σημείο $-\pi$ έχουμε $f(-\pi)=\frac{1}{2}\big(f(-\pi-)+f(-\pi+)\big)=\frac{1}{2}\big(1+(-1)\big)=0$

Για το σημείο 0 έχουμε $f(0)=\frac{1}{2}\big(f(0-)+f(0+)\big)=\frac{1}{2}\big(1+(-1)\big)=0$

οπότε εάν θεωρήσουμε την

$f(x)=\begin{cases}0, & x=-\pi\\ -1, & -\pi<x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$ η σειρά που υπολογίσαμε την παριστάνει σε το διάστημα της περιοδικότητας της και εξαιτίας της περιοδικότητας της συνάρτησης η σειρά την παριστάνει σε όλο το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Να βρείτε τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\\ 1, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι άρτια, άρα $b_n=0$ και

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2} 1dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} 1cos(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi n}sin(n\frac{\pi}{2})$$

Αν $n = 2k, k \in N$ τότε $sin(n\frac{\pi}{2}) = sin(k\pi) = 0$. Αν $n = 2k+1, k = 0,1,2,....$ τότε

$$sin(n\frac{\pi}{2}) = sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Επομένως

$$\frac{2}{\pi n}sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n = περιττός \\ 0, \quad n = άρτιος \end{cases}$$

Οι πρώτοι επτά συντελεστές συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0	$-\frac{2}{7\pi}$

Και η σειρά Fourier είναι η

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[cos\,x - \frac{cos(3x)}{3} + \frac{cos(5x)}{5} - \frac{cos(7x)}{7} + ...\right]$$

Παρατηρούμε ότι για τα σημεία ασυνέχειας $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ο παραπάνω τύπος αποτυγχάνει να υπολογίσει με ακρίβεια την τιμή της συνάρτησης.

Για παράδειγμα για $x = \frac{\pi}{2}$ η σειρά έχει τιμή

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3} + \frac{cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5} - \frac{cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{7} + ...\right] = \frac{1}{2}$$ η οποία δεν ισούται με το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Για αυτό θα πρέπει να ορίσουμε στα σημεία αυτά τις τιμές που θα πρέπει να έχει η συνάρτηση

Για το σημείο $-\frac{\pi}{2}$ έχουμε $f(-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\left(f(-\frac{\pi}{2}-)+f(-\frac{\pi}{2}+)\right)=\frac{1}{2}\left(0+1\right)=\frac{1}{2}$

Για το σημείο $\frac{\pi}{2}$ έχουμε $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\left(f(\frac{\pi}{2}-)+f(\frac{\pi}{2}+)\right)=\frac{1}{2}\left(1+0\right)=\frac{1}{2}$

οπότε εάν θεωρήσουμε την

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}, & x=-\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}, & x=\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

η σειρά που υπολογίσαμε την παριστάνει σε το διάστημα της περιοδικότητας της και εξαιτίας της περιοδικότητας της συνάρτησης η σειρά την παριστάνει σε όλο το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Αναπτύξτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης f(x)=|x|, -π ≤x<π.

Επειδή $f(-x)=f(x)$ η συνάρτηση είναι άρτια και επομένως αναπτύσσεται μόνο μέσω των συνημιτονικών αρμονικών $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0}|x|dx+\int_{0}^{\pi}|x|dx)=\frac{1}{2\pi}2\int_{0}^{\pi}|x|dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Για $n\ge 1$έχουμε:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|x|\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\frac{\sin nx}{n})^{/}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\sin n\pi}{n}+\frac{1}{n^2}(\cos n\pi-1)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases} 0,\alpha\nu & n=2k \\ \frac{-4}{\pi n^2}=\frac{-4}{\pi(2k+1)^2},\alpha\nu & n=2k+1 \end{cases}$$

$k=0,1,2,...$

Συνεπώς το ανάπτυγμα της f σε σειρά Fourier είναι

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2}$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν $f(x)=\sin(x/2)$, - π ≤ x < π.

Δεδομένου ότι ισχύει $\sin(\frac{-x}{2})=-\sin(\frac{x}{2})$ η συνάρτηση $f(x)=\sin(x/2)$ είναι περιττή. Αρκεί να βρούμε τα β_n στην παράσταση:

$$\sin(x/2)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$.

Για να υπολογίσουμε το $I=\int \sin(x/2)\sin(nx)dx$ χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(ax)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-n)x-\cos(a+n)x\right)$. Έχουμε

$$I=\int \sin(x/2)\sin(nx)dx=\int \frac{1}{2}\left[\cos(\frac{1}{2}-n)x-\cos(\frac{1}{2}+n)x\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1/2)-n}\sin(\frac{1}{2}-n)x-\frac{1}{(1/2)+n}\sin(\frac{1}{2}+n)x\right]+C.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1/2)-n}\sin(\frac{1}{2}-n)x-\frac{1}{(1/2)+n}\sin(\frac{1}{2}+n)x\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&=\frac{1}{(1/2)-n}\sin(\frac{1}{2}-n)\pi-\frac{1}{(1/2)+n}\sin(\frac{1}{2}+n)\pi\\
&=\frac{1}{(1/2)-n}\cos(n\pi)-\frac{1}{(1/2)+n}\cos(n\pi)\\
&=\frac{2n}{(1/4)-n^2}\cos(n\pi)\\
&=\frac{2n}{(1/4)-n^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

Η εκθετική μορφή του αναπτύγματος Fourier

Εάν i είναι η μιγαδική μονάδα (φανταστική μονάδα $i^2=-1$), τότε ισχύει ο τύπος του Euler:

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$$

Από αυτόν έχουμε επίσης

$$e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$$

Από την πρόσθεση των δύο αυτών ταυτοτήτων έχουμε ότι $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ και

αφαιρώντας $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

Οπότε

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{2\pi nx}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nx}{T})] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}} + e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}} - e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2i})] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} + a_n \frac{e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}}}{2i} - b_n \frac{e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2i})] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} + a_n \frac{e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} + ib_n \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}}}{2i^2} - ib_n \frac{e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2i^2})] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} + a_n \frac{e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} - b_n i \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} + b_n i \frac{e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2})] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{2\pi nx}{T}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}] =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n e^{i\frac{2\pi nx}{T}} + c_{-n} e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}]$$

όπου $c_0 = a_0$, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ και $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ ο συζυγής του.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για διαστήματα $[x_0, x_0+T]$ που είναι της συμμετρικής μορφής $[-T/2, T/2]$ τότε:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi nx}{T}} dx \text{ και } c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{i\frac{2\pi nx}{T}} dx,$$

Οπότε συνολικά $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi nx}{T}} dx,\ \ n=0,\pm 1,\pm 2,....$ και

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την εκθετική μορφή του αναπτύγματος Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = x$ για $x \in [-\pi, \pi)$.

Οπότε $T=2\pi$ και $x_0=-\pi$

Από τους τύπους έχουμε:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2-\pi^2}{4\pi} = 0$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{xe^{-inx}}{-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}(x)'\,dx\right) = -\frac{1}{2i\pi n}\left(xe^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi n}\left(xe^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)' dx\right) = \frac{i}{2\pi n}\left(xe^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{e^{-inx}}{in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi n}\left(\pi\left(e^{-in\pi}+e^{in\pi}\right) + \frac{1}{in}\left(e^{-in\pi}-e^{in\pi}\right)\right) = \frac{i}{n}(-1)^n$$

διότι

$$e^{-i\pi n} = \cos\pi n - i\sin\pi n$$

$$\underline{e^{i\pi n} = \cos\pi n + i\sin\pi n}$$

$$e^{-i\pi n} - e^{i\pi n} = -2i\sin\pi n = 0$$

$$e^{-i\pi n} + e^{i\pi n} = 2\cos\pi n = 2(-1)^n$$

Οι συντελεστές για n=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4 συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
c_n	$-\frac{i}{4}$	$\frac{i}{3}$	$-\frac{i}{2}$	i	0	$-i$	$\frac{i}{2}$	$-\frac{i}{3}$	$\frac{i}{4}$

Και τελικά

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την εκθετική μορφή του αναπτύγματος Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

Οπότε $T=2$ και $x_0=-1$

Από τον τύπο

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{2}}dx = \frac{1}{2}\Big(\int_{-1}^{-0.5} -e^{-i\pi nx}dx + \int_{-0.5}^{0.5} e^{-i\pi nx}dx + \int_{0.5}^{1} -e^{-i\pi nx}dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{-1}{-i\pi n}e^{-i\pi nx}\right]_{-1}^{-0.5} + \left[\frac{1}{-i\pi n}e^{-i\pi nx}\right]_{-0.5}^{0.5} + \left[\frac{-1}{-i\pi n}e^{-i\pi nx}\right]_{0.5}^{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{i2\pi n}\left(e^{i\pi n/2} - e^{i\pi n} - e^{-i\pi n/2} + e^{i\pi n/2} + e^{-i\pi n} - e^{-i\pi n/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{i2\pi n}\left(2e^{i\pi n/2} - 2e^{-i\pi n/2}\right) = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \sin c\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

διότι

$$e^{-i\pi n} = \cos\pi n - i\sin\pi n \qquad e^{-i\pi n/2} = \cos(\pi n/2) - i\sin(\pi n/2)$$

$$e^{i\pi n} = \cos\pi n + i\sin\pi n \qquad \text{και} \quad e^{i\pi n/2} = \cos(\pi n/2) + i\sin(\pi n/2)$$

$$e^{-i\pi n} - e^{i\pi n} = -2i\sin\pi n = 0 \qquad e^{i\pi n/2} - e^{-i\pi n/2} = 2i\sin(\pi n/2)$$

Εδώ εισάγουμε τον συμβολισμό $\frac{\sin(x)}{x} = \sin c(x)$.

