
BY500

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΡΑΒΔΟΥ

ΜΕ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

(THE BALL & BEAM APPARATUS)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Περιγραφή του συστήματος σφαίρας-ράβδου

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η περιγραφή του συστήματος με το οποίο θα ασχοληθούμε καθώς και η παρουσίαση των βασικών ιδιοτήτων του.

Το σύστημα που διαπραγματευόμαστε σε αυτή τη διπλωματική εργασία αποτελείται από μία ομογενή ράβδο και μία ομογενή σφαίρα. Η ράβδος στηρίζεται σε έναν κατακόρυφο άξονα που βρίσκεται στο μέσο αυτής και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από αυτόν. Η περιστροφή της ράβδου, η οποία επιτυγχάνεται μέσω ενός κινητήρα συνεχούς ρεύματος (DC-motor), κάνει τη σφαίρα να ολισθαίνει κατά το μήκος αυτής.

Η μοντελοποίηση αυτού του φυσικού συστήματος θα γίνει με την χρήση της μεθόδου Lagrange [1], η οποία χρησιμοποιεί τις ενέργειες του συστήματος για την εύρεση της μαθηματικής του περιγραφής.

1.2. Μοντελοποίηση

Αρχικά θα κάνουμε μία περιγραφή της μεθόδου Lagrange, με τη χρήση της οποίας θα περιγράψουμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματός μας.

1.2.1. Μέθοδος Lagrange

Αρχικά θα πρέπει να ορισθούν όλες οι πιθανές κινήσεις του συστήματος από τις ελεύθερες συντεταγμένες

$$x_i, i = 1, \dots, k \quad (1.1)$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν γεωμετρικοί ή κινηματικοί σύνδεσμοι σε ένα μηχανικό σύστημα ο αριθμός των συντεταγμένων k που απαιτείται για την περιγραφή της κίνησης μειώνεται κατά σ , που αντιστοιχεί στον αριθμό των συνθηκών που σχετίζονται με τους εξαναγκασμούς. Οι συντεταγμένες που απομένουν ορίζονται ως γενικευμένες συντεταγμένες

$$q_j, j = 1, \dots, f \quad (1.2)$$

όπου f είναι ο βαθμός ελευθερίας του συστήματος.

Έτσι οι k ελεύθερες συντεταγμένες x_i μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις των f γενικευμένων συντεταγμένων q_j ως:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_f, t), \quad i = 1, \dots, k \quad (1.3)$$

όπου το t δείχνει την επίδραση του χρόνου.

Με όλες αυτές τις ανεξάρτητες μεταβολές μπορούν να οριστούν τα

$$\delta q_1, \dots, \delta q_f \quad (1.4)$$

Επειδή τα διανύσματα θέσης \underline{r} εξαρτώνται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_j , η πραγματική επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης περιγράφεται ως:

$$\delta W = \underline{F} \delta \underline{r} = \sum_{j=1}^f \underline{F} \frac{\delta \underline{r}}{\delta q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j \quad (1.5)$$

όπου Q_j είναι οι γενικευμένες δυνάμεις.

Το Q_j είναι δύναμη όταν το q_j είναι απόσταση και όταν το Q_j περιγράφει ροπή, το q_j είναι γωνία. Όλες οι δυνάμεις και οι ροπές που δρουν στο σύστημα πρέπει να συμπεριληφθούν στο Q_j , ακόμα και οι δυνάμεις των ελαστικών συνδέσμων.

Τυπικές δυνάμεις ελαστικών συνδέσμων, όπως οι δυνάμεις του γραμμικού ελατηρίου, ή οι δυνάμεις της δυναμικής γράφονται ως:

$$Q_j = -\frac{\delta V}{\delta q_j} \quad (1.6)$$

όπου V είναι η δυναμική των δυνάμεων των ελαστικών συνδέσμων.

Η συνάρτηση Lagrange ορίζεται ως (*Clödner, Holzweissing 1989*):

$$L = T - V \quad (1.7)$$

όπου T , V είναι η ολική κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος, αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις Lagrange δευτέρου τύπου δίνονται από την σχέση:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \bar{Q}_j \quad (1.8)$$

όπου \bar{Q}_j είναι οι γενικευμένες δυνάμεις. Όταν το \bar{Q}_j περιέχει μη συντηρητικές δυνάμεις - δηλαδή δυνάμεις τριβών - γεγονός που μειώνει την ενέργεια του συστήματος κατά την διάρκεια της κίνησης, το \bar{Q}_j μπορεί να περιγραφεί ως:

$$\bar{Q}_j = Q_j^* - \frac{\delta Y}{\delta \dot{q}_j} \quad (1.9)$$

όπου

Y : η συνάρτηση Rayleigh

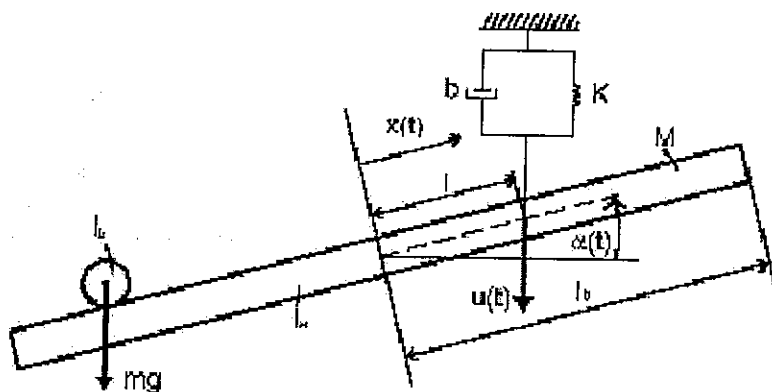
Q_j^* : οι γενικευμένες συντηρητικές δυνάμεις της δυναμικής.

1.2.2. Εύρεση του μαθηματικού μοντέλου

Στην περίπτωση μας οι ελεύθερες συντεταγμένες είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1 οι x' , y' , ψ , a , και συνεπώς ο αριθμός των ελεύθερων συντεταγμένων k είναι 4.

Επειδή όμως η κίνηση του κάθε μέλους του συστήματος δεν είναι ανεξάρτητη από την κίνηση των υπολοίπων μελών, ο αριθμός των συντεταγμένων k που απαιτείται για την περιγραφή της κίνησης μειώνεται κατά σ , ο οποίος αντιστοιχεί στον αριθμό των συνθηκών που σχετίζονται με τους εξαναγκασμούς.

Ο μηχανικός βαθμός ελευθερίας του συστήματος σφαίρας-ράβδου προκύπτει σύμφωνα με τους Goldner και Holzweissig (1989), μειώνοντας τις τέσσερις πιθανές κινήσεις σε $f=2$. Έτσι οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι τέσσερις ($k=4$) και ο αριθμός των συντεταγμένων που σχετίζονται με τους εξαναγκασμούς είναι $\sigma = k - f = 2$.

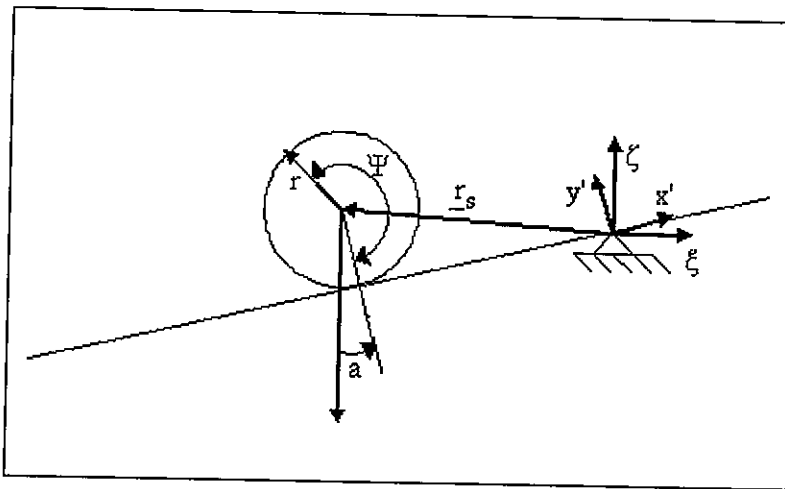


Σχήμα 1.1: Σύστημα σφαίρας-ράβδου

Τότε οι δύο ελεύθερες συντεταγμένες μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις των δύο γενικευμένων συντεταγμένων q_j ως

$$x' = r\psi \quad \text{και} \quad y' = a\ell \quad (1.10)$$

Έτσι η δυναμική συμπεριφορά της σφαίρας πρέπει να περιγραφεί ως προς ένα μεταβαλλόμενο σύστημα αναφοράς x', y' και ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων ξ, ζ (αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Καθορισμός του διανύσματος θέσης της σφαίρας

