Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

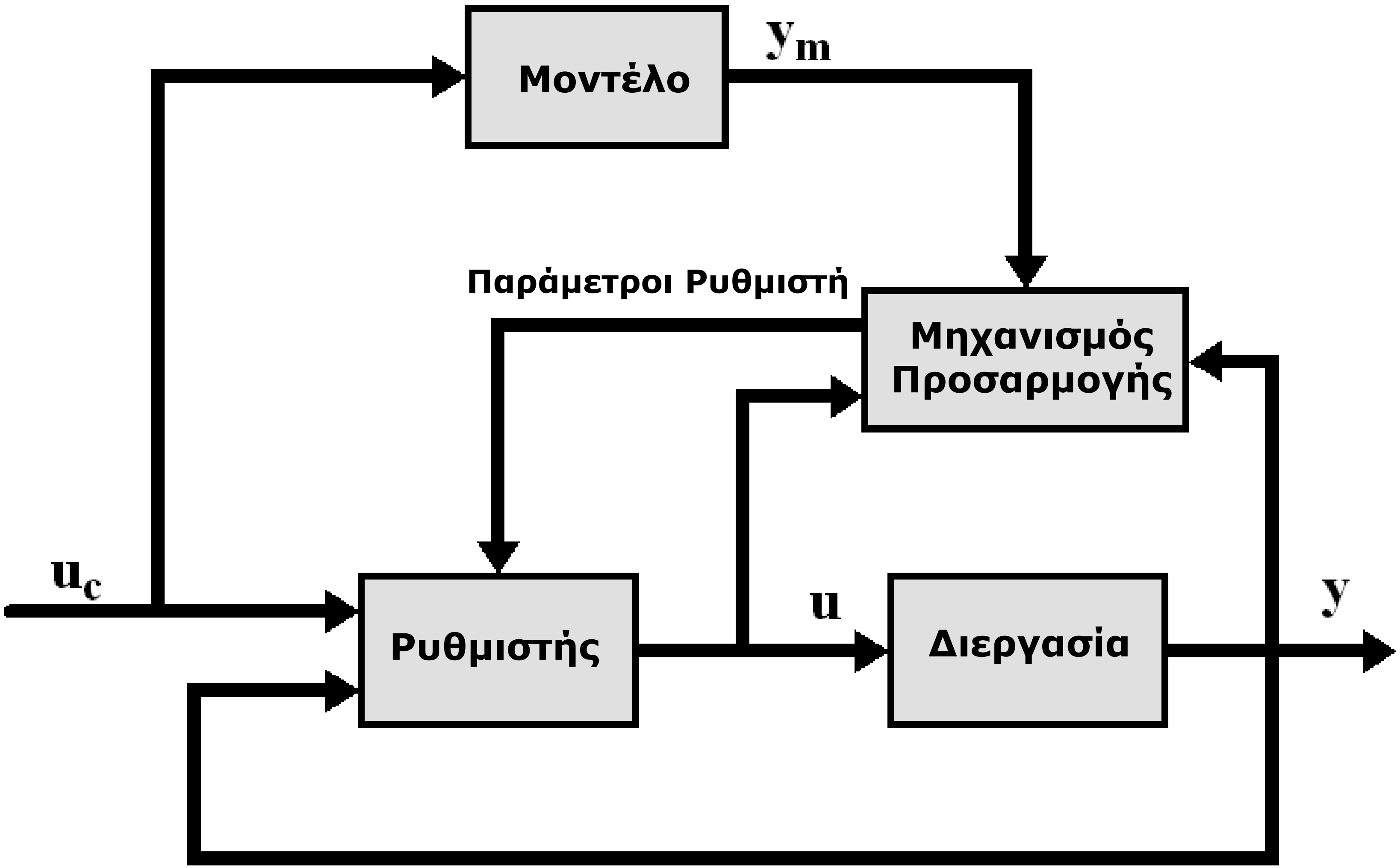
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 13

Πάτρα 2008

Προσαρμοστικός έλεγχος με μοντέλο αναφοράς



Υπάρχουν τρείς βασικές προσεγγίσεις για την ανάλυση και τον σχεδιασμό ενός προσαρμοστικού συστήματος μοντέλου αναφοράς (*MRAS*) :

1. Προσέγγιση βάθμωσης (gradient)
2. Lyapunov συναρτήσεις
3. Θεωρεία παθητικότητας

Η πρώτη προσέγγιση (προσέγγιση βάθμωσης) βασίζεται στην υπόθεση ότι οι παράμετροι αλλάζουν πιο αργά από τις άλλες μεταβλητές στο σύστημα

Η προσέγγιση αυτή δεν οδηγεί απαραίτητα σε σταθερό κλειστού βρόχου σύστημα.