Επίσης υπολογίζουμε

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\Big(\int_{-1}^{-0.5} -1dx + \int_{-0.5}^{0.5} dx + \int_{0.5}^{1} -1dx\Big) = \frac{1}{2}\left(\left[-x\right]_{-1}^{-0.5} + \left[x\right]_{-0.5}^{0.5} + \left[-x\right]_{0.5}^{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0.5 - 1 + 0.5 + 0.5 - 1 + 0.5\right) = 0$$

Οπότε αφού ισχύει $\sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, & n = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$

Οι συντελεστές για n=-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5 συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
c_n	$\frac{2}{5\pi}$	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$

Και τελικά

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}e^{-i\pi nx} =$$

$$= \frac{2}{\pi}e^{i\pi x} - \frac{2}{3\pi}e^{i3\pi x} + \frac{2}{5\pi}e^{i5\pi x} + \dots$$

$$+ \frac{2}{\pi}e^{-i\pi x} - \frac{2}{3\pi}e^{-i3\pi x} + \frac{2}{5\pi}e^{-i5\pi x} + \dots$$

Το φάσμα συχνοτήτων

Όταν ένα κύμα αναλύεται μέσω μιας σειράς Fourier σε άθροισμα ημιτονοειδών (ή συνημιτονοειδών) αρμονικών το γράφημα των πλατών A_0 και A_n $n \geq 1$ λέγεται **διακριτό φάσμα πλατών** και το γράφημα των φάσεων φ_n (ή των θ_n) λέγεται **διακριτό φάσμα φάσεων.** Τα δύο μαζί αποτελούν το **διακριτό φάσμα συχνοτήτων**.

Είχαμε δει ότι για την τριγωνομετρική μορφή των σειρών Fourier το πλάτος των αρμονικών και η φάση τους συνδέεται με τους συντελεστές της σειράς με βάση τους τύπους $A_0 = a_0$ $A_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}$, $\phi_n = \arctan\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ εάν αναπτύσσεται σε ημίτονα και $\vartheta_n = \arctan\left(\dfrac{-b_n}{a_n}\right)$ όταν έχουμε συνημιτονικές αρμονικές.

Υπενθυμίζουμε ότι οι γωνίες φάσεων μεταξύ του ημιτονοειδούς αναπτύγματος και του συνημιτονοειδούς αναπτύγματος διαφέρουν κατά $\pi/2$. Δηλαδή $\vartheta_n + \varphi_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα

Η σειρά Fourier της άρτιας περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in$ ℝ, αν

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

βρήκαμε ότι έχει συντελεστές $b_n = 0$ και $a_0 = \dfrac{1}{2}$, $a_n = \dfrac{2}{\pi n} sin(n\dfrac{\pi}{2}) = sinc(n\dfrac{\pi}{2})$

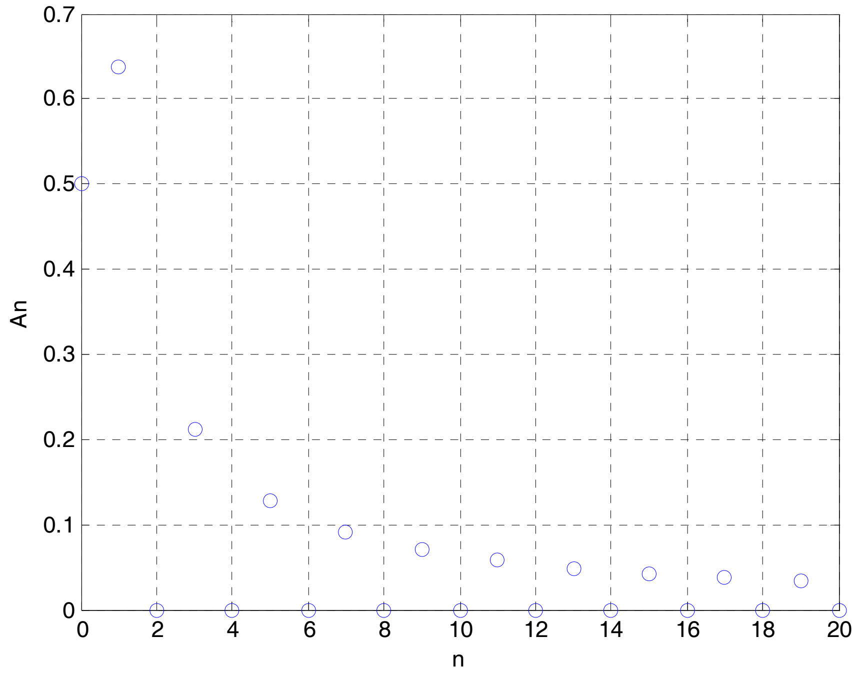
οπότε

$$A_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} = \sqrt{a_n^{\ 2}} = |a_n|,\ \ \varphi_n = \frac{\pi}{2} - \vartheta_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0).$$

Οι συντελεστές A_n για n=0..10 συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

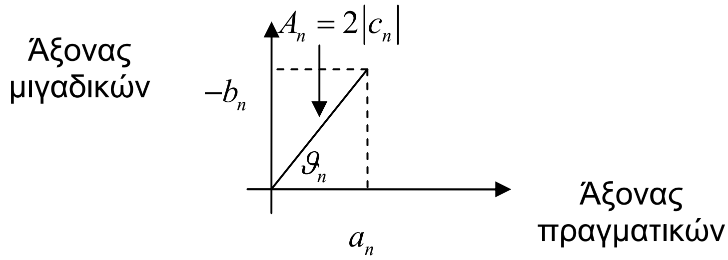
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0	$\frac{2}{7\pi}$	0	$\frac{2}{9\pi}$	0

και το διακριτό φάσμα πλατών είναι το ακόλουθο:



Στην περίπτωση της εκθετικής μορφής έχουμε

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \Rightarrow |c_n| = \sqrt{\frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{4}} \Rightarrow A_n = 2|c_n|$$, και παρόμοια $A_n = 2|c_{-n}|$.



Από το μέτρο των συντελεστών $|c_n|$ μπορώ να βρω το πλάτος $A_n = 2|c_n|$ για κάθε μία από τις αρμονικές συνιστώσες του αναπτύγματος σε εκθετική μορφή. Επίσης, από τη σχέση $\phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ή την $\vartheta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$ και $\vartheta_n + \varphi_n = \frac{\pi}{2}$ μπορώ να βρω τις αντίστοιχες φάσεις. Επίσης ισχύει $A_0 = a_0 = c_0$. Έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε και το φάσμα των συχνοτήτων για την περίπτωση των όρων της εκθετικής μορφής του αναπτύγματος Fourier.

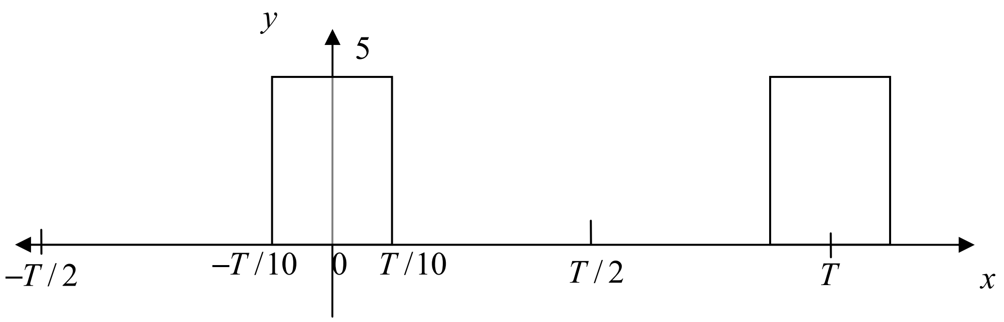
Παράδειγμα

Εάν π.χ. $c_1 = 4 - 3i$ μπορώ να πω ότι η συνιστώσα αυτή έχει πλάτος $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ και γωνία φάσης $\arctan(3/4) = 36.8°$ (για συνημιτονικά αναπτύγματα).