Δεδομένου της ύπαρξης αισθητήρων μέτρησης της θέσης της σφαίρας x' και της γωνίας της ράβδου a , για τον ελεγκτή κατάστασης επιλέγονται οι ακόλουθες μεταβολές:

$$\begin{aligned} \delta q_1 &= \delta x' \quad \text{μεταβολή της θέσης της σφαίρας} \\ \delta q_2 &= \delta a \quad \text{μεταβολή της γωνίας της ράβδου} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Κινητική ενέργεια του συστήματος

Η κινητική ενέργεια T δίνεται από το άθροισμα της κινητικής ενέργειας της σφαίρας T_b και της κινητικής ενέργειας της ράβδου T_w . Έτσι

$$T = T_b + T_w \quad (1.12)$$

όπου

$$T_b = \underbrace{\frac{1}{2} m v_s^2}_{\text{\small όρος από μεταφορική κίνηση}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_b \omega_b^2}_{\text{\small όρος από περιστροφική κίνηση}} \quad (1.13)$$

και

$$T_w = \frac{1}{2} I_w \dot{a}^2 \quad (1.14)$$

Η ταχύτητα της σφαίρας v_s καθώς και η γωνιακή της ταχύτητα ω_b πρέπει να ορισθούν ως συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων. Το Σχήμα 1.2 δείχνει όλες τις μεταβλητές που χρειάζονται για την εύρεση της σχέσης της ταχύτητας v_s με το αδρανειακό σύστημα ξ, ζ . Η σχέση που δίνει την v_s (Hagedorn 1990, Hering u.a.1992) είναι

$$\underline{v} = \underline{v}'_s + \underline{\omega} \times \underline{r}_s \quad (1.15)$$

Με βάση το διάνυσμα θέσης $\underline{r}_s = [x' \ r']^T$ ως προς το σχετικό σύστημα x', y' και με $\underline{v}'_s = \frac{d\underline{r}_s}{dt} = [\dot{x}' \ 0]^T$ προκύπτει από την εξίσωση (1.15) η σχέση

$$\frac{d\underline{r}_s}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{a} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ r' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}' - \dot{a}r' \\ x' \dot{a} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Έτσι η ταχύτητα της σφαίρας δίνεται από την σχέση

$$v_s^2 = \dot{x}'^2 + 2\dot{x}'^2 \dot{a}r' + (\dot{a}r')^2 + (x' \dot{a})^2 \quad (1.17)$$

Ένας εναλλακτικός καθορισμός του v_s^2 δίνεται από τις δύο διαφορικές των καρτεσιανών συντεταγμένων του κέντρου της σφαίρας ως προς το αδρανειακό σύστημα

$$\dot{\xi}_s = \frac{d}{dt}(x' \cos(a) - r' \sin(a)) \quad (1.18)$$

$$\dot{\zeta}_s = \frac{d}{dt}(x' \sin(a) + r' \cos(a)) \quad (1.19)$$

Για τον προσδιορισμό της γωνιακής ταχύτητας ω_b πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν ότι προκύπτει από την περιστροφή της σφαίρας και από την περιστροφή της ράβδου.

Γενικά, η γωνιακή ταχύτητα $\underline{\omega}$ ενός μέλους ενός συστήματος που

περιλαμβάνει δύο μεταβολές γωνίας $d\phi_1$ και $d\phi_2$ δίνεται σύμφωνα με τον Frik (1994) από τη σχέση $\underline{\omega} = \underline{\omega}_2 + \underline{\omega}_3$. Έτσι η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας θα είναι

$$\omega_b = \dot{\psi} + \dot{\alpha} = \frac{\dot{x}'}{r} + \dot{\alpha} \quad (1.20)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (1.17) και (1.20) στην (1.12) προκύπτει η κινητική ενέργεια ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες

$$T = \frac{1}{2} \left(I_w \dot{\alpha}^2 + m (\dot{x}'^2 \dot{\alpha} r + \dot{\alpha} r^2 + x'^2 \dot{\alpha}^2) + I_b \left(\frac{\dot{x}'}{r} + \dot{\alpha} \right)^2 \right) \quad (1.21)$$

Δυναμική ενέργεια του συστήματος

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος υπολογίζεται από τους ακόλουθους συντηρητικούς όρους:

1. τη δυναμική ενέργεια της σφαίρας που είναι: (δες Σχήμα 1.3)

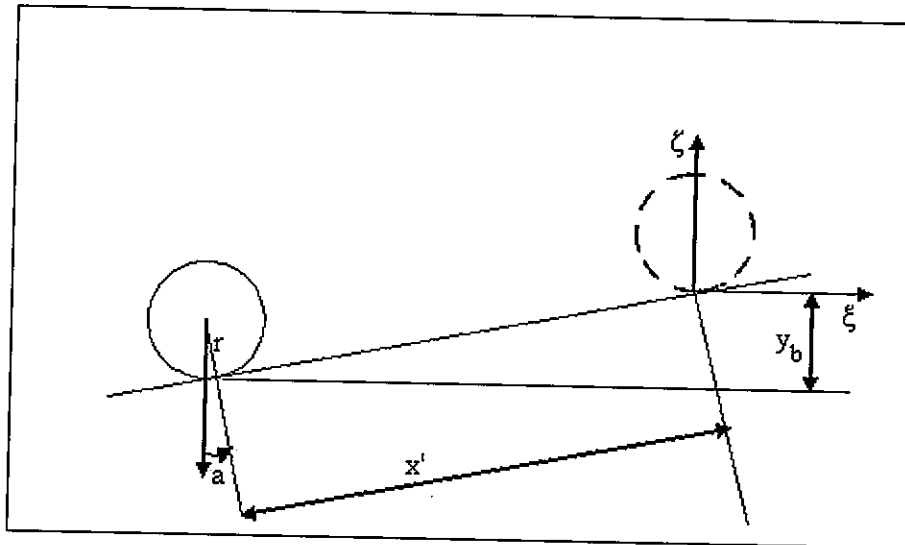
$$V_b = -mgy_b = mgx' \sin(\alpha) \quad (1.22)$$

2. τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου που είναι:

$$V_f = \frac{1}{2} K \Delta y'^2 = \frac{1}{2} K \ell^2 \alpha^2 \quad (1.23)$$

Άρα

$$V = V_b + V_f = mgx' \sin(\alpha) + \frac{1}{2} K \ell^2 \alpha^2 \quad (1.24)$$



Σχήμα 1. 3: Η δυναμική ενέργεια της σφαίρας

Μη συντηρητικές δυνάμεις του συστήματος

Η μόνη μη συντηρητική δύναμη του συστήματος είναι η γραμμική τριβή ολίσθησης $F_R = -bl\dot{a}$. Έτσι η μη-συντηρητική Rayleigh συνάρτηση δίνεται από την

$$Y = \frac{1}{2} b l^2 \dot{a}^2 \quad (1.25)$$

Γνωρίζοντας τώρα την εξίσωση Lagrange (1.8), οι εξισώσεις κίνησης του μηχανικού συστήματος που προκύπτουν παραγωγίζοντας ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες και ως προς τον χρόνο είναι οι ακόλουθες [2]:

$$\left(m + \frac{I_b}{r^2} \right) \ddot{x} + (mr^2 + I_b) \frac{1}{r} \ddot{a} - m x \dot{a}^2 + mg \sin(a) = 0 \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} (m\dot{x}^2 + I_b + I_w) \ddot{a} + (2m\dot{x}x + b\ell^2) \dot{a} + k\ell^2 a + (mr^2 + I_b) \frac{1}{r} \ddot{x} \\ + mgx \cos(a) = u(t) \ell \cos(a) \end{aligned} \quad (1.27)$$