Θεωρούμε SISO σύστημα, το οποίο μπορεί να είναι είτε ένα συνεχούς χρόνου μοντέλο είτε ενός διακριτού χρόνου μοντέλο:

$$y(t) = \frac{B}{A} u(t) \qquad (1)$$

όπου A,B είναι σχετικά πρώτα πολυώνυμα

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να βρούμε έναν ρυθμιστή έτσι ώστε η σχέση μεταξύ του σήματος ελέγχου u_c και της επιθυμητής εξόδου y_m να δίνεται από:

$$y_m(t) = \frac{B_m}{A_m} u_c(t) \qquad (2)$$

Ένας γενικός γραμμικός νόμος ελέγχου περιγράφεται από την σχέση:

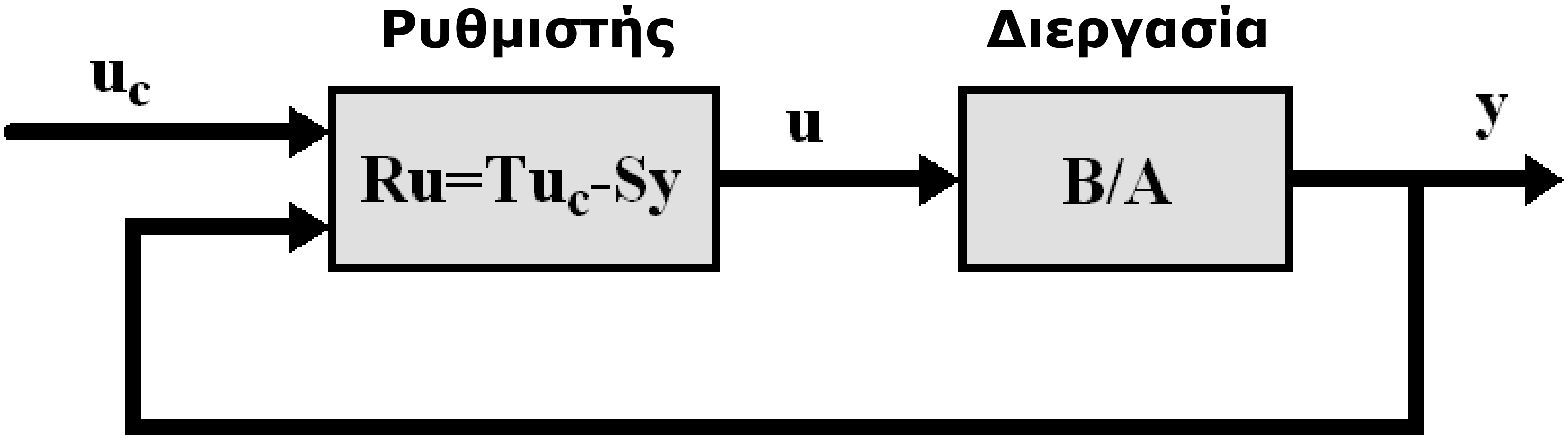
$$Ru = Tu_c - Sy \qquad (3)$$

όπου R, S και T είναι πολυώνυμα.

Από τις σχέσεις (1) και (3) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για το κλειστό σύστημα:

$$\left(AR + BS\right) y = BTu_c \qquad (4)$$

Τα μηδενικά του ανοικτού συστήματος, που δίνονται για B=0, θα είναι επίσης μηδενικά του κλειστού εκτός και αν αυτά ακυρώνονται από αντίστοιχους πόλους του κλειστού.


Ρυθμιστής
Διεργασία
u_c
$Ru=Tu_c-Sy$
u
B/A
y

Το πολυώνυμο B παραγοντοποιείται ως εξής:

$$B = B^+ B^-$$

όπου το B^+ περιέχει εκείνους τους παράγοντες που μπορούν να ακυρωθούν και το B^- τους εναπομείναντες.