Παράδειγμα

Να βρείτε την εκθετική μορφή του αναπτύγματος Fourier ενός παλμού με πλάτος 5 και διάρκεια T/5 που επαναλαμβάνεται με περίοδο T. Βρείτε τη συνάρτηση που τον περιγράφει και σχεδιάστε τον. Σχεδιάστε το διακριτό φάσμα πλατών και το διακριτό φάσμα των φάσεων.

Η συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=\begin{cases} 0, & -T/2 \le x < -T/10 \\ 5, & -T/10 \le x < T/10 \\ 0, & T/10 \le x < T/2 \end{cases}$ και γράφημα :



Από τον τύπο

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi n x}{T}}dx = \frac{1}{T}\int_{-T/10}^{T/10} 5e^{-i\frac{2\pi n x}{T}}dx =$$

$$= \frac{5}{T}\left[\frac{1}{-i\frac{2\pi n}{T}}e^{-i\frac{2\pi n x}{T}}\right]_{-T/10}^{T/10} = -\frac{5}{i2\pi n}\left(e^{-i\frac{\pi n}{5}} - e^{i\frac{\pi n}{5}}\right) = \frac{5}{\pi n}sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) = sinc\left(\frac{\pi n}{5}\right)$$

Αφού

$$\left.\begin{aligned} e^{-i\frac{\pi n}{5}} &= cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) - i\,sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) \\ e^{i\frac{\pi n}{5}} &= cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{-i\frac{\pi n}{5}} - e^{\frac{\pi n}{5}} = -2i\,sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)$$

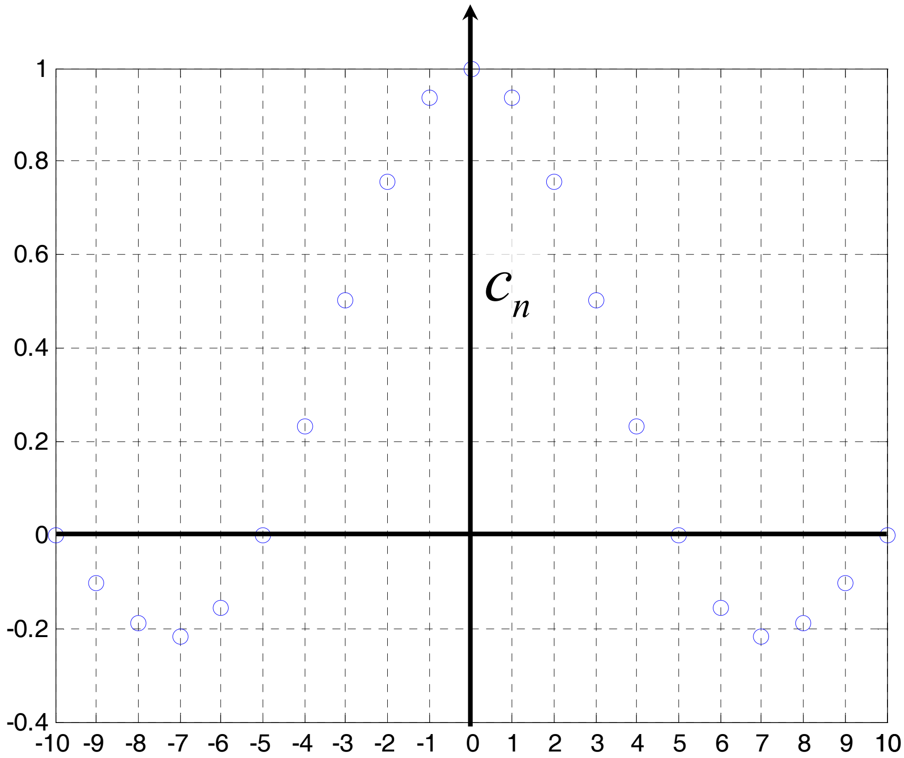
Επίσης υπολογίζουμε

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{T}\int_{-T/10}^{T/10} 5dx = \frac{5}{T}\left[x\right]_{-T/10}^{T/10} = 1 .$$

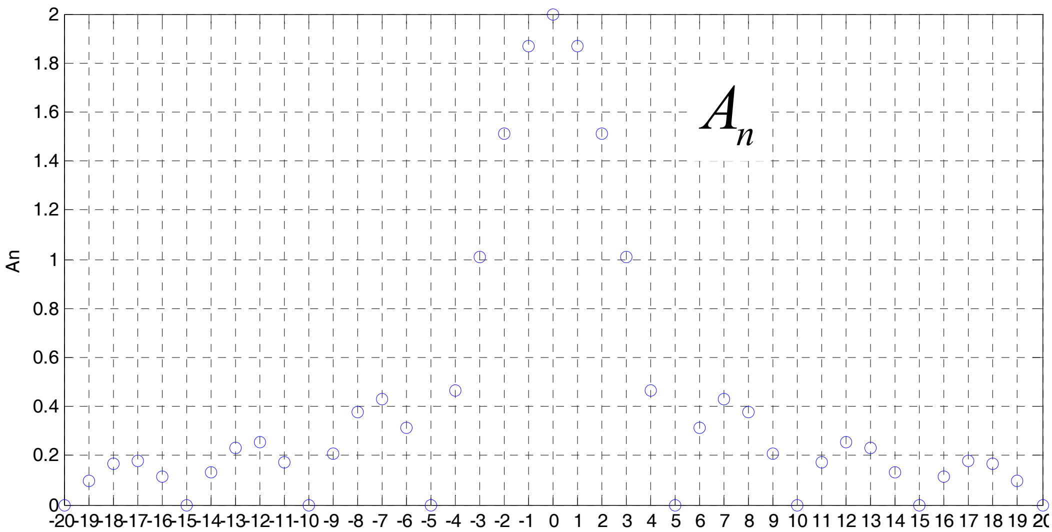
Οι συντελεστές για n=-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5 συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
c_n	$\frac{sin(\pi)}{\pi}$	$\frac{5sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{4\pi}$	$\frac{5sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)}{3\pi}$	$\frac{5sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2\pi}$	$\frac{5sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\pi}$	1	$\frac{5sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\pi}$	$\frac{5sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2\pi}$	$\frac{5sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)}{3\pi}$	$\frac{5sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{4\pi}$	$\frac{sin(\pi)}{\pi}$

Παρατηρούμε ότι τα c_n είναι πραγματικοί αριθμοί οπότε τα πλάτη ισούται με το μέτρο ενός πραγματικού αριθμού που είναι ο ίδιος ο αριθμός.



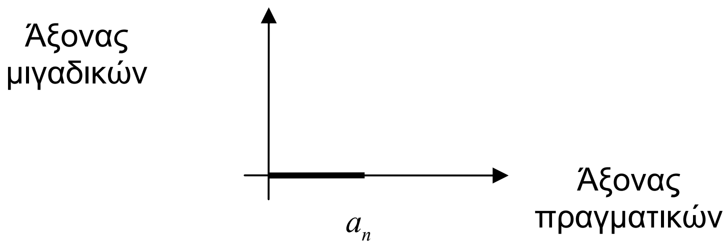
Αν δούμε πιο αναλυτικά το φάσμα πλατών παρατηρούμε ότι η πέμπτη, η δέκατη, η δέκατη πέμπτη κ.λ.π αρμονική είναι 0. Οπότε όπως και η σταθερή c_0 δεν έχουν φάση. Το φάσμα πλατών $\left(A_n = 2|c_n|\right)$ είναι το ακόλουθο:



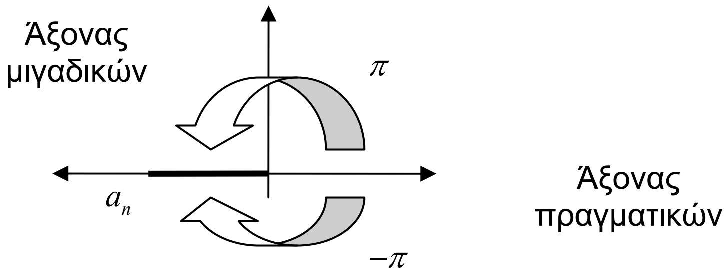
Επίσης, παρατηρούμε ότι οι συντελεστές έχουν μόνο πραγματικό μέρος Δηλαδή ισχύει $c_n = \sin c\left(\frac{\pi n}{5}\right) = \frac{a_n - ib_n}{2} \Rightarrow b_n = 0,\ \ a_n = 2\sin c\left(\frac{\pi n}{5}\right)$.

Οπότε οι γωνίες φάσης $\vartheta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$ έχουν τόξο εφαπτομένης 0 (για συνημιτονικά αναπτύγματα). Άρα η γωνία φάσης μπορεί να πάρει τιμές -π,0,π.