1.2.3. Παράμετροι του συστήματος

Στον πίνακα 1.1 βλέπουμε όλες τις φυσικές παραμέτρους του συστήματός σφαίρας-ράβδου.

m	Μάζα σφαίρας	b	συντελεστής τριβής των μηχανικών μερών
g	σταθερά βαρύτητας	K	σταθερά ελατηρίου
r	ακτίνα σφαίρας (απόσταση από το κέντρο της σφαίρας ως την επιφάνεια της ράβδου)	ℓ	απόσταση εφαρμοζόμενης δύναμης
I_b	Ροπή αδρανείας σφαίρας	ℓ_w	ακτίνα ράβδου
I_w	Ροπή αδρανείας ράβδου	$u(t)$	είσοδος
M	Μάζα ράβδου		

Πίνακας 1.1. Παράμετροι του συστήματος

1.3. Προσεγγιστικό μοντέλο

1.3.1. Διαφορικές εξισώσεις κίνησης

Επειδή το υπό μελέτη σύστημα παρουσιάζει μεγάλο βαθμό δυσκολίας λόγω της ύπαρξης εξαιρετικά μη γραμμικών όρων, θα κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις στις φυσικές παραμέτρους, οι οποίες όμως δε θα αλλοιώσουν σημαντικά το πραγματικό μοντέλο.

Θεωρούμε λοιπόν ότι η σφαίρα είναι σημειακή δηλαδή η ακτίνα r θα είναι μηδέν και άρα και η ροπή αδρανείας της σφαίρας θα είναι μηδενική. Επίσης θα θεωρήσουμε ότι η είσοδος η οποία εφαρμόζεται στη ράβδο δεν είναι δύναμη, αλλά μία ροπή τ η οποία εφαρμόζεται στο κέντρο της ράβδου. Ουσιαστικά θεωρούμε ότι ο κινητήρας βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα που περνάει από το μέσο της ράβδου. Αυτή η υπόθεση δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα και θα εξηγήσουμε τον λόγο αμέσως παρακάτω.

Όπως σε όλα σχεδόν τα μηχανικά συστήματα έτσι και στο δικό μας η είσοδος προκαλείται από κάποια ηλεκτρική μηχανή. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει ένας κινητήρας στον οποίο εφαρμόζεται μία τάση με αποτέλεσμα να περιστρέφεται ο ρότορας και άρα και η αλυσίδα, η οποία συνδέεται με τη ράβδο. Στην επιφάνεια του ρότορα υπάρχουν γρανάζια στα οποία γαντζώνεται η αλυσίδα καθώς περιστρέφεται. Αν για παράδειγμα ο ρότορας περιστραφεί ανθρολογιακά τότε ουσιαστικά εφαρμόζεται μία δύναμη F στο αριστερό άκρο της ράβδου με φορά προς τα κάτω και μία δύναμη $-F$ στο δεξί άκρο με φορά προς τα πάνω με αποτέλεσμα η ράβδος να ανεβαίνει προς τα πάνω. Ουσιαστικά αυτές οι δύο δυνάμεις ισοδυναμούν με μία ροπή που εφαρμόζεται στο κέντρο της ράβδου, η οποία και την περιστρέφει.

Είμαστε λοιπόν τώρα σε θέση να παρουσιάσουμε το μοντέλο του συστήματος με το οποίο θα ασχοληθούμε.

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της σφαίρας και της ράβδου αντίστοιχα είναι:

$$m\ddot{x} + mg \sin(a) - mx\dot{a}^2 = 0 \quad (1.28)$$

$$(mx^2 + I_w)\ddot{a} + 2mx\dot{x}\dot{a} + mgx \cos(a) = \tau(t) \quad (1.29)$$

1.3.2. Περιγραφή στον χώρο κατάστασης

Ορίζουμε ότι το διάνυσμα κατάστασης είναι το $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$, όπου:

- $x_1 = x$ η θέση της σφαίρας
- $x_2 = \dot{x}$ η ταχύτητα της σφαίρας
- $x_3 = a$ η γωνία της ράβδου
- $x_4 = \dot{a}$ η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου

Έτσι οι καταστατικές εξισώσεις θα είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_4^2 - g \sin(x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{-2mx_1 x_2 x_4 - mgx_1 \cos(x_3) + \tau(t)}{(mx_1^2 + I_w)} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Όπως παρατηρούμε το μαθηματικό μοντέλο (1.30) που περιγράφει το σύστημά μας είναι μη γραμμικό, καθώς υπάρχουν μη γραμμικοί όροι όπως οι x_4^2 , $\sin(x_3)$, $\cos(x_3)$, x_1^2 . Επιπλέον οι τέσσερις καταστάσεις είναι εξαρτημένες και δε μπορούμε να τις διαχωρίσουμε (για παράδειγμα $x_1 x_4^2$, $-2mx_1 x_2 x_4$, $mgx_1 \cos(x_3)$).

1.3.3. Γραμμικοποίηση του μοντέλου

Μία πρώτη προσέγγιση στη προσπάθεια σταθεροποίησης του εν λόγω συστήματος, είναι η εφαρμογή της θεωρίας ελέγχου γραμμικών συστημάτων. Για το λόγο αυτό κρίνουμε σκόπιμο να γραμμικοποιήσουμε το μη-γραμμικό μοντέλο (1.30). Η γραμμικοποίηση, σύμφωνα με τη θεωρία, γίνεται γύρω από το σημείο ισορροπίας του συστήματος, όπως θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Ας βρούμε λοιπόν τώρα την γραμμική προσέγγιση του μοντέλου, η οποία θα μας δώσει κάποια πρώτα χαρακτηριστικά για το σύστημα.

Η γραμμικοποίηση θα γίνει γύρω από το σημείο που θέλουμε να σταθεροποιήσουμε το σύστημα, δηλαδή το $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ και για $\tau_0 = 0$.

Το γραμμικοποιημένο μοντέλο θα είναι της μορφής

$$\dot{x} = Ax + B\tau \quad (1.31)$$

$$\text{όπου } A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, \tau_0} \text{ και } B = \left. \frac{\partial f}{\partial \tau} \right|_{x_0, \tau_0}, \text{ όπου} \quad (1.32)$$

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - g \sin(x_3) \\ x_4 \\ \frac{-2mx_1 x_2 x_4 - mgx_1 \cos(x_3) + \tau(t)}{(mx_1^2 + I_w)} \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Μετά από κάποιους υπολογισμούς προκύπτει:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{I_w} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_w} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3.28 \\ \lambda_{2,3} &= \pm 3.28i \\ \lambda_4 &= 3.28 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Προφανώς το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ασταθές, αφού υπάρχει ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος.

Για να μπορούμε να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του συστήματος στα σημεία που επιθυμούμε, σύμφωνα με τη θεωρία ελέγχου γραμμικών συστημάτων, ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι το σύστημα μας να είναι ελέγξιμο. Επιπλέον η μονάδα που εκτιμά κάθε χρονική στιγμή την κατάσταση καλείται παρατηρητής, και συνεπώς η παρατηρησιμότητα είναι η ιδιότητα που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε οποιαδήποτε στιγμή τη κατάσταση.

Ας δούμε λοιπόν τώρα αν το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο [3].

Ο πίνακας ελεγχιμότητας είναι:



$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-g}{I_w} \\ 0 & 0 & \frac{-g}{I_w} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_w} & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_w} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Για να είναι ελέγξιμο θα πρέπει η ορίζουσα του C να είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή ο C να είναι πλήρους τάξεως.

Όντως $\det(C) = \frac{g^2}{I_w^4} \neq 0$, και συνεπώς το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.

Αν η ιδιοτιμή λ_4 , η οποία έχει θετικό πραγματικό μέρος, δεν ήταν ελέγξιμη τότε το σύστημα δεν θα ήταν σταθεροποιήσιμο και συνεπώς δε θα ήταν εφικτή η σταθεροποίηση του.