Από την σχέση (4) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος είναι το: $AR + BS$. Αυτό το πολυώνυμο πρέπει να έχει το $A_m B^+$ ως έναν παράγοντα και θα είναι γενικά μεγαλύτερης τάξης από το $A_m B^+$. Οι υπόλοιποι παράγοντες μπορούν να θεωρηθούν ως η δυναμική συμπεριφορά του παρατηρητή.

Συνεπώς υπάρχουν τρείς τύποι παραγόντων του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

1. τα ακυρωμένα μηδενικά του ανοικτού που δίνονται από το B^+
2. οι επιθυμητοί πόλοι του κλειστού που δίνονται από το A_m και
3. οι πόλοι του παρατηρητή που δίνονται από το πολυώνυμο του παρατηρητή A_0 . Συνεπώς:

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m \qquad \text{(Διοφαντική εξίσωση)}$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι το B^+ διαιρεί το *R*.
Συνεπώς:

$$R = B^+ R_1$$

Και διαιρώντας την Διοφαντική με το B^+ παίρνουμε:

$$AR_1 + B^- S = A_0 A_m \qquad (5)$$

Τώρα απαιτούμε οι σχέσεις (2) και (4) να έχουν την ίδια επιθυμητή απόκριση κλειστού βρόχου. Επίσης, πρέπει το B^{-} να διαιρεί το B_m, διαφορετικά δεν υπάρχει λύση στο σχεδιαστικό μας πρόβλημα. Επομένως:

$$B_m = B^{-} B'_m$$

$$T = A_0 B'_m$$

Για να ολοκληρώσουμε την λύση του προβλήματος πρέπει να δώσουμε κάποιες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου η εξίσωση (5) να δίνει έναν καλό (συνεχούς ή διακριτού χρόνου) νόμο ελέγχου:

$$\deg A_0 \geq 2\deg A - \deg A_m - \deg B^+ - 1$$

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B$$

Προσέγγιση Βάθμωσης (Gradient Approach)

Κανόνας MIT

Υποθέτουμε ότι επιχειρούμε να αλλάξουμε τις παραμέτρους του ρυθμιστή έτσι ώστε το σφάλμα μεταξύ των εξόδων του συστήματος και του μοντέλου αναφοράς να οδηγούνται στο μηδέν.

$$e = y - y_m$$

όπου θ οι παράμετροι ελεγκτή

Εισάγουμε το κριτήριο:

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2$$

Για να είναι μικρό το κόστος J πρέπει να αλλάξουμε τις παραμέτρους στην διεύθυνση της αρνητικής βάθμωσης του J, δηλαδή:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta},$$

Αν υποτεθεί ότι οι παράμετροι αλλάζουν πιο αργά από τις άλλες μεταβλητές στο σύστημα, τότε η παράγωγος $\frac{\partial e}{\partial \theta}$ (παράγωγος ευαισθησίας) μπορεί να υπολογιστεί υποθέτοντας ότι η θ είναι σταθερή.

Αν $J(\theta) = \left| e \right|$

τότε

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} sign\left(e\right)$$

Παράδειγμα:

Θεωρούμε ένα σύστημα που περιγράφεται από το μοντέλο:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \qquad (1)$$

Υποθέτουμε ότι επιθυμούμε να έχουμε ένα σύστημα κλειστού βρόχου που να περιφράφεται από:

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c \qquad (2)$$

Ο ελεγκτής που επιτυγχάνει τέλεια παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς δίνεται από :

$$u(t) = t_0 u_c(t) - S_0 y(t)$$

με παραμέτρους

$$t_0 = \frac{b_m}{b}$$

$$S_0 = \frac{a_m - a}{b}$$

Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα MIT, ορίζουμε το σφάλμα:

$$e = y - y_m$$

Έπεται από τις εξισώσεις (1) και (2) ότι:

$$y = \frac{bt_0}{S + a + bS_0} u_c$$

όπου

$$S \triangleq \frac{d}{dt}$$

Και επίσης έχουμε:

$$\frac{\partial e}{\partial t_0} = \frac{b}{S + a + bS_0} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial S_0} = -\frac{b^2 t_0}{\left(S + a + bS_0\right)^2} u_c = -\frac{b}{\left(S + a + bS_0\right)} y$$