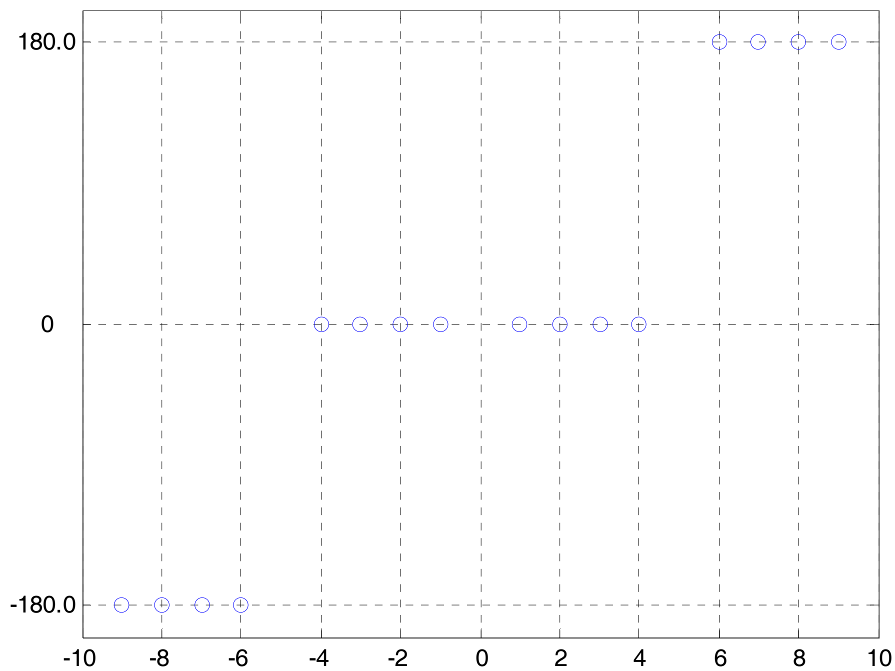
Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα για n=-4,-3,-2,-1,1,2,3,4 έχουμε συντελεστή c_n θετικό, οπότε και το α_n θετικό. Δηλαδή έχουμε ένα σχήμα της μορφής:



και συμπεραίνομε ότι η φάση θα είναι 0, για n=-4,-3,-2,-1,1,2,3,4.
Όταν το c_n όπως φαίνεται από το σχήμα είναι αρνητικό (n=-9,-8,-7,-6, 6,7,8,9) τότε και το α_n θα πρέπει να είναι αρνητικό.



Συμπεραίνουμε ότι η φάση θα είναι -π ή π. Επιλέγουμε να είναι –π για n=-9, -8,-7,-6 και π για n=6,7,8,9.
Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι το φάσμα των φάσεων είναι:



Μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί την επέκταση των σειρών Fourier στη γενική κατηγορία των συναρτήσεων (περιοδικών και μη). Όπως και στις σειρές οι συναρτήσεις θα εκφράζονται με τη βοήθεια μιγαδικών εκθετικών διαφόρων συχνοτήτων. Ωστόσο, οι συχνότητες αυτές δεν είναι διακριτές αλλά συνεχείς. Έτσι η συνάρτηση έχει ένα συνεχές φάσμα.

Από την αναπαράσταση μίας συνάρτησης με εκθετική σειρά Fourier γνωρίζουμε ότι

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega x}dx \Rightarrow c_nT = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega x}dx$$

Παίρνοντας το όριο $T \to \infty$ τότε $c_nT \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$. Συμβολίζουμε με $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ και με αυτό το ολοκλήρωμα μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση *f(x)* σε μία συνάρτηση με μεταβλητή τη κυκλική συχνότητα ω. Αυτό ισχύει διότι $T = 2\pi/\omega$ οπότε και το ολοκλήρωμα θα εξαρτάται από το ω.

Παρατήρηση: Πολλές φορές στη βιβλιογραφία η μεταβλητή του ολοκληρώματος είναι t ωστόσο για επιλέγουμε τη χρήση της μεταβλητής x είμαστε σε αρμονία με το συμβολισμό που επιλέξαμε στις σειρές Fourier.

Ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται

$$\mathbb{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

Την αντίστροφη δουλειά κάνει ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier**

$$f(x) = \mathbb{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Με το μετασχηματισμό Fourier μας δίνεται η δυνατότητα να περιγράψουμε μη περιοδικές συναρτήσεις με τη χρήση συναρτήσεων με συχνότητα. Δηλαδή μπορούμε να μετασχηματίσουμε συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου σε συναρτήσεις στο πεδίο συχνοτήτων.

Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού είναι μιγαδική ποσότητα. Επίσης έχουμε ότι

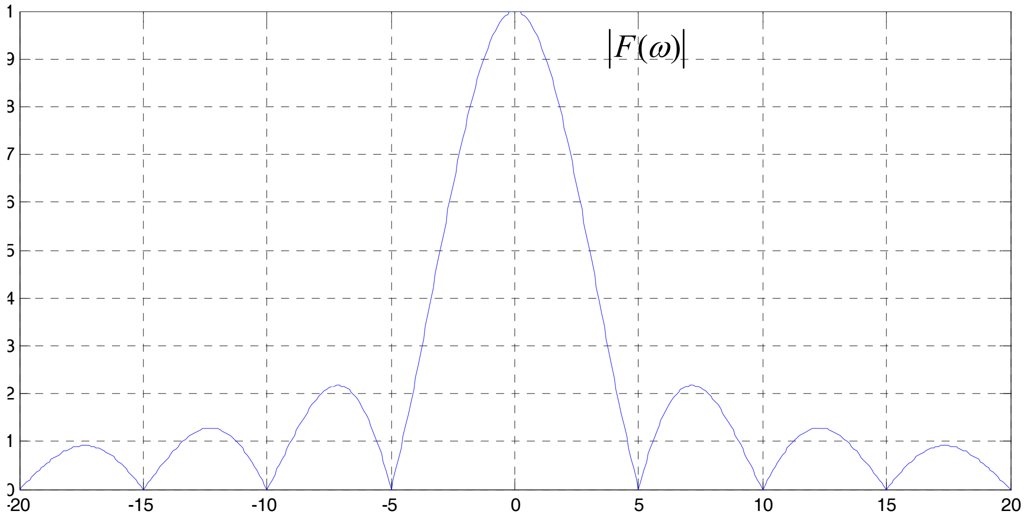
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\omega x - i\sin\omega x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$$

Συμβολίζουμε $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx, B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$ οπότε

$$F(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$$

Το μέτρο $|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ και η φάση $\varphi(\omega) = \arctan\frac{B(\omega)}{A(\omega)}$

Για τον παλμό με πλάτος τ έχουμε συνεχές φάσμα :



Χαρακτηριστικοί μετασχηματισμοί Fourier:

f(x)	$\mathbb{F}\{f(x)\}$
$\delta(x)$	1
A	$2\pi A\delta(\omega)$
$u(x)$	$\pi\delta(\omega)+1/(i\omega)$
$sgn(x)=u(x)-u(-x)$	$2/(i\omega)$
Παλμός $u(x+\tau/2)-u(x-\tau/2)$	$\tau\sin(\omega\tau/2)/(\omega\tau/2)$
$e^{-ax}u(x)$	$1/(a+i\omega)$
$e^{-ax}u(-x)$	$1/(a-i\omega)$
$e^{i\varphi x}$	$2\pi\delta(\omega-\varphi)$
$\cos(\varphi x)$	$\pi[\delta(\omega+\varphi)+\delta(\omega-\varphi)]$
$\sin(\varphi x)$	$i\pi[\delta(\omega+\varphi)-\delta(\omega-\varphi)]$

Μερικές από τις **ιδιότητες** που ισχύουν:
Ο μετασχηματισμός Fourier και αντίστροφός του είναι **γραμμικός**, δηλαδή ισχύει:

$$\mathbb{F}\{af(x)+bg(x)\}=a\mathbb{F}\{f(x)\}+b\mathbb{F}\{g(x)\}$$

$$\mathbb{F}^{-1}\{aF(\omega)+bY(\omega)\}=a\mathbb{F}^{-1}\{F(\omega)\}+b\mathbb{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$$

Όταν $\mathbb{F}\{f(x)\}=F(\omega)$ ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:

$$\mathbb{F}\{e^{i\varphi t}f(x)\}=F(\omega-\varphi)$$

$$\mathbb{F}\{f(x-a)\}=e^{-i\omega a}F(\omega)$$

$$\mathbb{F}\{f(ax)\}=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

$$\mathbb{F}\{\cos(ax)f(x)\}=\frac{1}{2}(F(\omega-a)+F(\omega+a))$$

Και για την παράγωγο ισχύει:

$$\mathbb{F}\{f^{n}(x)\}=\left(i\omega\right)^{n}F(\omega)$$

όταν όπως είπαμε $F(\omega)=\mathbb{F}\{f(x)\}$.