Αντίστοιχα, ο πίνακας παρατηρησιμότητας είναι:

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

και $\det(Ob) = g^2 \neq 0$.

Άρα το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιος γραμμικός έλεγχος με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου όπου επιθυμούμε, ώστε το σύστημα αυτό να είναι ευσταθές.

1.4. Σύνοψη κεφαλαίου

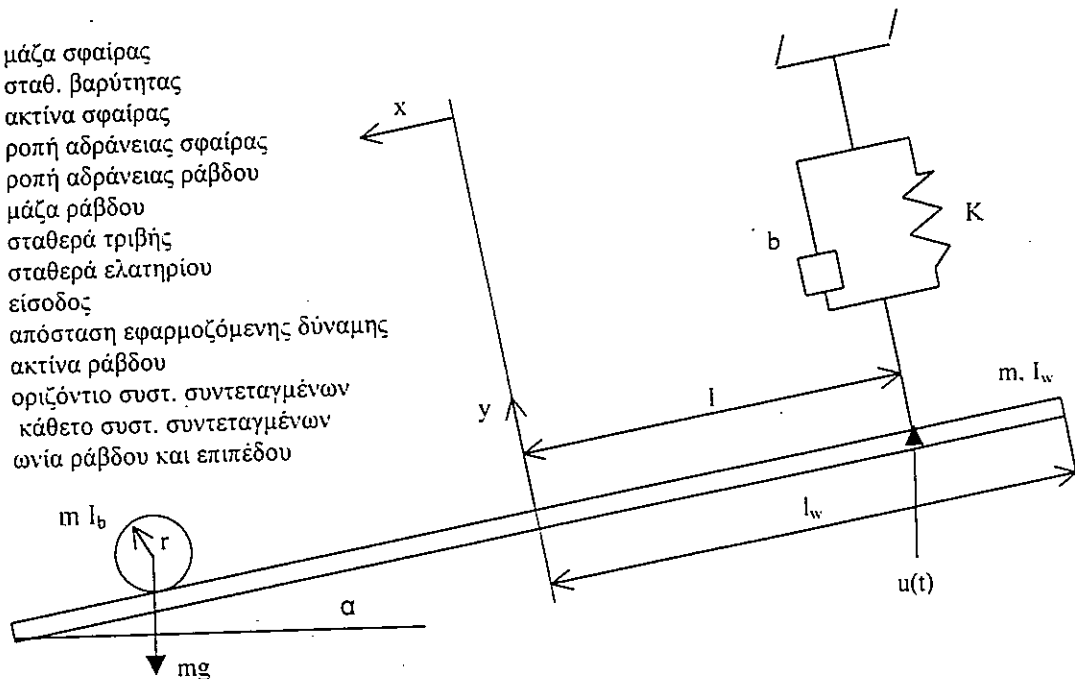


1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της παρούσης ασκήσεως είναι ο έλεγχος ενός δυναμικού συστήματος με ανατροφοδότηση καταστάσεως. Το υπό έλεγχο σύστημα αποτελείται από μία ομογενή ράβδο η οποία ερείδεται επί άξονος ευρισκομένου υπό το μέσο της και μπορεί να περιστρέφεται περί αυτόν. Επί της ράβδου υπάρχει ομογενής σφαίρα που μπορεί να κυλά κατά μήκος αυτής. Η παράμετρος ελέγχου του συστήματος είναι η δύναμη που εφαρμόζεται στα άκρα της ράβδου. Γενικά στόχος του ελέγχου είναι η κίνηση της σφαίρας κατά κάποιον προδιαγεγραμμένο, επιθυμητό τρόπο. Στην παρούσα άσκηση σκοπός του ελέγχου θα είναι η παραμονή της σφαίρας σε συγκεκριμένο σημείο και η επαναφορά της στο σημείο αυτό σε περίπτωση διαταραχής.

2. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

- m: μάζα σφαίρας
- g: σταθ. βαρύτητας
- r: ακτίνα σφαίρας
- I_b : ροπή αδράνειας σφαίρας
- I_w : ροπή αδράνειας ράβδου
- M: μάζα ράβδου
- b: σταθερά τριβής
- K: σταθερά ελατηρίου
- $u(t)$: είσοδος
- l: απόσταση εφαρμοζόμενης δύναμης
- l_w : ακτίνα ράβδου
- x: οριζόντιο συστ. συντεταγμένων
- y: κάθετο συστ. συντεταγμένων
- α : γωνία ράβδου και επιπέδου



Το μαθηματικό πρότυπο που περιγράφει το ανωτέρω σύστημα μπορεί να βρεθεί με την βοήθεια της μεθόδου του Lagrange.

$$\left(m + \frac{I_b}{r^2}\right)\ddot{x} + (mr^2 + I_b)\frac{1}{r}\ddot{\alpha} - mx\dot{\alpha}^2 = mg \sin(\alpha)$$

$$(mx^2 + I_b + I_w)\ddot{\alpha} + (2mx\dot{x} + bl^2)\dot{\alpha} + Kl^2\alpha + (mr^2 + I_b)\frac{1}{r}\ddot{x} - mgx \cos(\alpha) = u(t)l \cos(\alpha)$$

Οι εξισώσεις παρατηρούμε ότι είναι μη γραμμικές και περιγράφουν η μεν πρώτη τη κίνηση της σφαίρας η δε άλλη τη κίνηση της ράβδου. Από τις παραπάνω εξισώσεις οδηγούμαστε σε ένα μη γραμμικό καταστατικό πρότυπο τετάρτης τάξεως. Έστω $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$ το διάνυσμα καταστάσεως. Οι καταστατικές μεταβλητές είναι η γωνία στροφής της ράβδου x_3 , η χρονική παράγωγος της γωνίας αυτής (δηλ. η γωνιακή ταχύτης) x_4 , η απόσταση της σφαίρας από το μέσο της ράβδου x_1 και η χρονική παράγωγος της αποστάσεως αυτής (δηλ. η γραμμική ταχύτης της σφαίρας) x_2 . Ένεκα πολυπλοκότητας του μη γραμμικού προτύπου το σύστημα θα ελεγχθεί με την χρήση του γραμμικοποιημένου προτύπου στο σημείο x_0, u_0 .

2.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Η εφαρμογή του ελέγχου ανάδρασης κατάστασης προϋποθέτει ότι το μοντέλο μας είναι γραμμικό. Η γραμμικοποίηση επιτυγχάνεται με ανάπτυξη του συστήματος σε σειρές Taylor κρατώντας τους πρώτους όρους μονάχα και γύρω από ένα σημείο λειτουργίας x_0, u_0 . Έτσι, το μοντέλο μας παίρνει τη μορφή :

$$x = A_0 x + B_0 u, \quad y = Cx$$

με

$$A_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}, \quad B_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0}$$

και

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

εφόσον μόνο η θέση της σφαίρας x_1 και η γωνία της ράβδου x_3 είναι μετρήσιμες.

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

Εφόσον το συστήμα μας ελέγχεται από ψηφιακό υπολογιστή επιβάλλεται η μετατροπή του γραμμικού προτύπου συνεχούς χρόνου σε πρότυπο διακριτού χρόνου. Το αντίστοιχο πρότυπο διακριτού χρόνου δίνεται από την εξίσωση

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

όπου

$$A_d = e^{-A_d T}, \quad B_d = \int_0^T e^{-A_d (T-t)} B_c dt$$

και T είναι η περίοδος δειγματοληψίας.

Όταν οι ιδιοτιμές του πίνακα A_d βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο του z -επιπέδου, το σύστημα είναι ευσταθές. Ανάλογα με τα συστήματα συνεχούς χρόνου, οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\text{Det}(zI - A_d) = 0$$

Αν οι ιδιοτιμές του συνεχούς προτύπου είναι ήδη γνωστές ο μετασχηματισμός

$$z_i = e^{T\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

παράγει τις ιδιοτιμές στο z -επίπεδο.