Οι προηγούμενες εξισώσεις δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν επειδή οι παράμετροι *α* και *b* είναι άγνωστες. Γι’ αυτό τον λόγο, προσεγγίσεις αυτών είναι απαραίτητες. Αυτές βρίσκονται, καταρχάς παρατηρώντας ότι με τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων του ρυθμιστή έχουμε:

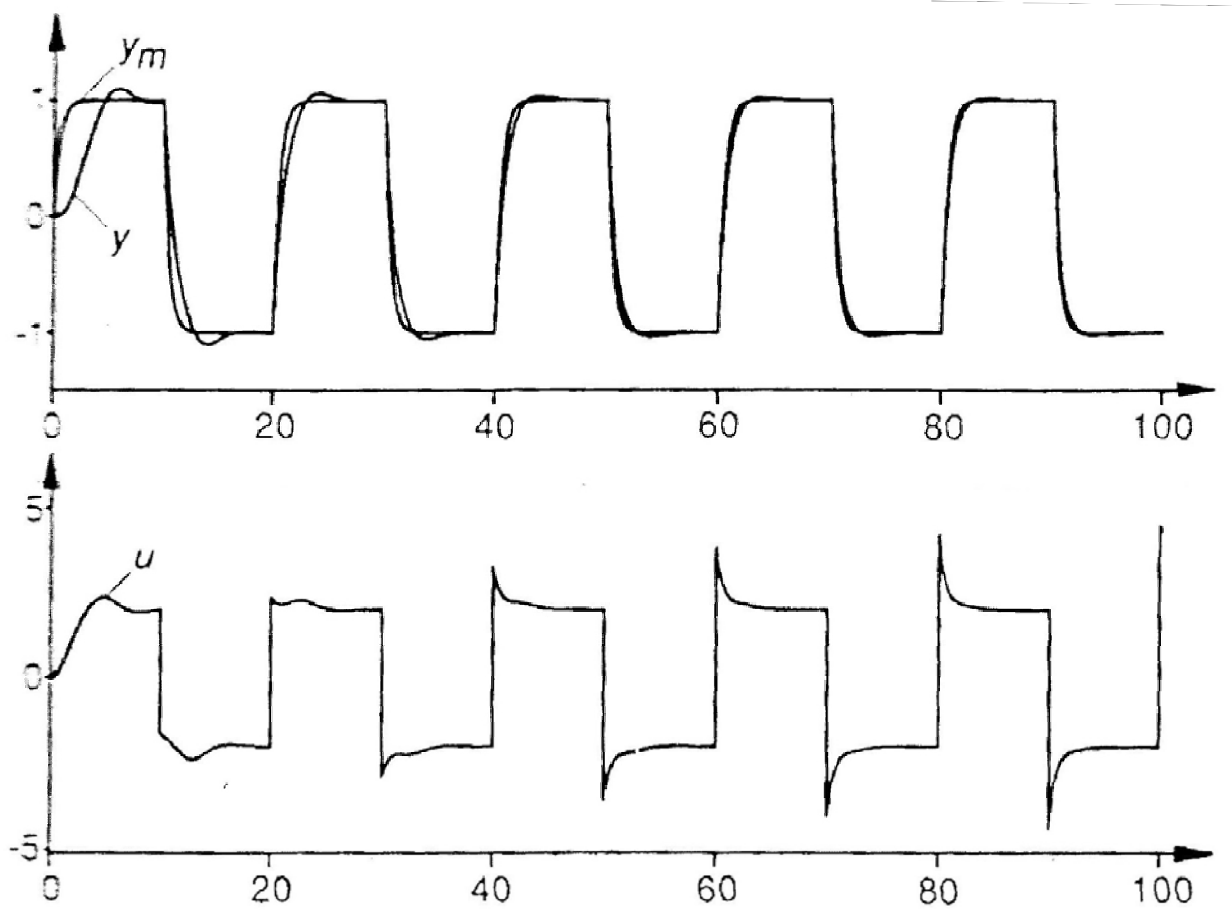
$$S + a + bS_0 = S + a_m$$

Επίσης, το *b* μπορεί να απορροφηθεί μέσα στο *γ* (*γb* – απαιτούμενο). Αυτό απαιτεί το $sign(b)$ να είναι γνωστό. Μετά από αυτές τις προσεγγίσεις έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{dt_0}{dt} = -\gamma\left(\frac{1}{S+a_m}u_c\right)e$$

$$\frac{dS_0}{dt} = \gamma\left(\frac{1}{S+a_m}y\right)e$$

Η ακόλουθη εικόνα δείχνει το αποτέλεσμα μιας προσομοίωσης για α=1, b=0.5, a_m=2 και b_m=2. Το σήμα εισόδου είναι μια τετραγωνική κυματομορφή με πλάτος 1 και γ=2. Η απόκριση του κλειστού συστήματος όπως φαίνεται είναι κοντά στην επιθυμητή ύστερα από μόλις μερικές περιόδους.