Αν οι συναρτήσεις *f(x), g(x),* είναι συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς σε όλο το σύνολο των πραγματικών ορίζουμε ως **συνέλιξη** *f(x)*g(x)* των δύο συναρτήσεων

$$(f*g)(x)=f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du$$

Για τη συνέλιξη ισχύουν τα εξής:

$$\mathbb{F}\{\left(f*g\right)(x)\}=\mathbb{F}\{f(x)\}\cdot\mathbb{F}\{g(x)\}=F(\omega)\cdot G(\omega)$$

$$\mathbb{F}^{-1}\{F(\omega)\cdot G(\omega)\}=\mathbb{F}^{-1}\{F(\omega)\}*\mathbb{F}^{-1}\{G(\omega)\}=f(x)*g(x)$$

όταν $\mathbb{F}\{f(x)\}=F(\omega),\mathbb{F}\{g(x)\}=G(\omega)$.

Σχέση μετασχηματισμού Fourier με μετασχηματισμό Laplace

Εάν ορίσουμε τη συνάρτηση

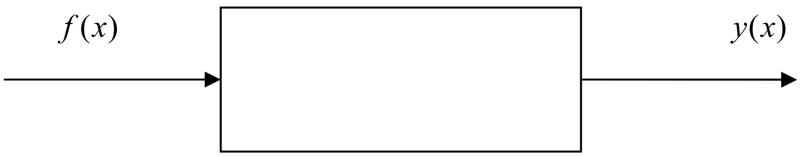
$$f(x)=\begin{cases}e^{-ax}g(x) & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$L\{f(x)\}(s)=F(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(x)dt=\int_{0}^{\infty}e^{-ax}e^{-\omega ix}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix}g(x)dx=\mathbb{F}\{g(x)\}(\omega)=G(\omega)$$

όπου θεωρήσαμε ότι $s=\alpha+\omega i$.

Εφαρμογή:

Έστω ότι έχουμε το σύστημα:



στο οποίο η είσοδος και η έξοδος σχετίζονται από τη διαφορική εξίσωση:

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=bf(x)$$

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέρη:

$$\left(i\omega\right)^2a_2\mathrm{Y}(\omega)+\left(i\omega\right)^1a_1\mathrm{Y}(\omega)+a_0\mathrm{Y}(\omega)=bF(\omega)$$

Όπου $\mathbb{F}(y(x))=Y(\omega)$, $\mathbb{F}(f(x))=F(\omega)$ οι μετασχηματισμοί των *y(x),f(x)* αντίστοιχα.

Λύνω και έχω

$$\mathbb{F}(y(x)) = \Upsilon(\omega) = \frac{b}{\left[(i\omega)^2 a_2 + (i\omega) a_1 + a_0\right]} F(\omega) = \frac{b}{\left[-\omega^2 a_2 + (i\omega) a_1 + a_0\right]} F(\omega) = H(\omega) F(\omega)$$

όπου η $H(\omega) = \dfrac{b}{\left[-\omega^2 a_2 + (i\omega) a_1 + a_0\right]}$ ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς ή απόκριση** του συστήματος και συνδέει τους μετασχηματισμούς Fourier της εισόδου και της εξόδου του συστήματος. Παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς έχουμε τη λύση

$$y(x) = \mathbb{F}^{-1}\{H(\omega)F(\omega)\} = \mathbb{F}^{-1}\{H(\omega)\} * \mathbb{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

Παράδειγμα: Έστω έχουμε ένα σύστημα στο οποίο η είσοδος και η έξοδος σχετίζονται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} + 1y = 2\delta(x)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε είσοδο $\delta(x)$ οπότε $\mathbb{F}(\delta(x)) = 1$ οπότε εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέρη:

$$(i\omega)\Upsilon(\omega) + \Upsilon(\omega) = 2\mathbb{F}(\delta(x))$$

όπου $\mathbb{F}(y(x)) = Y(\omega)$. Λύνω και έχω

$$\mathbb{F}(y(x)) = \Upsilon(\omega) = H(\omega)F(\omega) = \frac{2}{1+\omega i} \cdot F(\omega) = \frac{2}{1+\omega i} \cdot 1 = \frac{2}{1+\omega i}$$

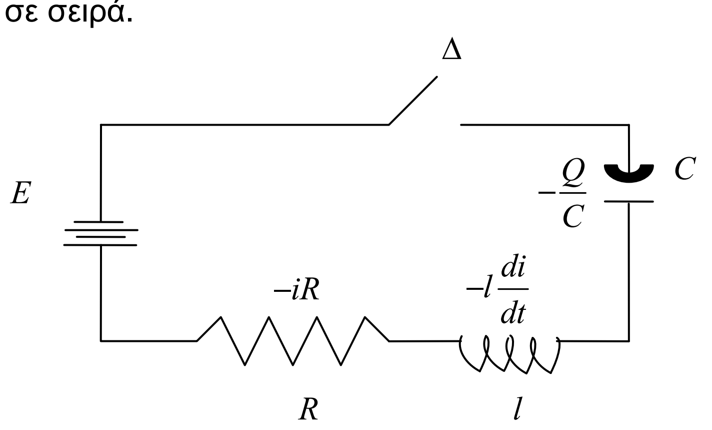
Άρα το σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega i}$.

Η απόκρισή του στην είσοδο $\delta(x)$:

$$y(x) = \mathbb{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \mathbb{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \mathbb{F}^{-1}\{\frac{2}{\omega i + 1}\} = 2e^{-x}.$$

Εφαρμογή: Ηλεκτρικά κυκλώματα

Έστω ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E (Volt)*, η οποία μπορεί να είναι σταθερή ή να εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή *E=E(t),* πυκνωτή χωρητικότητας *C (Farad)*, πηνίο αυτεπαγωγής *l (Herny),* ωμική αντίσταση *R (Ohm)* και διακόπτη *Δ*, συνδεδεμένα σε σειρά.



Θεωρούμε το κύκλωμα ως ένα σύστημα με είσοδο την εφαρμοζόμενη τάση και έξοδο την ένταση του ρεύματος. Δεχόμαστε ότι $i(0)=0$. Εφαρμόζουμε τον πρώτο νόμο του Kirchhoff ο οποίος μας δίνει

$$E-\frac{1}{C}\cdot Q-l\frac{di}{dt}-R\cdot i=0\Rightarrow l\frac{di}{dt}+R\cdot i+\frac{Q}{C}=E,$$

Παραγωγίζοντας τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον πρώτο νόμο του Kirchhoff οδηγούμαστε στη δευτέρας τάξης διαφορική εξίσωση

$$l\frac{d^2i}{dt^2}+R\cdot\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dE}{dt}$$

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέρη:

$$\mathbb{F}\left(l\frac{d^2i}{dt^2}+R\cdot\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i\right)=\mathbb{F}\left(\frac{dE}{dt}\right)\Rightarrow$$

$$l\mathbb{F}\left(\frac{d^2i}{dt^2}\right)+R\cdot\mathbb{F}\left(\frac{di}{dt}\right)+\frac{1}{C}\mathbb{F}\left(i\right)=\mathbb{F}\left(\frac{dE}{dt}\right)\Rightarrow$$

$$\left(i\omega\right)^2 l\ I(\omega)+\left(i\omega\right)R\ I(\omega)+\frac{1}{C}I(\omega)=\left(i\omega\right)\mathbb{F}(E(t))$$

όπου $\mathbb{F}(i(t))=I(\omega)$. Λύνω και έχω

$$I(\omega)=\frac{\left(i\omega\right)}{\left(i\omega\right)^2 l+\left(i\omega\right)R+\dfrac{1}{C}}\mathbb{F}(E(t))=\frac{1}{\left(i\omega\right)l+R+\dfrac{1}{C\left(i\omega\right)}}\mathbb{F}(E(t))$$

Δηλαδή η **συνάρτηση μεταφοράς ή απόκριση** του συστήματος είναι

$$H(\omega)=\frac{1}{\left(i\omega\right)l+R+\dfrac{1}{C\left(i\omega\right)}}=\frac{i\omega C}{-\omega^2 lC+i\omega RC+1}$$

οπότε

$$I(\omega)=H(\omega)\mathbb{F}(E(t))$$

από όπου εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε

$$i(t)=\mathbb{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\}*E(t)$$

Παρόμοια, για το φορτίο, όπως έχουμε δει ισχύει $i(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}\Rightarrow\dfrac{di}{dt}=\dfrac{d^2Q}{dt^2}$

$$l\frac{di}{dt}+R\cdot i+\frac{Q}{C}=E\Rightarrow l\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E\Rightarrow\mathbb{F}\left(l\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}\right)=\mathbb{F}\left(E\right)\Rightarrow$$

$$l\mathbb{F}\left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)+R\mathbb{F}\left(\frac{dQ}{dt}\right)+\frac{1}{C}\mathbb{F}\left(Q\right)=\mathbb{F}\left(E\right)\Rightarrow$$

$$\left(i\omega\right)^2 l\mathbb{F}\left(Q\right)+\left(i\omega\right)R\mathbb{F}\left(Q\right)+\frac{1}{C}\mathbb{F}\left(Q\right)=\mathbb{F}\left(E\right)\Rightarrow$$

$$\mathbb{F}\left(Q\right)=\frac{1}{\left(i\omega\right)^2 l+\left(i\omega\right)R+\dfrac{1}{C}}\mathbb{F}(E(t))=H_1(\omega)\mathbb{F}(E(t))$$

Όπου

$$H_1(\omega)=\frac{1}{\left(i\omega\right)^2 l+\left(i\omega\right)R+\dfrac{1}{C}}=\frac{C}{-\omega^2 lC+i\omega RC+1}$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε

$$Q(t)=\mathbb{F}^{-1}\left\{H_1(\omega)\right\}*E(t)$$

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η σειρά Fourier, η οποία αντιπροσωπεύει την παράσταση x^2+x στο διάστημα $-\pi<x<\pi$.