Όταν η περιγραφή του συστήματος δίνεται στο χώρο κατάστασης, ο έλεγχος πραγματοποιείται με ανάδραση όλων των καταστάσεων στην είσοδο εισάγοντας έτσι το πρόβλημα της κατάλληλης εκλογής των παραμέτρων της ανάδρασης. Υπάρχουν δύο τρόποι για την επίλυση αυτού του προβλήματος

- 1 Προδιαγράφοντας τη δυναμική συμπεριφορά, εκλέγοντας κατάλληλα του πόλους του κλειστού συστήματος (pole placement).
- 2 Με χρήση βελτιστοποίησης κριτηρίου ποιότητας (optimum control).

4 ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ

Προϋπόθεση για την εφαρμογή ελέγχου ανάδρασης, είναι το συστήμα μας να είναι ελέγξιμο, δηλ.

$$\text{rank}[B_d | A_d B_d | \dots | A_d^{n-1} B_d] = n$$

όπου n είναι η τάξη του συστήματος.

Ο νόμος ελέγχου έχει τη γενική μορφή

$$u(kT) = Vw(kT) - Fx(kT)$$

όπου V είναι ένα φίλτρο που εξασφαλίζει ότι η έξοδος θα ακολουθεί ένα προκαθορισμένο σήμα αναφοράς($w(kT)$) στην μόνιμη κατάσταση.

Το σύστημα κλειστού βρόχου έχει τώρα τη μορφή

$$x(k+1) = (A_d - B_d F)x(k) + B_d Vw(k)$$

$$y(k) = (C - DF)x(k) + DVw(k)$$

4.1 ΕΚΛΟΓΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΛΕΓΚΤΗ

Εάν οι ιδιοτιμές του κλειστού βρόχου είναι γνωστές τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + p_{n-2}z^{n-2} + \dots + p_0$$

Το διάνυσμα της ανάδραση υπολογίζεται τότε από την εξίσωση

$$F^T = p_0 q_s^T + \dots + p_{n-1} q_s^T A_d^{n-1} + q_s^T A_d^n$$

Όπου ο όρος q_s^T αναφέρεται στην τελευταία σειρά της αντίστροφης μήτρας ελεγκσιμότητας

$$Q_s^{-1} = [B_d | A_d B_d | \dots | A_d^{n-1} B_d]^{-1}$$

Το φίλτρο V υπολογίζεται από την εξίσωση

$$V = [C(I - A_d + B_d F)^{-1} B_d]^{-1}$$

Ο σχεδιασμός του ελεγκτή με ανατροφοδότηση κατάστασης απαιτεί το διάνυσμα x να είναι πλήρως γνωστό. Όταν αυτό δεν συμβαίνει, οι χαμένες καταστατικές μεταβλητές θα πρέπει να υπολογιστούν με παραπέρα αλγόριθμους γνωστοί σαν παρατηρητές.

5 ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ

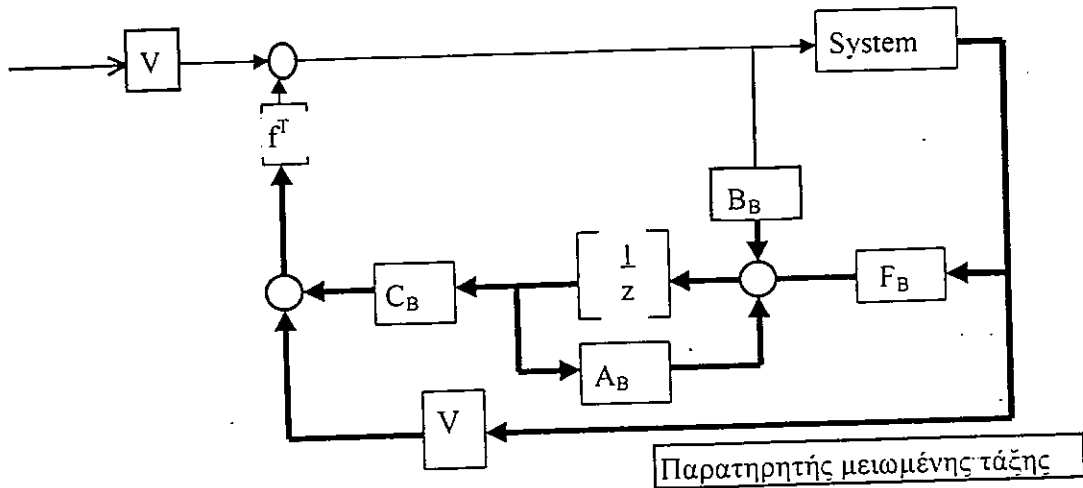
Ο νόμος ελέγχου $u(kT) = Vw(kT) - Fx(kT)$ προϋποθέτει ότι το διάνυσμα x είναι πλήρως γνωστό. Ωστόσο ξέρουμε ότι μόνο δύο μεταβλητές είναι μετρήσιμες. Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε ένα παρατηρητή μειωμένης τάξης που θα χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των υπόλοιπων δύο καταστάσεων. Αν με x_B παραστήσουμε το διάνυσμα των αγνώστων καταστάσεων τότε το σύστημά μας μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ x_B(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ x_B(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

Εισάγοντας τον παρατηρητή μειωμένης τάξης στο βρόχο ανάδρασης αυτός παίρνει την μορφή της εικόνας 1. Οι πίνακες L_B , A_B , F_B , B_B , C_B , V_B του παρατηρητή υπολογίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$A_B = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Με λ_i συμβολίζουμε προκαθορισμένες ιδιοτιμές εκλεγμένες συνήθως 4 – 5 φορές ταχύτερες τις ιδιοτιμές του ελεγκτή.



Εικόνα 1 Διάγραμμα ροής του συστήματος με παρατηρητή και έλεγχο ανάδρασης

Και οι υπόλοιπες μήτρες που χρειάζονται για την υλοποίηση του ελεγκτή

$$L_B = (A_{22} - A_B)A_{12}^{-1}$$

$$F_B = A_B L_B + A_{21} - L_B A_{11}$$

$$B_B = B_2 - L_B B_1$$

$$C_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{11} & l_{12} \\ 0 & 1 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Πρίν την εκτέλεση του προγράμματος c:\ballbeam\control\BW500.exe θα πρέπει να εκτελεστούν ορισμένα προγράμματα σε Matlab. Έτσι, με τη βοήθεια του Matlab βρείτε τα παρακάτω:

- 1 Το γραμμικοποιημένο πρότυπο του συστήματος για σημείο λειτουργίας το $x_0=0, u_0=0$. (τρέξτε το $[A,B]=linbb(x_0,u_0)$)
- 2 Βρείτε το διακριτό πρότυπο για χρόνο δειγματοληψίας $T=0,05\text{sec}$. Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση $[Ad,Bd]=c2d(A,B,T)$.
- 3 Υπολογίστε τις παραμέτρους (F,V) του ελεγκτή για εκλεγμένες ιδιοτιμές τις $dp=[0.9512, 0.7788, 0.4724, 0.4724]$. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση $[F,V]=ppbb(Ad,Bd,dp)$.
- 4 Υπολογίστε τις παραμέτρους του παρατηρητή μειωμένης τάξης για $\nu_p = \lambda_i = 0.0821$. Τρέξτε το $[Ab,Lb,Fb,Bb]=rob(Ad,Bd,\nu_p)$.

Τρέξτε το BW500.exe και περάστε τα παραπάνω δεδομένα με τη βοήθεια του menu Edit. Ενεργοποιήστε τη καταγραφή δεδομένων για $t=60\text{sec}$. Σώστε τα αποτελέσματα με το Save Plot Data του menu File. Επαναλάβετε την άσκηση για νέο σημείο λειτουργίας.

Υπολογιστικές ασκήσεις

- Με τη βοήθεια των μη γραμμικών εξισώσεων που περιγράφουν τη κίνηση της σφαίρα και της ράβδου αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μη γραμμικό καταστατικό πρότυπο της μορφής

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

- Αποδείξτε ότι $V = [C(I - A_d + B_d F)^{-1} B_d]^{-1}$. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις

$$x(k+1) = (A_d - B_d F)x(k) + B_d V w(k)$$

$$y(k) = (C - D F)x(k) + D V w(k)$$

$$y(+\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)G(z)W(z)]$$

- Για τον υπολογισμό των μη μετρήσιμων μεταβλητών (x_2, x_4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο παραγωγισμός των μετρήσιμων μεταβλητών (x_1, x_3) αντίστοιχα. Γιατί είναι θεωρητικά χειρότερος αυτός ο τρόπος υπολογισμού των αγνώστων μεταβλητών ?