y_m
y
1
0
-1
0
20
40
60
80
100
5
u
0
-5
0
20
40
60
80
100

Γενική περίπτωση

Υποθέτουμε ότι το (Σ) περιγράφεται από την εξίσωση:

$$Ay = Bu$$

Και υποθέτουμε ότι επιθυμούμε να γίνει:

$$A_m Y_m = B_m u_c$$

Δείχθηκε προηγουμένως ότι ένας κατάλληλος ρυθμιστής είναι της μορφής:

$$Ru = Tu_c - Sy$$

Το σύστημα κλειστού βρόχου περιγράφεται από:

$$y = \frac{BT}{AR + BS} u_c$$

και

$$u = \frac{AT}{AR + BS} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial r_i} = -\frac{BTAS^{\kappa-i}}{\left(AR+BS\right)^2}u_c = -\frac{BS^{\kappa-i}}{AR+BS}u, \quad i=1,\ldots,\kappa$$

$$\frac{\partial e}{\partial t_i} = \frac{BS^{m-i}}{AR+BS}u_c, \qquad i=0,\ldots,m$$

$$\frac{\partial e}{\partial S_i} = -\frac{BTBS^{l-i}}{\left(AR+BS\right)^2}u_c = -\frac{BS^{l-i}}{AR+BS}y, \quad i=0,\ldots,l$$

όπου

$$\kappa = \deg R, l = \deg S, m = \deg T$$

$$AR + BS \; ; \; A_0 A_m B^+$$ (Πρώτη προσέγγιση)

$$\frac{\partial e}{\partial r_i} \; ; \; -\frac{B^- S^{\kappa - i}}{A_0 A_m} u$$

B^- - ακόμα άγνωστο (αν όλα τα μηδενικά της διαδικασίας ακυρώνονται $B^- = b_0$)

Αν $sign(b_0)$ είναι γνωστό και έχουμε τα μηδενικά ευσταθούς συστήματος τότε:

$$\frac{dr_i}{dt} = +\gamma e \frac{S^{\kappa-i}}{A_0 A_m} u$$

$$\frac{dS_i}{dt} = \gamma e \frac{S^{l-i}}{A_0 A_m} y$$

$$\frac{dt_i}{dt} = -\gamma e \frac{S^{m-i}}{A_0 A_m}$$

Σύγκλιση σφάλματος

Τα προσαρμοστικά συστήματα μοντέλου αναφοράς βασίζονται στην ιδέα οδήγησης του σφάλματος

$$e = y - y_m \rightarrow 0$$

Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι οι παράμετροι του ρυθμιστή προσεγγίζουν τις σωστές τους τιμές.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε το σύστημα με: $y = u$ και έλεγχο $u = \theta u_c$ και μοντέλο $y_m = \theta^0 u_c$.

Το σφάλμα δίνεται από:

$$e = \left(\theta - \theta^0\right) u_c$$

Η μέθοδος βάθμωσης δίνει την ακόλουθη εξίσωση για την παράμετρο:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma u_c^2\left(\theta - \theta^0\right)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση έχει λύση:

$$\theta(t) = \theta^0 + \left(\theta(0) - \theta^0\right)e^{-\gamma I_t}$$

όπου

$$I_t = \int_0^t u_c^2(\tau)d\tau$$

και θ(0) είναι η αρχική τιμή της παραμέτρου θ, και το σφάλμα δίνεται από :