Λύση:

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=x^2+x.$ Η ζητούμενη σειρά Fourier δίνεται από την παράσταση $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)),$ όπου οι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{-\pi^3}{3}-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{\pi^2}{3}$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

$$\int x^2\cos(nx)dx=\frac{2x\cos(nx)}{n^2}+\frac{(n^2x^2-2)\sin(nx)}{n^3}$$ και

$$\int x\cos(nx)dx=\frac{\cos(nx)}{n^2}+\frac{x\sin(nx)}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2\cos(nx)$ είναι άρτια ενώ η συνάρτηση $f(x)=x\cos(nx)$ είναι περιττή και ότι το διάστημα ολοκλήρωση είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Οπότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_n ως εξής:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(nx)dx+\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(nx)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(2\int_{0}^{\pi}x^2\cos(nx)dx+0\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2nx\cos nx+(n^2x^2-2)\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Ομοίως, υπολογίζουμε και τους συντελεστές b_n :

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin(nx)dx+\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0+2\int_{0}^{\pi}x\sin(nx)dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx-nx\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{-n\pi\cos n\pi}{n^2}=\frac{-2}{n}\cos n\pi=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}.$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_n και b_n έχουμε:

$$f(x) = x^2 + x = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx + (-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \left(-4\cos x + 2\sin x\right) + \left(\cos 2x - \sin 2x\right) + \ldots$$

2. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτηση $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad -\pi \le x \le 0 \\ x & , \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Λύση:

Στη περίπτωση μας $T = 2\pi$ και επομένως

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} a dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} a\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{a}{n\pi}\left|\sin(nx)\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x d(\sin(nx)) = \frac{1}{n\pi}[x\sin(nx) - \int \sin(nx)dx]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}[\cos(n\pi) - 1] = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} a\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx =$$

$$= -\frac{a}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx =$$

$$= -\frac{a}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x\left(\cos(nx)\right)'dx =$$

$$= -\frac{a}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x\left(\cos(nx)\right)'dx =$$

$$= -\frac{a}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\left(x\right)'\cos(nx)dx =$$

$$= -\frac{a}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx =$$

$$= -\frac{a}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{a}{n\pi}\left[1 - \cos(-n\pi)\right] - \frac{1}{n\pi}\left[\pi\cos(n\pi) - 0\right] + 0$$

$$=\frac{(-1)^n(a-\pi)-a}{n\pi}$$

Οπότε

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(\frac{2\pi nx}{T})+b_n\sin(\frac{2\pi nx}{T})]$$

3. Να βρείτε τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\\ a, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$$

όπου $a\neq 0$

Η συνάρτηση f είναι άρτια διότι $f(-x)=f(x)$, άρα $b_n=0$ και

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2}adx+\int_{\pi/2}^{\pi}0dx\right]=\frac{a}{\pi}\left[x\right]_0^{\pi/2}=\frac{a}{2}$$

Ξέρουμε ότι για f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-a,a](a>0)$ και $x\in[-a,a]$ αν η f είναι άρτια $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$. Η $f(x)\cos(nx)$ είναι άρτια ως γινόμενο άρτιας επί άρτια.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}a\cos(nx)dx$$

$$=\frac{2a}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2}=\frac{2a}{\pi n}\sin(n\frac{\pi}{2})$$

Αν $n=2k,k\in\mathbb{Z}$ τότε $\sin(n\frac{\pi}{2})=\sin(k\pi)=0$. Αν $n=2k+1,k\in\mathbb{Z}$ τότε

$$\sin(n\frac{\pi}{2})=\sin(k\pi+\frac{\pi}{2})=(-1)^k=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Επομένως

$$\frac{2a}{\pi n}\sin(n\frac{\pi}{2})=\begin{cases}\frac{2a}{\pi n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\\ 0, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

Και η σειρά Fourier είναι η

$$\frac{a}{2}+\frac{2a}{\pi}\left[\cos x-\frac{\cos(3x)}{3}+\frac{\cos(5x)}{5}-\frac{\cos(7x)}{7}+\dots\right]$$

Για παράδειγμα για $x=\frac{\pi}{2}$ η σειρά έχει τιμή

$$\frac{a}{2}+\frac{2a}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3}+\frac{cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5}-\frac{cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{7}+\ldots\right]=\frac{a}{2}$$ η οποία δεν ισούται

με το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Για αυτό θα πρέπει να ορίσουμε στα σημεία αυτά τις τιμές που θα πρέπει να έχει η συνάρτηση

Για το σημείο $-\frac{\pi}{2}$ έχουμε $f(-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\left(f(-\frac{\pi}{2}-)+f(-\frac{\pi}{2}+)\right)=\frac{1}{2}(0+a)=\frac{a}{2}$

Για το σημείο $\frac{\pi}{2}$ έχουμε $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\left(f(\frac{\pi}{2}-)+f(\frac{\pi}{2}+)\right)=\frac{1}{2}(a+0)=\frac{a}{2}$

οπότε εάν θεωρήσουμε την

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2} \\ \frac{a}{2}, & x=-\frac{\pi}{2} \\ a, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{a}{2}, & x=-\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}$$ η σειρά που υπολογίσαμε την παριστάνει σε το

διάστημα της περιοδικότητας της και εξαιτίας της περιοδικότητας της συνάρτησης η σειρά την παριστάνει σε όλο το $\mathbb{R}$.

4. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν $f(x)=\sin(ax)$, $-\pi\le x<\pi$, όπου $a\in\mathbb{R}$ όχι ακέραιος.

Δεδομένου ότι ισχύει $\sin(a(-x))=-\sin(ax)$ η συνάρτηση $f(x)=\sin(ax)$ είναι περιττή. Αρκεί να βρούμε τα b_n στην παράσταση:

$$\sin(ax)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$$

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx\ .$$

Για να υπολογίσουμε το $I=\int \sin(ax)\sin(nx)dx$ χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(ax)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-n)x-\cos(a+n)x\right)$. Έχουμε

$$I=\int \sin(ax)\sin(nx)dx=\int \frac{1}{2}\left[\cos(a-n)x-\cos(a+n)x\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-n}\sin(a-n)x-\frac{1}{a+n}\sin(a+n)x\right]+C.$$

Άρα

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-n}\sin(a-n)x-\frac{1}{a+n}\sin(a+n)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{a-n}\sin(a-n)\pi-\frac{1}{a+n}\sin(a+n)\pi.$$

Όμως οι γωνίες $(a-n)\pi,(a+n)\pi$ διαφέρουν κατά άρτιο πολλαπλάσιο του π. Άρα

$$I=\frac{1}{a-n}\sin(a-n)\pi-\frac{1}{a+n}\sin(a+n)\pi=$$
$$=\frac{1}{a-n}\sin(a-n)\pi-\frac{1}{a+n}\sin(a-n)\pi=$$
$$=\frac{2n}{a^2-n^2}\sin(a-n)\pi.$$

Τελικά έχουμε $I=\frac{2n}{a^2-n^2}\sin(a-n)\pi=(-1)^n\frac{2n}{a^2-n^2}\sin a\pi$

5. Να βρείτε τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν $f(x)=x+|x|,\ -\pi\le x<\pi$, και στη συνέχεια να επαναπροσδιοριστεί η συνάρτηση στο σημείο $-\pi$ ώστε η σειρά Fourier να παριστάνει την f σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση γράφεται $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 2x, & 0\le x<\pi\end{cases}$

Εφόσον $T=2\pi$ και $x_0=-\pi$ η σειρά Fourier είναι της μορφής:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=\frac{1}{2\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x[\frac{\sin(nx)}{n}]^{/}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[2x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\frac{\sin(nx)}{n}dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Δηλαδή

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, & n = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x[-\frac{\cos(nx)}{n}]^{/}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-2x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\frac{\cos(nx)}{n}dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right] = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Δηλαδή

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & n = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ -\dfrac{2}{n}, & n = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Επομένως η σειρά Fourier είναι η

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos[(2k-1)x]\right] + 2\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right] =$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right] + 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \dots\right]$$

Για το σημείο $-\pi$

$f(-\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi-) + f(-\pi+)\big) = \frac{1}{2}\big(2\pi + 0\big) = \frac{\pi}{2}$ οπότε εάν θεωρήσουμε την

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x = -\pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \\ 2x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ η σειρά που υπολογίσαμε την παριστάνει στο διάστημα της περιοδικότητας της και εξαιτίας της περιοδικότητας της συνάρτησης η σειρά την παριστάνει σε όλο το $\mathbb{R}$.