1 Program Operation

The software package provides two versions to control the plant. The first version is a state controller as described in chapter "Realization of the state controller". Controller parameters are on-line adjustable. The second version to control the BW500 is a fuzzy controller as described in chapter "Realization of the Fuzzy Controller". Controller adjustments are storable to a hard disc and may be read at a later time. The setpoint for the ball position is adjustable as a constant value or a time function. Measurements of system variables are recordable with various trigger conditions. Recorded data are representable in a graphic on the screen. In addition the output of the graphic to a plotter or printer is available.

1.1 Program Start

Operating the program is significantly simplified when a mouse is used. So ascertain that a mouse is installed at your computer and that the mouse driver is running before you start the controller program.

The correct execution of the program requires that besides BW500.EXE the following files are available in the actual directory:

HARDWARE.CFG
 DEFAULT.FBW
 XCONTRO.FUZ
 WCONTROL.FUZ
 XERROR.FUZ
 WERROR.FUZ
 DEFAULT.STA

The file HARDWARE.CFG contains the hardware settings recently stored to disc. When this file does not exist, settings of the card address and the interrupt channel are to be adjusted using the menu IO-Interface (see chapter 1.4). Storing the selected configuration will create the named file on disc.

DEFAULT.FBW contains the file names list of the four fuzzy description files belonging to the fuzzy controller of the system. These fuzzy description files are loaded automatically during the program start. The file format is described in 1.9.3.

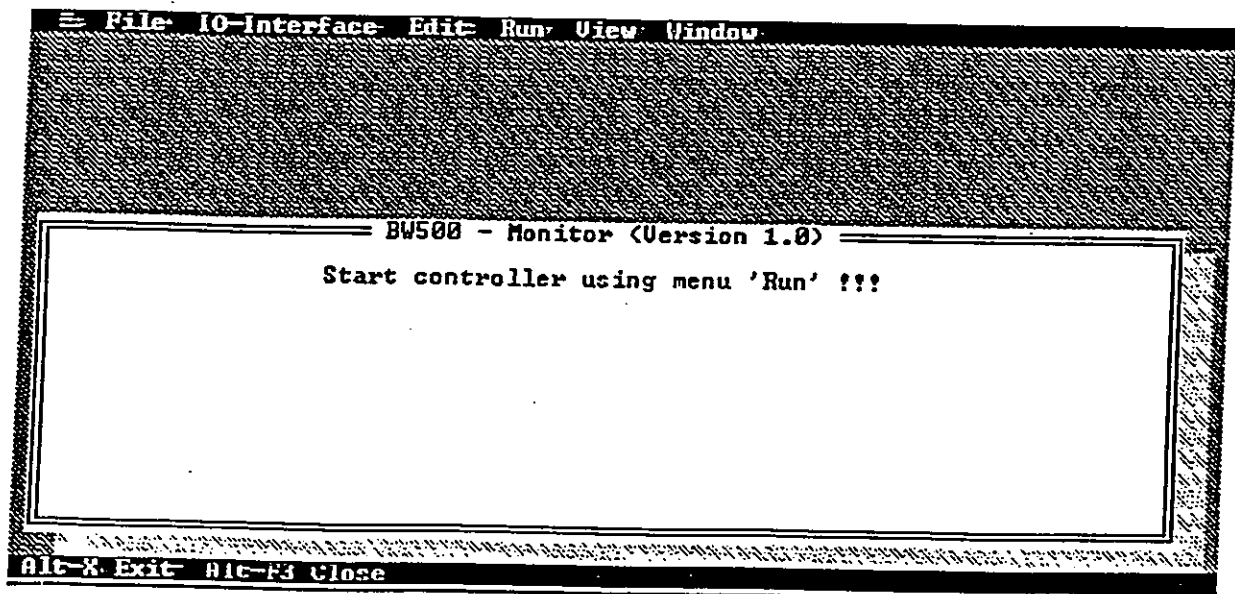


Figure 1.1: The main menu of the BW500 control software

DEFAULT.STA contains the parameters of the state controller. This file is loaded automatically during program start. The file format is described in 1.9.4.

After starting the program BW500.EXE the dialog window "BW500 Initialization" automatically appears on the desktop. The standard files (see above) are loaded and checked, which can take some seconds. At next the sensors have to be calibrated. To do this you are asked to fix the beam manually in a horizontal position and to place the ball in the middle of the beam. A prompt command will activate an automatic calibration. Following a successful calibration the main menu appears on the screen as shown in figure 1.1. The first screen row contains the main menu items. Its submenus are described in the following sections. The window BW500 Monitor is displayed in the middle of the screen. It displays the system state (controller type) and input as well as output signals of the controller.

1.2 Menu '≡'

The pulldown menu with the denotation '≡' contains only one item, 'Info', as shown in figure 1.2. When this function is selected, you obtain a short information about the program version in use and the Copyright.



Figure 1.2: The sub menu INFO

1.3 Menu FILE

The pulldown menu FILE contains items to control loading or saving of different files.

The menu items Load, Save und Save as contain the following sub-items.

Load State Controller: Loads a parameter file for the state controller. The file name is selected by the user from a file dialog window (see figure 1.3)

Load Fuzzy Controller: Loads a parameter file for the fuzzy controller. The file is selected by the user by means of a file dialog window. The parameter file contains the file names of four fuzzy description files. These fuzzy description files are loaded automatically and checked. A fuzzy rule base is generated if no errors were detected. Further information about the fuzzy description file can be found in the chapter 1.9.1 "Format of the Fuzzy Description File (*.FUZ)".

Load Plot Data: Opens a file dialog window for user selection of a data file containing recorded measurements.

Save State Controller: Saves the adjusted parameters of the state controller in a disc file. Destination file is the parameter file of the state controller, which was recently opened. Please notice that the file "DEFAULT.STA" was opened and loaded automatically during the program start and may be overwritten by this command.

Save Fuzzy Controller: Saves the names of the fuzzy description files of the fuzzy controller. Destination file is the file, which was recently opened. Please notice that the file "DEFAULT.FBW" was opened and loaded automatically during the program start and may be overwritten by this command.

Save State Controller as ...: Operates similar to the item "Save State Controller", the name of the destination file is however selected by the user by means of a file dialog window.

Save Fuzzy Controller as ...: Operates similar to the item "Save Fuzzy Controller", the name of the destination file is however selected by the user by means of a file dialog window.

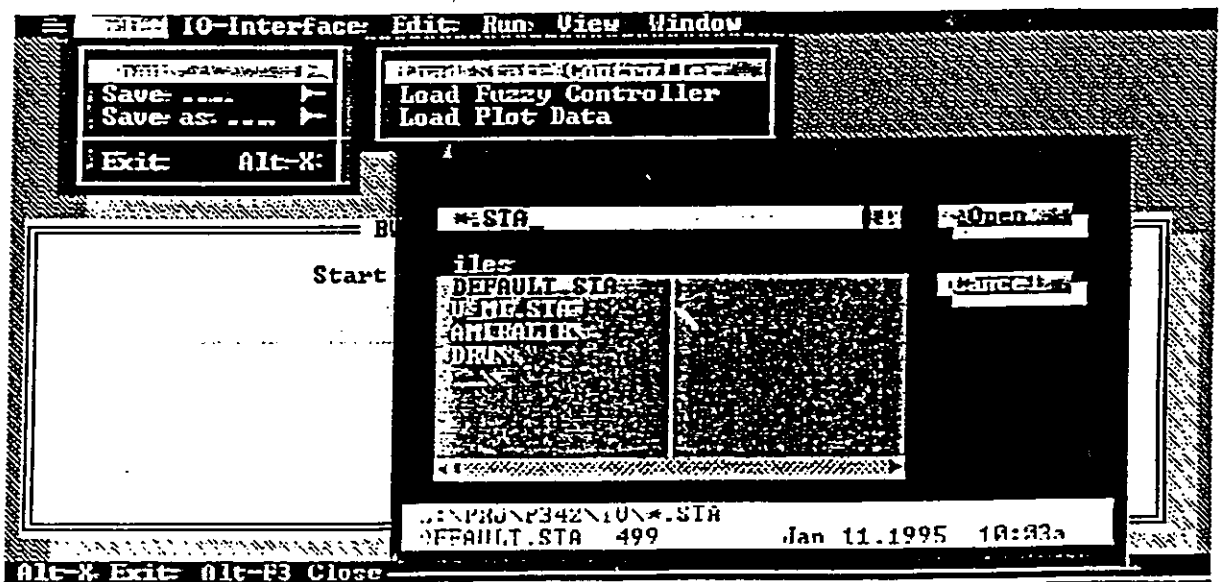


Figure 1.3: The sub menu FILE

1.5 Menu EDIT

The pulldown menu **EDIT** contains items to edit files and parameters.