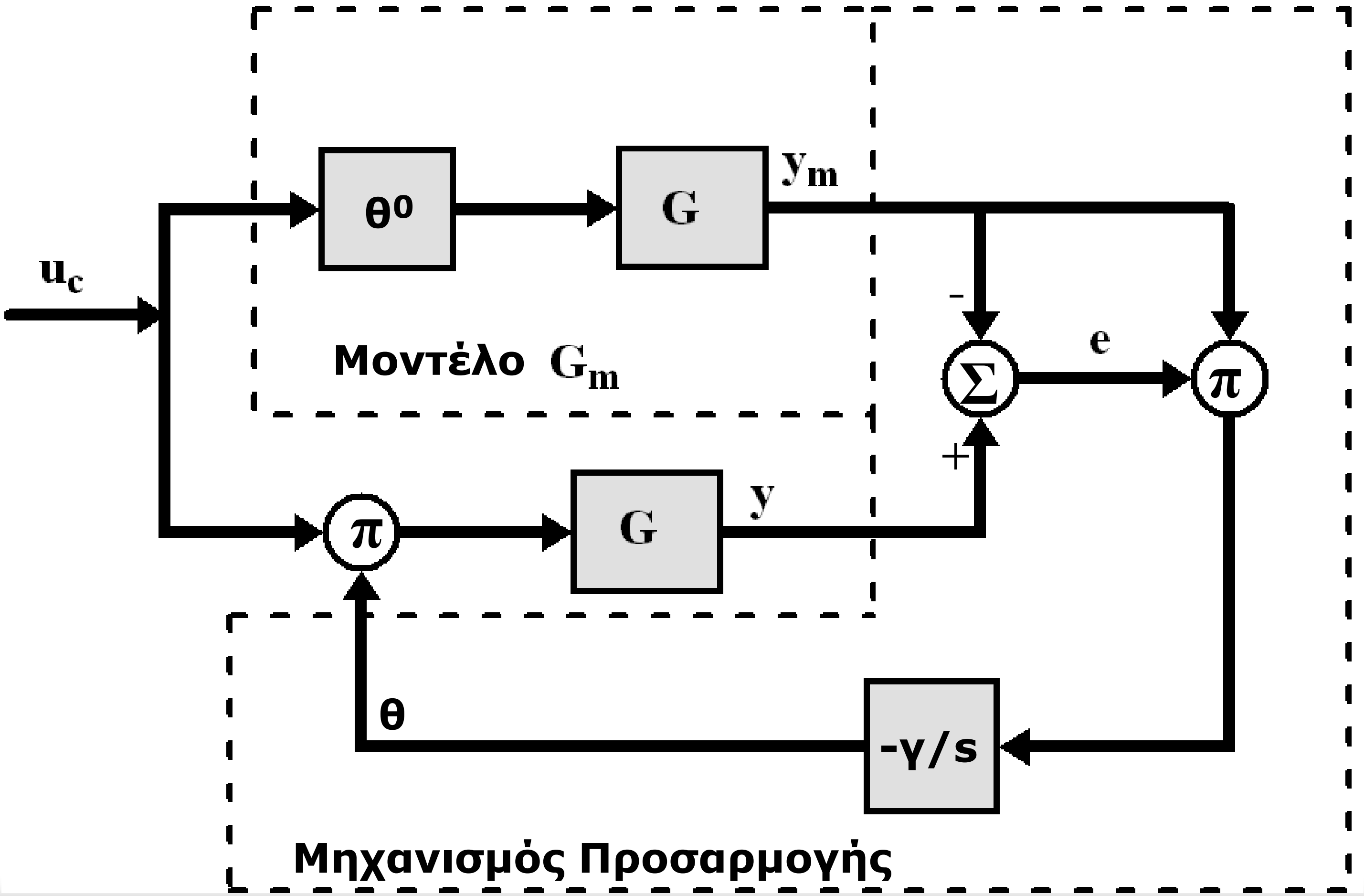
$$e(t) = u_c(t)\left(\theta(0) - \theta^0\right)e^{-\gamma I_t}$$

Αυτό το σφάλμα πάντοτε θα γίνεται μηδέν καθώς αυξάνει ο χρόνος.