6. Να βρείτε τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν

$$f(x)=\begin{cases}-a, & -\pi\le x<0\\ a, & 0\le x<\pi\end{cases},$$

όπου $a\neq 0$.

Η συνάρτηση f είναι περιττή διότι $f(-x)=-f(x)$, άρα $a_n=0$ και

Ξέρουμε ότι για f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-a,a](a>0)$ και $x\in[-a,a]$

αν η f είναι άρτια $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$. Η $f(x)sin(nx)$ είναι άρτια ως γινόμενο περιττής επί περιττή.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx=\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\pi} sin(nx)dx=\frac{2a}{\pi}\left[-\frac{cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2a}{n\pi}\left[1-cos(n\pi)\right]=\frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\dfrac{4a}{n\pi}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\grave{o}\varsigma\\ 0, & n=\grave{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

Συνεπώς η σειρά είναι η

$$\frac{4a}{\pi}\left[sin\,x+\frac{sin(3x)}{3}+\frac{sin(5x)}{5}+\frac{sin(7x)}{7}+...\right]$$

7. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int(x+\pi)\sin(nx)dx,\quad \int(x+\pi)\cos(nx)dx$$

Να βρεθεί η τριγωνομετρική σειρά Fourier της *f(x) = x+π, -π<x<π.*
Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ανάπτυγμα δείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Χρησιμοποιώντας Matlab σχεδιάστε την *f(x) = x+π* στο διάστημα (-π,π) καθώς και τα μερικά αθροίσματα του αναπτύγματός της σε σειρά Fourier για 1, 3 και 5 όρους.

Λύση

α.

$$\int(x+\pi)\sin(nx)dx=\int x\sin(nx)dx+\pi\int\sin(nx)dx=\int x(\frac{-\cos(nx)}{n})'dx-\frac{\pi}{n}\cos(nx)+C=$$

$$=-x\frac{\cos(nx)}{n}+\int(x)'\frac{\cos(nx)}{n}dx-\frac{\pi}{n}\cos(nx)+C=-x\frac{\cos(nx)}{n}+\int\frac{\cos(nx)}{n}dx-\frac{\pi}{n}\cos(nx)+C=$$

$$=-x\frac{\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}-\frac{\pi}{n}\cos(nx)+C$$

$$\int(x+\pi)\cos(nx)dx=\int x\cos(nx)dx+\pi\int\cos(nx)dx=\int x(\frac{\sin(nx)}{n})'dx+\pi\frac{\sin(nx)}{n}+C=$$

$$=\frac{x\sin(nx)}{n}-\int(x)'\frac{\sin(nx)}{n}dx+\pi\frac{\sin(nx)}{n}+C=\frac{x\sin(nx)}{n}-\int\frac{\sin(nx)}{n}dx+\pi\frac{\cos(nx)}{n}+C=$$

$$=\frac{x\sin(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}+\frac{\pi\sin(nx)}{n}+C$$

β.

Εφόσον $T=2\pi$ και $x_0=-\pi$ η σειρά Fourier είναι της μορφής:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(x+\pi)^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{4\pi^2}{4\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos(nx)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}+\frac{\pi\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin(nx)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}-\frac{\pi}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}=$$

=

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n}-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)-\pi\frac{\cos(-n\pi)}{n}+\frac{\pi}{n}\cos(-n\pi)\right]=$$

$$=-\frac{2\cos(n\pi)}{n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$\cos(-x)=\cos(x),\quad \sin(-x)=-\sin(x),\quad \sin(n\pi)=0,\quad \cos(n\pi)=(-1)^n$.

Δηλαδή

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\\[2ex] -\dfrac{2}{n}, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

Επομένως η σειρά Fourier είναι η

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]=$$

$$=a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)=$$

$$=\pi+2\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{3}\sin(3x)-\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{5}\sin(5x)-\dots\right]$$

γ.

Έχουμε από τα παραπάνω

$$\pi + x = \pi + 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) - \ldots \right]$$

Θέτοντας στην παραπάνω $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε

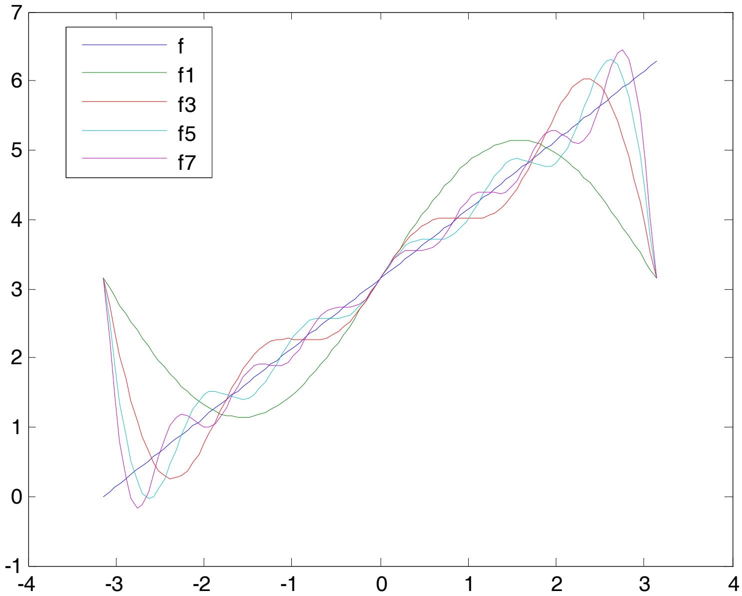
$$\frac{\pi}{2} = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin(\pi) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}) - \frac{1}{4}\sin(2\pi) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}) - \frac{1}{6}\sin(3\pi) + \ldots \right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

δ.

```
>> clear all
>> x=linspace(-pi,pi);
>> f=x+pi;
>> f1=pi+2*sin(x);
>> f3=pi+2*(sin(x)-1/2*sin(2*x)+1/3*sin(3*x));
>> f5=pi+2*(sin(x)-1/2*sin(2*x)+1/3*sin(3*x)-1/4*sin(4*x)+1/5*sin(5*x));
>>f7=pi+2*(sin(x)-1/2*sin(2*x)+1/3*sin(3*x)-1/4*sin(4*x)+1/5*sin(5*x)-
1/6*sin(6*x)+1/7*sin(7*x));
>> plot(x,f,x,f1,x,f3,x,f5,x,f7)
```

Το αποτέλεσμα



μας δείχνει ότι όσο περισσότερους όρους θεωρήσουμε τόσο καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης επιτυγχάνουμε.

8. Μία περιοδική συνάρτηση περιγράφεται από τον ακόλουθο τύπο σε μία περίοδό της.

$$f(x) = \begin{cases} -4, & -\pi/5 \le x < 0 \\ 4, & 0 \le x < \pi/5 \end{cases},$$

Κάντε το γράφημά της σε μία περίοδο, πείτε ποια είναι η περίοδός της και βρείτε την εκθετική μορφή του αναπτύγματός της Fourier. Γράψτε τους όρους του αναπτύγματος από n=-4 έως 4.

Λύση

Η περίοδος της είναι 2π/5.

Αρχικά

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{5}{2\pi}\left[\int_{-\pi/5}^{0} -4dx + \int_{0}^{\pi/5} 4dx\right] = \frac{10}{\pi}\left[-\left[x\right]_{-\pi/5}^{0} + \left[x\right]_{0}^{\pi/5}\right] = \frac{10}{\pi}\cdot 0 = 0\ .$$

Αυτό βγαίνει και άμεσα από την παρατήρηση ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