State Feedback: Opens a dialog window displaying the feedback vector of the state controller. Its components are adjustable (see figure 1.5b).

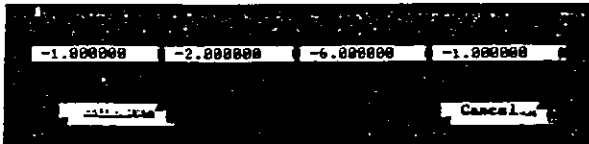


Figure 1.5b: The dialog window 'State Feedback'

State Observer: This item opens a pulldown menu to manipulate the L, A and F matrix or the B vector of the observer. Selecting one of these items opens a dialog window providing arbitrary adjustments of the values (see figure 1.5c).

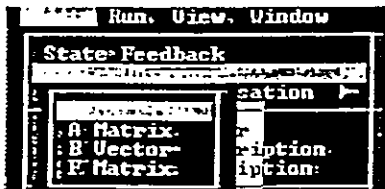


Figure 1.5c: The sub menu 'State Observer'

Friction Compensation: This item provides the adjustment of the parameter used by the friction compensation (see figure 1.5d).

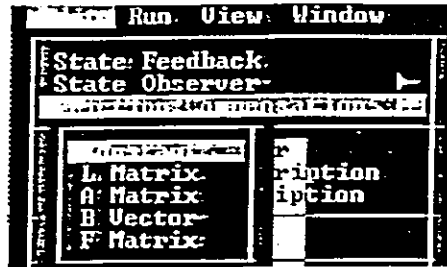


Figure 1.5d: The sub menu 'Friction Compensation'

Fuzzy Controller: Opens a dialog window to change the selection of the fuzzy description files of the fuzzy controller. Only the file names are changable. To edit the files itself the following menu item has to be selected (see figure 1.5e).

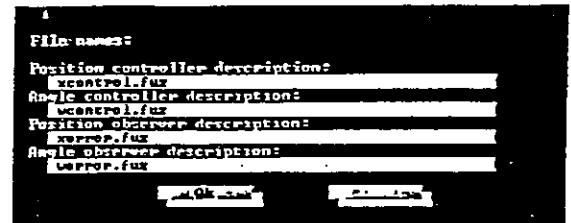


Figure 1.5e: The dialog window 'Fuzzy Controller'

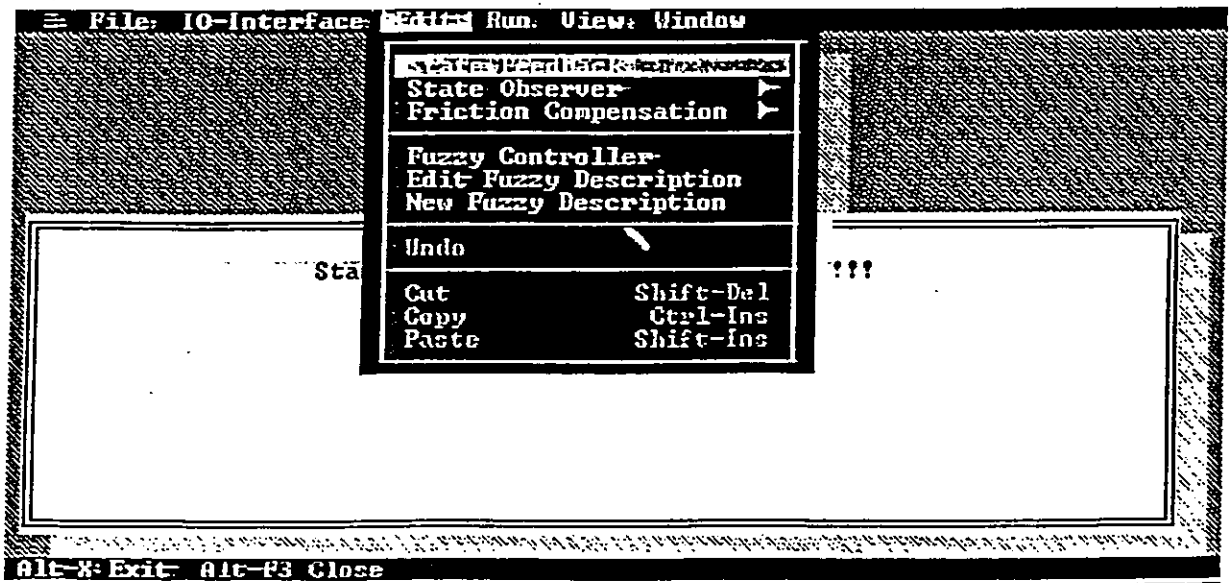


Figure 1.5a: The sub menu **EDIT**

Fuzzy Description: Opens a dialog window to select a fuzzy description file. The selected file is loaded in an editor module.

New Fuzzy Description: Starts the editor module with a new file, which may be used to create a fuzzy description file. The new file name is selected after terminating the editor.

The other functions **Undo**, **Cut**, **Copy** und **Paste** are help functions to operate the editor module.

Undo will undo the last editor command.

Cut erases a marked text block and stores it in the clipboard.

Copy copies a marked text block in the clipboard.

Paste inserts the text block copied to the clipboard beginning with the actual cursor position.

1.6 Menu RUN

The pulldown menu **RUN** in figure 1.6a contains items to start and stop a controller, to record measurements and to adjust the setpoint.

State Controller: Starts the state controller. A dialog window is opened automatically to configure observers and the disturbance compensation before the controller is active (interrupt enabled).

Fuzzy Controller: Starts the fuzzy controller defined by its fuzzy description files (*.FBW). A dialog window is opened automatically to configure observers and the disturbance compensation before the controller is active (interrupt enabled).

Calibrate Sensors: Carries out a menu driven calibration of the sensors. To do this the beam has to be fixed in a horizontal position and the ball has to be placed in the middle of the beam. The calibration operates automatically after prompting this dialog.

Stop Controller: Stops the selected controller and disables the interrupt.