Από το προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο ρυθμός σύγκλισης των παραμέτρων είναι ανάλογος με το τετράγωνο του πλάτους του σήματος ελέγχου $u_c(t)$. Αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο σε κάποιες περιπτώσεις, διότι έχοντας μεγαλύτερο σήμα ελέγχου είναι ευκολότερο να διακρίνουμε αν η θ έχει λάθος τιμή. Παρά ταύτα, αν τα σφάλματα μέτρησης είναι αμελητέα, θα ήταν χρήσιμο να είχαμε κανόνες ρύθμισης όπου ο ρυθμός σύγκλισης της παραμέτρου να μην εξαρτάται από το πλάτος του σήματος εισόδου. Το γεγονός ότι ο ρυθμός σύγκλισης εξαρτάται από το πλάτος του σήματος ελέγχου μπορεί να οδηγήσει στην αστάθεια. Αυτό φαίνεται και με το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα – Ευστάθεια προσαρμοστικού βρόχου

Θεωρούμε το σύστημα του σχήματος, όπου θέλουμε να ρυθμίσουμε το κέρδος θ στην τιμή $θ^0$.



Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+a_1 s+a_2}$$

Το σφάλμα είναι ίσο με:

$$e=G(p)\left(\theta-\theta^0\right)u_c$$

όπου p θεωρούμε πως είναι ο διαφορικός τελεστής.

Συνεπώς:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta}=G(p)u_c=\frac{y_m}{\theta^0}$$

Ο κανόνας MIT δίνει:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma' e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma' e \frac{y_m}{\theta^0} = -\gamma e y_m$$

όπου $\gamma = \dfrac{\gamma'}{\theta^0}$

Συνεπώς το προσαρμοσμένο σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί από τις εξής διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{d^2 y_m}{dt^2} + a_1 \frac{dy_m}{dt} + a_2 y_m = \theta^0 u_c$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = \theta u_c$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \left(y - y_m \right) y_m$$

Η διαφορική εξίσωση για y_m μπορεί να επιλυθεί αν το σήμα ελέγχου είναι μια γνωστή συνάρτηση χρόνου. Τότε, η μεταβλητή y_m μπορεί να θεωρηθεί ως γνωστή συνάρτηση χρόνου.

Χρησιμοποιώντας τις διαφορικές εξισώσεις για γ και θ παίρνουμε:

$$D^3 y + a_1 D^2 y + a_2 D y + \gamma u_c y_m y = \theta D u_c + \gamma u_c y_m^2$$

Αυτή είναι μια χρονικώς μεταβαλλόμενη γραμμική διαφορική εξίσωση. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την συμπεριφορά του συστήματος, εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα.

Αρχικά υποθέτουμε ότι ο μηχανισμός προσαρμογής αποσυνδέεται και ότι η είσοδος είναι σταθερή:

$$u_c = u_c^0$$

τότε η έξοδος:

$$y_m = y_m^0$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο μηχανισμός προσαρμογής συνδέεται όταν επιτυγχάνεται το σημείο ισορροπίας. Σε αυτήν την ειδική περίπτωση οι προηγούμενες εξισώσεις έχουν σταθερούς συντελεστές.