Από τον τύπο

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx = \frac{5}{2\pi}\left[\int_{-\pi/5}^{0} -4e^{-i\frac{10\pi nx}{2\pi}}dx + \int_{0}^{\pi/5} 4e^{-i\frac{10\pi nx}{2\pi}}dx\right] =$$

$$= \frac{10}{\pi}\left[-\int_{-\pi/5}^{0} e^{-i5nx}dx + \int_{0}^{\pi/5} e^{-i5nx}dx\right] = \frac{10}{\pi}\left[-\int_{-\pi/5}^{0}\left(\frac{e^{-i5nx}}{-i5n}\right)' dx + \int_{0}^{\pi/5}\left(\frac{e^{-i5nx}}{-i5n}\right)' dx\right]$$

$$= \frac{10}{\pi}\left[-\left[\frac{e^{-i5nx}}{-i5n}\right]_{-\pi/5}^{0} + \left[\frac{e^{-i5nx}}{-i5n}\right]_{0}^{\pi/5}\right] = \frac{10}{-i5\pi n}\left[-\left[1-e^{in\pi}\right] + \left[e^{-in\pi}-1\right]\right] =$$

$$= \frac{2}{-i\pi n}\left[e^{-in\pi} + e^{in\pi} - 2\right]$$

Αφού

$$\left.\begin{array}{l} e^{-i\pi n} = cos(\pi n) - i\,sin(\pi n) \\ e^{i\pi n} = cos(\pi n) + i\,sin(\pi n) \end{array}\right\} \Rightarrow e^{-in\pi} + e^{in\pi} = 2cos(\pi n)$$

$$c_n = \frac{2}{-i\pi n}\left[2cos(\pi n) - 2\right] = \frac{2}{-i\pi n}\left[cos(\pi n) - 1\right] = \frac{2}{-i\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & n = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ \dfrac{4}{i\pi n} & n = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$$

$$cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\sum\nolimits_{n=-4}^{4} c_n e^{-i5nx} = c_{-3}e^{i15x} + c_{-1}e^{i5x} + c_1e^{-i5x} + c_3e^{-i15x} = \frac{4}{i\pi}\left[-\frac{1}{3}e^{i15x} - e^{i5x} + e^{-i5x} + \frac{1}{3}e^{-i15x}\right]$$

9. Μία περιοδική συνάρτηση περιγράφεται από τον ακόλουθο τύπο σε μία περίοδό της.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 \le x < 0 \\ -1 & 0 \le x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \le x < \pi \end{cases},$$

Κάντε το γράφημά της σε μία περίοδο και αφού την χαρακτηρίσετε ως άρτια ή περιττή βρείτε το ανάπτυγμα της σε τριγωνομετρική σειρά Fourier. Γράψτε τους οκτώ πρώτους όρους της σειράς.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι περιττή, άρα $a_n = 0$ και

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}(-1)\cdot\sin(nx)dx + \int_{-\pi/2}^{0}\sin(nx)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx + \int_{-\pi/2}^{0}\sin(-nx)d(-x)\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx - \int_0^{-\pi/2}\sin(-nx)d(-x)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx - \overbrace{\int_0^{\pi/2}\sin(nu)du}^{u=-x}\right] = \frac{1}{\pi}\left[-2\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\left[\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1\right]$$

Αφού $\cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{n = 4k+1} \\ -1 & \mathbf{n = 4k+2} \\ 0 & \mathbf{n = 4k+3} \\ 1 & \mathbf{n = 4k+4} \end{cases}$ ισχύει $\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1 = \begin{cases} -1 & \mathbf{n = 4k+1} \\ -2 & \mathbf{n = 4k+2} \\ -1 & \mathbf{n = 4k+3} \\ 0 & \mathbf{n = 4k+4} \end{cases}$

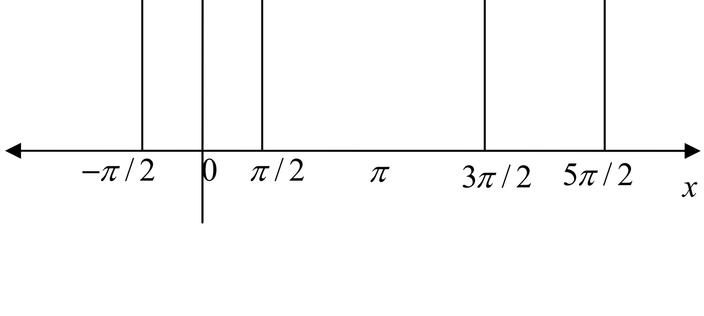
Συνεπώς η σειρά είναι η

$$\frac{2}{\pi}\left[-1\cdot\sin x - 2\cdot\frac{\sin(2x)}{2} - 1\cdot\frac{\sin(3x)}{3} + 0\cdot\frac{\sin(4x)}{4} - 1\cdot\frac{\sin(5x)}{5} - 2\cdot\frac{\sin(6x)}{6} - 1\cdot\frac{\sin(7x)}{7} + 0\cdot\frac{\sin(8x)}{8} + \ldots\right]$$

Παρατήρηση το ότι $\frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}(-1)\cdot\sin(nx)dx + \int_{-\pi/2}^{0}\sin(nx)dx\right] = -\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx\right]$ μπορεί να εξαχθεί και από το ότι η $\sin(nx)$ είναι περιττή οπότε το

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(nx)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{0}\sin(nx)dx = -\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx$$

10. Έχετε έναν παλμό πλάτους 5 με διάρκεια π που επαναλαμβάνεται με περίοδο 2π. Με βάση την γραφική της παράσταση που σας δίνεται, γράψτε τον τύπο της συνάρτησης στο διάστημα [–π,π] που είναι μία περίοδος. Χαρακτηρίστε τη συνάρτηση ως άρτια ή περιττή. Αναπτύξτε την εκθετική σειρά Fourier της συνάρτησης και εξηγήστε ποιες τιμές θα εμφανίζει σε γράφημα το διακριτό φάσμα πλατών για τις τέσσερις πρώτες αρμονικές.



Λύση

Η συνάρτηση είναι άρτια διότι το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα yy’ και έχει τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x < -\pi/2\\ 5, & -\pi/2 \le x < \pi/2\\ 0, & \pi/2 \le x < \pi\end{cases}$$

Από τον τύπο

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}5e^{-inx}dx=$$

$$=\frac{5}{2\pi}\left[\frac{1}{-in}e^{-inx}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=-\frac{5}{2i\pi n}\left(e^{-i\frac{\pi n}{2}}-e^{i\frac{\pi n}{2}}\right)=\frac{5}{\pi n}sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{5}{2}sinc\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Αφού

$$\left.\begin{aligned}e^{-i\frac{\pi n}{2}}&=cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-i\,sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\\ e^{\frac{\pi n}{2}}&=cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow e^{-i\frac{\pi n}{2}}-e^{\frac{\pi n}{2}}=-2i\,sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Επίσης

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}5dx=\frac{5}{2\pi}[x]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{5}{2}.$$

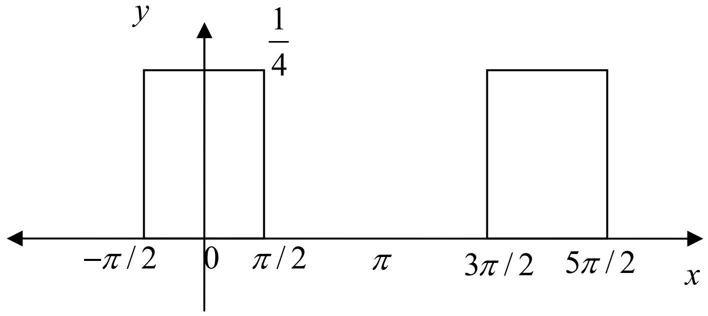
Για τα πλάτη ισχύει $A_n=2|c_n|$ άρα το γράφημα θα παρουσιάζει τα A0,A1,A2,A3.

11. Σχεδιάστε τον παλμό ο οποίος, σε μία περίοδό του, περιγράφεται από την συνάρτηση που ακολουθεί. Στη συνέχεια χαρακτηρίστε τη συνάρτηση αυτή ως άρτια ή περιττή και βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier του παλμού.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{4}, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi\end{cases}$$

Λύση

Το γράφημα είναι:



Η συνάρτηση f είναι άρτια διότι $f(-x)=f(x)$, άρα $b_n=0$ και

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{4}dx+\int_{\pi/2}^{\pi}0dx\right]=\frac{1}{4\pi}\left[x\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{8}$$

Ξέρουμε ότι για f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-a,a](a>0)$ και

$x\in[-a,a]$ αν η f είναι άρτια $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$. Η $f(x)cos(nx)$ είναι

άρτια ως γινόμενο άρτιας επί άρτια.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{4}cos(nx)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2\pi n}sin(n\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}sinc(n\frac{\pi}{2})$$

Αν $n=2k,k\in\mathbb{Z}$ τότε $sin(n\frac{\pi}{2})=sin(k\pi)=0$. Αν $n=2k+1,k\in\mathbb{Z}$ τότε

$$sin(n\frac{\pi}{2})=sin(k\pi+\frac{\pi}{2})=(-1)^k=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Επομένως

$$\frac{1}{\pi n}sin(n\frac{\pi}{2})=\begin{cases}\frac{1}{\pi n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\grave{o}\varsigma\\ 0, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

Και η σειρά Fourier είναι η $\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\left[\cos x-\frac{cos(3x)}{3}+\frac{cos(5x)}{5}-\frac{cos(7x)}{7}+...\right]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελούν τις διαφάνειες της διδασκαλίας μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.

Ιδιαίτερα παραδείγματα και σχήματα έχουν αντληθεί από τα συγγράμματα :
1. Fourier Series, W. Bolton
2. Σήματα και συστήματα, Καραμπόγιας, Θεοδωρίδης ΕΑΠ