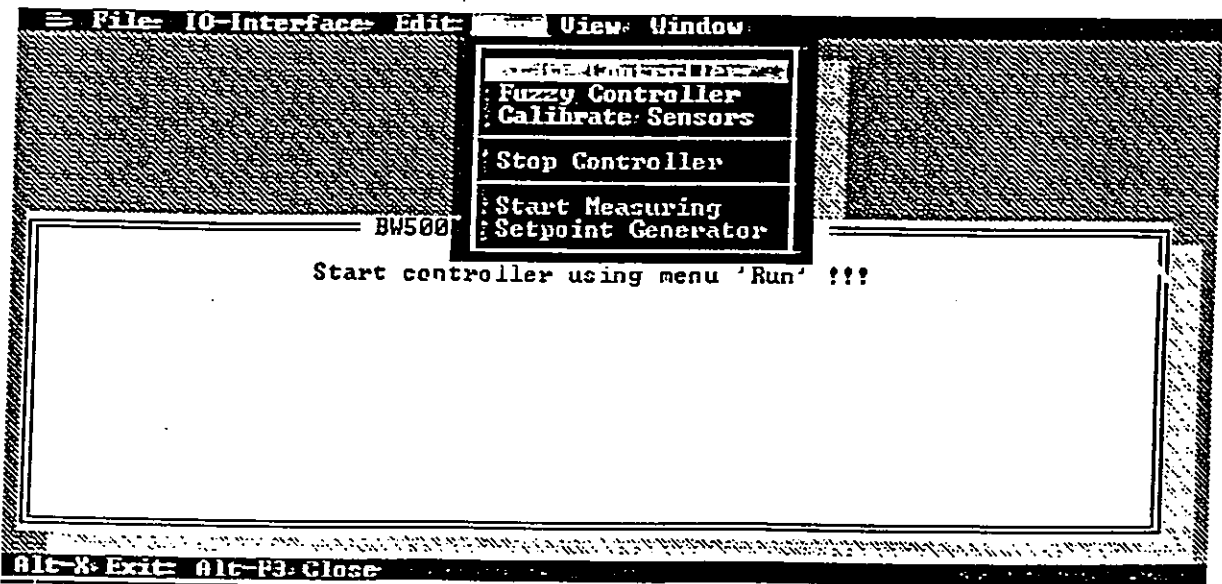


Figure 1.6a: The sub menu RUN

Start Measure: Opens a dialog window to adjust the conditions of measurement recording.

Setpoint Generator: Opens a dialog window to adjust the setpoint.

The function **Start Measure** opens a window to adjust the measuring time and to assign trigger conditions to start recording the measurements. Figure 1.6b shows this window. The measuring time in seconds is entered to the right to the title 'Total Time [s]:'. When 'Slope' is set to 'no trigger' measurement recording is started directly after closing the window using the 'Ok' button.

The trigger signal for conditional measuring ('Slope:' is set 'positive' or 'negative') is selected below the title 'Trigger Channel:'. The measurement recording starts after this signal raises above or falls below, depending on the settings of 'Slope', the limit value 'Trigger Value:'. In addition 'Prestore:' allows for adjustment of a time range for recording measurements before the trigger condition is valid. This time has always to be shorter than the adjusted measuring time.

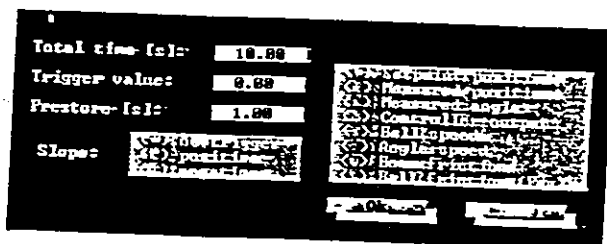


Figure 1.6b: The dialog window 'Start Measure'

The adjustment of the setpoint, **Setpoint Generator**, for the ball position is handled by means of the dialog window shown in figure 1.6c.

As can be seen from the figure, the setpoint is provided by a signal generator. The adjustable parameters are amplitude, offset, period and signal shape. In case the item 'Constant' is selected for the signal shape the corresponding setpoint value is offset + amplitude. The last is true also for periodic signals (rectangl, triangular, ramp, sine) with adjustable amplitude.

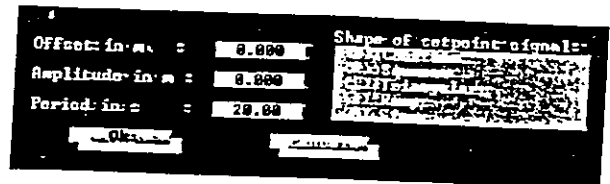


Figure 1.6c: The dialog window 'Setpoint Generator'

1.7 Das Menu VIEW

The pulldown menu **VIEW** contains items to output graphic representations of recorded measurements.

Plot Measured Data: This function opens a dialog to select measurements for a graphic representation. The recently recorded data are displayed (see figure 1.7b).

Plot File Data: This function provides graphic output of recorded data stored in a file. When a file is loaded, a dialog window appears to select measurements data for a graphic representation.

Compare Plot Data: This option provides a comparison of measurements currently recorded with stored measurements. As for the functions mentioned above a dialog window appears to the select measurements for comparison (see figure Bild 1.7c)

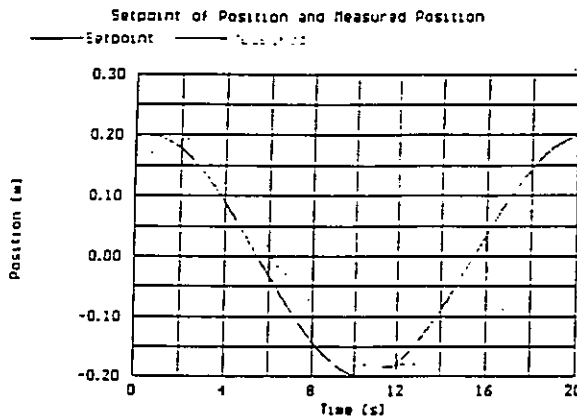


Figure 1.7b: The dialog window 'Plot Measured Data'

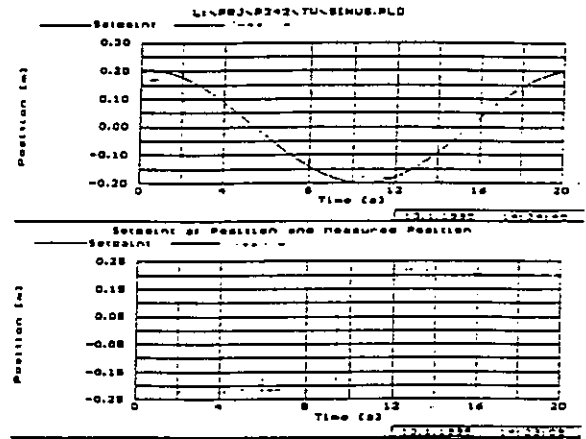


Figure 1.7c: The dialog window 'Compare Plot Data'

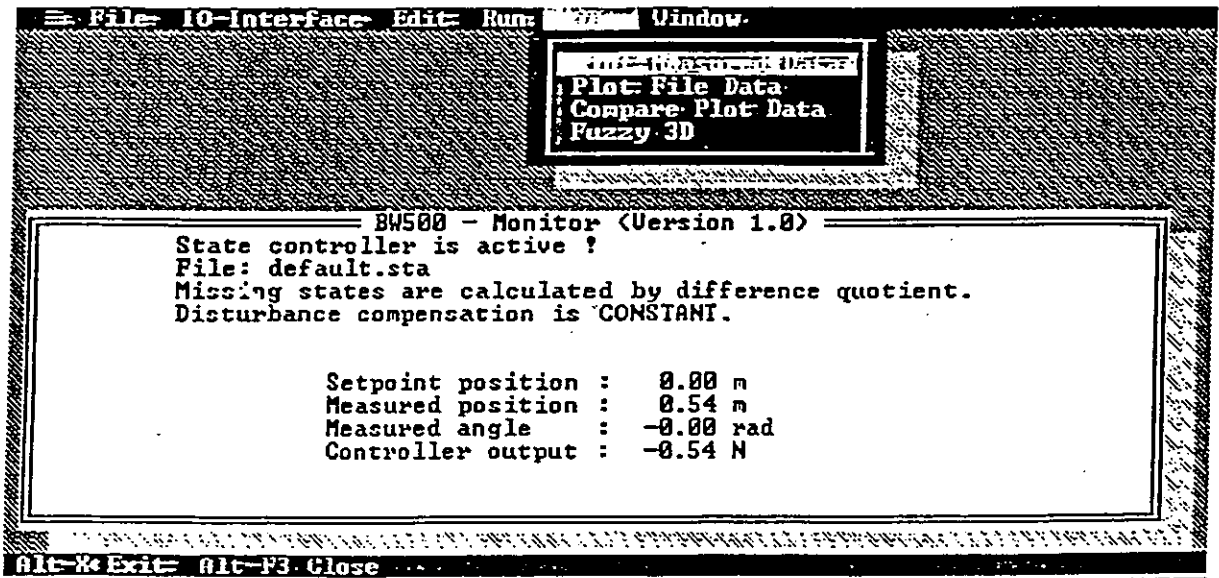


Figure 1.7a: The sub menu VIEW