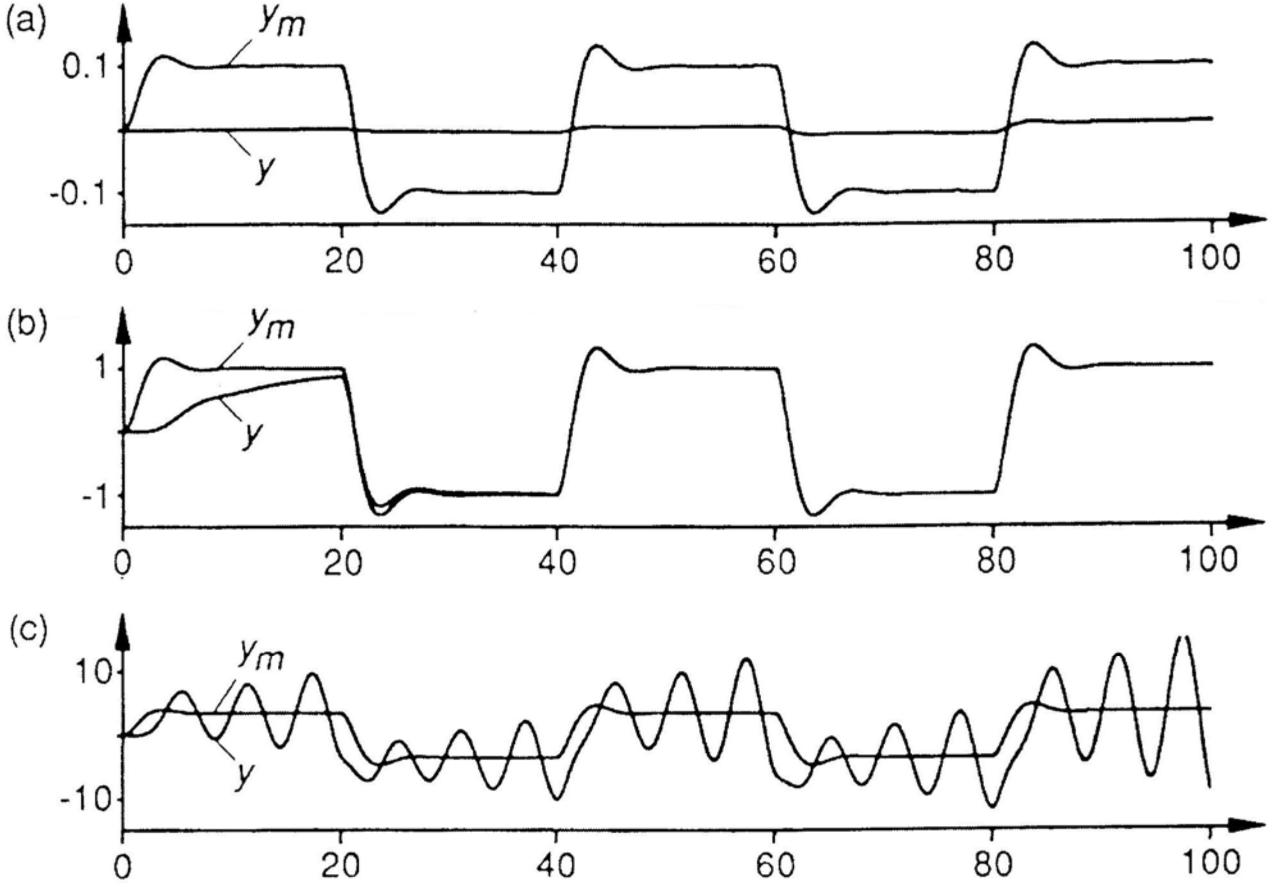
Αυτή η εξίσωση έχει λύση ισορροπίας:

$$y_m = y_m^0 = \frac{\theta^0 u_c^0}{a_2}$$

που είναι ευσταθής αν αν ισχύει $a_1 a_2 > \gamma u_c^0 y_m^0 = \gamma' \frac{\left(u_c^0\right)^2}{a_2}$.

Συνεπάγεται λοιπόν ότι η λύση της $y_m = y_m^0$ θα είναι πάντα ασταθής αν το σήμα ελέγχου u_c ή το προσαρμοστικό κέρδος γ' είναι αρκετά μεγάλο.

Κάποια σχετικά πειράματα προσομοίωσης δίνονται στο παρακάτω σχήμα για $a_1 = a_2 = \theta^0 = 1$, $\gamma = 0.1$ και σήμα ελέγχου μια τετραγωνική κυματομορφή πλάτους (α) 0.1, (b) 1 και (c) 3.5.



Τροποποιημένος MIT κανόνας

Υποθέτουμε ότι το μοντέλο αναφοράς είναι ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς G_m και ότι το σύστημα ανοικτού βρόχου (μαζί με τον ρυθμιστή για σταθερές τιμές των παραμέτρων είναι ένα ΓΧΑ σύστημα χαρακτηριζόμενο από την G(p,θ). Ο τροποποιημένος MIT κανόνας δίνει:

$$e = \left(G\left(p,\theta\right) - G_m(p)\right)u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = G_\theta(p,\theta)u_c$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma Sat\left[\frac{\left(G\left(p,\theta\right) - G_m(p)\right)u_c G_\theta(p,\theta)u_c}{\alpha + \left(G_\theta(p)u_c\right)^T \left(G_\theta(p)u_c\right)}, B\right]$$

Οι τιμές ισορροπίας των παραμέτρων είναι τα τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης:

$$\min \left\| \left(G(p,\theta) - G_m(p) \right) u_c(t) \right\|^2$$

Πόσα τέτοια ελάχιστα υπάρχουν εξαρτάται από το σήμα ελέγχου u_c , την δομή και την παραμετροποίηση του μοντέλου. Αν για παράδειγμα, το μοντέλο $G(p,\theta)$ είναι γραμμικό ως προς θ, τότε θα υπάρχει ένα μόνο ελάχιστο.